

Wojciech Kawecki

WYNIKANIE SEMANTYCZNE W RACHUNKU KWANTYFIKATORÓW

1. WSTĘP

Celem pracy jest zwięźle przedstawienie pewnej semantycznej metody formalizacji wynikania logicznego na gruncie rachunku kwantyfikatorów. Metoda ta, pochodząca od E. W. Betha¹, jest bardzo wygodnym narzędziem pozwalającym w dużej ilości przypadków obalić wynikanie, bądź też je uzasadnić, przez znalezienie kontrmodelu lub wykazanie, że kontrmodelu brak.

Praca niniejsza dokonuje pewnej systematyzacji problemu wynikania semantycznego. Przypomnimy pewne ważne pojęcia semantyczne w rachunku kwantyfikatorów. Następnie zostaną przytoczone reguły rozkładu diagramów semantycznych. Omówione będzie także zagadnienie powiązania rozkładów formuł z tzw. drzewami. W dalszych rozważaniach zostaną przedstawione typy rozkładów zamkniętych formuł rachunku kwantyfikatorów. Część końcowa pracy zawiera reprezentatywne przykłady dla wyróżnionych typów rozkładów, ponadto każdy przykład jest zilustrowany graficznie przez odpowiadające mu drzewo. Zagadnienie wynikania semantycznego i wynikania formalnego w rachunku kwantyfikatorów było rozpatrywane między innymi przez Z. Lisa².

¹ E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, cz. III, rozdz. 8, Amsterdam 1965. Zob. także: tenże, *Semantic Entailment and Formal Derivability*, "Medodelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen" 1955, Afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, Deel 18, nr 13.

² Z. Lis, *Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne*, "Studia Logica" 1960, t. X.

2. POJĘCIA SEMANTYCZNE. WYNIKANIE SEMANTYCZNE

Poniżej przypomnimy pewne, dobrze znane pojęcia semantyczne. Nasze uzgodnienia terminologiczne są zgodne z terminologią używaną przez A. Grzegorzycę³, a także przez R. C. Lyndona⁴.

Interpretacją I w języku kwantyfikatorów nazywamy dowolny niepusty zbiór indywiduów $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ oraz funkcję σ przyporządkowującą każdej n -argumentowej zmiennej predykatywnej P n -argumentową relację $R = \sigma(P)$, określoną w dziedzinie A . $| \frac{I}{V} \varphi \equiv \varphi$ jest spełnione w interpretacji I przy wartościowaniu v . Dobrze znaną, pełną indukcyjną definicję spełniania można znaleźć u Grzegorzycy. Niech H oznacza klasę wszystkich wartościowań zbioru zmiennych indywiduowych V w zbiór A , tzn. $H = \{v; v: V \rightarrow A\}$. Formułę nazywamy spełnioną w interpretacji I wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniona przy dowolnym wartościowaniu v z H , tzn.

$$| \frac{I}{V} \varphi \equiv \bigwedge_{v \in H} | \frac{I}{V} \varphi.$$

Interpretację, w której dana formuła jest spełniona nazywamy jej modelem. $| \varphi \equiv \varphi$, co czytamy: jest tautologią rachunku kwantyfikatorów $\equiv \bigwedge_I \bigwedge_{v \in H} | \frac{I}{V} \varphi$.

Niech U, W będą dowolnymi formułami. Pojęcie wynika semantycznego można zdefiniować na trzy sposoby:

- a) $U | \frac{I}{1} W \equiv \bigwedge_I \bigwedge_{v \in H} (| \frac{I}{V} U \rightarrow | \frac{I}{V} W);$
- b) $U | \frac{I}{2} W \equiv \bigwedge_I (\bigwedge_{v \in H} | \frac{I}{V} U \rightarrow \bigwedge_{v \in H} | \frac{I}{V} W);$
- c) $U | \frac{I}{3} W \equiv \bigwedge_I \bigwedge_{v \in H} | \frac{I}{V} U \rightarrow \bigwedge_I \bigwedge_{v \in H} | \frac{I}{V} W,$

("U | W" czytamy "z U wynika semantycznie W").

Łatwo zauważyć, że jeżeli dla dowolnych formuł U, W $U | \frac{I}{1} W$, to również $U | \frac{I}{2} W$ i dalej też $U | \frac{I}{3} W$.

Metoda Betha, którą mamy omówić, dotyczy pojęcia wynikania semantycznego, tak jak jest ono rozumiane w pkt. a, ograniczone-

³ A. Grzegorzycę, *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa 1975.

