A C T A   U N I V E R S I T A T I S   L O D Z I E N S I S
FOLIA OECONOMICA 38, 1984

Stanisław Wieteska*

HOMOGENICZNOŚĆ JAKOŚCIOWA SPÓŁDZIELCZYCH BUDYNKÓW MIESZKANIOWYCH

Proces realizacji wielorodzinnych budynków mieszkalnych zawierających elementy podobne jest właściwą człowiekowi skłonnością do podporządkowania, jest przejawem aktywnego, selektywnego stosunku do rzeczywistości, sprowadzającego się do wprowadzenia w danej zbiorowości ładu opartego na ustalonym kryterium selekcji.

Ogólnym celem działań zmierzających do porządkowania jest uzasadnione ograniczenie różnorodności przedmiotów bądź to w stosunku do stanu istniejącego, bądź też w stosunku do możliwości praktycznie nieograniczonego rozwoju tej różnorodności.

Celem porządkowania jest wyodrębnienie jednorodnych (homogenicznych) lub względnie jednorodnych klas w ramach większego i niejednorodnego zbioru obiektów mieszkalnych[1]. Takie uporządkowanie jest ważnym warunkiem koniecznym do określenia jakości zasobów mieszkaniowych bądź też ich wartości użytkowej. Sposób określenia podstawowego kryterium jednorodności jakościowej zbioru obiektów oparty jest na abstrakcyjnych kategoriach informacji, jakie dają o badanych przedmiotach poszczególne cechy ich wartości.

* Dr, adiunkt w Zakładzie Ekonomiki Rozwoju Miast UŁ.

[1] Badania homogeniczności zbiorów są przedmiotem dociekań teorii dyskryminacji - jednego z działów statystyki oraz taksonomii - nauki o zasadach klasyfikacji. Pojęcie jednorodności zbioru jest pojęciem względnym o interpretacji uzależnionej od przyjętego w badaniu kryterium klasyfikacyjnego.

Celem pracy jest próba przedstawienia budynków mieszkalnych (osiedla) jako zbioru w elementach teorii mnogości, a następnie zaproponowanie uogólnionej definicji pojęcia jakości homogenicznej oraz podanie elementarnych przykładów jej praktycznego zastosowania.

1. Osiedle mieszkaniowe w ujęciu elementów z teorii mnogości

Jak wiemy, każde osiedle mieszkaniowe składa się z budynków mieszkalnych, każdy wielorodzinny budynek z mieszkań a każde mieszkanie z izb (pokoi, kuchni, łazienek itp.). Osiedla mieszkaniowe są więc zbiorami. Przedmioty, które należą do danego (w naszym przypadku) osiedla nazywać będziemy elementami.

Niech A oznacza dowolne spółdzielcze osiedla mieszkaniowe. Mówimy, że element a należy do zbioru A (czyli, że a jest elementem zbioru A), co zapisujemy w postaci następującego wzoru:

$$a \in A \tag{1}$$

W przypadku występowania kilku elementów należących do tego samego zbioru będziemy często zapisywać; a, b, c, d e, $\in$ A.

Jeżeli a nie należy do zbioru A (tzn. a nie jest elementem zbioru A), piszemy następująco:

$$a \notin A \quad \text{lub} \quad \sim(a \in A)$$

Symbol $\sim$ będzie zawsze zastępował słowo nie. Wygodne jest też wprowadzenie pojęcia zbioru pustego, tj. nie zawierającego żadnego elementu i oznaczać go będziemy przez O. Jeżeli A jest osiedlem mieszkaniowym, to każdy budynek mieszkalny (element osiedla) należy do A.

Zbiór wszystkich elementów oznaczać będziemy przez

$$\{a_1, a_2, \dots a_n\}$$

Jeżeli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B, to mówimy, że A jest podzbiorem B. Mówimy wówczas, że zbiór A jest zawarty w B lub że B zawiera A, co zapisujemy w postaci:

$$A \subset B \quad \text{lub} \quad B \supset A$$

Symbol $\subset$ nazywamy znakiem inkluzji. Z definicji, że $A \subset B$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x (elementu) spełniony jest warunek: jeśli $x \in A$ to $x \in B$. W dalszym ciągu będziemy często pisać zamiast słów "jeśli ..., to" symbol $\Rightarrow$ i zamiast słów "wtedy i tylko wtedy, gdy" symbol $\Leftrightarrow$. Zgodnie z tą umową możemy wyżej wymienioną uwagę napisać symbolicznie w następujący sposób:

$$A \subset B \Leftrightarrow (\text{dla każdego } x: \ x \in A \Rightarrow x \in B) \qquad (2)$$

P r z y k ł a d:

Niech B oznacza teraz dzielnicę mieszkaniową składającą się m. in. z osiedla A. Widzimy więc, że osiedle A jest zawarte w dzielnicy B. Jednocześnie, jeśli każdy budynek (element x) należy do osiedla A, należy także do dzielnicy B, czyli spełniona jest inkluzja (2).

