ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA OECONOMICA 177, 2004

*Piotr Fiszeder**

# DYNAMICZNA ALOKACJA AKTYWÓW – MODEL MARKOWITZA

**Streszczenie.** Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie dynamicznego podejścia do wyznaczania portfeli efektywnych, wykorzystującego prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu, skonstruowane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Zbadano, czy uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela wpływa na wzrost efektywności procesu alokacji aktywów. Chcąc wyeliminować wpływ wyboru estymatora wartości oczekiwanej stóp zwrotu, wyznaczano portfel o minimalnej wariancji. Uzyskane wyniki zostały porównane z wynikami otrzymanymi na podstawie „tradycyjnych" metod budowy portfeli oraz metod stosowanych przez praktyków rynku finansowego.

**Słowa kluczowe:** budowa portfela, model Markowitza, wielorównaniowe modele GARCH.

## 1. WPROWADZENIE

Podejście do tworzenia portfela, zaproponowane przez Markowitza (1952, 1959), a polegające na wyznaczaniu portfeli efektywnych, czyli takich, które maksymalizują dochód (oczekiwaną stopę zwrotu) przy zadanym ryzyku (odchyleniu standardowym stopy zwrotu) i minimalizują ryzyko przy zadanym dochodzie, jest prawdopodobnie jedną z najbardziej eleganckich i powszechnie akceptowanych koncepcji w teorii finansów. Okazuje się jednakże, że przy wyznaczaniu portfeli efektywnych dużą rolę odgrywa wybór estymatorów wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu oraz ściśle z tym związany wybór metod prognozowania wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Zarówno wśród praktyków rynku finansowego, jak i środowiska akademickiego istnieje konsensus, że stopy zwrotu są trudne do prognozowania, a proces budowy portfela, według kryteriów zaproponowanych przez Markowitza, jest bardzo wrażliwy

*Dr, adiunkt, Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu.

na wybór estymatora wartości oczekiwanej stopy zwrotu (patrz Michaud, 1989; Best i Grauer, 1991; Chopra i Ziemba, 1993). Niewielkie różnice w szacunkach wartości oczekiwanych stóp zwrotu często prowadzą do znaczącej przebudowy portfela (np. Jobson i Korkie, 1980). Uważa się również, że estymacja wariancji i kowariancji stóp zwrotu jest łatwiejsza niż estymacja wartości oczekiwanych (Merton, 1980; Nelson, 1992), jednakże wybór estymatorów wariancji i kowariancji ma również istotny wpływ na alokację aktywów (m. in. Litterman i Winkelmann, 1998; Chan, Karceski i Lakonishok, 1999). Tradycyjnie stosowane estymatory wartości oczekiwanej i wariancji stopy zwrotu, czyli średnia arytmetyczna i wariancja obliczane na podstawie dostępnych danych historycznych, nie dają najlepszych wyników przy wyznaczaniu portfeli efektywnych (np. Jorion, 1991; Sheedy, Trevor i Wood, 1996; Johannes, Polson i Straud, 2000; Flavin i Wickens, 2001).

Celem tego artykułu jest pokazanie dynamicznego podejścia do wyznaczania portfeli efektywnych, wykorzystującego prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu, skonstruowane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Istnieje bardzo obszerna literatura dotycząca zmienności wariancji warunkowej procesów finansowych (np. Bollerslev, Chou i Kroner, 1992; Bollerslev, Engle i Nelson, 1994). W ostatnich kilkunastu latach powstały prace, w których pokazuje się, że zmieniają się nie tylko warunkowe wariancje, ale również warunkowe kowariancje, jak i warunkowe współczynniki korelacji pomiędzy procesami finansowymi (patrz Fiszeder, 2003). Wielorównaniowy proces GARCH pozwala opisać zarówno zmieniające się w czasie warunkowe wariancje, jak i zmieniające się warunkowe kowariancje. Jeżeli wariancje i kowariancje stóp zwrotu nie są stałe w czasie, to prognozy uzyskane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH powinny przynieść dodatkowe korzyści przy wyznaczaniu portfeli efektywnych. W niniejszym artykule zbadano, czy uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela wpływa na wzrost efektywności alokacji aktywów. Przedstawione tutaj podejścia do tworzenia portfela różnią się wyłącznie metodą prognozowania wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Zatem aby wyeliminować wpływ wyboru estymatora wartości oczekiwanej stopy zwrotu na efektywność alokacji aktywów wyznaczano portfel o minimalnej wariancji. Uzyskane wyniki zostały porównane z wynikami otrzymanymi na podstawie „tradycyjnych" metod budowy portfeli oraz metod stosowanych przez praktyków rynku finansowego.