⁴ R. C. Lyndon, *O logice matematycznej*, Warszawa 1978.

go do formuł zamkniętych (zdań). Z d a n i e m w rachunku kwantyfikatorów nazywamy formułę, w której wszystkie zmienne są związane. Definicję w pkt. a można uogólnić następująco:

Niech $U_1, \dots, U_n$ oraz W są zdaniami.

$$U_1, \dots, U_n \models W \equiv U_1 \wedge \dots \wedge U_n \models W.$$

Zauważmy, że rozpatrując wynikanie semantyczne $U_1, \dots, U_n \models W$, odpowiedź pozytywna prowadzi do wykazania, że w każdym modelu, jeśli $U_1, \dots, U_n$ są spełnione, to i W jest spełnione; łatwiej więc jest wykazać rezultat negatywny, tzn. pokazać istnienie takiego modelu $\mathcal{M}$, w którym $U_1, \dots, U_n$ byłyby spełnione, zaś zdanie W nie spełnione.

3. REGUŁY ROZKŁADU DIAGRAMÓW SEMANTYCZNYCH

Metoda diagramów semantycznych pozwala na przekształcanie formuł wyjściowych $(U_1, \dots, U_n, \neg W)$ przy pomocy reguł przypominających reguły dedukcji naturalnej. Poniżej przedstawiamy za Bethem r e g u ł y rozkładu diagramów semantycznych:

- I) jeśli $\neg N. \alpha$ to $\neg N. \alpha$;
- IIa) jeśli $+N. \alpha \wedge \beta$ to $+N1. \alpha, +N2. \beta$;
- b) jeśli $-N. \alpha \vee \beta$ to $-N1. \alpha, -N2. \beta$;
- c) jeśli $-N. \alpha \rightarrow \beta$ to $+N1. \alpha, -N2. \beta$;

III) w tym przypadku wypisywanie formuł rozgałęzia się, co zaznaczymy pionową kreską:

- a) jeśli $\frac{-N. \alpha \wedge \beta}{-N1. \alpha \mid -N2. \beta}$;
- b) jeśli $\frac{+N. \alpha \vee \beta}{+N1. \alpha \mid +N2. \beta}$;
- c) jeśli $\frac{+N. \alpha \rightarrow \beta}{-N1. \alpha \mid +N2. \beta}$;

"+" oznacza "prawdą jest, że...";

"-" oznacza "fałszem jest, że...";

N - oznacza numer formuły, przy czym formuły wyjściowe numeruje się 1, 2, ..., n odpowiednio ze znakiem + lub -

Niech $a_1, \dots, a_k, \dots$ będą stałymi indywiduowymi nie występującymi w wyrażeniach stanowiących punkt wyjścia. Wówczas:

IVa) jeśli $+N.\bigvee_x \alpha(x)$ to $+NO.\alpha(a_j)$;

b) jeśli $-N.\bigwedge_x \alpha(x)$ to $-NO.\alpha(a_j)$;

gdzie j jest najmniejszą liczbą naturalną wśród wskaźników tych symboli a_k , które nie zostały jeszcze użyte:

Va) jeśli $+N.\bigwedge_x \alpha(x)$ to $+Ni.\alpha(a_1)$;

b) jeśli $-N.\bigvee_x \alpha(x)$ to $-Ni.\alpha(a_1)$;

gdzie i jest wskaźnikiem tych symboli a_k , które już zostały lub będą użyte; a więc jeśli wprowadzimy nowe stałe, to powtarzamy dla nich regułę V (jeśli w wyrażeniach wyjściowych występowały stałe, to regułę V powtarzamy dla każdej z nich).

4. POWIĄZANIE ROZKŁADÓW Z DRZEWAMI.

TYPY ROZKŁADÓW SEMANTYCZNYCH

Rozkład semantyczny przy użyciu reguł Betha bardzo często rozgałęzia się i może być graficznie przedstawiony przy pomocy tzw. drzew. Co więcej, w pewnych przypadkach (większości rozkładów nieskończonych) wykorzystuje się pewne ogólne twierdzenia teorii drzew (takie jak twierdzenie Königa).

Drzewem nazywamy klasę T węzłów (punktów), na których zdefiniowana jest binarna relacja bezpośredniego następnika R , ponadto wyróżniony jest jeden węzeł zwany "początkiem" (ozn. O) oraz każdemu węzłowi przyporządkowana jest liczba naturalna zwana rzędem, spełniająca następujące warunki:

a) rząd węzła O jest równy 1,

b) węzły rzędu k spełniające relację R , przystają do dokładnie jednego węzła rzędu $k - 1$.

Symbolicznie drzewo możemy przedstawić jako trójkę $\langle T, R, O \rangle$.

Drzewo jest skończone gałęziowe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalnej k istnieje co najwyżej skończona ilość węzłów rzędu k .

Sekwens $\langle n_1, \dots, n_k \rangle$ jest gałęzią drzewa $\langle T, R, O \rangle$, o ile

a) $n_1 = O$,

b) $n_1 R n_{i-1}$, dla $i = 2, 3, \dots$.

c) jeśli istnieje jakieś x takie, że $x R n_1$, to sekwens posiada $i + 1$ -wy element.

Następujące dwa twierdzenia podamy bez dowodu.

Lemat Königa. Jeśli skończenie gałęziowalne drzewo ma nieskończenie wiele węzłów, to wówczas musi posiadać nieskończoną gałąź.