Jeżeli A nie jest podzbiorem B piszemy:

$$A \not\subset B \quad \text{lub} \quad B \not\supset A \qquad (3)$$

Stosujemy wówczas następujący sposób zapisu:

$$\sim(A \subset B) \quad \text{lub} \quad \sim(B \supset A)$$

Z definicji podzbioru wynika, że $A \not\subset B$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie każdy element A jest elementem zbioru B, czyli gdy istnieje taki element w zbiorze A, który nie jest elementem zbioru B. Możemy to symbolicznie zapisać w sposób następujący:

$$\sim(A \subset B) \Leftrightarrow \left\{\text{istnieje } x \text{ takie, że: } x \in A \text{ i} \sim(x \in B)\right\} \qquad (4)$$

Zbiory A i B są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy. Zapisujemy to następująco:

$$(A = B) \Leftrightarrow (\text{dla każdego } x: \ x \in A \Longleftrightarrow x \in B) \qquad (5)$$

P r z y k ł a d:

Dwa budynki mieszkalne A i B są równe, jeżeli każde mieszkanie należące do budynku A posiada odpowiednio identyczny element (mieszkanie) pod względem wartości użytkowej w budynku B.

Z definicji podzbioru wynikają następujące zależności: dla dowolnych A, B, C

$$0 \subset A \qquad (6)$$

Zależność ta wyraża prawo, że zbiór pusty jest zawarty w każdym zbiorze

$$A \subset A \qquad (7)$$

Zależność ta oznacza, że każdy zbiór jest swoim podzbiorem.

$$\text{Jeśli } A \subset B \text{ i } B \subset C, \text{ to } A \subset C \qquad (8)$$

Zależność ta jest tzw. prawem przechodniości relacji inkluzji.

P r z y k ł a d:

Niech A oznacza zbiór mieszkań np. kategorii M-4, B - wielorodzinny budynek mieszkalny, C - osiedle mieszkaniowe zawierające budynek B. W myśl prawa (8), jeśli A należy do B, to należy także do C.

D e f i n i c j a: Przez sumę zbiorów A i B rozumiemy zbiór, którego elementami są wszystkie elementy zbioru A i wszystkie elementy zbioru B i który innych elementów nie zawiera. Sumę zbiorów A i B oznaczymy przez $A \cup B$.

Z definicji sumy zbiorów wynika, że $a \in A \cup B$ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest elementem co najmniej jednego ze zbiorów A, B, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in A$ lub $a \in B$. Zamiast słowa "lub" będziemy pisać symbol $\vee$. Ogólnie zapisujemy następująco:

$$(a \in A \cup B) \Leftrightarrow (a \in A \vee a \in B) \qquad (9)$$

D e f i n i c j a: Przez iloczyn mnogościowy zbiorów A i B rozumiemy część wspólną tych zbiorów, czyli zbiór zawierający te i tylko te elementy, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B. Iloczyn zbiorów oznaczamy symbolem $A \cap B$. Z definicji iloczynu zbiorów wynika, że $a \in A \cap B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in A$ i $a \in B$. Co zapisujemy symbolicznie:

$$(a \in A \cap B) \Leftrightarrow (a \in A \wedge a \in B) \qquad (10)$$

P r z y k ł a d:

Niech A oznacza budynek zawierający mieszkania kategorii M-2, M-3 i M-4, a budynek B zawiera identyczne pod względem wartości użytkowej mieszkanie kategorii M-3 oraz mieszkania kategorii M-5.

W myśl (10) iloczynem mnogościowym zbiorów A, B będą mieszkania kategorii M-3, gdyż należą jednocześnie do obu zbiorów.

D e f i n i c j a: Zbiory A i B nazywamy równolicznymi, jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f: A \rightarrow B$ przekształcająca A na B. O funkcji f mówimy, że ustala ona równoliczność zbiorów A i B[2]. Jeśli zbiory A i B są równoliczne, to piszemy $A \approx B$. Symbol $\approx$ będzie oznaczał równoliczność.

