

Joanna Bruzda*

TESTOWANIE NIELINIOWEJ INTEGRACJI I KOINTEGRACJI PRZYKŁAD WERYFIKACJI HIPOTEZY PARYTETU SIŁY NABYWCZEJ

Streszczenie. W artykule podnosi się problem badania nieliniowych zależności kointegracyjnych. Choć modele liniowe mają swoje zalety związane z prostotą analizy i obliczeń, okazują się zbyt dużym uproszczeniem rzeczywistości ekonomicznej. Po pierwsze bowiem zależności w długim okresie mogą przybrać postać nieliniową, po drugie zaś liniowa korekta błędem, zakładająca proporcjonalność i symetrię dostosowania do długookresowego położenia równowagi, nie uwzględnia tego, że system może korygować duże odchylenia w większym stopniu niż małe lub reagować silniej na ujemne nierównowagi.

W artykule prezentuje się nowoczesne testy nieliniowej integracji i kointegracji – testy niewrażliwe lub słabo wrażliwe na monotoniczne transformacje zmiennych. Procedury te zastosowano do weryfikacji hipotezy parytetu siły nabywczej w odniesieniu do kursu dolara amerykańskiego wyrażonego w forintach, koronach czeskich oraz złotych.

Słowa kluczowe: nieliniowa integracja, nieliniowa kointegracja, nieliniowa korekta błędem.

1. WPROWADZENIE

Zagadnienia nieliniowej kointegracji i nieliniowej korekty błędem znajdują coraz większe odzwierciedlenie w literaturze ekonometrycznej. Pomimo zalet modeli liniowych związanych przede wszystkim z prostotą analizy i obliczeń, niejednokrotnie opisują one rzeczywistość ekonomiczną ze zbyt dużym uproszczeniem. Wiadomo przecież, że zależności w długim okresie mogą przybrać postać nieliniową, jak chociażby w przypadku funkcji produkcji. Z kolei liniowa korekta błędem zakłada proporcjonalność i symetrię dostosowania do długookresowego położenia równowagi, które to własności nie muszą być ogólnymi prawidłowościami. Na przykład system może korygować duże odchylenia w większym stopniu niż małe lub też reagować silniej na ujemne nierównowagi (por. Bejger i Bruzda, 2001).

* Dr, adiunkt, Katedra Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika. Autorka jest stypendystką Fundacji na rzecz Nauki Polskiej w roku 2003.

Niech X_t będzie procesem $k + 1$ – wymiarowym, tj.:

$$X_t = [X_{0t} \ X_{1t} \ \dots \ X_{kt}]$$

Zakładamy, że proces ten ma addytywny składnik losowy oraz przyjmujemy dla uproszczenia, że wykazuje on autozależność pierwszego rzędu, tzn.:

$$X_t = g(X_{t-1}) + \varepsilon_t,$$

gdzie $g(\cdot)$ jest funkcją różniczkowalną dowolnego stopnia w sposób ciągły ($g \in C^\infty$). Wówczas ogólny model nieliniowej korekty błędem ma postać:

$$\Delta X_t = \Phi[f(X_{t-1})] + \varepsilon_t \quad (1)$$

gdzie $\Phi, f \in C^\infty$ (patrz Trapani, 2001). Prostsza wersją (1) jest model

$$\Delta X_t = \Phi[\beta(X_{t-1})] + \varepsilon_t \quad (2)$$

będący modelem nieliniowej korekty błędem z liniową zależnością kointegracyjną. Modele tego typu zyskały dużą popularność w analizach ekonometrycznych (patrz np. Granger i Teräsvirta, 1993; Balke i Fomby, 1997; Escribano i Pfann, 1998; Escribano i Mira, 2002). Są one niekiedy mylnie określane jako modele nieliniowej kointegracji, podczas gdy w rzeczywistości zależność w długim okresie ma tu postać liniową.

Nieliniową zależność kointegracyjną można przedstawić w następującej ogólnej postaci:

$$f(X_{0t}, X_{1t}, \dots, X_{kt}) = \eta_t$$

W niniejszym artykule interesować nas będzie pewien przypadek szczególny powyższej zależności, a mianowicie związek postaci:

$$f_0(X_{0t}) = f_1(X_{1t}) + \dots + f_k(X_{kt}) + \eta_t \quad (3)$$

gdzie wszystkie funkcje $f_i(\cdot)$, $i = 0, \dots, k$ są jednakowo monotoniczne, tzn. wszystkie funkcje jednocześnie rosną lub maleją.