Dowód tego lematu podaje E. W. Beth⁵.

Twierdzenie Königa. Niech dany będzie dowolny ciąg zbiorów nierozłącznych $A_1, A_2, \dots$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla każdego $i, j \in \mathbb{N}$ oraz $i \neq j$. Ponadto pomiędzy elementami dowolnych zbiorów A_{k-1} oraz A_k określona jest relacja R .

Jeśli istnieje taki element $x_{k-1} \in A_{k-1}$, że $x_{k-1} R x_k$ dla każdego $x_k \in A_k$, to wówczas istnieje ciąg elementów $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$, gdzie $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n, \dots$, taki, że $a_1 R a_2, \dots, a_{n-1} R a_n, \dots$

Drzewo obrazujące rozkład diagramów semantycznych Beth buduje w następujący sposób. Każda formuła występująca w rozkładzie odpowiada dokładnie jednemu węzłowi na drzewie, zgodnie z kolejnością występowania. Jeśli reguły rozkładu prowadzą do rozwidlenia (wtedy ostatnimi cyframi indeksu równoległych formuł będzie odpowiednio 1 i 2), to w drzewie pojawiają się dwie gałęzie. W przypadku, gdy rozkład obejmuje nieskończenie wiele formuł, wtedy odpowiadające mu drzewo zawiera nieskończenie wiele węzłów, co, na podstawie lematu Königa, pozwala nam wnioskować, że istnieje przynajmniej jedna nieskończona gałąź.

Pytanie, czy zachodzi $U_1, \dots, U_n \models W$, prowadzi do szukania kontrmodelu dla $U_1, \dots, U_n \models W$ - inaczej mówiąc modelu dla zbioru $\{U_1, \dots, U_n, \neg W\}$.

Najogólniej rzecz biorąc, możemy otrzymać następujące typy rozkładów semantycznych:

Typ 1. Rozkład jest zamknięty, tzn. każda gałąź rozkładu zamyka się przez sprzeczność (pojawiają się w gałęzi formuły P i $\neg P$). Mówimy wówczas o wynikaniu semantycznym $U_1, \dots, U_n \models W$.

Typ 2. Rozkład nie jest zamknięty, ale postępowanie wedle reguł rozkładu jest zakończone - łatwo zbudować wtedy właściwy

⁵ Beth, *The Foundations...*, s. 195.

kontrmodel biorąc pod uwagę jakąś nie zamkniętą gałąź. Oczywiście nie zachodzi $U_1, \dots, U_n \models W$.

Typ 3. Rozkład jest nieskończoną kontynuacją, ale istnieje przynajmniej jedna gałąź nieskończona, na której w oparciu o twierdzenie Königa, możemy zbudować kontrmodel obalający wywnioskowanie semantyczne $U_1, \dots, U_n \models W$.

Okazuje się, że metoda Betha nie jest metodą rozstrzygalną dla rachunku kwantyfikatorów, jest ona metodą częściową, ograniczoną tylko do formuł zamkniętych.

5. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA REGUŁ ROZKŁADU

Poniżej przedstawimy przykłady zastosowania reguł rozkładu. Kolejne przykłady odpowiadają wyróżnionym typom. Każdy przykład będzie zobrazowany przez odpowiadające mu drzewo. Konstrukcja drzewa pozwala nam na jaśniejsze odczytanie sensu rozkładu dowolnych formuł metodą Betha. Łatwo spostrzegamy sposób budowania kontrmodelu w oparciu o odpowiednią gałąź.

Konstrukcje rozkładu zaczynamy od wypisania formuł-przesłanek oraz zanegowanej formuły-wniosku. Następnie korzystając z reguł rozkładu, wypisujemy kolejne wiersze aż do otrzymania formuł atomowych w przypadku skończonym; w przeciwnym przypadku postępowanie kończymy w jakimś miejscu zauważając pewną prawidłowość w nieskończonej kontynuacji.

Pokażmy najpierw trzy przykłady odpowiadające typowi 1.

Przykład 1.1:

$$\bigwedge_x (A(x) \rightarrow B(x)) \models \bigwedge_y A(y) \rightarrow \bigwedge_z B(z)$$

$$+1. \bigwedge_x (A(x) \rightarrow B(x))$$

$$-2. \bigwedge_y (A(y) \rightarrow \bigwedge_z B(z))$$

$$11. A(a_1) \rightarrow B(a_1)$$

$$\underline{-111. A(a_1) \quad | +112. B(a_1)}$$

$$+21. \bigwedge_y A(y)$$

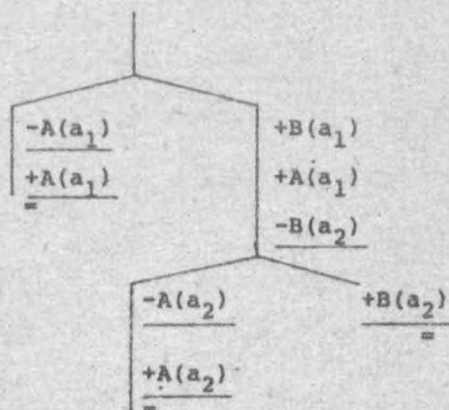
$$-22. \bigwedge_z B(z)$$

$$+211. A(a_1)$$

$$\begin{aligned}
 & -220. B(a_2) \\
 & +12. A(a_2) \rightarrow B(a_2) \\
 & -121. A(a_2) \mid +122. B(a_2) = \\
 & +212. A(a_2) \mid \\
 & =
 \end{aligned}$$