P r z y k ł a d:

Niech A będzie budynkiem zawierającym n-elementów (np. mieszkań M-3), to budynek B jest równoliczny z A wtedy i tylko wtedy, gdy ma również n takich samych elementów. Pojęcie równoliczności jest więc uogólnieniem na dowolne zbiory pojęcia równej liczebności zbiorów skończonych[3].

Każdemu zbiorowi A przyporządkowuje się pewien przedmiot zwany mocą, oznaczony przez $\bar{\bar{A}}$ w taki sposób, że dwom zbiorom A i B przyporządkowana jest ta sama liczba wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory A i B są równoliczne. Zachodzi więc następujący wzór:

$$(\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}) \Leftrightarrow (A \approx B) \tag{11}$$

Jeżeli A jest zbiorem skończonym n-elementowym, to za jego moc przyjmujemy liczbę n, przy tym $\bar{\bar{0}} = 0$.

Tak więc zamiast mówić, że zbiory A i B są równoliczne, można również mówić, że zbiory A i B są równej mocy lub że mają tę samą liczbę kardynalną.

Można wykazać, że

$$(\bar{\bar{A}} \cup \bar{\bar{B}}) = (\overline{\overline{A \cup B}}) \tag{12}$$

oraz

$$(\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}}) = (\overline{\overline{A \cap B}}) \tag{13}$$

Wzory (12) i (13) łatwo można uogólnić na dowolną liczbę zbiorów.

---

[2] H. R a s i o w a, Wstęp do matematyki współczesnej, Warszawa 1975, wyd. V, s. 93.

[3] Mówimy, że zbiór np. X ma n elementów (gdzie $n \in N$, N - zbiór liczb naturalnych), jeśli istnieje ciąg różnowartościowy o n wyrazach, którego zbiorem wartości jest X; piszemy wówczas $|X| = n$. Zbiór X jest skończony, jeśli $|X| = n$ dla pewnego $n \in N$. Por.

2. Homogeniczność jakościowa budynków mieszkalnych

D e f i n i c j a: Przez jakość budynku mieszkalnego rozumieć będziemy skończony zbiór charakteryzujących go cech (właściwości) budowlanych. Oznaczać ją będziemy przez X.

Załóżmy, że mamy zbiór budynków (obiektów) mieszkalnych A_i $i = 1, 2, \ldots, n$, na których określone są jakości X_i $i = 1, 2, \ldots, n$. Miarą jednorodności jakościowej tych zbiorów jest współczynnik podobieństwa (homogeniczności) postaci:

$$H(A_i^{\bullet}) = \frac{\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{\overline{X}}_{i}}{\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{\overline{X}}_{i}} \qquad (14)$$

gdzie:

$\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{\overline{X}}_i$ - uogólniony iloczyn mnogościowy zbiorów (moc przekroju zbiorów),

$\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{\overline{X}}_i$ - moc uogólnionej mnogości sumy zbiorów,

$H(A_i)$ - współczynnik homogeniczności jakościowej.

W przypadku wielorodzinnego budownictwa mieszkaniowego spółdzielczego wprowadzenie uogólnionego iloczynu mnogościowego i sumy mnogościowej jest w pełni uzasadnione, gdyż osiedla składają się z co najmniej dwóch obiektów. Odpowiedź na pytanie jak dalece nasze budynki są jednorodne w skali osiedla powinien dać odpowiedź współczynnik homogeniczności.

Formuła (14) spełnia dodatkowo trzy postulaty stawiane miarom podobieństwa:

- uniwersalności, gdyż jest wielkością nie mianowaną i można ją wykorzystać w innych rodzajach budownictwa mieszkaniowego:,

- jednolitej preferencji, tzn. wartości miary rosną, gdy rośnie podobieństwo obiektów mieszkalnych;

K. K u r a t o w s k i, A. M o s t o w s k i, Teoria mnogości wraz ze wstępem do opisowej teorii mnogości, Warszawa 1978, s. 111.

- unormowania, tzn. miara przyjmuje wartości z przedziału obustronnie domkniętego <0,1>.

Zgodnie z postulatem unormowania mogą zachodzić trzy następujące przypadki:

1) $H(A_i) = 0$, gdy analizowane obiekty mieszkalne nie mają żadnej cechy wspólnej (są rozłączne),

2) $H(A_i) = 1$, gdy obiekty mieszkalne są identyczne pod względem swojej wartości użytkowej,

3) $H(A_i) \in (0,1)$ w pozostałych przypadkach.

