

Kazimiera Guraj-Kaczmarek*, Andrzej S. Tomaszewicz**

APROKSYMACJA WARTOŚCI KRYTYCZNYCH TESTU MANNA-WHITNEYA
DLA MAŁYCH PRÓB

1. Wprowadzenie

W wielu badaniach stosowany jest nieparametryczny test Manna-Whitneya [7] dla porównania dwóch populacji. Fakt ten uzasadnia dające się zaobserwować w literaturze niesłabnące zainteresowanie własnościami statystyki tego testu. Świadczą o tym liczne artykuły dotyczące zarówno jej rozkładu przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej o równości dystrybuant badanych populacji (a więc praca na temat tablic wartości krytycznych i ich aproksymacji), jak i mocy testu.

W tym artykule prezentujemy prostszą, a zarazem dokładną aproksymację wartości krytycznych statystyki Manna-Whitneya w porównaniu z najczęściej stosowaną aproksymacją za pomocą rozkładu normalnego.

2. Podstawowe własności statystyki testu Manna-Whitneya

Niech

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

* Dr, adiunkt w Instytucie Ekonometrii i Statystyki UŁ.

** Dr hab., docent w Instytucie Ekonometrii i Statystyki UŁ.

będzie próbą złożoną z n niezależnych obserwacji wylosowanych z populacji o ciągłej dystrybuancie F ; niech

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$$

będzie próbą złożoną z n niezależnych obserwacji wylosowanych z populacji o ciągłej dystrybuancie G . Należy zweryfikować hipotezę

$$(1) \quad H_0 : F = G.$$

Statystyką testu Manna-Whitneya jest liczba U tych par (X_i, Y_j) spośród wszystkich par, dla których $X_i < Y_j$. Formalnie

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m D_{ij},$$

gdzie

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X_i < Y_j, \\ 0 & \text{jeśli } X_i > Y_j. \end{cases}$$

Równość $X_i = Y_j$ można pominąć, gdyż zgodnie z założeniem ciągłości dystrybuant

$$P(X_i = Y_j) = 0.$$

Duża liczba par $X_i < Y_j$ świadczy na rzecz hipotezy alternatywnej

$$(2) \quad H_1 : F(x) > G(x),$$

zatem dla tej hipotezy obszar krytyczny jest prawostronny. Na odwrót, w przypadku hipotezy

$$(3) \quad H_1 : F(x) < G(x),$$

obszar krytyczny jest lewostronny. Dwustronny obszar krytyczny stosuje się dla ogólniejszej hipotezy

$$(4) \quad H_1 : F(x) \neq G(x).$$

Przypomnijmy podstawowe własności rozkładu statystyki U (por. m. in. Mann, Whitney [7], Fix, Hodges [4], Shorack [9], Gibbons [5]; s. 140-150).

(a) Statystyka U przyjmuje wartości z przedziału

$$0 \leq U \leq mn.$$

(b) Rozkład statystyki U jest w tym przedziale symetryczny

$$P(U = u) = P(U = mn - u).$$

(c) Jeśli $m = 1$, to U ma rozkład równomierny:

$$P(U = u) = \frac{1}{n+1}, \quad u = 0, 1, \dots, n;$$

jeśli $n = 1$, to U ma rozkład równomierny:

$$P(U = u) = \frac{1}{m+1}, \quad u = 0, 1, \dots, m.$$

(d) Średnia i wariancja statystyki U są następujące:

$$(5) \quad E(U) = \mu_U(n, m) = \frac{mn}{2},$$

$$(6) \quad D^2(U) = \sigma_U^2(n, m) = \frac{mn}{12} (m + n + 1).$$

(e) Rozkład statystyki U jest zbieżny do rozkładu normalnego, gdy $n \rightarrow \infty$ i $m \rightarrow \infty$.

(f) Rozkład statystyki U jest symetryczny względem n i m :

$$P(U = u; n, m) = P(U = u; m, n).$$

(g) Dla prawdopodobieństw rozkładu statystyki U zachodzi wzór rekurencyjny

$$(7) \quad P(U = u; n, m) = P(U = u; n, m-1) \frac{m}{m+n} + \\ + P(U = u-m; n-1, m) \frac{n}{m+n}.$$

3. Zrandomizowany test Manna-Whitneya i kwantyle interpolowane

Rozkład statystyki U jest dyskretny. Z tego względu nie zawsze można dla danego poziomu istotności α tak dobrać wartość krytyczną $u_c(n, m, \alpha)$, aby

$$P(U \leq u_c(n, m, \alpha)) = \alpha.$$

W zastosowaniach przyjmuje się

$$(8) \quad u_c(n, m, \alpha) = \max \{u : P(U \leq u) \leq \alpha\},$$

wobec czego na ogół

$$P(U \leq u_c(n, m, \alpha)) < \alpha.$$

Dla teoretycznych badań statystyki U , szczególnie dla analizy mocy testu Manna-Whitneya, fakt ten jest bardzo kłopotliwy, gdyż porównywanie testów o różnych rozmiarach budzi zawsze poważne zastrzeżenia. Z tego względu znacznie przydatniejsze w analizach mocy są testy zrandomizowane.

Zrandomizowany lewostronny test Manna-Whitneya polega na:

- odrzuceniu H_0 , gdy $U \leq u_c(n, m, \alpha)$,
- przyjęciu H_0 , gdy $U > u_c(n, m, \alpha) + 1$,
- przyjęciu H_0 z prawdopodobieństwem

$$(9) \quad P_{\text{rand}}(n, m, \alpha) = \frac{\alpha - P(U \leq u_c(n, m, \alpha))}{P(U = u_c(n, m, \alpha) + 1)},$$

gdy: $U = u_c(n, m, \alpha) + 1$.

Rozważania nasze prowadzimy dla testu lewostronnego odpowiadającego hipotezie alternatywnej (3). Dla testu prawostronnego i dwustronnego rozumowanie przebiega analogicznie.