Symbolem "=" oznaczamy fakt zamknięcia się danej gałęzi. Zachodzi więc wynikanie semantyczne.

Przedstawione na rys. 1.1 drzewo odpowiada powyższemu rozkładowi. Dla prostoty, na rysunku drzewa będziemy zaznaczać jedynie węzły opisane przez formuły atomowe podkreślając formuły sprzeczne w danej gałęzi.



Rys. 1.1

Przykład 1.2:

$$\bigwedge_x \bigwedge_y (P(x) \rightarrow Q(y)) \mid = \bigvee_z P(z) \rightarrow \bigwedge_t Q(t)$$

$$+1. \bigwedge_x \bigwedge_y (P(x) \rightarrow Q(y))$$

$$-2. \bigvee_z P(z) \rightarrow \bigwedge_t Q(t)$$

$$+11. \bigwedge_y (P(a_1) \rightarrow Q(y))$$

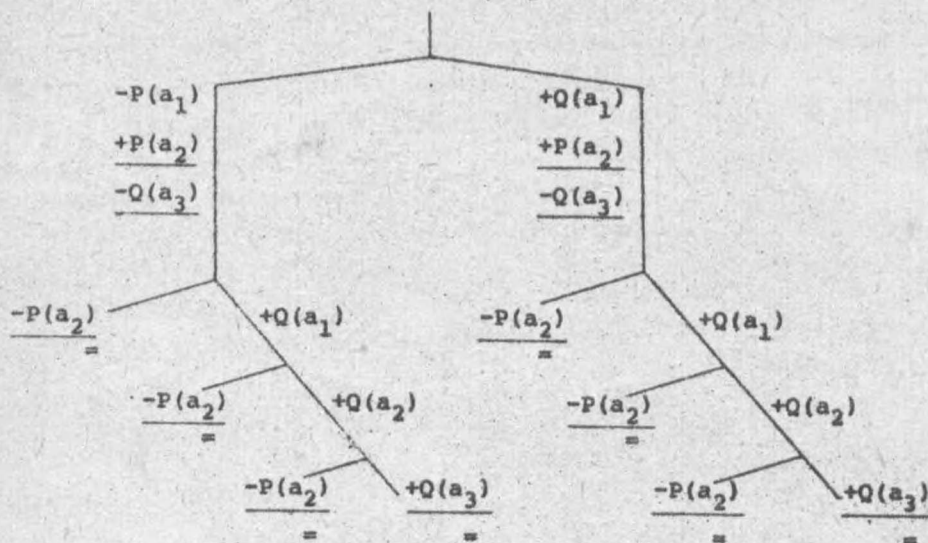
$$+111. P(a_1) \rightarrow Q(a_1)$$

$$-1111. P(a_1) \mid +1112. Q(a_1)$$

$$+21. \bigvee_z P(z)$$

- 22. $\bigwedge_t Q(t)$
- +210. $P(a_2)$
- 220. $Q(a_3)$
- +12. $\bigwedge_y (P(a_2) \rightarrow Q(y))$
- +121. $P(a_2) \rightarrow Q(a_1)$
- +122. $P(a_2) \rightarrow Q(a_2)$
- +123. $P(a_2) \rightarrow Q(a_3)$
- 1211. $P(a_2) \mid +1212. Q(a_1)$
- 1221. $P(a_2) \mid +1222. Q(a_2)$
- 1231. $P(a_2) \mid +1232. Q(a_3)$

Zbudujemy drzewo będące obrazem tego rozkładu.



Rys. 1.2

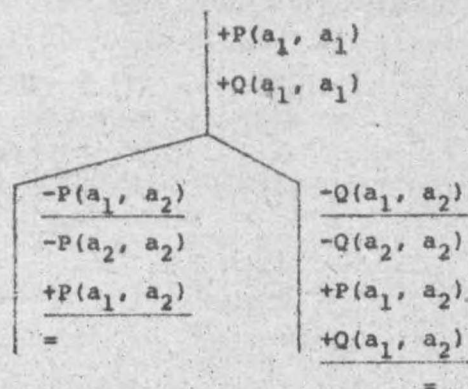
Oczywiście zachodzi wynikanie semantyczne.