Celem tego opracowania jest zaprezentowanie nowoczesnych testów nieliniowej integracji i kointegracji – testów niewrażliwych lub słabo wrażliwych na monotoniczne transformacje zmiennych. Przy okazji zamieszczono w artykule wartości krytyczne testów Breitunga dla prób długości 100 i 120 obserwacji (w pracy Breitunga, 2001, znajdują się wartości krytyczne tylko

dla prób długości 500). Problem wykrywania nieliniowej kointegracji jest relatywnie nowym zagadnieniem współczesnej ekonometrii, a rozważania na ten temat mają jak na razie charakter teoretyczny. Niewiele jest prób aplikacji testów kointegracji nieliniowej. Opisane tutaj procedury zastosowano do weryfikacji hipotezy parytetu siły nabywczej w odniesieniu do kursów złotego, korony czeskiej, forinta i dolara amerykańskiego. Należy zwrócić uwagę, że obecność lub brak kointegracji nieliniowej ma istotne implikacje praktyczne. Mianowicie, jeśli standardowe testy (liniowej) kointegracji nie wykazują występowania długookresowych położeń równowagi, przecząc w ten sposób hipotezie PPP, to nie znaczy jeszcze, że między badanymi procesami nie występuje kointegracja – może bowiem wystąpić kointegracja nieliniowa. Zastosowanie zwykłych testów kointegracji może więc prowadzić do błędnych wniosków na temat zachowania się realnych kursów walutowych oraz na temat możliwości prognozowania zmian kursów nominalnych z wykorzystaniem modeli korekty błędem.

2. TESTOWANIE NIELINIOWEJ INTEGRACJI

Testowanie integracji odgrywa szczególną rolę w analizach ekonometrycznych. Jednakże tradycyjne testy integracji przyjmują założenia, które w praktyce mogą nie być spełnione. Na przykład tablice wartości krytycznych większości testów pierwiastka jednostkowego otrzymano przy założeniu rozkładów gaussowskich dla składników losowych. Tymczasem w wielu sytuacjach praktycznych – szczególnie w ekonometrii finansowej – rozkłady te charakteryzuje np. podwyższona kurtoza.

Innym założeniem tradycyjnej analizy integracji i kointegracji jest liniowy charakter badanej zależności. Przystępując do badania wybranych do analizy szeregów, należy najpierw rozstrzygnąć kwestię wyboru odpowiedniej transformacji zmiennych. Wybór ten jest często dokonywany arbitralnie, mogąc wpłynąć na wnioskowanie na temat obecności pierwiastka jednostkowego. Prosty przykład ilustrujący ten problem dotyczy sytuacji, w której logarytmy zmiennych są stacjonarne, same zmienne zaś są zintegrowane. W związku z tym wyraźna staje się potrzeba opracowania testów o dobrych własnościach statystycznych, które nie zależałyby od zastosowanej transformacji zmiennych. Na potrzebę tę wskazują Granger i Hallman (1991b), proponując stosowanie testu rangowego, niezależnego od monotonicznych transformacji zmiennych.

Innym powodem sprawiającym, że test rang może być użytecznym narzędziem w analizie ekonometrycznej, jest redukcja wpływu zmian

strukturalnych i obserwacji odstających. W modelu błędzenia przypadkowego innowacje wywierają trwały wpływ na wartości zmiennej ekonomicznej, co sprawia, iż zmiany strukturalne mogą być modelowane poprzez procesy z możliwymi obserwacjami odstającymi. Chcąc zredukować wpływ zmian strukturalnych na wnioskowanie o występowaniu pierwiastków jednostkowych, należy zastosować uodpornione wersje standardowych testów integracji. Rangowy test na obecność pierwiastka jednostkowego, niezależny od rozkładu składnika losowego, a zależny jedynie od rang różnic analizowanego szeregu, opracowali Breitung i Gourieroux (1997). Test ten służy do weryfikacji następującego zestawu hipotez:

$$H_0: X_t = b + X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (4)$$

$$H_1: X_t = c + bt + \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad |\alpha| < 1 \quad (5)$$

Niech R_t będą równomiernie rozłożonymi rangami zróżnicowanych obserwacji:

$$R_t = \text{Ranga}(\Delta x_t \text{ pomiędzy } \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_T) - \frac{T+1}{2} \quad (6)$$

gdzie T jest długością szeregu czasowego. Wówczas definiujemy za Breitungiem i Gourieroux następujące dwie statystyki testowe:

$$\lambda_T(\text{uni}) = 12T^{-4} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t R_s \right)^2 \quad (7)$$

$$\lambda_T(\text{INS}) = 12T^{-4} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t R_s^* \right)^2 \quad (8)$$

gdzie R_s^* powstają w wyniku nieliniowej transformacji rang postaci:

$$R_s^* = \Phi^{-1}(T^{-1} R_s + 0,5) \quad (9)$$

a Φ jest dystrybuantą rozkładu normalnego¹. Wartości krytyczne testów opartych na tych statystykach znajdują się w cytowanej pracy Breitunga i Gourieroux. Otrzymano je przy założeniu, że składnik losowy w modelu (4) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie ze średnią 0. Jest jednak możliwe rozluźnienie tego założenia, dopuszczające

¹ Nieliniowa transformacja tego typu określana jest jako odwracanie wyników normalnych (*inverse normal scores* – INS).