Ze zrandomizowanym testem łączy się pojęcie kwantyla interpolowanego, wprowadzone przez Domańskiego i Tomaszewicza [2] (por. też Domański [1], s. 170 oraz Tomaszewicz [10], s. 320). Lewostronny kwantyl interpolowany $u_i(n, m, \alpha)$ definiuje się jako sumę

$$(10) \quad u_i(n, m, \alpha) = u_c(n, m, \alpha) + P_{\text{rand}}(n, m, \alpha).$$

Znając kwantyl interpolowany można oczywiście wyznaczyć kwantyl całkowity $u_c(n, m, \alpha)$:

$$(11) \quad u_c(n, m, \alpha) = \text{entier}(u_i(n, m, \alpha))$$

oraz prawdopodobieństwo randomizacyjne

$$(12) \quad P_{\text{rand}}(n, m, \alpha) = u_i(n, m, \alpha) - u_c(n, m, \alpha).$$

4. Aproksymacja interpolowanych kwantyli testu Manna-Whitneya

Możliwość wyznaczenia obszaru krytycznego testu zależy na ogół od faktu dysponowania odpowiednimi tablicami, zawierającymi wartości krytyczne dla wybranego poziomu istotności i wielkości próby. Do najbardziej znanych należą tablice *Jacobsona* [6], *Milтона* [8] oraz *Verdoorena* [11], który wyspecyfikował ponadto istniejące we wcześniej opublikowanych tablicach błędy.

Ze względu na znaczne - na ogół - ich rozmiary, korzystanie z tablic jest często niewygodne, szczególnie w obliczeniach komputerowych. Stąd też pojawiają się liczne próby aproksymacji wartości krytycznych.

Mann i Whitney [7] wykazali, że rozkład statystyki U dąży do rozkładu normalnego (por. własność (e) w pkt. 2). Fakt ten sugeruje możliwość aproksymacji wartości krytycznych U za pomocą tego rozkładu. Odpowiednia formuła aproksymacyjna dla kwantyla interpolowanego ma postać

$$(13) \quad u_1(n, m, \alpha) \approx u_1^n(n, m, \alpha) = \\ = \Phi^{-1}(\alpha) \sigma_U(n, m) + \mu_U(n, m) + \frac{1}{2},$$

gdzie: $\sigma_U(n, m)$ i $\mu_U(n, m)$ są określone przez (5) i (6), zaś Φ^{-1} jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0, 1)$. Występująca w ostatnim członie (13) liczba $1/2$ jest związana z powszechnie stosowaną tzw. poprawką na ciągłość (por. np. *Jacobson* [6]).

Aproksymacja (13) jest jedną z możliwych. Najczęściej stosowanymi jej alternatywami są aproksymacje utworzone za pomocą rozwinięcia Edgewortha (por. m. in. *Fellinigham, Stoker* [3]). Niezależnie od wymienionych, które można już nazywać klasycznymi, dla testów zrandomizowanych istnieje bardzo prosta możliwość aproksymacji kwantyli interpolowanych (10), których ciągi są znacznie bardziej "gładkie" niż odpowiednie ciągi kwantyli całkowitych (8).

W tym artykule prezentujemy taką aproksymację. Ograniczamy a-

nalizę do przypadku równolicznych prób $m = n$. W związku z tym stosujemy uproszczone symbole $u_c(n, \alpha)$, $u_1(n, \alpha)$, $P_{\text{rand}}(n, \alpha)$ itp. zamiast odpowiednio $u_c(n, m, \alpha)$, $u_1(n, m, \alpha)$, $P_{\text{rand}}(n, m, \alpha)$.

Formuła aproksymacyjna ma postać

$$u_1(n, m, \alpha) \approx u_1^a(n, m, \alpha) =$$

$$(14) \quad \delta_{-2}(\alpha)n^{-2} + \delta_{-1}(\alpha)n^{-1} + \delta_0(\alpha) + \delta_1(\alpha)n + \delta_2(\alpha)n^2.$$

Dla każdego z 14 wybranych poziomów istotności α funkcję (14) dopasowaliśmy do ciągów $u_1(n, \alpha)$ za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Wyznaczone współczynniki $\delta_j(\alpha)$ prezentujemy w tabl. 1.

T a b l i c a 1

Parametry $\delta_j(\alpha)$ do aproksymacji interpolowanych kwantyli statystyki Manna-Whitneya za pomocą funkcji (14) w przedziale $5 \leq n \leq 50$

α	$\delta_{-2}(\alpha)$	$\delta_{-1}(\alpha)$	$\delta_0(\alpha)$	$\delta_1(\alpha)$	$\delta_2(\alpha)$
$\alpha_1 = 0,00010$	959,42	-400,567	67,4469	-7,28112	0,409107
$\alpha_2 = 0,00020$	933,38	-389,904	64,6332	-6,97648	0,413871
$\alpha_3 = 0,00025$	916,77	-384,064	63,5316	-6,86969	0,415398
$\alpha_4 = 0,00050$	847,84	-359,897	59,5044	-6,50602	0,420066
$\alpha_5 = 0,00100$	765,07	-330,940	55,0016	-6,10933	0,424852
$\alpha_6 = 0,00200$	665,13	-294,868	49,7592	-5,66769	0,429703
$\alpha_7 = 0,00250$	643,44	-286,494	48,3503	-5,52964	0,431438
$\alpha_8 = 0,00500$	574,71	-258,470	43,7067	-5,07482	0,437026
$\alpha_9 = 0,01000$	533,46	-236,862	39,4750	-4,60228	0,443259
$\alpha_{10} = 0,02000$	471,88	-208,833	34,5768	-4,07153	0,449946
$\alpha_{11} = 0,02500$	455,34	-200,711	33,0452	-3,89249	0,452287
$\alpha_{12} = 0,05000$	379,85	-167,565	27,4343	-3,27133	0,459967
$\alpha_{13} = 0,10000$	291,18	-129,249	21,0641	-2,55111	0,468806
$\alpha_{14} = 0,20000$	193,59	-85,430	13,6530	-1,68000	0,479546

