

Michał Stachura*

METODY FALKOWE W POSZUKIWANIU DŁUGOTERMINOWEJ ZALEŻNOŚCI KURSÓW GIEŁDOWYCH I WALUTOWYCH

Streszczenie. Artykuł porusza zagadnienia nierozzerwalnie związane z prognozowaniem. Mianowicie przy modelowaniu zmiennych ekonomicznych za pomocą procesów stochastycznych należy zastanowić się, na ile przeszłe zachowania procesu będą aktualne w przyszłości. W tym celu bywają stosowane pojęcia samopodobieństwa oraz długoterminowej zależności, które mogą potwierdzić bądź podważyć zasadność predykcji.

W opracowaniu przeprowadzono próbę estymacji wykładników Hursta dla pięciu szeregów empirycznych przy wykorzystaniu narzędzi analizy falkowej. Na tej podstawie postawiono roboczą hipotezę, iż badane szeregi charakteryzują się krótką pamięcią. I mimo iż można i powinno się podejmować próby prognozowania rozważonych szeregów, to jednak postawiona hipoteza stawia pod znakiem zapytania jakość i adekwatność tych prób.

Słowa kluczowe: samopodobieństwo, długa i krótka pamięć, wykładnik/współczynnik Hursta, falka, współczynniki falkowe.

1. SŁOWO WSTĘPNE

W warunkach gospodarki wolnorynkowej prognozowanie odgrywa ogromną rolę. Począwszy od zwykłego zjadacza chleba poprzez mniej lub bardziej świadomego *homo oeconomicus* aż po wielkie instytucje finansowe czy też nawet całe gospodarki narodowe, wszyscy w mniejszym lub większym stopniu zainteresowani są przewidywaniem przyszłości zarówno tej najbliższej, jak i dalszej. Jest to czynione na bardzo wiele odmiennych sposobów.

W niniejszym opracowaniu, co prawda, kwestia samego prognozowania nie zostaje poruszona, lecz rozważa się zagadnienie nierozzerwalnie związane z prognozowaniem. Otóż przy naiwnych próbach prognozowania zmiennych ekonomicznych (bez uwzględnienia zmiennych różnych od zmiennej czasowej) i modelowaniu zjawisk za pomocą procesów stochastycznych należy zastanowić się nad faktem, na ile przeszłe i obecne zachowania procesu mogą być

* Mgr, asystent, Instytut Matematyki, Akademia Świętokrzyska.

aktualne i powtarzalne w przyszłości. W zetknięciu z tym problemem często stosuje się tzw. samopodobieństwo oraz długoterminową zależność, które pomimo iż bywają pojmowane i definiowane na różne sposoby, mogą dać odpowiedź na pytanie, czy predykcja jest zasadna, a jeśli tak, to jak daleko należy sięgać w przeszłość, by zyskać na dokładności.

2. PODSTAWOWE POJĘCIA

2.1. Samopodobieństwo i długoterminowa zależność

Jak już wspomniano, pojęcia samopodobieństwa oraz długoterminowej zależności bywają różnie rozumiane. W związku z tym na potrzeby niniejszych rozważań przyjęto definicje zawarte w pracy Embrechtsa i Maejimy (2002). Mianowicie dowolny niezdegenerowany proces stochastyczny $\{X(t): t \geq 0\}$ o wartościach w $\mathbf{R}$, który jest stochastycznie ciągły dla $t = 0$, nazywany jest **samopodobnym** z wykładnikiem Hursta H (w skrócie H -samopodobnym), gdy dla każdej liczby $a > 0$ zachodzi: $\{X(at): t \geq 0\} =^d \{a^H X(t): t \geq 0\}$.

Najczęściej wykorzystywanym w modelowaniu samopodobnym procesem stochastycznym jest ułamkowy ruch Browna. Zdefiniowany jest on jako gaussowski proces H -samopodobny, dla którego zachodzą następujące związki: $E[X(t)] = 0$, $E[X(t)X(s)] = 1/2(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})E[X^2(1)]$, natomiast $0 < H \leq 1$ jest stałą.