heteroskedastyczność lub skorelowanie składnika losowego. W takim przypadku należy podzielić statystykę λ_T przez tzw. „długookresową wariancję” σ_ρ^2 postaci:

$$\sigma_\rho^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} E(S_T^2) \quad (10)$$

gdzie:

$$S_t = \sum_{s=1}^l R_s$$

Zgodny estymator wariancji σ_ρ^2 otrzymuje się na podstawie reszt z regresji rang R_t względem S_{t-1} w następujący sposób (patrz np. Kwiatkowski i in., 1992):

$$s^2(l) = T^{-1} \sum_{t=1}^T e_t^2 + 2T^{-1} \sum_{s=1}^l w(s, l) \sum_{t=s+1}^T e_t e_{t-s} \quad (11)$$

gdzie $w(s, l)$ jest opcjonalną funkcją wagową, np. w postaci okna Bartletta

$$w(s, l) = 1 - \frac{s}{l+1}$$

gwarantującego nieujemność $s^2(l)$ (Newey i West, 1987). Hipoteza zerowa zakładająca nieliniową integrację procesu, czyli przyjmująca, że monotonicznie przekształcony szereg jest procesem błędzenia przypadkowego, jest odrzucana, gdy wartość statystyki (7) bądź (8) jest mniejsza od odpowiedniej wartości krytycznej.

Test rang Breitunga i Gourieroux jest niewrażliwy na rozkład składnika losowego oraz jest odporny na występowanie obserwacji nietypowych i załamań strukturalnych w wyrazie wolnym. Test ten można traktować jako interesujące uzupełnienie standardowych procedur testowania pierwiastka jednostkowego, w przypadku gdy nie jest znana nieliniowa transformacja zmiennych – rozmiar tego testu jest wówczas bliski rozmiarowi nominalnemu. Transformacja INS dodatkowo poprawia moc testu w wielu przypadkach.

3. TESTOWANIE NIELINIOWEJ KOINTEGRACJI

Teorie ekonomiczne sugerują częstokroć, że zależności pomiędzy zmiennymi ekonomicznymi mają charakter nieliniowy. Tak jest chociażby w przypadku krzywej Phillipsa czy funkcji produkcji. Nieliniowe mogą być przy tym zarówno dostosowania do długookresowego położenia równowagi, jak

i same relacje długookresowe pomiędzy procesami ekonomicznymi. W związku z tym pojawia się problem badania, czy dane zmienne występują ze sobą w (być może nieliniowej) zależności kointegracyjnej i czy zależność ta jest w istocie nieliniowa.

Do rozwiązania tego problemu przybliża test rang, który jest indyferentny względem monotonicznych transformacji zmiennych (Breitung, 2001). Przypuśćmy, że dwa procesy

$$Y_{1t} = f_1(X_{1t}), \quad Y_{2t} = f_2(X_{2t})$$

są zintegrowane pierwszego rzędu, gdzie funkcje $f_1(\cdot)$ i $f_2(\cdot)$ są rosnące, ale bliżej nieznane. Zakładamy, że tylko X_{1t} i X_{2t} są obserwowalne. Mówimy, że pomiędzy X_{1t} i X_{2t} istnieje nieliniowa kointegracja, jeśli różnica

$$\eta_t = Y_{2t} - Y_{1t}$$

jest procesem stacjonarnym. Zastępujemy wyjściowe szeregi ciągami rang postaci:

$$R_T(x_{1t}) = \text{Ranga}(x_{1t} \text{ pomiędzy } x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1T}) = R_t(y_{1t}) \quad (12)$$

$$R_T(x_{2t}) = \text{Ranga}(x_{2t} \text{ pomiędzy } x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2T}) = R_t(y_{2t})$$

Niezmienniczość rang względem monotonicznych transformacji sprawia, że jeśli np. Y_{1t} jest procesem błędzenia przypadkowego, to ciąg $R_T(x_{1t})$ będzie się zachowywał jak rangowy *random walk*. Statystykami testowymi w teście Breitunga są dwie miary odległości postaci:

$$\kappa = T^{-1} \sup_t |d_t| \quad (13)$$

$$\xi = T^{-3} \sum_{t=1}^T d_t^2 \quad (14)$$

gdzie $d_t = R_T(x_{2t}) - R_T(x_{1t})$. Hipoteza zerowa o braku (liniowej lub nieliniowej) kointegracji między X_{1t} i X_{2t} jest odrzucana, jeśli wartości statystyk są mniejsze od wartości krytycznych uzyskanych w drodze symulacji.

Statystyki κ i ξ są konstruowane przy założeniu, że procesy Y_{1t} i Y_{2t} są niezależne. Jeśli weźmiemy pod uwagę możliwą korelację pomiędzy tymi procesami, statystyki (13) i (14) należy skorygować w odpowiedni sposób. Breitung (2001) proponuje dwa rodzaje korekty w zależności od wartości współczynnika korelacji ρ pomiędzy Y_{1t} i Y_{2t} . Jeśli współczynnik ρ jest mały, skorygowane statystyki testowe przyjmują postać:

$$\kappa^* = \frac{\kappa}{\hat{\sigma}_{\Delta d}} \quad (15)$$

$$\xi^* = \frac{\xi}{\hat{\sigma}_{\Delta d}^2} \quad (16)$$

gdzie

$$\hat{\sigma}_{\Delta d}^2 = T^{-2} \sum_{t=2}^T (d_t - d_{t-1})^2$$

Jeśli wartość bezwzględna ρ jest bliska jedności, to statystyki κ^* i ξ^* powinny być zmodyfikowane w następujący sposób (przy założeniu 5-procentowego poziomu istotności):

$$\kappa^{**} = \frac{\kappa^*}{1 - 0,174(\rho^R)^2} \quad (17)$$

$$\xi^{**} = \frac{\xi^*}{1 - 0,462\rho^R} \quad (18)$$

gdzie ρ^R jest współczynnikiem korelacji dla różnic rang postaci:

$$(19)$$

Statystyki (17) i (18) mają ten sam graniczny rozkład co statystyki (14) i (15).