Układ artykułu jest następujący. W części drugiej przedstawiono zastosowaną w badaniu postać wielorównaniowego modelu GARCH – model BEKK. W części trzeciej zaprezentowano sposób konstrukcji portfela papierów wartościowych. Część czwarta zawiera ocenę skuteczności przedstawionego podejścia do wyznaczania portfeli efektywnych na przykładzie indeksów giełdowych, notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. W części piątej zaprezentowano wnioski.

## 2. MODEL BEKK

Kraft i Engle (1983) wprowadzili ogólną postać wielorównaniowego modelu ARCH (zwaną postacią *vech*), która została następnie uogólniona do wielorównaniowego modelu GARCH (Bollerslev, Engle i Wooldridge, 1988). Z uwagi na dużą liczbę parametrów, jakie należy oszacować w tym modelu, formułowanie warunków, przy których macierz kowariancji jest dodatnio określona, a następnie ich weryfikowanie jest bardzo trudne. Z tego względu model w postaci *vech* nie znajduje praktycznie zastosowania w badaniach empirycznych. W ostatnich kilkunastu latach powstało co najmniej kilkanaście innych postaci wielorównaniowego modelu GARCH.

Baba, Engle, Kraft i Kroner (1990) przedstawili następującą postać modelu, nazywaną modelem BEKK($p$, $q$) (por. Engle i Kroner, 1995):

$$H_t = CC' + \sum_{i=1}^{q} D_i \varepsilon_{t-i} \varepsilon'_{t-i} D'_i + \sum_{j=1}^{p} E_j H_{t-j} E'_j \tag{1}$$

gdzie $H_t$ jest symetryczną macierzą warunkowych kowariancji stopnia $N$, $\varepsilon_t$ jest $N$ elementowym wektorem składników losowych, $C$, $D_i$ oraz $E_j$ są macierzami parametrów stopnia $N$. Powyższa postać zapewnia dodatnią określoność macierzy kowariancji $H_t$ oraz pozwala opisać zmieniające się w czasie warunkowe kowariancje badanych indeksów giełdowych. Kolejną zaletą tego modelu jest fakt, że nie nakłada on z góry na parametry krępujących ograniczeń. Model BEKK jest jedną z najczęściej stosowanych w badaniach empirycznych postaci wielorównaniowego modelu GARCH w przypadku analizy kilku szeregów czasowych. Dla $N = 3$ (w niniejszej analizie budowano portfel dla trzech indeksów giełdowych) oraz $p = q = 1$ model BEKK można zapisać w następującej formie:

$$\begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} & h_{13,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} & h_{23,t} \\ h_{31,t} & h_{32,t} & h_{33,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{3,t-1} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{3,t-1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} & h_{13,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} & h_{23,t-1} \\ h_{31,t-1} & h_{32,t-1} & h_{33,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \tag{2}$$

W modelu (2) przyjęto, że $C$ jest macierzą trójkątną.

## 3. DYNAMICZNY PROCES BUDOWY PORTFELA

Proces budowy portfela, według kryteriów zaproponowanych przez Markowitza, jest bardzo wrażliwy na wybór estymatora wartości oczekiwanej stopy zwrotu. Niewielkie różnice w szacunkach wartości oczekiwanych stóp zwrotu często prowadzą do znaczącej przebudowy portfela. Toteż aby wyeliminować wpływ wyboru estymatora wartości oczekiwanej na alokację aktywów, procedura wyznaczania portfela została przedstawiona dla portfela o minimalnej wariancji, jednakże może ona być łatwo uogólniona na wyznaczanie dowolnych portfeli efektywnych poprzez rozszerzenie równań dla średniej.