Z aproksymacją $u_1^a(n, \alpha)$ związane są oceny kwantyla całkowitego i prawdopodobieństwa randomizacyjnego, które wyznaczają się na podstawie analogicznych do (11) i (12) wzorów:

$$(15) \quad u_C^a(n, \alpha) = \text{entier}(u_1^a(n, \alpha)),$$

$$(16) \quad P_{\text{rand}}^a(n, \alpha) = u_1^a(n, \alpha) - u_C^a(n, \alpha).$$

W konsekwencji rozmiar testu określonego przez (15) i (16) jest równy

$$\alpha^a = P(U \leq u_C^a(n, \alpha)) + P_{\text{rand}}^a(n, \alpha) P(U = u_C^a(n, \alpha) + 1).$$

Jako miernik błędu aproksymacji przyjęliśmy różnicę

$$(17) \quad \alpha^a - \alpha.$$

Trudno bowiem nie zgodzić się ze zdaniem, że im mniejsza różnica (17), tym aproksymacja jest lepsza. Znacznie gorszym miernikiem wydaje się być różnica

$$(18) \quad d_U^a(n, \alpha) = u_1^a(n, \alpha) - u_1(n, \alpha),$$

gdyż nie ma ona tak wyraźnej interpretacji jak (17).

Oczywiście, analogiczne rozumowanie przedstawić można dla aproksymacji (13), otrzymując w konsekwencji mierniki

$$(19) \quad \alpha^n - \alpha$$

oraz

$$(20) \quad d_U^n(n, \alpha) = u_1^n(n, \alpha) - u_1(n, \alpha).$$

Tablice 2 i 3 zawierają błędy aproksymacji (17) i (19) dla 14 poziomów istotności. Obliczone kwantyle interpolowane, ich aproksymacje za pomocą formuły (14) i rozkładu normalnego oraz błędy aproksymacji dla czterech poziomów istotności

$$\alpha = 0,0001; 0,01; 0,05; 0,10$$

prezentujemy w tabl. 4-7.

Liczby zawarte w tych tablicach pozwalają sformułować następujące wnioski:

1. Dla małych wartości α błędy w rozmiarach testów można uznać za niewielkie, z wyjątkiem przypadków bardzo małych prób.
2. Różnice w rozmiarach testów zbudowanych na podstawie dokładnych i aproksymowanych kwantyli interpolowanych wskazują na znaczną przewagę aproksymacji (14) nad aproksymacją (13) za pomocą

Błędy aproksymacji kwantyli interpolowanych statystyki Manna-Whitneya
za pomocą funkcji (14) w przedziale $5 \leq n \leq 50$ (pomnożone przez 10^5)*

n	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
5	201	159	144	113	95	115	118	116	199	273	232	478	490	472
6	-10	-20	-25	-33	-20	-32	-52	-94	-156	-211	-243	-362	-468	-405
7	-10	-8	-6	-8	-19	-32	-47	-68	-114	-153	-167	-272	-320	-357
8	0	-2	-2	-5	-10	-14	-20	-22	-40	-62	-79	-94	-153	-142
9	1	0	-0	-1	-3	-0	2	4	2	-1	-1	10	13	7
10	1	1	1	2	3	9	9	19	27	43	44	65	89	82
11	1	2	2	3	6	11	12	21	35	53	62	80	115	105
12	1	2	2	3	6	11	13	22	32	55	59	83	112	114
13	1	1	2	3	5	9	11	18	30	47	52	71	95	102
14	1	1	1	2	4	7	9	14	23	37	41	59	79	76
15	0	1	1	2	3	5	6	10	16	25	29	43	52	59
16	0	1	1	1	2	3	4	6	10	16	18	26	35	34
17	0	0	0	1	1	2	2	3	5	7	9	12	16	17
18	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0	1	1	0	2
19	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-2	-4	-6	-6	-8	-12	-12
20	-0	-0	-0	-0	-1	-2	-2	-4	-6	-10	-10	-15	-21	-21
21	-0	-0	-0	-1	-1	-2	-3	-5	-8	-12	-13	-20	-26	-27
22	-0	-0	-0	-1	-1	-3	-3	-6	-9	-14	-15	-23	-30	-30
23	-0	-0	-0	-1	-1	-3	-3	-6	-9	-14	-16	-24	-31	-32
24	-0	-0	-0	-1	-1	-3	-3	-6	-9	-14	-16	-23	-32	-32
25	-0	-0	-0	-1	-1	-3	-3	-5	-9	-13	-15	-23	-30	-31

26	-0	-0	-0	-1	-1	-2	-3	-5	-8	-12	-14	-20	-28	-28
27	-0	-0	-0	-1	-1	-2	-2	-4	-7	-11	-12	-18	-24	-25
28	-0	-0	-0	-1	-1	-2	-2	-4	-6	-9	-11	-16	-21	-21
29	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-2	-3	-5	-7	-8	-12	-16	-16
30	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-1	-2	-3	-5	-6	-9	-12	-12
31	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-1	-2	-3	-4	-6	-7	-8
32	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-2	-2	-3	-3	-3
33	0	0	0	-0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
34	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	3	4	4
35	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3	4	5	7	7
36	0	0	0	0	0	1	1	2	3	5	5	8	10	10
37	0	0	0	0	1	1	1	2	3	6	6	9	12	12
38	0	0	0	0	1	1	1	2	4	6	7	10	14	14
39	0	0	0	0	1	1	1	3	4	7	7	11	15	15
40	0	0	0	0	1	1	2	3	4	7	8	11	15	15
41	0	0	0	0	1	1	1	3	4	6	7	11	14	15
42	0	0	0	0	1	1	1	2	4	6	7	10	13	14
43	0	0	0	0	1	1	1	2	3	5	6	9	12	12
44	0	0	0	0	0	1	1	2	3	4	5	7	9	10
45	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3	3	5	6	6
46	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2
47	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-1	-2	-2	-2
48	-0	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-1	-2	-3	-4	-6	-7	-8
49	-0	-0	-0	-0	-1	-1	-1	-2	-4	-6	-7	-10	-13	-14
50	-0	-0	-0	-1	-1	-2	-2	-3	-6	-9	-10	-15	-20	-20

* Wartości $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{14}$ podane są w tabl. 1.