Breitung (2001) proponuje również uogólnienie powyższego testu kointegracji na przypadek $k + 1$ zmiennych w postaci testu dwustronnego, tj. takiego, w którym odpowiednie funkcje są albo jednocześnie rosnące, albo jednocześnie malejące. Przypuśćmy, że procesy

$$Y_{0t} = f_0(X_{0t}), Y_{1t} = f_1(X_{1t}), \dots, Y_{kt} = f_k(X_{kt})$$

są zintegrowane rzędu 1, a funkcje $f_j(\cdot)$, $j = 0, 1, \dots, k$ są funkcjami monotonicznymi. Niech

$$R_T(x_t) = [R_T(x_{1t}), \dots, R_T(x_{kt})]'$$

będzie wektorem wymiaru $k \times 1$, a b_T wektorem ocen parametrów modelu regresji $R_T(x_{0t})$ względem $R_T(x_t)$. Wykorzystując reszty

$$u_t^R = R_T(x_{0t}) - b_T^* R_T(x_t)$$

wielowymiarową statystykę rangową można zapisać jako:

$$\Xi^*[k] = \frac{T^{-3} \sum_{t=1}^T (u_t^R)^2}{\hat{\sigma}_{\Delta u}^2} \quad (20)$$

gdzie wyrażenie

$$\hat{\sigma}_{\Delta u}^2 = T^{-2} \sum_{t=2}^T (u_t^R - u_{t-1}^R)^2$$

stanowi korektę ze względu na możliwą korelację pomiędzy procesami.

Jeśli test rang wskazuje na występowanie stabilnej zależności długookresowej między procesami, interesująca staje się odpowiedź na pytanie, czy zależność ta jest liniowa, czy nieliniowa. Rozważmy nieliniową regresję postaci:

$$X_{2t} = \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + f(X_{1t}) + \eta_t \quad (21)$$

Jeśli η_t jest białym szumem o rozkładzie normalnym, a X_{1t} jest procesem egzogenicznym, to statystyka testowa służąca do rozstrzygnięcia, czy badana zależność ma charakter liniowy, jest otrzymywana jako wartość TR^2 z estymacji metodą najmniejszych kwadratów regresji postaci:

$$u_t = c_0 + c_1 X_{1t} + c_2 R_T(X_{1t}) + \varepsilon_t \quad (22)$$

gdzie u_t są resztami z regresji X_{2t} względem X_{1t} i stałej. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej $H_0: c_2 = 0$ statystyka ta ma rozkład $\chi^2(1)$.

Powyższy test można zmodyfikować na przypadek autokorelacji w resztach i endogenicznych regresorów. W przypadku prawdziwości hipotezy o liniowej kointegracji ma miejsce zależność

$$X_{2t} = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j X_{2,t-j} + \gamma_1 X_{1t} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \pi_j \Delta X_{1,t-j} + \eta_t \quad (23)$$

Test na nieliniową kointegrację uzyskujemy zastępując sumy nieskończone w (23) sumami skończonymi i wyliczając statystykę TR^2 z regresji reszt u_t z (23) względem regresorów z (23) oraz względem $R_T(X_{1t})$. Statystyka ta ma wówczas asymptotyczny rozkład χ^2 z jednym stopniem swobody.

Jak wskazują wyniki analiz symulacyjnych (Breitung, 2001), test kointegracji dla rang może mieć znacznie większą moc od swych parametrycznych

odpowiedników, w przypadku gdy zależność w długim okresie jest nieliniowa. Efekt ten w cytowanej pracy zaobserwowano dla kointegracji progowej (*threshold cointegration*).

4. WERYFIKACJA HIPOTEZY PARYTETU SIŁY NABYWOCZEJ

Hipoteza długookresowego parytetu siły nabywczej pieniądza (*long-run purchasing power parity* – PPP) głosi, iż istnieje w długim okresie zależność postaci:

$$E_{A/B} = \frac{P_A}{P_B} \quad (24)$$

gdzie: $E_{A/B}$ – kurs waluty kraju B w jednostkach waluty kraju A ; P_A – poziom cen w kraju A ; P_B – poziom cen w kraju B .

Chociaż empiryczne testy weryfikujące tę hipotezę pozostawiają ów problem, jak dotąd, nierozwiązany (patrz Strzała, 2002), większość prac z tego zakresu dokumentuje jednak brak zależności postaci (24) – por. Osińska (2000, s. 160 i n.). Wśród przyczyn takiego stanu rzeczy wymienia się:

- istnienie barier w handlu oraz dóbr niewymienialnych (konsumowanych tylko przez rezydentów);
- brak wolnej konkurencji;
- różnice w pomiarze poziomu cen, wynikające z różnej konstrukcji koszyka dóbr konsumpcyjnych.