Pojęcie długoterminowej zależności definiowane jest dla szerokiej klasy procesów stochastycznych, lecz w przypadku niezdegenerowanego procesu H -samopodobnego $\{X(t)\}$ o stacjonarnych przyrostach oraz takiego że $0 < H < 1$ i $E[X^2(1)] < +\infty$ pojawiają się ewidentne związki pomiędzy samopodobieństwem i długoterminową zależnością. Otóż niech szereg $\{\xi(n)\}_{n \in \mathbf{N}}$ będzie szeregiem przyrostów procesu $\{X(t): t \geq 0\}$, czyli $\xi(n) = X(n+1) - X(n)$, dla $n \in \mathbf{N}$ oraz niech $r(n) = E[\xi(0)\xi(n)]$ będzie funkcją kowariancji przyrostów, wtedy definicja długoterminowej zależności może być postrzegana jak następuje (Embrechts i Maejima, 2002). Jeżeli $0 < H < 1/2$, to przyrosty procesu $\{X(t)\}$ są ujemnie skorelowane oraz $\sum_{n=0}^{+\infty} |r(n)| < +\infty$ i mówi się, że proces charakteryzuje się **krótkoterminową zależnością** (w skrócie: **ma krótką pamięć**). Jeśli $H = 1/2$, to przyrosty są nieskorelowane i procesowi brak jest pamięci. Natomiast gdy $1/2 < H < 1$, to przyrosty procesu $\{X(t)\}$ są dodatnio skorelowane oraz $\sum_{n=0}^{+\infty} |r(n)| = +\infty$. Mówi się wtedy, że proces charakteryzuje się **długoterminową zależnością** (w skrócie: **ma długą pamięć**).

W przypadku ruchu Browna proces z krótką pamięcią nazywany jest **antypersystentnym**, a z długą pamięcią **persystentnym**. Natomiast proces z brakiem pamięci stanowi klasyczny ruch Browna.

2.2. Falka

Podobnie jak w przypadku pojęć samopodobieństwa i długiej pamięci procesów stochastycznych, tak i pojęcie falki może być różnie rozumiane. Abry, Flandrin, Taqqu i Veitch (2002) widzą falkę jako funkcję rzeczywistą $\psi(t)$, $t \in \mathbf{R}$, taką że $\int_{\mathbf{R}} \psi(t) dt = 0$ i która spełnia dodatkowe warunki całkowalności, chociażby $\psi \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$. Najczęściej także zakłada się, iż $\int_{\mathbf{R}} \psi^2(t) dt = 1$. Co więcej mówi się, że falka ma N momentów zerowych, jeśli $\int_{\mathbf{R}} t^k \psi(t) dt = 0$ dla $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Na podstawie falki ψ jest konstruowana rodzina funkcji $\psi_{j,k}$ taka, że $\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k)$, $j \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$, tworząca tzw. analizę wieloskalową. Istota tej procedury zasadza się na takim doborze falki ψ , by rodzina $\psi_{j,k}$ stanowiła bazę ortonormalną w wybranej przestrzeni funkcyjnej, np. w $L^2(\mathbf{R})$. Dzięki temu zabiegowi dowolnej funkcji $X(t)$ z rozważanej przestrzeni w jednoznaczny sposób można przypisać współczynniki rozwinięcia falkowego: $d_{j,k} = \int_{\mathbf{R}} X(t) \psi_{j,k}(t) dt$. Znajomość tych współczynników jest równoznaczna ze znajomością samej funkcji.

W analogiczny sposób można także rozważać przestrzenie ciągowe typu l^p i w nich konstruować analogony falek w dotychczasowym rozumieniu. Tym razem jednak warunki opisywane przez całki sprowadzają się do stosownych sum, skalowanie zaś będzie się odbywać jedynie w formie rozciągania. Niemniej ze względu na to, że człowiek, zbierając, przechowując i obrabiając dane, posługuje się jedynie zbiorami skończonymi, pojęcie falki zostaje adaptowane do przestrzeni $\mathbf{R}^n$, w której wybiera się specyficzną bazę ortonormalną, zachowującą pierwotne postulaty analizy wieloskalowej. Takie ujęcie (jako jedno z kilku) prezentują w swej pracy Percival i Walden (2000).