Błędy aproksymacji kwantyli interpolowanych statystyki Manna-Whitneya
za pomocą rozkładu normalnego (pomnożone przez 10^5)*

n	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
5	-10	-20	-25	-50	-100	-112	-27	162	479	1 112	1 503	2 989	4 887	7 197
6	-10	-20	-25	-50	-78	-35	-37	67	284	859	1 113	2 145	3 733	5 510
7	-10	-20	-25	-43	-47	-42	-41	21	221	596	806	1 643	2 891	4 423
8	-10	-20	-22	-32	-43	-44	-36	16	163	461	625	1 312	2 381	3 635
9	-10	-16	-18	-28	-38	-37	-33	6	124	382	506	1 092	1 989	3 060
10	-9	-14	-17	-26	-33	-35	-32	1	97	315	424	918	1 695	2 625
11	-8	-13	-16	-23	-31	-33	-31	-4	78	264	356	784	1 469	2 284
12	-7	-12	-14	-21	-29	-31	-30	-8	63	223	308	682	1 288	2 013
13	-7	-11	-13	-20	-26	-30	-28	-9	52	193	267	604	1 138	1 800
14	-6	-11	-12	-18	-25	-28	-27	-11	42	170	235	541	1 027	1 617
15	-6	-10	-12	-17	-23	-26	-26	-12	35	151	209	486	925	1 467
16	-6	-9	-11	-16	-22	-25	-25	-13	30	133	188	439	845	1 337
17	-6	-9	-10	-15	-21	-24	-24	-14	25	120	168	401	772	1 229
18	-5	-8	-10	-15	-20	-23	-23	-14	21	109	154	368	709	1 132
19	-5	-8	-9	-14	-19	-22	-22	-14	18	98	139	338	657	1 049
20	-5	-8	-9	-13	-18	-22	-22	-14	15	90	128	313	610	977
21	-5	-7	-8	-13	-17	-21	-21	-14	13	82	118	291	569	912
22	-4	-7	-8	-12	-17	-20	-20	-15	11	75	108	271	532	855
23	-4	-7	-8	-12	-16	-19	-20	-15	9	69	101	253	500	803
24	-4	-6	-7	-11	-15	-19	-19	-14	7	64	94	237	471	757
25	-4	-6	-7	-11	-15	-18	-19	-14	6	59	87	223	444	715

26	-4	-6	-7	-10	-14	-18	-18	-14	5	55	82	211	421	677
27	-4	-6	-7	-10	-14	-17	-18	-14	4	51	77	199	398	642
28	-4	-6	-7	-10	-14	-17	-17	-14	3	49	72	188	379	610
29	-3	-5	-6	-9	-13	-16	-17	-14	2	45	68	179	360	581
30	-3	-5	-6	-9	-13	-16	-16	-14	1	42	64	170	343	555
31	-3	-5	-6	-9	-12	-15	-16	-14	1	40	60	162	328	530
32	-3	-5	-6	-9	-12	-15	-16	-13	-0	37	57	154	313	507
33	-3	-5	-6	-8	-12	-15	-15	-13	-0	35	54	148	300	487
34	-3	-5	-5	-8	-11	-14	-15	-13	-1	33	52	141	288	467
35	-3	-5	-5	-8	-11	-14	-15	-13	-1	31	49	135	277	449
36	-3	-4	-5	-8	-11	-14	-14	-13	-2	30	47	130	266	432
37	-3	-4	-5	-8	-11	-13	-14	-13	-2	28	45	124	256	416
38	-3	-4	-5	-7	-10	-13	-14	-13	-2	27	42	120	247	401
39	-3	-4	-5	-7	-10	-13	-13	-12	-3	25	41	115	238	387
40	-3	-4	-5	-7	-10	-13	-13	-12	-3	24	39	111	230	373
41	-3	-4	-5	-7	-10	-12	-13	-12	-3	23	37	107	222	361
42	-2	-4	-4	-7	-9	-12	-13	-12	-3	22	36	103	215	350
43	-2	-4	-4	-7	-9	-12	-12	-12	-4	21	34	100	208	339
44	-2	-4	-4	-6	-9	-12	-12	-12	-4	20	33	96	201	328
45	-2	-4	-4	-6	-9	-11	-12	-12	-4	19	32	93	195	318
46	-2	-4	-4	-6	-9	-11	-12	-11	-4	18	30	90	190	309
47	-2	-4	-4	-6	-9	-11	-12	-11	-4	17	29	88	184	300
48	-2	-3	-4	-6	-8	-11	-11	-11	-4	17	28	85	179	291
49	-2	-3	-4	-6	-8	-11	-11	-11	-4	16	27	82	174	283
50	-2	-3	-4	-6	-8	-10	-11	-11	-4	15	26	80	169	276

* Wartości jak w tabl. 1.