W pracach empirycznych hipoteza długookresowego parytetu siły nabywczej oznacza istnienie zależności kointegracyjnej postaci:

$$E_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t^* + \alpha_2 P_t \quad (25)$$

gdzie E_t jest logarytmem nominalnego kursu walutowego, P_t^* i P_t są logarytmami odpowiednio krajowego i zagranicznego poziomu cen, natomiast wyraz wolny ujmuje różnice w jednostkach miary. W wersji bardziej restrykcyjnej testuje się występowanie zależności kointegracyjnej pomiędzy parą procesów: logarytmem kursu walutowego i logarytmem względnego poziomu cen, tj. występowanie zależności długookresowej

$$E_t = \alpha_0 + \alpha_1 (P_t^* - P_t) \quad (26)$$

W niniejszym artykule skupimy uwagę na weryfikacji hipotezy PPP w odniesieniu do kursu dolara amerykańskiego wyrażonego w forintach, koronach czeskich oraz złotych. Dysponowano następującymi szeregami czasowymi miesięcznych obserwacji za okres 1993.01–2002.09: HUF, CZK,

PLN – kursy dolara USA odpowiednio w forintach, koronach czeskich i złotych z banków centralnych Węgier, Czech i Polski na koniec każdego miesiąca: *IUSA*, *IHU*, *ICZ*, *IPL* – narastające poziomy cen dóbr konsumpcyjnych (CPI) w USA, na Węgrzech, w Czechach i w Polsce, gdzie za okres bazowy przyjęto grudzień 1992 r.² Szeregi te (117 obserwacji) poddano logarytmowaniu, a następnie przystąpiono do badania ich własności. W tabelach 1–4 są zawarte wyniki testów integracji wspomnianych 7 procesów oraz procesów względnych poziomów cen ($P_t^* - P_t$). Zastosowano dwie procedury testowe: rozszerzony test Dickeya-Fullera (ADF) oraz test rang Breitunga – Gourieroux (BG).

Tabela 1. Wyniki testu ADF

<i>HUF</i>	<i>CZK</i>	<i>PLN</i>	<i>IUSA</i>	<i>IHU</i>	<i>ICZ</i>	<i>IPL</i>	<i>IHU-IUSA</i>	<i>ICZ-IUSA</i>	<i>IPL-IUSA</i>
Równanie testowe z wyrazem wolnym									
-2,80	-1,37	-2,95	-0,72	-3,55	-3,43	-7,43	-3,56	-3,13	-5,07
Równanie testowe z trendem liniowym									
1,08	-1,31	-1,72	-1,83	0,25	0,14	-2,56	0,27	0,01	-3,40

Uwaga: wartości krytyczne przy 5-procentowym poziomie istotności: dla równania z wyrazem wolnym -2,89, dla równania z trendem -3,45.

Tabela 2. Wyniki testu BG

<i>HUF</i>	<i>CZK</i>	<i>PLN</i>	<i>IUSA</i>	<i>IHU</i>	<i>ICZ</i>	<i>IPL</i>	<i>IHU-IUSA</i>	<i>ICZ-IUSA</i>	<i>IPL-IUSA</i>
Poziomy procesów									
1,548	0,035	2,241	0,155	3,174	3,809	5,782	3,183	3,638	5,975
2,169	0,054	2,221	0,164	3,226	3,642	5,882	3,271	3,570	6,050
Pierwsze różnice									
0,008	0,045	0,003	0,136	0,056	0,240	0,003	0,106	0,111	0,002
0,003	0,026	0,009	0,024	0,060	0,094	0,011	0,066	0,047	0,001
Drugie różnice									
	0,001		0,003	0,074	0,528		0,066	0,068	
	0,000		0,004	0,028	0,055		0,017	0,025	

Uwaga: jako pierwsze podano wartości $\lambda_T(\text{uni})$, wiersze pod spodem zawierają statystyki $\lambda_T(\text{INS})$. Wartości krytyczne testów przy poziomie istotności $\alpha = 5\%$ wynoszą odpowiednio 0,037 i 0,038.

² Dane te pochodzą ze stron internetowych odpowiednich banków centralnych oraz urzędów statystycznych.

Bazując na regresji z trendem, wszystkie badane procesy okazały się zintegrowane w stopniu co najmniej równym 1. Wyników testowania integracji wyższych rzędów nie przytacza się – wskazują one jednoznacznie, że w szeregach tych brak jest drugiego pierwiastka jednostkowego. Dodatkowo w większości szeregów (*PLN*, *ICZ*, *IHU*, *IPL*, *IHU-IUSA*, *ICZ-IUSA*, *IPL-IUSA*) pierwsze różnice wykazują wyraźny trend liniowy. Pierwsze różnice są więc procesami trendowo-stacjonarnymi. Wobec tego pierwszy warunek występowania kointegracji (te same rzędy integracji) jest spełniony.