Dla danego $t$ na podstawie dostępnych danych z okresu $\langle 1, t\rangle$ szacowany jest model VAR-BEKK (w artykule przyjęto model BEKK, jednakże możliwe są również inne postacie wielorównaniowego modelu GARCH). Następnie konstruowane są prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu dla okresu $t+1$. Predyktory dla warunkowych wariancji i kowariancji na jeden okres w przód można zapisać w następującej formie:

$$E_t(H_{t+1}) = CC' + \sum_{i=1}^{q} D_i \varepsilon_{t-i+1}\varepsilon'_{t-i+1} D'_i + \sum_{j=1}^{p} E_j H_{t-j+1} E'_j \tag{3}$$

gdzie $E_t(H_{t+1})$ oznacza w tym przypadku warunkową wartość oczekiwaną dla każdego elementu macierzy $H_{t+1}$.

Wyznaczone prognozy wykorzystuje się następnie do konstrukcji portfela efektywnego. Niech $W'_{t+1} = (w_{1t+1}, w_{2t+1}, ..., w_{nt+1})$, gdzie $w_{it+1}$ oznacza udział $i$-tego aktywu w portfelu dla okresu $t+1$, $V_{t+1} = E_t(H_{t+1})$. Zatem aby wyznaczyć portfel o minimalnej wariancji na okres $t+1$, wystarczy rozwiązać następujące zadanie programowania kwadratowego:

$$W'_{t+1} V_{t+1} W_{t+1} \rightarrow \min \tag{4}$$

przy warunku:

$$W'_{t+1} l = 1 \tag{5}$$

gdzie $l$ jest kolumnowym wektorem o $n$ składowych, przy czym każda z nich równa jest jedności.

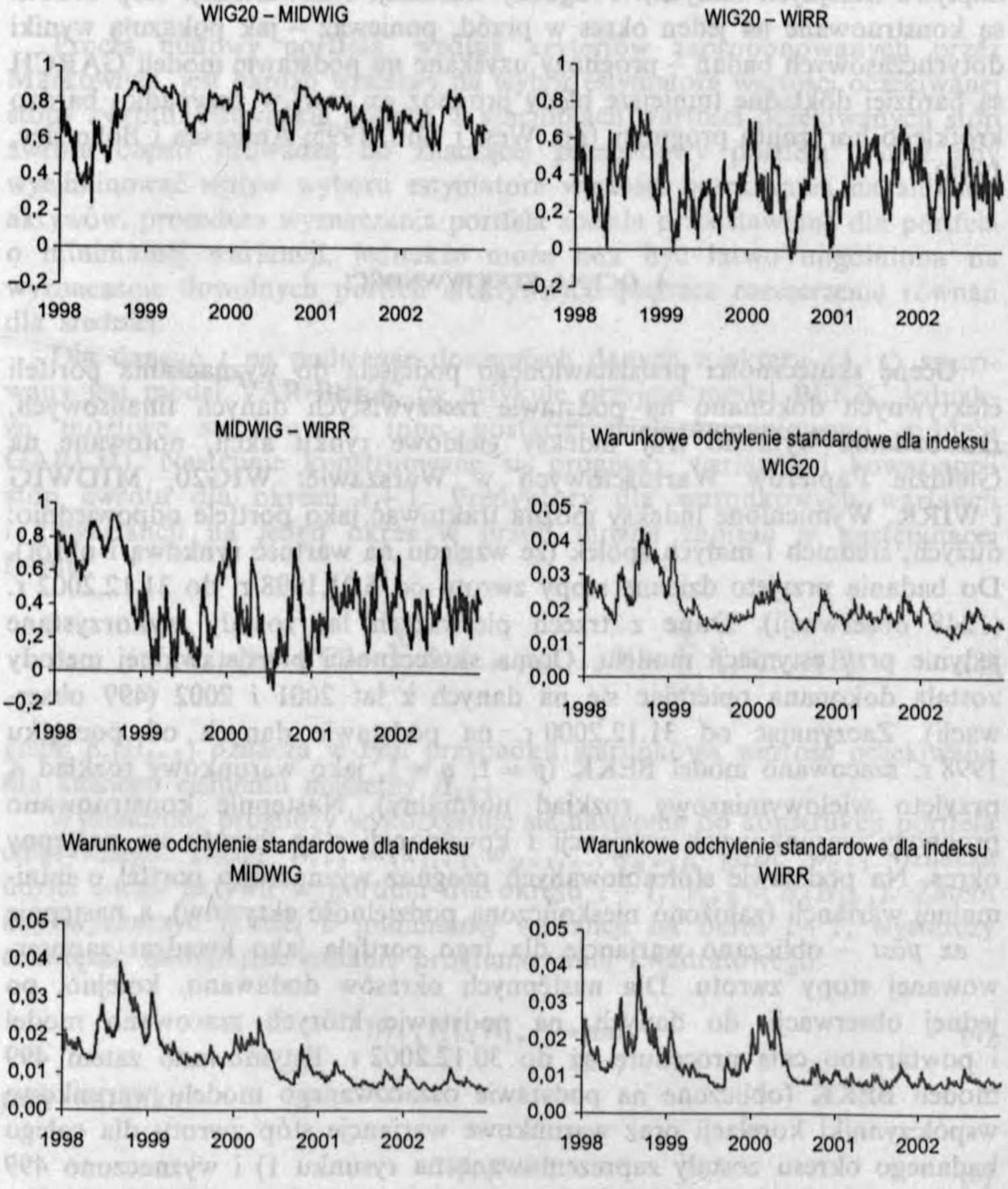
Jeżeli nie występuje krótka sprzedaż, to należy dodatkowo wprowadzić warunki brzegowe:

$$w_{it+1} \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, ..., n \tag{6}$$

Całą procedurę powtarzamy następnie dla kolejnych okresów (w miarę napływu kolejnych danych). Prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu są konstruowane na jeden okres w przód, ponieważ – jak pokazują wyniki dotychczasowych badań – prognozy uzyskane na podstawie modeli GARCH są bardziej dokładne (mniejsze błędy prognoz *ex post*) w przypadku bardzo krótkiego horyzontu prognozy (np. West i Cho, 1995; Andersen i Bollerslev, 1998).

## 4. OCENA EFEKTYWNOŚCI

Ocenę skuteczności przedstawionego podejścia do wyznaczania portfeli efektywnych dokonano na podstawie rzeczywistych danych finansowych. Do badania wybrano trzy indeksy giełdowe rynku akcji, notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie: WIG20, MIDWIG i WIRR. Wymienione indeksy można traktować jako portfele odpowiednio: dużych, średnich i małych spółek (ze względu na wartość rynkową i obrót). Do badania przyjęto dzienne stopy zwrotu od 5.01.1998 r. do 31.12.2002 r. (1248 obserwacji). Dane z trzech pierwszych lat zostały wykorzystane jedynie przy estymacji modelu. Ocena skuteczności przedstawionej metody została dokonana opierając się na danych z lat 2001 i 2002 (499 obserwacji). Zaczynając od 31.12.2000 r. na podstawie danych od początku 1998 r. szacowano model BEKK ($p = 1$, $q = 1$, jako warunkowy rozkład $\varepsilon_t$ przyjęto wielowymiarowy rozkład normalny). Następnie konstruowano prognozy warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu na następny okres. Na podstawie sformułowanych prognoz wyznaczono portfel o minimalnej wariancji (założono nieskończoną podzielność aktywów), a następnie – *ex post* – obliczano wariancję dla tego portfela jako kwadrat zaobserwowanej stopy zwrotu. Dla następnych okresów dodawano, kolejno, po jednej obserwacji, do danych, na podstawie których szacowano model i powtarzano całą procedurę aż do 30.12.2002 r. Estymowano zatem 499 modeli BEKK (obliczone na podstawie oszacowanego modelu warunkowe współczynniki korelacji oraz warunkowe wariancje stóp zwrotu dla całego badanego okresu zostały zaprezentowane na rysunku 1) i wyznaczono 499 portfeli o minimalnej wariancji. Z oszacowanych *ex post* odchyleń standardowych obliczono średnie arytmetyczne dla roku 2001 i 2002. Otrzymane wyniki zostały przedstawione w tab. 1. Portfel, przy budowie którego wykorzystano model BEKK oznaczono jako portfel 1. Szacunki średnich odchyleń standardowych dla roku 2001 i 2002 wynosiły odpowiednio: 0,006711 i 0,006344.