Aproksymacja kwantyli interpolowanych statystyki Manna-Whitneya
w przedziale $5 \leq n \leq 50$ dla $\alpha = 0,0001$

n	$u_i(n, \alpha)$	$u_i^a(n, \alpha)$	$d_u^a(n, \alpha)$	$\alpha^a - \alpha$	$u_i^n(n, \alpha)$	$d_u^n(n, \alpha)$	$\alpha^n - \alpha$
5	-0,9748	-0,4675	0,5073	0,00201	-4,8037	-3,8289	-0,00010
6	-0,9076	-1,6225	-0,7149	-0,00010	-4,7256	-3,8180	-0,00010
7	-0,6568	-1,1185	-0,4617	-0,00010	-4,1064	-3,4496	-0,00010
8	-0,2870	-0,3009	0,0138	0,00000	-2,9127	-3,1997	-0,00010
9	2,2873	2,3918	0,1044	0,00001	-1,1176	-3,4049	-0,00010
10	4,9251	5,0839	0,1589	0,00001	1,3013	-3,6238	-0,00009
11	8,1181	8,3705	0,2524	0,00001	4,3629	-3,7552	-0,00008
12	11,9794	12,2670	0,2875	0,00001	8,0838	-3,8957	-0,00007
13	16,4914	16,7957	0,3043	0,00001	12,4781	-4,0133	-0,00007
14	21,7189	21,9793	0,2604	0,00001	17,5585	-4,1604	-0,00006
15	27,6319	27,8388	0,2069	0,00000	23,3364	-4,2956	-0,00006
16	34,2560	34,3927	0,1367	0,00000	29,8218	-4,4342	-0,00006
17	41,5881	41,6569	0,0687	0,00000	37,0240	-4,5641	-0,00006
18	49,6475	49,6449	-0,0026	-0,00000	44,9514	-4,6962	-0,00005
19	58,4349	58,3685	-0,0664	-0,00000	53,6115	-4,8234	-0,00005
20	67,9741	67,8376	-0,1366	-0,00000	63,0116	-4,9625	-0,00005
21	78,2352	78,0606	-0,1746	-0,00000	73,1580	-5,0771	-0,00005
22	89,2552	89,0448	-0,2104	-0,00000	84,0570	-5,1982	-0,00004
23	101,0389	100,7965	-0,2424	-0,00000	95,7140	-5,3249	-0,00004
24	113,5676	113,3211	-0,2465	-0,00000	108,1345	-5,4331	-0,00004
25	126,8777	126,6232	-0,2545	-0,00000	121,3233	-5,5544	-0,00004

26	140,9555	140,7070	-0,2485	-0,00000	135,2851	-5,6704	-0,00004
27	155,8023	155,5760	-0,2263	-0,00000	150,0243	-5,7779	-0,00004
28	171,4302	171,2333	-0,1969	-0,00000	165,5451	-5,8852	-0,00004
29	187,8489	187,6817	-0,1673	-0,00000	181,8512	-5,9977	-0,00003
30	205,0534	204,9235	-0,1299	-0,00000	198,9465	-6,1069	-0,00003
31	223,0469	222,9609	-0,0860	-0,00000	216,8345	-6,2125	-0,00003
32	241,8323	241,7960	-0,0364	-0,00000	235,5185	-6,3139	-0,00003
33	261,4155	261,4302	0,0147	0,00000	255,0017	-6,4138	-0,00003
34	281,8045	281,8652	0,0607	0,00000	275,2871	-6,5174	-0,00003
35	302,9989	303,1023	0,1034	0,00000	296,3778	-6,6211	-0,00003
36	324,9961	325,1428	0,1467	0,00000	318,2764	-6,7197	-0,00003
37	347,7995	347,9878	0,1883	0,00000	340,9857	-6,8138	-0,00003
38	371,4166	371,6382	0,2215	0,00000	364,5081	-6,9085	-0,00003
39	395,8526	396,0949	0,2424	0,00000	388,8463	-7,0063	-0,00003
40	421,1036	421,3589	0,2554	0,00000	414,0025	-7,1011	-0,00003
41	447,1723	447,4308	0,2585	0,00000	439,9790	-7,1933	-0,00003
42	474,0650	474,3114	0,2464	0,00000	466,7781	-7,2869	-0,00002
43	501,7779	502,0011	0,2233	0,00000	494,4017	-7,3761	-0,00002
44	530,3177	530,5007	0,1830	0,00000	522,8521	-7,4656	-0,00002
45	559,6861	559,8107	0,1246	0,00000	552,1311	-7,5550	-0,00002
46	589,8858	589,9314	0,0456	0,00000	582,2407	-7,6452	-0,00002
47	620,9157	620,8635	-0,0522	-0,00000	613,1827	-7,7330	-0,00002
48	652,7771	652,6072	-0,1700	-0,00000	644,9588	-7,8183	-0,00002
49	685,4740	685,1629	-0,3111	-0,00000	677,5709	-7,9031	-0,00002
50	719,0120	718,5311	-0,4809	-0,00000	711,0206	-7,9914	-0,00002

Aproksymacja kwantyli interpolowanych statystyki Manna-Whitneya
w przedziale $5 \leq n \leq 50$ dla $\alpha = 0,01$

n	$u_i(n, \alpha)$	$u_i^a(n, \alpha)$	$d_U^a(n, \alpha)$	$\alpha^a - \alpha$	$u_i^n(n, \alpha)$	$d_U^n(n, \alpha)$	$\alpha^n - \alpha$
5	1,2600	1,5110	0,2510	0,00199	1,8635	0,6035	0,00479
6	3,4480	3,1599	-0,2881	-0,00156	3,9720	0,5240	0,00284
7	6,2880	6,0282	-0,2598	-0,00114	6,7934	0,5054	0,00221
8	9,8868	9,7529	-0,1339	-0,00040	10,3487	0,4619	0,00163
9	14,2188	14,2264	0,0076	0,00002	14,6547	0,4358	0,00124
10	19,3108	19,4266	0,1158	0,00027	19,7253	0,4145	0,00097
11	25,1887	25,3602	0,1715	0,00035	25,5725	0,3838	0,00078
12	31,8480	32,0431	0,1951	0,00032	32,2065	0,3585	0,00063
13	39,2954	39,4927	0,1973	0,00030	39,6362	0,3408	0,00052
14	47,5492	47,7250	0,1758	0,00023	47,8696	0,3204	0,00042
15	56,6158	56,7544	0,1386	0,00016	56,9138	0,2980	0,00035
16	66,4974	66,5929	0,0955	0,00010	66,7750	0,2776	0,00030
17	77,2055	77,2511	0,0456	0,00005	77,4591	0,2536	0,00025
18	88,7362	88,7376	0,0013	0,00000	88,9712	0,2350	0,00021
19	101,1038	101,0597	-0,0441	-0,00004	101,3162	0,2124	0,00018
20	114,3008	114,2238	-0,0770	-0,00006	114,4985	0,1977	0,00015
21	128,3424	128,2351	-0,1072	-0,00008	128,5222	0,1798	0,00013
22	143,2305	143,0982	-0,1323	-0,00009	143,3910	0,1605	0,00011
23	158,9694	158,8170	-0,1524	-0,00009	159,1086	0,1392	0,00009
24	175,5505	175,3947	-0,1558	-0,00009	175,6781	0,1277	0,00007
25	192,9976	192,8343	-0,1634	-0,00009	193,1028	0,1051	0,00006