Przykład 1.3:

$$\bigvee_x \bigwedge_y (P(x, y) \wedge Q(x, y)) \models \bigwedge_y \bigvee_x P(x, y) \wedge \bigwedge_y \bigvee_x Q(x, y)$$

$$\begin{array}{ll}
+1. \quad \forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x, y)) & \\
-2. \quad \exists y \forall x P(x, y) \wedge \exists y \forall x Q(x, y) & \\
+10. \quad \exists y (P(a_1, y) \wedge Q(a_1, y)) & \\
+101. \quad P(a_1, a_1) \wedge Q(a_1, a_1) & \\
+1011. \quad P(a_1, a_1) & \\
+1012. \quad Q(a_1, a_1) & \\
-21. \quad \exists y \forall x P(x, y) & \quad -22. \quad \exists y \forall x Q(x, y) \\
-210. \quad \forall x P(x, a_2) & \quad -220. \quad \forall x Q(x, a_2) \\
-2101. \quad P(a_1, a_2) & \quad -2201. \quad Q(a_1, a_2) \\
-2102. \quad P(a_2, a_2) & \quad -2202. \quad Q(a_2, a_2) \\
\hline
+102. \quad P(a_1, a_2) \wedge Q(a_1, a_2) & \\
+1021. \quad P(a_1, a_2) & \\
+1022. \quad Q(a_1, a_2) & \\
= &
\end{array}$$

Łatwo zauważyć, że zachodzi wynikanie semantyczne. Obraz graficzny tego rozkładu przedstawia drzewo na rys. 1.3.



Rys. 1.3

Przejdźmy do przykładów właściwych typowi 2. Dla przykładów tych będziemy budować odpowiednie kontrmodele.

Przykład 2.1:

$$\bigwedge_x (P(x) \vee Q(x)) \not\models \bigwedge_x P(x) \vee \bigwedge_x Q(x)$$

$$+1. \bigwedge_x (P(x) \vee Q(x))$$

$$-2. \bigwedge_x P(x) \vee \bigwedge_x Q(x)$$

$$+11. P(a_1) \vee Q(a_1)$$

$$+111. P(a_1) \quad | \quad +112. Q(a_1)$$

$$-21. \bigwedge_x P(x)$$

$$-22. \bigwedge_x Q(x)$$

$$-210. P(a_2)$$

$$-220. Q(a_3)$$

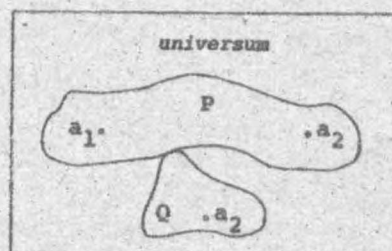
$$+12. P(a_2) \vee Q(a_2)$$

$$+121. P(a_2) \quad | \quad +122. Q(a_2)$$

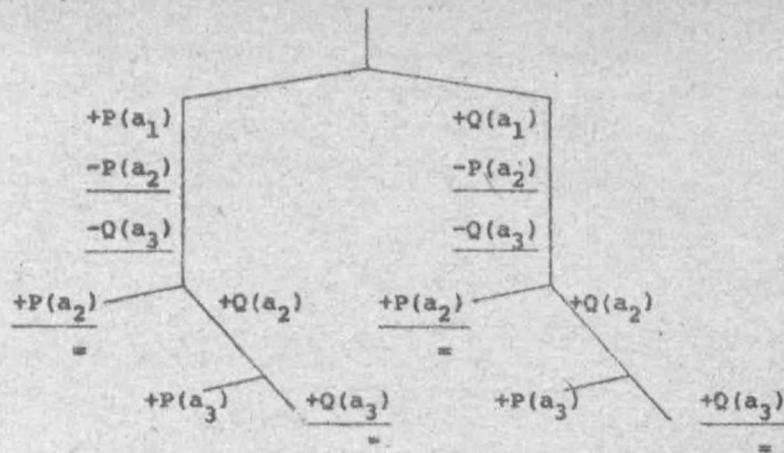
$$+13. P(a_3) \vee Q(a_3)$$

$$+131. P(a_3) \quad | \quad +132. Q(a_3)$$

Rozkład ten obrazuje drzewo przedstawione na rys. 2.1. Zauważmy, że drzewo ma kilka rozgałęzień, przy czym niektóre z gałęzi zamykają się, natomiast dwie z nich są skończone, lecz nie zamknięte. Możemy zatem zbudować kontrmodel w oparciu, przykładowo, o lewą gałąź. Widzimy więc, że P spełnione jest na a_1 i a_3 , lecz nie na a_2 , natomiast Q spełnione jest na a_2 , lecz nie na a_3 . Więc $\text{universe } \{a_1, a_2, a_3\}$ dla naszego kontrmodelu składa się z trzech elementów; widać to wszystko na diagramie.



Łatwo zauważamy, że w modelu tym są spełnione przesłanki, natomiast wniosek nie jest spełniony.