P r z y k ł a d:

Obliczyć wartość miary podobieństwa na zbiorach A_1 i A_2 (budynki wielorodzinne mieszkalne). Na zbiorze A_1 określona jest jakość:

$$A_1 = \{X^1\} = \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1, x_6^1, x_7^1\}$$

natomiast na zbiorze A_2 określona jest jakość:

$$A_2 = \{X^2\} = \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2, x_6^2, x_7^2, x_8^2, x_9^2, x_{10}^2, x_{11}^2\}$$

gdzie:

x_1^2, x_1^1 - kuchnia z oświetleniem dziennym,

x_2^2, x_2^1 - kuchnia gazowa,

x_5^2, x_6^1 - zlewozmywak dwukomorowy,

x_5^1 - łazienka oddzielnie od wc,

x_3^2, x_3^1 - płytki PCV w kuchni, przedpokoju i pokojach,

x_7^1 - uciążliwe sąsiedztwo,

x_4^2, x_4^1 - ciepła i zimna woda w kuchni i łazience,

x_6^2 - łazienka łącznie z wc,

x_7^2 - brak dźwigu,

x_8^2 - brak pralni i suszarni,

x_9^2 - umywalka w łazience,

x_{10}^2 - terakota w łazience i wc,

x_{11}^2 – malowanie klejowe we wszystkich izbach.

Podstawiając do wzoru (14) otrzymujemy

$$H(A_1,A_2) = \frac{\overline{\overline{\{x^1\}\cap\{x^2\}}}}{\overline{\overline{\{x^1\}\cup\{x^2\}}}} = \frac{\overline{\overline{\{x_1^2, x_2^2, x_2^5, x_3^2, x_4^2\}}}}{\overline{\overline{\{x_1^1, x_2^1, x_3^1, x_4^1, x_5^1, x_6^1, x_7^1, x_6^2, x_7^2, x_8^2, x_9^2, x_{10}^2, x_{11}^2\}}}} =$$

$$= \frac{5}{13} = 0,384$$

Możemy powiedzieć, że budynek A_1 jest podobny do budynku B w ok. 38,4%. Wartość miary podobieństwa potwierdza intuicyjna zbieżność jakościowa tych dwóch zbiorów. Proponowany współczynnik homogeniczności można, jak się wydaje, uznać za ważne kryterium badania jednorodności jakościowej.

3. Mocniejsze kryterium homogeniczności jakościowej

Z punktu widzenia praktycznego spotykamy budynki mieszkalne oraz ich elementy, w których występują istotne różnice w użytkowaniu, np. użytkowanie jednorodzinnego budynku mieszkalnego na wsi i w miastach. Konieczne staje się więc sformułowanie silniejszego kryterium uzależniającego stopień podobieństwa obiektów od jednoczesnej zgodności jakości (maksymalizacji przekroju), współczynników ważności cech oraz wielkości udziału wag przypisanych cechom należącym do części wspólnej jakości w ogólnym "funduszu" wag[4].

Niech:

$$Y_1 = \left\{y_1^{(j)} = y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_1^{(m_1)}\right\}$$

$$Y_2 = \left\{y_2^{(j)} = y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_2^{(m_2)}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_k = \left\{y_k^{(j)} = y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots, y_k^{(m_k)}\right\}$$

---

[4] Powyższy sposób zaczerpnięto z pracy T. B o r y s, Kryteria homogeniczności jakościowej w świetle dostępnej informacji statystyczno-normatywnej, "Normalizacja" 1976, nr 12, s. 6-8.

oznaczają systemy współczynników ważności, Y_i system wag cech jakości A_i $i = 1, 2, \ldots, k$. Zakładamy, że $\sum_{j=1}^{k} y_k^{(j)} = 1$. Niech G oznacza zbiór "j" cech $x_k^j \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i$, $\bar{G}$ - zbiór indeksów "j" cech $x_k^j \notin \bigcap_{i=1}^{k} A_i$. Ważoną postać współczynnika podobieństwa (homogeniczności) przedstawia formuła:

$$H_w(A_i) = 1 - \left\{ \sum_{j \in G} \left| y_k^{(j)} - y_{k+1}^{(j)} \right| + \frac{\sum_{j \in \bar{G}} y_k^{(j)} + \sum_{j \in \bar{G}} y_{k+1}^{(j)}}{2} \right\} \tag{15}$$

gdzie:

$H_w(A_i)$ - ważony współczynnik homogeniczności jakościowej zbiorów A_i.