Tabela 3. Wyniki testu Johansena

Wartości własne λ_i	Statystyka śladu LR	Wartość krytyczna dla $\alpha = 5\%$	Wartość krytyczna dla $\alpha = 1\%$	Hipotetyczna liczba wektorów kointegrujących
1	2	3	4	5
<i>HUF, IHU-IUSA</i>				
0,234616	37,35029	15,41	20,04	Brak **
0,055791	6,601835	3,76	6,65	Przynajmniej 1 *
<i>CZK, ICZ-IUSA</i>				
0,087614	13,42956	15,41	20,04	Brak
0,024774	2,884911	3,76	6,65	Przynajmniej 1
<i>PLN, IPL-IUSA</i>				
0,291204	43,99887	15,41	20,04	Brak **
0,037682	4,417231	3,76	6,65	Przynajmniej 1 *
<i>HUF, IHU, IUSA</i>				
0,129412	24,64713	29,68	35,65	Brak
0,061623	8,848251	15,41	20,04	Przynajmniej 1
0,013915	1,597466	3,76	6,65	Przynajmniej 2
<i>CZK, ICZ, IUSA</i>				
0,103901	16,23390	29,68	35,65	Brak
0,032128	3,727576	15,41	20,04	Przynajmniej 1
4,31E-05	0,004912	3,76	6,65	Przynajmniej 2
<i>PLN, IPL, IUSA</i>				
0,312980	50,48665	29,68	35,65	Brak **
0,058702	7,316628	15,41	20,04	Przynajmniej 1
0,003122	0,359647	3,76	6,65	Przynajmniej 2

Założenie: obecność trendu liniowego w danych i wyrazu wolnego w wektorze kointegrującym.

Objaśnienie: * oznacza odrzucenie hipotezy zerowej na poziomie istotności 5%, natomiast

** – na poziomie istotności 1%.

Nieco innych wniosków dostarczają wyniki testu BG. W tabeli 2 zamieszczono wartości dwóch statystyk testowych także dla pierwszych różnic procesów, a w wątpliwych przypadkach również dla drugich różnic.

Według testu rang Breitunga-Gourieroux wszystkie badane procesy są zintegrowane rzędu co najmniej 1³. W przypadku dwóch spośród czterech badanych wskaźników inflacji stacjonarność osiągnięto dopiero po dwukrotnym zróżnicowaniu. W myśl tego testu również relatywne poziomy cen w dwóch przypadkach zawierają dwa pierwiastki jednostkowe. Dodatkowo wartości statystyki λ^T (uni) poddają nieco w wątpliwość możliwość osiągnięcia stacjonarności poprzez różnicowanie w przypadku czterech przeanalizowanych szeregów.

Pamiętając o powyższych wątpliwościach, przystąpiono następnie do badania kointegracji procesów testami Johansena i Breitunga. Wyniki zawierają tabele 3 i 4. W teście Johansena przyjęto liczby opóźnień w modelach VAR, wynikające z zastosowania kryterium Akaike'a.

Tabela 4. Wyniki testu Breitunga

<i>HUF, IHU-IUSA</i>	$\kappa^{**} = 2,7103;$	$\xi^{**} = 2,3093;$	$\Xi^*[1] = 0,0478$
<i>CZK, ICZ-IUSA</i>	$\kappa^{**} = 1,0634;$	$\xi^{**} = 0,4259;$	$\Xi^*[1] = 0,0687$
<i>PLN, IPL-IUSA</i>	$\kappa^{**} = 1,4981;$	$\xi^{**} = 0,6760;$	$\Xi^*[1] = 0,0232$
<i>HUF, IHU, IUSA</i>	$\Xi^*[2] = 0,0483$		
<i>CZK, ICZ, IUSA</i>	$\Xi^*[2] = 0,0725$		
<i>PLN, IPL, IUSA</i>	$\Xi^*[2] = 0,0220$		

Tabela 5. Wartości krytyczne testu Breitunga dla $T = 100$

Statystyka	Poziomy istotności		
	10%	5%	1%
κ	0,6200	0,5300	0,4000
ξ	0,0594	0,0429	0,0233
κ^*, κ^{**}	0,4031	0,3685	0,3170
ξ^*, ξ^{**}	0,0270	0,0223	0,0157
$\Xi^*[1]$	0,0235	0,0197	0,0149
$\Xi^*[2]$	0,0226	0,0192	0,0143

Uwaga: symulację przeprowadzono na podstawie 10 000 realizacji niezależnych procesów błędzenia przypadkowego.

³ Zgodnie z sugestią Neweya i Westa parametr l (truncation lag) we wzorze (11) ustalono jako część całkowitą wyrażenia $4(N/100)^{2/9}$.

Wyniki testu Johansena wskazują, że tylko w jednym przypadku ma miejsce kointegracja procesów – w układzie *PLN*, *IPL* i *IUSA* występuje jeden wektor kointegrujący. Natomiast dwukrotnie najlepszym modelem dla opisu własności wektora procesów okazał się VAR z trendem dla poziomów zmiennych.

W pracy Breitunga (2001) są zawarte wartości krytyczne testu kointegracji nieliniowej dla próby długości 500 obserwacji. Ponieważ w niniejszym artykule wykorzystano szeregi długości 117 obserwacji, należało przeprowadzić symulację w celu uzyskania właściwych wartości krytycznych. Wyniki symulacji dla prób długości 100 i 120 obserwacji zawarte są w tabelach 5 i 6.