Rys. 2.1

Przykład 2.2:

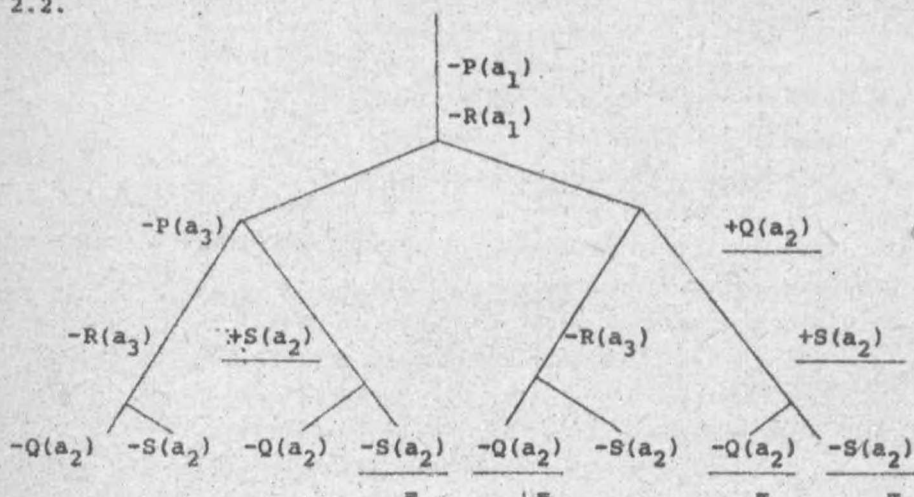
$$\begin{aligned} & \forall y [(\bigwedge_x P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge (\bigvee_x R(x) \rightarrow S(y)) \wedge (\neg Q(y) \vee \neg S(y))] \mid \neq \\ & \mid \neq \bigwedge_x P(x) \vee \bigvee_x R(x) \\ +1. & \forall y [(\bigwedge_x P(x) \rightarrow Q(y)) \wedge (\bigvee_x R(x) \rightarrow S(y)) \wedge (\neg Q(y) \vee \neg S(y))] \\ -2. & \bigwedge_x P(x) \vee \bigvee_x R(x) \\ -21. & \bigwedge_x P(x) \\ -22. & \bigvee_x R(x) \\ -210. & P(a_1) \\ -221. & R(a_1) \\ +10. & (\bigwedge_x P(x) \rightarrow Q(a_2)) \wedge (\bigvee_x R(x) \rightarrow S(a_2)) \wedge \neg Q(a_2) \vee \neg S(a_2) \\ +11. & \bigwedge_x P(x) \rightarrow Q(a_2) \\ +112. & \bigvee_x R(x) \rightarrow S(a_2) \\ +1122. & \neg Q(a_2) \vee \neg S(a_2) \\ -111. & \bigwedge_x P(x) \quad | \quad +1112. Q(a_2) \\ -1110. & P(a_3) \quad | \\ -1121. & \bigvee_x R(x) \quad | \quad +11212. S(a_2) \\ -112112. & R(a_2) \end{aligned}$$

-112 113. $R(a_3)$

-11 221. $Q(a_2)$

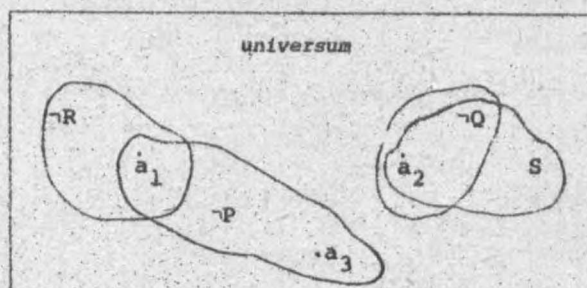
-112 222. $S(a_2)$

Drzewo będące obrazem tego rozkładu przedstawiono na rys. 2.2.



Rys. 2.2

Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, zauważamy skończone, nie zamknięte gałęzie. Na nich właśnie budujemy nasz kontrmodel. Biorąc pod uwagę trzecią lewą gałąź widzimy, że *universum* składa się z trzech elementów $\{a_1, a_2, a_3\}$. Ponadto zauważmy, że P nie przysługuje a_1 i a_3 , własność S przysługuje a_2 , R nie spełnia a_1 oraz Q nie spełnia a_2 . Oczywiście nasz kontrmodel obala wynikanie semantyczne w powyższym przykładzie. Widać to wyraźnie na diagramie



W modelu tym spełnione są przesłanki, natomiast nie jest spełniony wniosek.

Przejdźmy do przykładów odpowiadających trzeciemu typowi. Rozkład poniższych formuł będzie prowadził do zbudowania kontrmodelu w oparciu o jakąś nieskończoną gałąź. Niektóre z gałęzi mogą być zamknięte, ale przynajmniej jedna jest nieskończona.