**Rys. 1. Warunkowe współczynniki korelacji pomiędzy stopami zwrotu badanych indeksów giełdowych oraz warunkowe odchylenia standardowe obliczone na podstawie modelu BEKK. Źródło: opracowanie własne**

Tabela 1. Szacunki średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu dla portfeli o minimalnej wariancji

| Rok | Oznaczenia portfeli | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | portfel 1 | portfel 2 | portfel 3 | portfel 4 | portfel 5 |
| 2001 | 0,006711 | 0,009904 | 0,006884 | **0,006600** | 0,006720 |
| 2002 | 0,006344 | 0,008410 | 0,006478 | **0,006322** | 0,006383 |

Uwaga: portfel 1 był konstruowany z wykorzystaniem modeli BEKK, przy budowie portfela 2 przyjęto równe wagi dla trzech indeksów, przy konstrukcji portfela 3 wariancje i kowariancje stóp zwrotu były szacowane na podstawie wszystkich dostępnych w danej chwili obserwacji według formuł (7) i (8), portfel 4 był budowany w oparciu o prognozy wyznaczone na podstawie wariancji i kowariancji ruchomych zgodnie z formułami (9) i (10), przy konstrukcji portfela 5 wykorzystano model wygładzania wykładniczego według formuł (11) i (12).
Źródło: obliczenia własne.

Uzyskane wyniki zostały porównane z wynikami otrzymanymi na podstawie innych metod konstrukcji portfeli, w tym również metod stosowanych przez praktyków rynku finansowego. Budowano cztery portfele. Portfel statyczny (oznaczony jako portfel 2) został skonstruowany w ten sposób, że dla wszystkich okresów przyjęto równe wagi dla trzech indeksów – $w'_{t+1} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Portfel ten służy wyłącznie jako punkt odniesienia. Porównując średnie odchylenia standardowe z pozostałych portfeli ze średnim odchyleniem standardowym tego portfela, można ocenić korzyści wynikające z zastosowania podejścia Markowitza do tworzenia portfela. Pozostałe portfele różniły się jedynie metodą prognozowania wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Przy konstrukcji kolejnego portfela (oznaczonego jako portfel 3) prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu wyznaczano według formuł:

$$\sigma^2_{x,t+1} = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t}(r_{x,i} - \bar{r}_x)^2 \tag{7}$$

$$\sigma_{xy,t+1} = \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t}(r_{x,i} - \bar{r}_x)(r_{y,i} - \bar{r}_y) \tag{8}$$

gdzie $\sigma_{x,t+1}$ i $\sigma^2_{xy,t+1}$ oznaczają odpowiednio prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu dla okresu $t+1$, $r_{x,i}$ jest to stopa zwrotu indeksu $x$ dla okresu $\langle i-1, i\rangle$, $\bar{r} = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} r_i$.

Gdyby wariancje i kowariancje stóp zwrotu były stałe w czasie, to przy ich estymacji na podstawie wszystkich dostępnych w danej chwili obserwacji popełniono by najmniejsze błędy szacunku. Następnie budowano portfel o minimalnej wariancji. Szacunki średnich odchyleń standardowych dla powyższych portfeli zostały przedstawione w tabeli 1. Zastosowanie podejścia Markowitza do tworzenia portfela (portfel 3) spowodowało zmniejszenie średniego odchylenia standardowego portfela o 30,5% i 23% w stosunku do portfela, przy konstrukcji którego przyjęto równe wagi dla trzech indeksów (portfel 2). Jeszcze lepsze wyniki dał portfel, przy budowie którego wykorzystano model BEKK.

Przy konstrukcji pozostałych portfeli zastosowano metody prognozowania wariancji i kowariancji stóp zwrotu, stosowane w największych bankach inwestycyjnych (np. J. P. Morgan, Goldman Sachs). Praktycy rynku finansowego już dawno zauważyli, że nowsze dane zawierają bardziej aktualne informacje o procesach finansowych, dlatego bardzo często posługują się metodami średniej ruchomej i wygładzania wykładniczego (np. Zangari, 1996; Litterman i Winkelmann, 1998). Używając modeli średniej ruchomej do prognozowania, przyjmuje się, że wartość zmiennej prognozowanej w następnym okresie będzie równa średniej arytmetycznej z $k$ ostatnich wartości tej zmiennej. W analogiczny sposób można prognozować wariancje i kowariancje stóp zwrotu:

$$\sigma^2_{x,t+1} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=t-k+1}^{t} (r_{x,i} - \bar{r}_x)^2 \tag{9}$$

$$\sigma_{xy,t+1} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=t-k+1}^{t} (r_{x,i} - \bar{r}_x)(r_{y,i} - \bar{r}_y) \tag{10}$$