Tabela 6. Wartości krytyczne testu Breitunga dla $T = 120$

Statystyka	Poziomy istotności		
	10%	5%	1%
κ	0,6167	0,5333	0,4000
ξ	0,0587	0,0421	0,0229
κ^*, κ^{**}	0,3993	0,3685	0,3201
ξ^*, ξ^{**}	0,0263	0,0214	0,0151
$\Xi^*[1]$	0,0231	0,0195	0,0145
$\Xi^*[2]$	0,0221	0,0188	0,0142

Uwaga: symulację przeprowadzono na podstawie 10 000 realizacji niezależnych procesów błędzenia przypadkowego.

W teście Breitunga odrzucono hipotezę o braku zależności kointegracyjnej na poziomie istotności 10% jedynie w przypadku następujących dwóch zestawów zmiennych: *PLN*, *IPL*–*IUSA* oraz *PLN*, *IPL*, *IUSA*. Wobec tego powstaje pytanie, czy zależności kointegracyjne są w owych dwóch przypadkach w istocie nieliniowe. Chcąc się o tym przekonać, wykonano testy nieliniowości zależności kointegracyjnej zgodnie z procedurą opisaną wzorami (21)–(23). W przypadku procesów *PLN*, *IPL*–*IUSA* oszacowano najpierw regresję postaci:

$$PLN_t = \gamma_0 = \gamma_1 PLN_{t-1} + \gamma_2 (IPL_t - IUSA_t) + \eta_t \quad (27)$$

a następnie testowano istotność parametru c_3 w regresji

$$u_t = c_0 + c_1 PLN_{t-1} + c_2 (IPL_t - IUSA_t) + c_3 R_T(IPL_t - IUSA_t) + \varepsilon_t \quad (28)$$

gdzie u_t są resztami z regresji (27). Wartość statystyki TR^2 wyniosła 0,587 przy wartości krytycznej $\chi^2_{0,05}$. Stąd nie było podstaw do odrzucenia hipotezy

głoszącej, że zależność kointegracyjna jest liniowa. Natomiast w układzie trzech zmiennych *PLN*, *IPL*, *IUSA* oszacowano najpierw regresję postaci:

$$PLN_t = \gamma_0 + \gamma_1 PLN_{t-1} + \gamma_2 IPL_t + \gamma_3 IUSA_t + \eta_t \quad (29)$$

a następnie testowano łączną istotność parametrów c_4 i c_5 w regresji

$$u_t = c_0 + c_1 PLN_{t-1} + c_2 IPL_t + c_3 IUSA_t + c_4 R_T(IPL_t) + c_5 R_T(IUSA_t) + \varepsilon_t \quad (30)$$

gdzie, jak poprzednio, u_t są resztami z regresji (29). Wartość statystyki TR^2 wyniosła 1,718 przy wartości krytycznej $\chi^2_{0,05}(2) = 5,991$. Tak jak w poprzednim przypadku należy przyjąć, że analizowana zależność kointegracyjna ma postać liniową.

Przedstawione wyniki potwierdzają wnioski płynące z udokumentowanych badań empirycznych dotyczących hipotezy parytetu siły nabywczej pieniądza, pozwalając stwierdzić, iż hipoteza ta na ogół nie zachodzi (patrz np. Taylor, 1988; Mark, 1990, którzy prezentują wyniki badań wykorzystujących koncepcję liniowej kointegracji procesów). Jeśli w pewnym przypadku odrzucamy hipotezę o braku kointegracji i badamy nieliniowość tej zależności w sensie wzoru (3), to okazuje się ona w istocie zależnością liniową.

5. PODSUMOWANIE

Test nieliniowej kointegracji Breitunga jest interesującym narzędziem służącym do wykrywania zależności długookresowych pomiędzy procesami ekonomicznymi, zależności, które mogą mieć w ogólności postać nieliniową. Test ten można również traktować jako narzędzie identyfikacji nieliniowości, które może być pomocne w specyfikacji nieliniowych modeli dla procesów stochastycznych. W szczególności procedura zaproponowana przez Breitunga pozwala ocenić, czy w konkretnym przypadku mamy do czynienia z kointegracją liniową czy też nieliniową. Należy jednak zwrócić uwagę, że zaprezentowana metodologia jest skuteczna w wykrywaniu tylko pewnej szczególnej postaci nieliniowej zależności długookresowej – mianowicie postaci (3) – i nie jest ona użyteczna dla innych, ogólniejszych form nieliniowości.

Zaprezentowane wyniki empiryczne potwierdzają wnioski płynące z literatury ekonometrycznej, dokumentujące, że hipoteza PPP na ogół nie zachodzi. W literaturze z zakresu weryfikacji hipotezy parytetu siły nabywczej bazuje się najczęściej na koncepcji kointegracji liniowej (patrz np. Mark, 1990; Taylor, 1988). Wnioski płynące z dotychczasowych badań zostają więc wzmocnione, gdyż rozluźnienie założenia o liniowości kointegracji nie

przeczy akceptowanym wynikom badań nad hipotezą PPP. Nominalne kursy walut mogą trwale odchyłać się od swych parytetów, a kursy realne okazują się procesami niestacjonarnymi typu *random walk*, trudnymi w prognozowaniu.