Przykład 3.1:

$$\bigwedge_x (P(x) \vee \bigvee_y Q(y) \rightarrow \neg R(x)) \neq \bigvee_x \bigwedge_y (Q(y) \rightarrow R(x))$$

$$+1. \bigwedge_x (P(x) \vee \bigvee_y Q(y) \rightarrow \neg R(x))$$

$$-2. \bigvee_x \bigwedge_y (Q(y) \rightarrow R(x))$$

$$+11. P(a_1) \vee \bigvee_y Q(y) \rightarrow \neg R(a_1)$$

$$-111. P(a_1) \vee \bigvee_y Q(y) \quad | \quad +112. \neg R(a_1)$$

$$-1111. P(a_1) \quad | \quad -1120. R(a_1)$$

$$-1112. \bigvee_y Q(y) \quad |$$

$$-11 \ 121. Q(a_1) \quad |$$

$$-21. \bigwedge_y (Q(y) \rightarrow R(a_1))$$

$$-210. Q(a_2) \rightarrow R(a_1)$$

$$+2101. Q(a_2)$$

$$-2102. R(a_1)$$

$$-11 \ 122. Q(a_2) \quad |$$

$$+12. P(a_2) \vee \bigvee_y Q(y) \rightarrow \neg R(a_2)$$

$$-121. P(a_2) \vee \bigvee_y Q(y) \quad | \quad +122. \neg R(a_2)$$

$$-1211. P(a_2) \quad | \quad -1220. R(a_2)$$

$$-1212. \bigvee_y Q(y) \quad |$$

$$-12 \ 122. Q(a_2) \quad |$$

$$-22. \bigwedge_y (Q(y) \rightarrow R(a_2))$$

$$-220. Q(a_3) \rightarrow R(a_2)$$

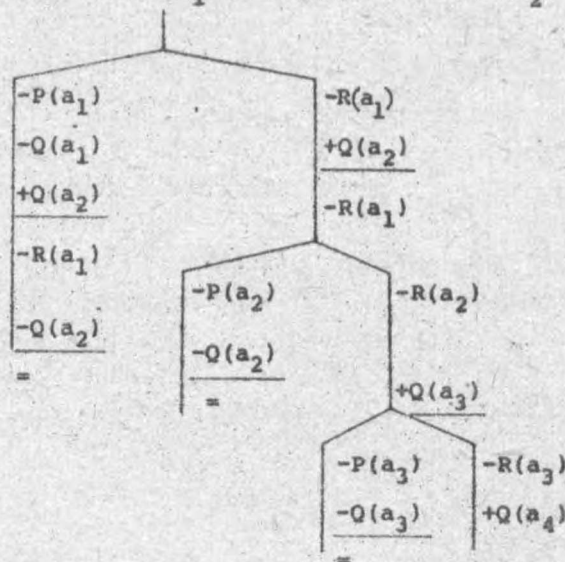
$$+2201. Q(a_3)$$

$$-2202. R(a_2)$$

$$+13. P(a_3) \vee \bigvee_y Q(y) \rightarrow \neg R(a_3)$$

$$\begin{array}{l|l}
 -131. P(a_3) \vee \bigvee_y Q(y) & +132. R(a_3) \\
 -1311. P(a_3) & -1320. R(a_3) \\
 -1312. \bigvee_y Q(y) & \\
 -13123. Q(a_3) & \\
 \hline
 = & \\
 -23. \bigwedge_y (Q(y) \rightarrow R(a_3)) & \\
 -230. Q(a_4) \rightarrow R(a_3) & \\
 +2301. Q(a_4) & \\
 -2302. R(a_3) & \\
 \dots &
 \end{array}$$

Zauważmy, że reguły rozkładu zmuszają nas, po wprowadzeniu nowego elementu a_1 w wierszu 2(i-1)01, do powrotu do wiersza 1 oraz wiersza 2. Widać też, że lewe gałęzie zamykają się, natomiast prawa gałąź przedłuża się w nieskończoność. Łatwiej to spostrzec rysując odpowiadające drzewo (rys. 3.1). Jeżeli weźmiemy zbiór $\{a_2, a_3, \dots\}$, to otrzymamy kontrmodel dla tego przykładu. Widać, że przesłanka jest spełniona w tym modelu, natomiast nie jest spełniony wniosek. Twierdzenie Königa pozwala nam na wybór elementów a_1 tworzących zbiór $\{a_2, a_3, \dots\}$.



Rys. 3.1

Przykład 3.2:

$$[\bigwedge_x P(x) \rightarrow \bigvee_y (Q(y) \rightarrow R(y))] \rightarrow [\bigwedge_x P(x) \rightarrow \bigvee_y Q(y)] \models$$

$$\models \bigvee_x (P(x) \rightarrow R(x))$$

$$+1. [\bigwedge_x P(x) \rightarrow \bigvee_y (Q(y) \rightarrow R(y))] \rightarrow [\bigwedge_x (P(x) \rightarrow \bigvee_y Q(y))]$$

$$+2. \bigvee_x (P(x) \rightarrow R(x))$$

$$-21. P(a_1) \rightarrow R(a_1)$$

$$+211. P(a_1)$$

$$-212. R(a_1)$$

$$-11. \bigwedge_x P(x) \rightarrow \bigvee_y (Q(y) \rightarrow R(y)) \quad +12. \bigwedge_x (P(x) \rightarrow \bigvee_y Q(y))$$