Formuły (9) i (10) nazywano dalej modelami wariancji i kowariancji ruchomych. Liczba obserwacji ($k$) na podstawie których szacuje się średnią, wariancję i kowariancję, jest nazywana stałą wygładzania. Wraz ze wzrostem wartości stałej wygładzania rośnie efekt wyrównywania. Średnia ruchoma, wyznaczona z większej liczby wyrazów, będzie silniej wygładzała szereg, lecz jednocześnie będzie wolniej reagowała na zmiany poziomu prognozowanej zmiennej. Wyznaczona z mniejszej liczby wyrazów będzie szybciej odzwierciedlała aktualne zmiany zachodzące w wartościach prognozowanej zmiennej, lecz większy wpływ będą wywierały na nią wahania przypadkowe. Te same zasady odnoszą się, analogicznie, do wariancji i kowariancji ruchomych. Wartość stałej wygładzania wyznacza się zwykle eksperymentalnie – konstruując na podstawie próbki wstępnej prognozy dla różnych wartości $k$ i wybierając tę wartość, dla której średni kwadratowy błąd prognoz wygasłych był najmniejszy. Praktycy rynku finansowego przyjmują na ogół jedną wartość stałej wygładzania dla całego rynku na podstawie wcześniejszych analiz. W niniejszym badaniu przyjęto wartości stałej wygładzania od 5 do 120. Dla każdego okresu (od 2.01.2001 r. do 31.12.2002 r.) konstruowano prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu na podstawie formuł (9) i (10), a następnie budowano portfel o minimalnej wariancji (wyznaczony w ten sposób portfel oznaczono jako portfel 4). Wyboru stałej wygładzania dokonywano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Wybierano tę wartość, dla której średnie odchylenie standardowe stóp zwrotu wyznaczonych portfeli o minimalnej wariancji było najmniejsze w próbce wstępnej. Szacunki średnich odchyleń standardowych dla tak skonstruowanych portfeli dla roku 2001 i 2002 zostały przedstawione w tabeli 1. Szacunki średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu dla portfeli konstruowanych w oparciu o prognozy wyznaczone na podstawie wariancji i kowariancji ruchomych są mniejsze od szacunków średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu dla portfeli konstruowanych w oparciu o prognozy wyliczone na podstawie modeli BEKK.

Przy konstrukcji prognozy na podstawie modeli średniej ruchomej dla okresu $t+1$ uwzględnia się jedynie $k$ ostatnich wartości zmiennej prognozowanej. Nie uwzględnia się obserwacji pochodzących z okresów wcześniejszych od $t-k+1$, które także dostarczają pewnych informacji dotyczących kształtowania się wartości zmiennej prognozowanej w przeszłości. Tej wady nie posiada model wygładzania wykładniczego. Prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu, budowane na podstawie modelu wygładzania wykładniczego, wyznacza się według formuł:

$$\sigma^2_{x,t+1} = (1-\alpha)r^2_{x,t} + \alpha\sigma^2_{x,t} \tag{11}$$

$$\sigma_{xy,t+1} = (1-\alpha)r_{x,t}r_{y,t} + \alpha\sigma_{xy,t} \tag{12}$$

Parametr $\alpha$ jest nazywany parametrem wygasania (*decay factor*) i przyjmuje wartości z przedziału (0, 1). Jego wybór zależy od charakteru prognozowanego procesu stóp zwrotu. Jeżeli nie ma częstych i znacznych zmian „trendu w wariancji i kowariancji", to większą wagę trzeba przywiązywać do prognoz w poprzednim okresie (parametr $\alpha$ bliski jedności). Wartość parametru wygasania wyznacza się zwykle eksperymentalnie – konstruując na podstawie próbki wstępnej prognozy dla różnych wartości $\alpha$ i wybierając tę wartość, dla której średni kwadratowy błąd prognoz wygasłych był najmniejszy. W niniejszym badaniu przyjęto następujące wartości parametru wygasania: 0,01; 0,02; ..., 0,99. Dla każdego okresu (od 2.01.2001 r. do 31.12.2002 r.) konstruowano prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu na podstawie formuł (11) i (12), a następnie budowano portfel o minimalnej wariancji (wyznaczony w ten sposób portfel oznaczono jako portfel 5). Wyboru parametru wygasania, podobnie jak w przypadku wyboru stałej wygładzania, dokonano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Wybierano tę wartość, dla której średnie odchylenie standardowe stóp zwrotu wyznaczonych portfeli o minimalnej wariancji było najmniejsze w próbce wstępnej. Szacunki średnich odchyleń standardowych dla tak skonstruowanych portfeli dla roku 2001 i 2002 zostały przedstawione w tabeli 1. Szacunki średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu dla portfeli, przy konstrukcji których wykorzystano model wygładzania wykładniczego, są nieznacznie większe od szacunków średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu dla portfeli budowanych w oparciu o prognozy wyliczone na podstawie modeli BEKK. Uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela (model BEKK, wariancje i kowariancje ruchome oraz model wyrównywania wykładniczego) wpływa na wzrost efektywności procesu alokacji aktywów. Mniejsze szacunki średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu dla portfeli konstruowanych w oparciu o prognozy wyznaczone na podstawie wariancji i kowariancji ruchomych w stosunku do portfeli budowanych z zastosowaniem modelu wygładzania wykładniczego należy uznać za zaskakujące w świetle wyników badań praktyków rynku finansowego (Zangari, 1996; Litterman i Winkelman, 1998). Tak dobry wynik modeli wariancji i kowariancji ruchomych wynika z zaproponowanego sposobu wyboru stałej wygładzania. Należy podkreślić, że taki sposób wyznaczania stałej wygładzania jest czasochłonny i porównywalny z czasem estymacji modeli GARCH.

Tabela 2. Szacunki średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu dla portfeli o minimalnej wariancji konstruowanych w oparciu o prognozy wyznaczone na podstawie modeli wariancji i kowariancji ruchomych

| Wartość stałej wygładzania | 2001 | 2002 |
|---|---|---|
| 10 | 0,006809 | 0,006734 |
| 20 | 0,006655 | 0,006627 |
| 30 | 0,006655 | 0,006529 |
| 40 | 0,006702 | 0,006409 |
| 50 | 0,006780 | 0,006378 |
| 60 | 0,006845 | 0,006319 |
| 70 | 0,006899 | 0,006351 |
| 80 | 0,006859 | 0,006347 |
| 90 | 0,006825 | 0,006361 |
| 100 | 0,006784 | 0,006350 |
| 110 | 0,006733 | 0,006334 |
| 120 | 0,006723 | 0,006320 |
| Zmienna | 0,006600 | 0,006322 |

Uwaga: Zmienna wartość była wyznaczana według zaproponowanego sposobu wyboru stałej wygładzania.

Źródło: obliczenia własne.

Przyjęcie jednej wartości stałej wygładzania dla całego okresu może doprowadzić do znacznego wzrostu wariancji skonstruowanego portfela, na co wskazują dane zamieszczone w tabeli 2. Dla większości spośród przyjmowanych powszechnie wartości stałych wygładzania otrzymano szacunki średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu portfeli większe niż w przypadku portfela, przy budowie którego wykorzystano model BEKK.

## 5. ZAKOŃCZENIE

Przy wyznaczaniu portfeli efektywnych dużą rolę odgrywa wybór estymatorów wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu oraz ściśle z tym związany wybór metod prognozowania wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu. W niniejszym artykule przedstawiono dynamiczne podejście do wyznaczania portfeli efektywnych, wykorzystujące prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu, skonstruowane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Następnie dokonano oceny skuteczności przedstawionego podejścia do wyznaczania portfeli efektywnych na przykładzie indeksów giełdowych notowanych na GPW w Warszawie. Uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela (model BEKK, wariancje i kowariancje ruchome oraz model wyrównywania wykładniczego) wpływa na wzrost efektywności alokacji aktywów. Najmniejsze szacunki odchyleń standardowych stóp zwrotu otrzymano w przypadku portfeli konstruowanych z wykorzystaniem prognoz wyznaczonych na podstawie wariancji i kowariancji ruchomych. Tak dobry wynik modeli wariancji i kowariancji ruchomych wynika z zaproponowanego sposobu wyboru stałej wygładzania. Wybierano tę wartość stałej wygładzania, dla której średnie odchylenie standardowe stóp zwrotu wyznaczonych portfeli było najmniejsze w próbce wstępnej. Jeżeli stała wygładzania jest wybierana spośród powszechnie przyjmowanych wartości, to najczęściej najmniejsze szacunki odchyleń standardowych stóp zwrotu otrzymano w przypadku portfeli, przy budowie których wykorzystano model BEKK.