26	211,2920	211,1382	-0,1538	-0,00008	211,3854	0,0934	0,00005
27	230,4508	230,3087	-0,1421	-0,00007	230,5288	0,0780	0,00004
28	250,4735	250,3477	-0,1258	-0,00006	250,5356	0,0621	0,00003
29	271,3620	271,2568	-0,1052	-0,00005	271,4081	0,0460	0,00002
30	293,1203	293,0375	-0,0828	-0,00003	293,1487	0,0284	0,00001
31	315,7449	315,6911	-0,0538	-0,00002	315,7597	0,0148	0,00001
32	339,2432	339,2188	-0,0244	-0,00001	339,2430	-0,0002	-0,00000
33	363,6149	363,6216	0,0067	0,00000	363,6008	-0,0141	-0,00000
34	388,8652	388,9004	0,0352	0,00001	388,8348	-0,0303	-0,00001
35	414,9931	415,0561	0,0630	0,00002	414,9470	-0,0461	-0,00001
36	441,9993	442,0894	0,0901	0,00003	441,9391	-0,0601	-0,00002
37	469,8854	470,0009	0,1155	0,00003	469,8128	-0,0726	-0,00002
38	498,6544	498,7913	0,1369	0,00004	498,5696	-0,0848	-0,00002
39	528,3096	528,4611	0,1516	0,00004	528,2111	-0,0984	-0,00003
40	558,8516	559,0108	0,1592	0,00004	558,7388	-0,1128	-0,00003
41	590,2793	590,4409	0,1617	0,00004	590,1541	-0,1252	-0,00003
42	622,5962	622,7518	0,1556	0,00004	622,4584	-0,1378	-0,00003
43	655,8046	655,9438	0,1392	0,00003	655,6530	-0,1516	-0,00004
44	689,9042	690,0173	0,1131	0,00003	689,7391	-0,1651	-0,00004
45	724,8957	724,9727	0,0770	0,00002	724,7181	-0,1776	-0,00004
46	760,7805	760,8101	0,0296	0,00001	760,5911	-0,1893	-0,00004
47	797,5603	797,5299	-0,0304	-0,00001	797,3593	-0,2010	-0,00004
48	835,2376	835,1323	-0,1053	-0,00002	835,0238	-0,2138	-0,00004
49	873,8118	873,6175	-0,1942	-0,00004	873,5856	-0,2262	-0,00004
50	913,2836	912,9858	-0,2978	-0,00006	913,0458	-0,2377	-0,00004

Aproksymacja kwantyli interpolowanych statystyki Manna-Whitneya
w przedziale $5 \leq n \leq 50$ dla $\alpha = 0,05$

n	$u_i(n, \alpha)$	$u_i^a(n, \alpha)$	$d_u^a(n, \alpha)$	$\alpha^a - \alpha$	$u_i^n(n, \alpha)$	$d_u^n(n, \alpha)$	$\alpha^n - \alpha$
5	4,0857	4,2579	0,1722	0,00478	5,1259	1,0401	0,02989
6	7,1778	6,9891	-0,1887	-0,00362	8,2279	1,0501	0,02144
7	11,0868	10,8876	-0,1992	-0,00272	12,1270	1,0402	0,01643
8	15,7766	15,6911	-0,0855	-0,00094	16,8379	1,0613	0,01312
9	21,3109	21,3208	0,0099	0,00010	22,3724	1,0615	0,01092
10	27,6781	27,7597	0,0816	0,00065	28,7406	1,0625	0,00918
11	34,8949	35,0117	0,1168	0,00080	35,9508	1,0560	0,00784
12	42,9550	43,0876	0,1326	0,00083	44,0103	1,0553	0,00682
13	51,8648	51,9994	0,1346	0,00071	52,9254	1,0606	0,00604
14	61,6351	61,7582	0,1231	0,00059	62,7016	1,0665	0,00541
15	72,2774	72,3741	0,0967	0,00043	73,3440	1,0666	0,00486
16	83,7903	83,8554	0,0651	0,00026	84,8571	1,0668	0,00439
17	96,1772	96,2096	0,0324	0,00012	97,2449	1,0677	0,00401
18	109,4394	109,4428	0,0033	0,00001	110,5112	1,0717	0,00368
19	123,5864	123,5600	-0,0264	-0,00008	124,6593	1,0729	0,00338
20	138,6183	138,5657	-0,0526	-0,00015	139,6923	1,0740	0,00313
21	154,5376	154,4637	-0,0739	-0,00020	155,6132	1,0755	0,00291
22	171,3482	171,2571	-0,0911	-0,00023	172,4246	1,0764	0,00271
23	189,0545	188,9487	-0,1059	-0,00024	190,1290	1,0745	0,00253
24	207,6499	207,5407	-0,1092	-0,00023	208,7288	1,0789	0,00237
25	227,1476	227,0354	-0,1122	-0,00023	228,2262	1,0786	0,00223