2.3. Falki i samopodobieństwo

Chcąc wykorzystać narzędzie, jakim są falki, do badania procesów stochastycznych, należy umiejętnie połączyć rozważone dotychczas pojęcia

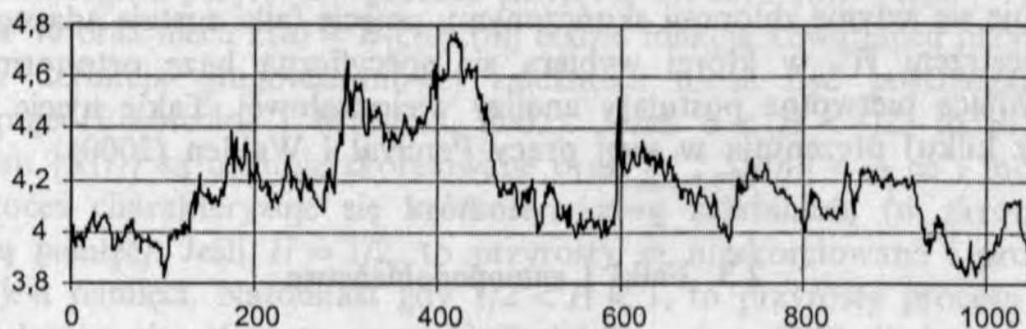
(Abry, Flandrin, Taqqu i Veitch, 2002). Niech zatem realizacje procesu stochastycznego $\{X(t): t \geq 0\}$ będą funkcjami z przestrzeni, w której zadana jest baza falkowa. Wtedy dla ustalonej falki ψ przy dodatkowych założeniach można liczyć dla procesu $X(t)$ jego współczynniki rozwinięcia falkowego:

$$d_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} X(t) \psi_{j,k}(t) dt, \text{ i co bardzo ważne, współczynniki te są zmiennymi}$$

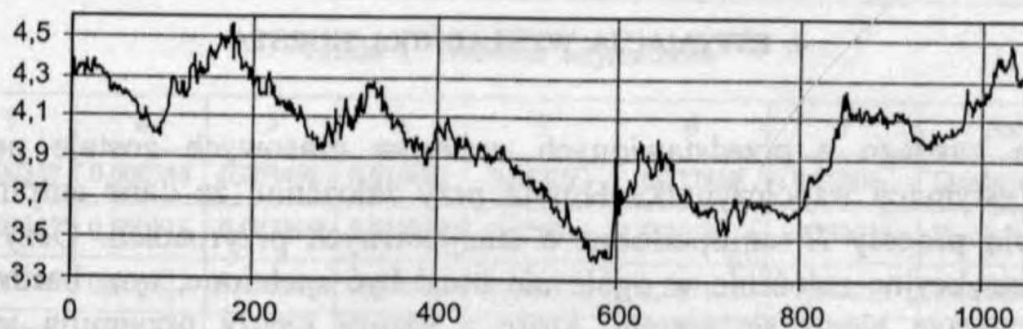
losowymi, dziedziczącymi pewne własności procesu $X(t)$. Jeśli bowiem $\{X(t): t \geq 0\}$ ma stacjonarne przyrosty, to dla ustalonego $j \in \mathbb{Z}$ $\{d_{j,k}: k \in \mathbb{Z}\}$ jest szeregiem stacjonarnym. Jeśli dodatkowo falka ψ ma N momentów zerowych, to dla ustalonego $j \in \mathbb{Z}$ przyrosty rzędu N szeregu $\{d_{j,k}: k \in \mathbb{Z}\}$ są stacjonarne. Jednak najistotniejszą rzeczą ze względu na estymację współczynnika samopodobieństwa H jest fakt, że nawet jeśli proces $\{X(t): t \geq 0\}$ charakteryzuje się długoterminową zależnością, to dla falki o stosownie wielu momentach zerowych (wystarczy wziąć $N > H + 1/2$) szereg $\{d_{j,k}: k \in \mathbb{Z}\}$ nie posiada długiej pamięci, gdyż $\sum_{k=0}^{+\infty} E|d_{j,k}d_{j,0}| < +\infty$.