## LITERATURA


Andersen T., Bollerslev T. (1998), *Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts*, „International Economic Review", 39 (4).

Baba Y., Engle R.F., Kraft D.F., Kroner K.F. (1990), *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*, Department of Economics, University of California at San Diego.

Best M.J., Grauer R.R. (1991), *On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results*, „Review of Financial Studies", 4..

Bollerslev T., Chou R. Y., Kroner K.F. (1992), *ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence*, „Journal of Econometrics", 52.

Bollerslev T., Engle R.F., Nelson D.B. (1994), *ARCH Models*; [w:] Engle R.F., McFadden D., (eds), *Handbook of Econometrics*, 4, Elsevier Science B. V., Amsterdam.

Bollerslev T., Engle, R.F., Wooldridge, J.M. (1988), *A Capital Asset Pricing Model with Time – Varying Covariances*, „Journal of Political Economy", 96.

Chan L.K.C., Karceski J., Lakonishok J. (1999), *On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model*, „The Review of Financial Studies", 12.

Chopra V.K., Ziemba W.T. (1993), *The Effect of Errors in Means, Variances and Covariances on Optimal Portfolio Choice*, „Journal of Portfolio Management", 19.

Engle R.F., Kroner K.F. (1995), *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*, „Econometric Theory", 11.

Fiszeder P. (2003), *Testy stałości współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH – analiza korelacji między indeksami giełdowymi: WIG, DJIA i Nasdaq Composite*, „Przegląd Statystyczny", 50 (2).

Flavin T.J., Wickens M.R. (2001), *Optimal International Asset Allocation with Time-Varying Risk*, „Working Paper".

Jobson J.D., Korkie B. (1980), *Estimation for Markowitz Efficient Portfolios*, „Journal of American Statistical Association", 75.

Johannes M., Polson N., Stroud J. (2000), *Sequential Optimal Portfolio Performance: Market and Volatility Timing*, „Working Paper".

Jorion P. (1991), *Bayesian and CAPM Estimators of the Means: Implications for Portfolio Selection*, „Journal of Banking and Finance", 15.

Kraft D.F., Engle R.F. (1983), *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity in Multiple Time Series*, Department of Economics, UCSD.

Litterman R., Winkelmann K. (1998), *Estimating Covariance Matrices*, Risk Management Series, Goldman Sachs.

Markowitz H.M. (1952), *Portfolio Selection*, „Journal of Finance", 7.

Markowitz H.M. (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Yale University Press, New Haven.

Merton R.C. (1980), *On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation*, „Journal of Financial Economics", 8.

Michaud R.O. (1989), *The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?*, „Financial Analysts Journal", 45.

Nelson D.B. (1992), *Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models I. Getting the Right Variance with the Wrong Model*, „Journal of Econometrics", 52.

Sheedy E., Trevor R., Wood J. (1996), *Asset Allocation Decisions in a World with Changing Risk*, „CMBF Paper", 15, Macquarie University.

West K.D., Cho D. (1995), *The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility*, „Journal of Econometrics", 69.

Zangari P. (1996), *RiskMetrics – Technical Documents*, J. P. Morgan, New York.

*Piotr Fiszeder*

## DYNAMIC ASSET ALLOCATION – MARKOWITZ MODEL

**Summary**

The purpose of this paper is to present dynamic approach to selection of efficient portfolios using a multivariate GARCH model. The paper examines if taking into consideration time varying variances and covariances of stock returns in portfolio selection increases efficiency of asset allocation process. In order to eliminate influence of selection of expected returns estimator, the minimum variance portfolio is constructed. The results are compared with "traditional" methods of portfolio selection and methods used by practitioners of financial markets.