Wykorzystanie testów kointegracji nieliniowej nie ogranicza się bynajmniej do badania hipotezy parytetu siły nabywczej. Wśród innych potencjalnych zastosowań tych testów w prognozowaniu i podejmowaniu decyzji na rynkach finansowych należy wymienić testowanie innych modeli kursów walutowych (patrz Meese i Rose, 1991; Sarno i Taylor, 2002, s. 97, i n.), modeli wartości zaktualizowanej, efektywności rynków finansowych czy racjonalnych bąbli. Testy te mają zastosowanie wszędzie tam, gdzie tradycyjnie wykorzystywało się analizę kointegracji liniowej, stanowiąc istotne uzupełnienie metodologii ekonometrycznej i ważne narzędzie w prognozowaniu i podejmowaniu decyzji finansowych. Obecność kointegracji nieliniowej świadczy bowiem o występowaniu zależności przyczynowej przynajmniej w jednym kierunku i umożliwia konstrukcję narzędzi prognostycznych w postaci modeli korekty błędem.

LITERATURA

- Balke N.S., Fomby T.B. (1997), *Threshold Cointegration*, „International Economic Review”, 38.
- Bejger S., Bruzda J. (2001), *Wykorzystanie asymetrii reakcji cenowych do badania konkurencyjności branży – przykład polskiej branży petrochemicznej*, Materiały VII Ogólnopolskiego Seminarium Naukowego nt. *Dynamiczne modele ekonometryczne*, Toruń.
- Breitung J. (2000), *Structural Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Habilitation Thesis, Humbolt University, Berlin.
- Breitung J. (2001), *Rank Tests for Nonlinear Cointegration*, „Journal of Business and Economic Statistics”, 19(3).
- Breitung J., Gouriéroux C. (1997), *Rank Tests for Unit Roots*, „Journal of Econometrics”, 81.
- Escribano A., Mira S. (2002), *Nonlinear Error Correction Models*, „Journal of Time Series Analysis”, 23(5).
- Escribano A., Pfann G.A. (1998), *Non-Linear Error Correction, Asymmetric Adjustment and Cointegration*, „Economic Modelling”, 15.
- Franses P.H., McAleer M. (1998), *Testing for Unit Roots and Non-Linear Transformations*, „Journal of Time Series Analysis”, 19(2).
- Granger C.W.J. (1995), *Modelling Nonlinear Relationships between Extended-Memory Variables*, „Econometrica”, 63(2).
- Granger C.W.J., Hallman J.J. (1991a), *Long Memory Processes with Attractors*, „Oxford Bulletin of Economics and Statistics”, 53.
- Granger C.W.J., Swanson N. (1996), *Future Developments in the Study of Cointegrated Variables*, „Oxford Bulletin of Economics and Statistics”, 58(3).
- Granger C.W.J., Teräsvirta T. (1993), *Modelling Nonlinear Economic Relationships*, Oxford University Press, Oxford.
- Kwiatkowski D., Phillips P.C.B., Schmidt P., Shin Y. (1992), *Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root*, „Journal of Econometrics”, 54.

- Mark N.C. (1990), *Real and Nominal Exchange Rates in the Long Run: An Empirical Investigation*, „Journal of International Economics”, 28.
- Meese R.A., Rose A.K. (1991), *An Empirical Assessment of Non-Linearities in Models of Exchange Rates Determination*, „Review of Economic Studies”, 58.
- Newey W.K., West K.D. (1987), *A Simple Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix*, „Econometrica”, 55.
- Osińska M. (2000), *Ekonometryczne modelowanie oczekiwań gospodarczych*, UMK, Toruń.
- Sarno L., Taylor M.P. (2002), *The Economics of Exchange Rates*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Strzała K. (2002), *Weryfikacja hipotez makroekonomicznych – ewolucja podejść*, [w:] Kufel T., Piłatowska M., (red.), *Analiza ekonomicznych szeregów czasowych*, UMK, Toruń.
- Taylor M.P. (1988), *An Empirical Examination of Long-Run Purchasing Power Parity Using Cointegration Techniques*, „Applied Economics”, 20.
- Trapani L. (2001), *Nonlinear ECMS: A Dynamical System Approach*, Referat prezentowany na seminarium naukowym Dipartimento di Economia, Università dell'Insubria, Varese, <http://eco.uninsubria.it/dipeco/seminari.htm>.

Joanna Bruzda

NON-LINEAR INTEGRATION AND COINTEGRATION TESTING AN EXAMPLE OF VERIFICATION OF THE PPP HYPOTHESIS

Summary

In the paper the problem of investigation of non-linear cointegrating relationships is analysed. Though linear models have their advantages connected with simplicity of analysis and calculations, they turn out to be too large simplification of the economic reality. Firstly dependencies in the long run can take a non-linear form; secondly meanwhile the linear error correction, founding the proportionality and symmetry of adaptation to the long-term equilibrium, it sets aside this that system can correct large disequilibria stronger than small or react more strongly to negative disequilibria.

In the paper the modern tests of non-linear integration and cointegration are presented – tests which are unsensitive or faintly sensitive on monotonic transformations of variables. The procedures were applied to verification of the PPP hypothesis in reference to US dollar expressed in forints, Czech crowns as well as zlotys.