26	247,5414	247,4343	-0,1071	-0,00020	248,6231	1,0818	0,00211
27	268,8403	268,7390	-0,1012	-0,00018	269,9216	1,0814	0,00199
28	291,0421	290,9509	-0,0911	-0,00016	292,1235	1,0814	0,00188
29	314,1466	314,0712	-0,0754	-0,00012	315,2305	1,0838	0,00179
30	338,1589	338,1009	-0,0580	-0,00009	339,2442	1,0852	0,00170
31	363,0804	363,0410	-0,0394	-0,00006	364,1662	1,0858	0,00162
32	388,9108	388,8921	-0,0187	-0,00003	389,9980	1,0871	0,00154
33	415,6511	415,6552	0,0041	0,00001	416,7410	1,0899	0,00148
34	443,3056	443,3307	0,0252	0,00003	444,3965	1,0909	0,00141
35	471,8748	471,9194	0,0446	0,00005	472,9659	1,0911	0,00135
36	501,3570	501,4217	0,0648	0,00008	502,4503	1,0934	0,00130
37	531,7569	531,8381	0,0812	0,00009	532,8510	1,0941	0,00124
38	563,0749	563,1691	0,0942	0,00010	564,1691	1,0943	0,00120
39	595,3091	595,4149	0,1058	0,00011	596,4057	1,0966	0,00115
40	628,4638	628,5760	0,1122	0,00011	629,5618	1,0980	0,00111
41	662,5394	662,6527	0,1134	0,00011	663,6384	1,0990	0,00107
42	697,5364	697,6453	0,1089	0,00010	698,6366	1,1001	0,00103
43	733,4560	733,5540	0,0981	0,00009	734,5571	1,1012	0,00100
44	770,2991	770,3792	0,0801	0,00007	771,4010	1,1020	0,00096
45	808,0671	808,1209	0,0537	0,00005	809,1692	1,1020	0,00093
46	846,7585	846,7794	0,0209	0,00002	847,8624	1,1039	0,00090
47	886,3762	886,3549	-0,0213	-0,00002	887,4815	1,1052	0,00088
48	926,9219	926,8476	-0,0743	-0,00006	928,0272	1,1053	0,00085
49	968,3931	968,2576	-0,1355	-0,00010	969,5004	1,1073	0,00082
50	1 010,7939	1 010,5851	-0,2087	-0,00015	1 011,9017	1,1079	0,00080

Aproksymacja kwantyli interpolowanych statystyki Manna-Whitneya
w przedziale $5 \leq n \leq 50$ dla $\alpha = 0,1$

n	$u_1(n, \alpha)$	$u_1^a(n, \alpha)$	$d_U^a(n, \alpha)$	$\alpha^a - \alpha$	$u_1^n(n, \alpha)$	$d_U^n(n, \alpha)$	$\alpha^n - \alpha$
5	5,6889	5,8260	0,1371	0,00490	6,8650	1,1762	0,04887
6	9,3357	9,1812	-0,1545	-0,00468	10,4967	1,1610	0,03733
7	13,8027	13,6561	-0,1466	-0,00320	14,9703	1,1676	0,02891
8	19,1294	19,0523	-0,0771	-0,00153	20,2972	1,1678	0,02381
9	25,3031	25,3112	0,0081	0,00013	26,4867	1,1837	0,01989
10	32,3554	32,4205	0,0650	0,00089	33,5467	1,1912	0,01695
11	40,2868	40,3839	0,0971	0,00115	41,4835	1,1967	0,01469
12	49,1038	49,2101	0,1063	0,00112	50,3029	1,1991	0,01288
13	58,8016	58,9086	0,1069	0,00095	60,0097	1,2081	0,01138
14	69,3916	69,4880	0,0964	0,00079	70,6085	1,2169	0,01027
15	80,8835	80,9563	0,0728	0,00052	82,1029	1,2194	0,00925
16	93,2686	93,3200	0,0513	0,00035	94,4966	1,2280	0,00845
17	106,5577	106,5847	0,0270	0,00016	107,7927	1,2350	0,00772
18	120,7546	120,7554	0,0008	0,00000	121,9940	1,2395	0,00709
19	135,8593	135,8359	-0,0235	-0,00012	137,1034	1,2440	0,00657
20	151,8735	151,8297	-0,0438	-0,00021	153,1230	1,2495	0,00610
21	168,7994	168,7397	-0,0598	-0,00026	170,0553	1,2559	0,00569
22	186,6400	186,5683	-0,0717	-0,00030	187,9023	1,2623	0,00532
23	205,3982	205,3177	-0,0805	-0,00031	206,6659	1,2677	0,00500
24	225,0774	224,9897	-0,0877	-0,00032	226,3481	1,2706	0,00471
25	245,6727	245,5858	-0,0869	-0,00030	246,9503	1,2776	0,00444

26	267,1925	267,1075	-0,0850	-0,00028	268,4744	1,2819	0,00421
27	289,6341	289,5559	-0,0782	-0,00024	290,9218	1,2877	0,00398
28	313,0037	312,9321	-0,0717	-0,00021	314,2938	1,2901	0,00379
29	337,2950	337,2369	-0,0581	-0,00016	338,5920	1,2970	0,00360
30	362,5154	362,4712	-0,0442	-0,00012	363,8175	1,3021	0,00343
31	388,6651	388,6357	-0,0294	-0,00007	389,9715	1,3064	0,00328
32	415,7445	415,7310	-0,0136	-0,00003	417,0552	1,3107	0,00313
33	443,7546	443,7577	0,0030	0,00001	445,0698	1,3152	0,00300
34	472,6964	472,7162	0,0198	0,00004	474,0162	1,3198	0,00288
35	502,5711	502,6071	0,0361	0,00007	503,8955	1,3244	0,00277
36	533,3800	533,4308	0,0509	0,00010	534,7086	1,3287	0,00266
37	565,1244	565,1876	0,0631	0,00012	566,4565	1,3320	0,00256
38	597,8034	597,8778	0,0744	0,00014	599,1400	1,3366	0,00247
39	631,4187	631,5017	0,0831	0,00015	632,7600	1,3413	0,00238
40	665,9732	666,0597	0,0865	0,00015	667,3173	1,3441	0,00230
41	701,4631	701,5519	0,0887	0,00014	702,8126	1,3495	0,00222
42	737,8942	737,9785	0,0843	0,00013	739,2468	1,3526	0,00215
43	775,2634	775,3399	0,0764	0,00012	776,6206	1,3572	0,00208
44	813,5733	813,6361	0,0628	0,00009	814,9347	1,3614	0,00201
45	852,8250	852,8674	0,0424	0,00006	854,1897	1,3647	0,00195
46	893,0183	893,0339	0,0155	0,00002	894,3863	1,3680	0,00190
47	934,1528	934,1357	-0,0172	-0,00002	935,5252	1,3724	0,00184
48	976,2306	976,1730	-0,0576	-0,00007	977,6069	1,3764	0,00179
49	1 019,2520	1 019,1459	-0,1061	-0,00013	1 020,6321	1,3802	0,00174
50	1 063,2176	1 063,0545	-0,1631	-0,00020	1 064,6014	1,3838	0,00169