3. DANE EMPIRYCZNE

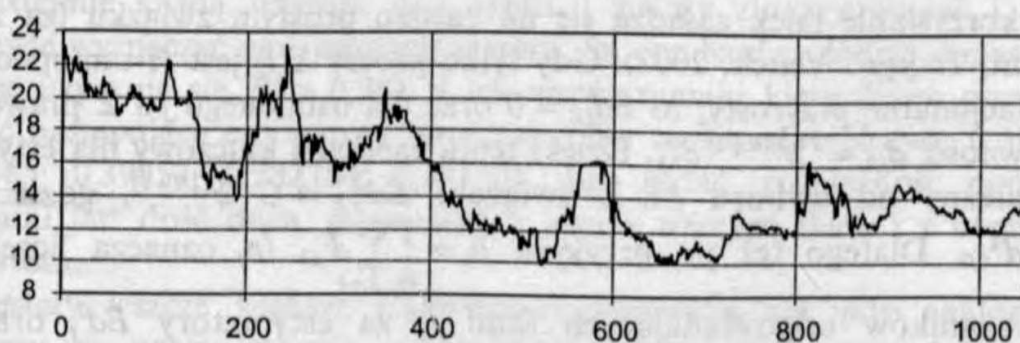
W niniejszym opracowaniu wykorzystano dane dotyczące kursów walutowych – zaczerpnięte z Narodowego Banku Polskiego (<http://www.nbp.pl/statystyka/index.html>) oraz dane dotyczące kursów giełdowych – pozyskane z Serwisu Finansowego *Money.pl* (<http://www.money.pl/gielly/archiwum/spolki/>). Pod rozwagę wziętych jest pięć szeregów czasowych długości 1050 obserwacji z okresu od początku 1999 r. (przełom stycznia i lutego; różne daty początkowe w zależności od szeregu) do 30.04.2003 r. Dwa szeregi to dzienne kursy sprzedaży dolara i euro względem złotego w Narodowym Banku Polskim (rysunki 1 i 2). Trzy pozostałe są notowaniami dziennymi na zamknięcie na Warszawskiej Giełdzie Papierów Wartościowych spółek Okocim, Strzelec i Żywiec (rysunki 3, 4 i 5).