$$+111. \bigwedge_x P(x) \quad +121. P(a_1) \rightarrow \bigvee_y Q(y)$$

$$-112. \bigvee_y (Q(y) \rightarrow R(y)) \quad -1211. P(a_1) \quad +1212. \bigvee_y Q(y)$$

$$+1111. P(a_1) \quad +12120. Q(a_2)$$

$$-1121. Q(a_1) \rightarrow R(a_1)$$

$$+11211. Q(a_1)$$

$$-11212. R(a_1)$$

$$+11112. P(a_2)$$

$$-1122. Q(a_2) \rightarrow R(a_2)$$

$$-11221. Q(a_2)$$

$$-11222. R(a_2)$$

$$-22. P(a_2) \rightarrow R(a_2)$$

$$+221. P(a_2)$$

$$-222. R(a_2)$$

$$+122. P(a_2) \rightarrow \bigvee_y Q(y)$$

$$-1221. P(a_2) \quad +1222. \bigvee_y Q(y)$$

$$+12220. Q(a_3)$$

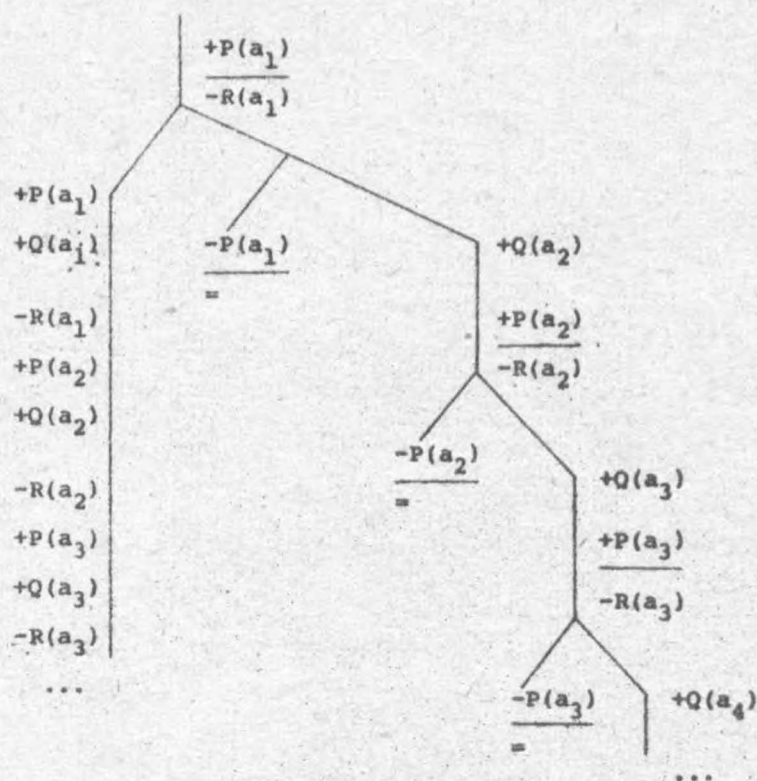
$$+1113. P(a_3)$$

$$-1123. Q(a_3) \rightarrow R(a_3)$$

...

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, rozkład ten jest nieskończoną kontynuacją. Posiada on dwie nieskończone gałęzie, pozostałe zamykają się przez sprzeczność. Rozważmy lewą gałąź i zbudujmy na niej kontrmodel. Korzystając z twierdzenia Königa, możemy wziąć zbiór $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, w którym spełnione są przesłanki. Łatwo można zauważyć, że wniosek w tym modelu nie jest spełniony. Zatem nie zachodzi wynikanie semantyczne.

Przykład 3.2 przedstawia drzewo na rys. 3.2.



Rys. 3.2

Войцех Навецки

СЕМАНТИЧЕСКОЕ ПОСЛЕДСТВИЕ В ИСЧИСЛЕНИИ
КВАНТИФИКАТОРОВ

Труд представляет собой некоторый метод формализации логического следствия на основе исчисления квантификаторов. Этот метод, основанный Бетом, является очень удобным инструментом, позволяющим в большинстве случаев отрицать исчисление или же обосновывать его путём нахождения контрмодели, или же путём доказательства, что контрмодели нет.

Настоящая работа осуществляет некоторую систематизацию проблемы семантического следствия. Начальный фрагмент посвящён некоторым важным семантическим понятиям в исчислении квантификаторов. Затем приведены правила графика семантических диаграмм. Рассмотрены также вопросы сопоставления формул с так называемыми деревьями. В дальнейших рассуждениях были подданы дискуссии типы графиков закрытых формул исчисления квантификаторов. Заключительная часть работы содержит импозантные примеры для различных типов графиков, кроме того, каждый пример графически проиллюстрирован соответствующим ему деревом.