Składnik $\sum_{j \in G} \left| y_k^{(j)} - y_{k+1}^{(j)} \right|$ uzależnia wartość miary od zgodności wag przypisanych cechom należącym do części wspólnej jakości, natomiast składnik $\frac{1}{2}\left(\sum_{j \in G} y_k^{(j)} + \sum_{j \in G} y_{k+0}^{(j)} \right)$ uzależnia wartość miary od udziału wag przypisanych cechom nie należącym do części wspólnej jakości. Widzimy także, że współczynnik (15) spełnia trzy podstawowe postulaty stawiane miarom podobieństwa, tj. unormowania, jednolitej preferencji i uniwersalności. Ponadto zachodzą również następujące warunki:

a) $H_w(A_i) = 0 \Longleftrightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \right) = 0$, tzn. gdy przekrój jest zbiorem pustym. Wynika stąd, że:

$$\left(\sum_{j \in G} \left| y_k^{(j)} - y_{k+1}^{(j)} \right| = 0 \right) \wedge \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{j \in \bar{G}} y_k^{(j)} + \sum_{j \in \bar{G}} y_{k+1}^{(j)} \right) = 1 \right]$$

b) $H_w(A_i) = 1 \Longleftrightarrow (A_1 = A_2 = \ldots = A_k) \wedge (Y_1 = Y_2 = \ldots Y_k)$, tzn. dla uzyskania całkowitego podobieństwa obiektów mieszkalnych wymagana jest identyczność cech i systemów wag przypisanych poszczególnym cechom.

c) $H_w(A_1) \in (0,1)$ - wartość współczynnika zależy od udziału wag przypisanych cechom należącym do przekroju jakości i stopnia ich zgodności.

P r z y k ł a d:

Niech na zbiorze A_1 obiektów określona będzie jakość $A_1 = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_1^4\}$ o systemie wag $Y_1 = \{y_1^{(1)} = 0{,}4,\ y_1^{(2)} = 0{,}1, y_1^{(3)} = 0{,}3,\ y_1^{(4)} = 0{,}2\}$ na zbiorze A_2 natomiast, $A_1 = \{x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4\}$ o systemie wag $Y_2 = \{y_2^{(1)} = 0{,}4,\ y_2^{(2)} = 0{,}1,\ y_2^{(3)} = 0{,}3,\ y_2^{(4)} = 0{,}2\}$ przy czym cechami wspólnymi są $x_1^1 = x_2^1$ oraz $x_1^2 = x_2^2$.

Korzystając ze wzoru (14) otrzymujemy:

$$H(A_1, A_2) = \frac{\overline{\overline{A_1 \cap A_2}}}{\overline{\overline{A_1 \cup A_2}}} = \frac{\overline{\overline{\{x_1^1, x_1^2\}}}}{\overline{\overline{\{x_1^3, x_1^4, x_2^1, x_2^2, x_2^3, x_2^4\}}}} = \frac{2}{6} = 0{,}33$$

Korzystając ze wzoru (15) otrzymujemy:

$$H_w(A_1, A_2) = 1 - \left[\sum_{j \in (1,2)} \left| y_k^{(j)} - y_{k+1}^{(j)} \right| + \frac{\sum\limits_{j \in (3,4)} y_k^{(j)} + \sum\limits_{j \in (3,4)} y_{k+1}^{(j)}}{2} \right] = 0{,}5$$

W tym przypadku zgodność wag cech należących do części wspólnej jakości podwyższa wartość współczynnika homogeniczności. Zmieniając jednak system wag możemy uzyskać różne wartości dla współczynnika homogeniczności.

4. Zakończenie

Przedstawiony sposób badania podobieństwa obiektów mieszkalnych jest stosunkowo prosty, gdyż ustalenie cech jakościowych nie należy do działań bardzo skomplikowanych. Trudności występować mogą jedynie przy przyporządkowaniu wag poszczególnym cechom. W tym przypadku można skorzystać z badania opinii mieszkańców (wywiad lub ankieta) lub z metody "delfickiej".

Przedstawiona metoda badania podobieństwa wykazuje nam, w jakim stopniu spółdzielcze osiedla mieszkaniowe są jednakowe lub - co słusznie jest krytykowane - monotonne architektonicznie.