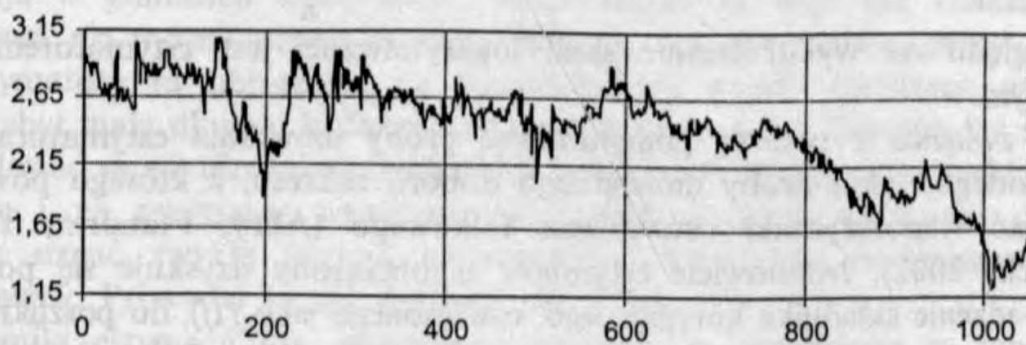
Rys. 1. Dzienny kurs dolara



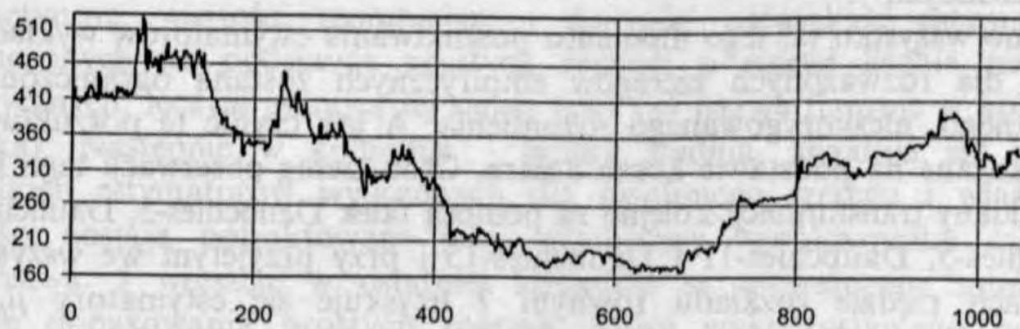
Rys. 2. Dzienny kurs euro



Rys. 3. Notowania dzienne Okocimia



Rys. 4. Notowania dzienne Strzelca



Rys. 5. Notowania dzienne Żywca

4. ESTYMACJA WYKŁADNIKA HURSTA

Dla każdego z przedstawionych szeregów czasowych zostaje podjęta próba estymacji współczynnika Hursta przy założeniu, że dane empiryczne stanowią procesy H -samopodobne o stacjonarnych przyrostach. Oczywiście tak restrykcyjne założenie w ogóle nie musi być spełnione, tym bardziej że pod rozwagę bierze się szeregi, które z natury rzeczy przyjmują jedynie wartości dodatnie. Być może zasadniejsze byłoby rozważenie logarytmów obserwacji albo zwrotów czy też zwrotów logarytmicznych, choć i w tych przypadkach spełnienie założeń jest dyskusyjne.

Wykorzystanie falek zasadza się na bardzo prostym związku (za Abry, Flandrin, Taqqu i Veitch, 2002). Gdy tylko proces $X(t)$ jest H -samopodobny i ma stacjonarne przyrosty, to $Ed_{j,k} = 0$ oraz dla ustalonego $j \in \mathbf{Z}$ prawdziwa jest równość: $d_{j,k} = d^{2^{j(2H+1)}} d_{0,k}$. Dzięki temu zachodzi kluczowy dla estymacji i niezależny od wyboru $k \in \mathbf{Z}$ związek: $Ed_{j,k}^2 = C \cdot 2^{j(2H+1)}$, gdzie stała $C = Ed_{0,0}^2$. Dlatego też po przyjęciu $\hat{\mu}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} d_{j,k}^2$ (n_j oznacza liczebność

współczynnika odpowiadających skali j) za estymatory Ed_j^2 oraz po obustronnym zlogarytmowaniu uzyskuje się: $\log_2 \hat{\mu}_j = (2H+1)j + \log_2 C$. Zatem wystarczy znaleźć a – współczynnik kierunkowy prostej regresji dla punktów o współrzędnych $(j, \log_2 \hat{\mu}_j)$, a wtedy $\hat{H} = \frac{a-1}{2}$. Niestety estymator $\hat{H}$

ze względu na wykorzystanie skali logarytmicznej jest estymatorem obciążonym.

W związku z tym są podejmowane próby uzyskania estymatora nieobciążonego, jak i próby umiejętnego doboru zakresu, z którego powinno się brać współczynniki rozwinięcia falkowego (Abry, Flandrin, Taqqu i Veitch, 2002). Mianowicie estymator nieobciążony uzyskuje się poprzez wprowadzenie składnika korygującego, oznaczonego jako $f(j)$, do poszukiwanej prostej regresji. Daje to regresję postaci: $\log_2 \hat{\mu}_j - f(j) = (2H+1)j + \log_2 C$. Natomiast dobór zakresu sprowadza się do poszukiwania takich J_1 i J_2 , że $\hat{\mu}_j$ można rozpatrywać jedynie dla j pomiędzy J_1 i J_2 , pomijając wkład $\hat{\mu}_j$ dla pozostałych j .