rozkładu normalnego. Szczególnie jest to widoczne dla większych poziomów istotności.

3. Dla większych wartości α różnice w rozmiarach testów w przypadku aproksymacji za pomocą rozkładu normalnego maleją, lecz dość powoli, chociaż, z wyjątkiem α bliskich 0,01, daje się zauważyć wzrost różnic $d_U^n(n, \alpha)$.

4. W znacznej większości badań empirycznych błąd rzędu 0,002 przy $\alpha = 0,1$ (tj. weryfikacja hipotezy na poziomie istotności 10,2% zamiast 10%), jaki obserwujemy dla $n \geq 40$, uważa się jako nieznaczny. Niemniej jednak, w niektórych analizach, szczególnie teoretycznych, różnica ta może okazać się zbyt duża.

5. Wzór (14) jest łatwy do zaprogramowania, jeśli korzysta się z jednego lub kilku wybranych poziomów istotności (wymaga wprowadzenia do programu jednego lub kilku wierszy tabl. 1). Pewną przewagą aproksymacji normalnej jest to, że nie wymaga ona dodatkowych parametrów. Warunkiem jednak możliwości jej zastosowania jest posiadanie odpowiedniego software, w szczególności procedury obliczającej wartości funkcji Φ^{-1} odwrotnej do dystrybucyjności rozkładu normalnego. Ceną jest również dłuższy czas obliczeń.

5. Uwagi końcowe

Wyniki naszego badania pozwalają ocenić aproksymację rozkładu statystyki U za pomocą rozkładu normalnego przy $m = n$. Ogólniejsze rozważania dla $m = n$ są znacznie bardziej skomplikowane, gdyż warunek $n \rightarrow \infty$ i $m \rightarrow \infty$ może być spełniony przy różnych proporcjach n/m . (Z uwagi na własność (b) z pkt. 2 należy się spodziewać, że im stosunek n/m bardziej różni się od 1, tym zbieżność do rozkładu normalnego będzie gorsza. Trudniej też w tym przypadku znaleźć dobre uogólnienie aproksymacji (14).

Niezależnie od możliwości uogólnień, badania przypadku $m = n$ nie można uznać za wyczerpane. Jak pokazują F e l l i n g h a m i S t o k e r [3], aproksymacja przy zastosowaniu rozwinięcia Edgewortha okazuje się w wielu przypadkach lepsza od aproksymacji za pomocą rozkładu normalnego. Również warto zbadać aproksymacje dla większych prób. Można się także pokusić o znalezienie formuły aproksymacyjnej dla funkcji dwu zmiennych: n i α .

Literatura

- [1] Domański Cz. (1986): Teoretyczne podstawy testów nieparametrycznych i ich zastosowanie w naukach ekonomiczno-społecznych, Acta Universitatis Lodzensis, Folia oeconomica.
- [2] Domański Cz., Tomaszewicz A. (1986): Kwantyle interpolowane warunkowego rozkładu liczby serii dla $n_1 = n_2$. Problem R.III.9, Łódź (materiał powielony).
- [3] Fellingham S. A., Stoker D. J. (1964): An Approximation for the Exact Distribution of the Wilcoxon Test for Symmetry, JASA, 59, 889-905.
- [4] Fix E., Hodges J. L. Jr. (1955): Significance probabilities of the Wilcoxon Test, AMS, 26, 301-312.
- [5] Gibbons J. D. (1971): Nonparametric Statistical Inference, McGraw Hill, New York.
- [6] Jacobson J. E. (1963): The Wilcoxon Two-Sample Statistic: Tables and Bibliography, JASA, 58, 1086-1103.
- [7] Mann H. B., Whitney D. R. (1947): On a Test of Whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger Than the Other, AMS, 18, 50-60.
- [8] Milton R. C. (1964): An Extended Table of Critical Values for the Mann-Whitney (Wilcoxon) Two-Sample Statistic, JASA, 59, 925-934.
- [9] Shorack R. A. (1966): Recursive Generation of the Distribution of the Mann-Whitney-Wilcoxon U-statistic under Generalized Lehmann Alternatives, AMS, 37, 284-286.
- [10] Tomaszewicz A. (1985): Jednorównaniowe modele ekonometryczne przy nieklasycznych założeniach, Acta Universitatis Lodzensis, Folia oeconomica.
- [11] Verdooren L. R. (1963): Extended Tables of Critical Values for Wilcoxon's Test Statistic, Biometrika, 50, 177-185.

Kazimiera Guraj-Kaczmarek, **Andrzej S. Tomaszewicz**APPROXIMATION OF CRITICAL VALUES OF MANN-WHITNEY TEST
FOR SMALL SAMPLES

The article deals with important, from the point of view of application, Mann-Whitney test used for comparing distribution of two populations. After a short review of the known from literature basic properties of the test's statistic, a definition of randomized test and interpolated quantiles is given. Then a simple and at the same time quite exact (for a sample of the size $5 \leq n \leq 50$) approximation of these quantiles is presented, due to which the using of tables becomes needless. Moreover, it has been proved that the recommended in many works approximation by means of normal distribution leads to large errors in the sample size.