Mimo wszystko od tego momentu poszukiwania estymatorów wykładnika Hursta dla rozważonych szeregów empirycznych zostaną ograniczone do pierwotnego, nieskorygowanego rozumienia. A jak czynić te poszukiwania, jest pokazane na podstawie kursu dolara. Otóż szereg obserwacji tego kursu jest poddany transformacji kolejno za pomocą falek Daubchies-3, Daubchies-4, Daubchies-5, Daubchies-11 i Daubchies-15 i przy przyjętym we wszystkich sytuacjach rzędzie rozkładu równym 7 uzyskuje się estymatory $\hat{\mu}_j$, jak w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości estymatorów

j	1	2	3	4	5	6	7	Falka
μ_j	0,000357	0,000748	0,003498	0,010681	0,04009	0,232849	0,30606	Daubchies-3
	0,000345	0,000816	0,002899	0,011019	0,029634	0,24656	0,334023	Daubchies-4
	0,000345	0,000827	0,003386	0,009175	0,028991	0,157152	0,571294	Daubchies-5
	0,000332	0,000772	0,003071	0,00825	0,024422	0,168546	0,219185	Daubchies-11
	0,000342	0,000695	0,002819	0,009481	0,024708	0,156901	0,210499	Daubchies-15

Następnie każdą wartość $\hat{\mu}_j$ z tabeli 1 należy zlogarytmować i na tej podstawie wyznaczyć pięć prostych regresji. Są one bardzo dobrze dopasowane (zawsze uzyskuje się $R^2 > 0,98$), a ich współczynniki kierunkowe pozwalają znaleźć następujące estymatory współczynnika samopodobieństwa: 0,380633; 0,385485; 0,39857; 0,332784; 0,331501. Jak widać, rozbieżność pomiędzy wynikami jest dość duża, co wynika z użycia różnych falek i z obciążenia estymatora.

Niestety jeszcze większe rozbieżności pojawiają się, gdy analogicznie wyznaczy się proste regresji na podstawie różnej liczby sąsiadujących ze sobą punktów (od 4 do 7) dla każdej z falek. Tym razem dopasowanie wciąż jest bardzo dobre, bo w każdym przypadku $R^2 > 0,96$, lecz wyniki oscylują w granicach 0,261–0,437. Rozbieżności są więc tak znaczne, że estymacji nie można uznać za zadowalającą. Przypuszczalnie, prócz faktu, iż estymatory są obciążone, na nierewelacyjne wyniki estymacji wpływa także zbyt mała długość badanego szeregu empirycznego. Dlatego też należy zdecydować się na uśrednienie wszystkich uzyskanych estymatorów wykładnika Hursta i za estymator współczynnika samopodobieństwa kursu dolara można uznać zwykłą średnią arytmetyczną dotychczas znalezionych estymatorów. Prowadzi to do wartości ok. 0,341.

Wyniki estymacji dla wszystkich szeregów są zestawione w tabeli 2, w której zgrupowano po pięć wierszy wartości związanych z jednym szeregiem empirycznym. Nazwa szeregu znajduje się w pierwszej kolumnie. W kolumnach: średnia, min i max są umieszczone odpowiednio: średnie arytmetyczne, wartości najmniejsze i wartości największe estymatorów wyznaczonych na podstawie prostych regresji o różnej liczbie punktów empirycznych, lecz za pomocą tej samej falki (jej nazwa figuruje w kolumnie – falka). Następnie w kolumnie – łączna średnia, znajdują się średnie wszystkich estymatorów wyliczonych dla ustalonego szeregu i właśnie te wartości zostają potraktowane jako estymatory współczynnika samopodobieństwa. I wreszcie w ostatniej kolumnie są umieszczone minimalne stopnie dopasowania prostych regresji, które wykorzystywano podczas poszukiwania wykładnika Hursta dla stosownego szeregu.

Tabela 2. Zestawienie badanych wartości estymatorów

Waluta lub spółka	Falka	Średnia	Min	Max	Łączna średnia	R^2
Dolar	Daubchies-3	0,37209	0,32312	0,43702	0,341	0,96
	Daubchies-4	0,3502	0,26763	0,4268		
	Daubchies-5	0,34367	0,31171	0,39857		
	Daubchies-11	0,31951	0,29109	0,37601		
	Daubchies-15	0,31903	0,26059	0,37729		
Euro	Daubchies-3	0,31852	0,25611	0,39201	0,303	0,96
	Daubchies-4	0,31443	0,25309	0,42121		
	Daubchies-5	0,31398	0,22075	0,41467		
	Daubchies-11	0,29021	0,19251	0,37795		
	Daubchies-15	0,27648	0,17741	0,37142		
Okocim	Daubchies-3	0,37689	0,25392	0,47565	0,374	0,97
	Daubchies-4	0,39563	0,34307	0,48002		
	Daubchies-5	0,35412	0,31287	0,3996		
	Daubchies-11	0,37069	0,30908	0,43278		
	Daubchies-15	0,37099	0,31187	0,42504		
Strzelec	Daubchies-3	0,23547	0,1535	0,27978	0,228	0,97
	Daubchies-4	0,2301	0,1583	0,30748		
	Daubchies-5	0,23162	0,12594	0,29686		
	Daubchies-11	0,21986	0,18246	0,26354		
	Daubchies-15	0,22234	0,15015	0,27019		
Żywiec	Daubchies-3	0,3727	0,31985	0,40027	0,359	0,96
	Daubchies-4	0,33573	0,25718	0,43841		
	Daubchies-5	0,39422	0,37714	0,42805		
	Daubchies-11	0,34262	0,28178	0,38546		
	Daubchies-15	0,35067	0,30135	0,37756		

5. WNIOSKI.

Reasumując przeprowadzoną próbę estymacji wykładników Hursta, należy przyznać, że nie jest ona w pełni udana. Na jej podstawie można jedynie postawić roboczą hipotezę, iż badane szeregi empiryczne charakteryzują się krótką pamięcią, a następnie należałoby hipotezę tę zweryfikować, chociażby za pomocą testów lub też poprzez zastosowanie innych narzędzi (statystyka R/S, periodogram itp.; zob. Karagiannis, Faloutsos i Riedi, 2002), pozwalających estymować współczynnik Hursta. Należy jednak wyraźnie podkreślić, iż celem niniejszego opracowania nie było precyzyjne szacowanie współczynnika samopodobieństwa, lecz zwrócenie uwagi na pewne fakty.

W sytuacji gdy prognozowane zjawisko tworzy samopodobny proces stochastyczny o długiej pamięci, to można tym swobodniej prognozować, i co więcej, na dłuższy horyzont czasowy, im wyższy jest wykładnik Hursta. Dzieje się tak dlatego, że wykresy trajektorii procesów samopodobnych o długiej pamięci są mało „poszarpane” i dość wyraźnie rysujące się w nich trendy są w niewielkim stopniu zaburzane przez „niespodziewane” odstępstwa (wszystko to za sprawą istnienia dodatniej korelacji przyrostów). Trendy więc można modelować na różne sposoby, a następnie poprzez ekstrapolację trendów dokonywać predykcji.

Jeżeli natomiast prognozowane zjawisko tworzy samopodobny proces stochastyczny o krótkiej pamięci, to trajektorie są tym bardziej „poszarpane”, im niższy jest wykładnik Hursta. Co więcej, na ogół nie widać żadnych wyraźnie zarysowanych trendów, a jeśli już są widoczne, to albo w bardzo małych skalach i bardzo różnie skierowane, albo też na trochę dłuższy trend nakłada się bardzo oscylujący i chaotyczny szum (jest to skutkiem istnienia ujemnej korelacji przyrostów). Zatem widoczne stają się, że w tej sytuacji predykcja trafia na wielki „opór materii”.

Wracając do rozważonych danych statystycznych i przeprowadzonej dla nich próby poszukiwania długoterminowej zależności, stwierdzić należy, że owszem można i nawet powinno się podejmować próby prognozowania, jednak postawiona hipoteza o krótkiej pamięci stawia pod znakiem zapytania jakość i adekwatność tych prób.

Trzeba także dodać, że proces samopodobny posiada z definicji stały, niezmienny w czasie wykładnik Hursta. Konsekwencją tego jest to, iż chcąc z dużą dokładnością estymować współczynnik samopodobieństwa, należy sięgać do możliwie najdłuższych szeregów czasowych. Z drugiej jednak strony empiryczne szeregi ekonomiczne zdają się (w intuicyjnym sensie tego pojęcia) charakteryzować zmiennością pamięci w zależności od wyboru

punktu czasu, z perspektywy którego bada się pamięć. Spośród rozważonych szeregów brakiem stałości w największym stopniu najprawdopodobniej charakteryzują się notowania Żywca (wyraźna zmiana typu oscylacji począwszy od obserwacji nr 400).

Rzeczą najistotniejszą jest zatem umiejętny dobór długości badanego szeregu, by właściwie wyważyć pomiędzy dokładnością oceny współczynnika samopodobieństwa a odpowiedniością tejże oceny względem aktualnego stanu przebiegu modelowanego zjawiska. Wielką bolączką jest fakt, że obu tych postulatów niestety nie da się spełnić równocześnie.

6. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione poszukiwania długoterminowej zależności w wystarczający sposób pokazały, że falki w wielu sytuacjach mogą być świetnym narzędziem, pozwalającym przeprowadzać szeroko rozumianą analizę danych statystycznych. Na dodatek mogą stać się narzędziem, będącym alternatywą dla klasycznych metod, alternatywą raczej uzupełniającą, aniżeli wykluczającą uprzednio stosowane metody. Co więcej, łatwość posługiwania się falkami, mnogość potencjalnych zastosowań, dostępność gotowych falkowych pakietów obliczeniowych pozwalają falkom zająć znaczącą pozycję pośród innych narzędzi.

LITERATURA

- Abry P., Flandrin P., Taqqu M.S., Veitch D. (2002), *Self-Similarity and Long-Range Dependence through the Wavelet Lens*. Theory and Applications of Long-Range Dependence, Birkhäuser.
- Embrechts P., Maejima M. (2002), *Selfsimilar Processes*, Princeton University Press, Princeton.
- Karagiannis T., Faloutsos M., Riedi R.H. (2002), *Long-Range Dependence: Now You See It Now You Don't!*, Global Internet Conference.
- Narodowy Bank Polski: <http://www.nbp.pl/statystyka/index.html>.
- Percival D.B., Walden A.T. (2000), *Wavelet Methods for Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Serwis Finansowy Money.pl: <http://www.money.pl/gielder/archiwum/spolki/>.

*Michał Stachura***WAVELET METHODS FOR DETECTING LONG-RUN DEPENDENCE
OF STOCK INDEXES AND EXCHANGE RATES****Summary**

The paper treats of an issue that is interrelated to the prediction inseparably. Namely if one models an economic variable with the aid of a stochastic process one should realize to what extent the past behaviour of the process would remain the same in the future. Thereby the notions of the self-similarity and of the long-run dependence may be used to solve this problem. And the accuracy of the prediction can be confirmed or impaired this way.

An attempt of the Hurst exponent estimation with the use of wavelet analysis tools is contained in the article. Five empirical indexes are considered and for all of them the estimation yields the hypothesis of short memory. Therefore even if the prediction is necessary and desirable one should be very sceptical and careful when forecasting the deliberated data.