

Czesław Domański*, Wiesław Wagner**

UWAGI O MOCY TESTU
WIELOWYMIAROWEJ NORMALNOŚCI SHAPIRO-WILKA

1. Wprowadzenie

Na podstawie szeroko prowadzonych badań własności testów normalności, w przypadku rozkładów jednowymiarowych, wynika, że test Shapiro-Wilka - spośród innych testów normalności - jest testem optymalnym z punktu widzenia mocy (por. np. Shapiro, Wilk [12] oraz Domański, Tomaszewicz [2]).

Wydaje się naturalne zbadanie własności uogólnionego testu Shapiro-Wilka w przypadku rozkładów wielowymiarowych. Zatem celem niniejszego opracowania jest podanie mocy testu wielowymiarowej normalności Shapiro-Wilka. W tej części opracowania przedstawione zostaną dotychczas prezentowane wyniki oraz ich analiza oraz omówiony będzie program dalszych badań mocy testu Shapiro-Wilka i porównania jego własności z innymi testami. Istnieje szeroka klasa testów wielowymiarowej normalności (por. np. Domański, Wagner [3]), powstaje więc pytanie, który z nich jest najlepszy w sensie mocy, który ma własność testu omnibusu, a który z nich jest testem ukierunkowanym, a przede wszystkim, który stosować w praktyce statystycznej. Próba rozwiązania postawionych tutaj problemów będzie celem opracowania.

* Profesor w Instytucie Ekonometrii i Statystyki UŁ.

** Dr hab. w Katedrze Metod Matematycznych i Statystycznych AR w Poznaniu.

2. Statystyka testowa

Niech $\underline{X} = (X_1, \dots, X_p)$ będzie p -wymiarowym wektorem losowym o rozkładzie określonym przez dystrybuantę $F_p(\underline{x})$, $\underline{x} \in R^p$, gdzie R^p oznacza p -wymiarową przestrzeń rzeczywistą. Ponadto niech $\underline{U} = (X_1, \dots, X_n)$ oznacza próbę n wektorów p -wymiarowych będących niezależnymi realizacjami wektora losowego $\underline{X}$. Za pomocą dostępnej próby $\underline{U}$ zamierzamy sprawdzić hipotezę, iż dystrybuanta $F_p(\underline{x})$ należy do klasy N_p , dystrybuant p -wymiarowego rozkładu normalnego o nieznanach parametrach $\underline{\mu}$ i $\underline{\Sigma}$. Hipotezę zerową zapisujemy w postaci $H_0 : F_p(\underline{x}) \in N_p$, natomiast hipotezę alternatywną jako $H_1 : F_p(\underline{x}) \notin N_p$. Do sprawdzenia hipotezy H_0 zastosujemy statystykę testową typu Shapiro-Wilka.

Dla wektora $\underline{C} \neq \underline{0}$, $\underline{C} \in R^p$ określamy zmienne losowe $Z_j = \underline{C}\underline{X}_j$, $j = 1, \dots, n$ będące kombinacjami liniowymi zmiennych $X_{1j}, \dots, X_{pj}$. Wartości przyjmowane przez zmienne Z_j porządkujemy w ciąg niemalejący $Z_{(1)} \leq \dots \leq Z_{(n)}$ i budujemy kombinację liniową

$$b(\underline{C}) = \sum_{j=1}^n d_{j,n} Z_{(j)},$$

gdzie: $d_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$ są pewnymi współczynnikami dla $n = 3, 4, \dots$

Definicja 1. Statystykę testową typu Shapiro-Wilka (Shapiro, Wilk [12]) nazywamy zmienną losową

$$W^*(\underline{C}) = \left[\sum_{j=1}^n d_{j,n} Z_{(j)} \right]^2 / \sum_{j=1}^n (Z_{(j)} - \bar{Z})^2,$$

gdzie: $\bar{Z} = Z_{(n)} + \dots + Z_{(n)}/n$.

W zapisie wektorowo-macierzowym zmienną $W^*(\underline{C})$ wyrażamy

$$W^*(\underline{C}) = \frac{(\underline{d}'_n \underline{Z}^*)^2}{\underline{Z}^* \underline{H} \underline{Z}^*} = \frac{b^2(\underline{C})}{s^2(\underline{C})},$$

gdzie: $\underline{d}'_n = (d_{1,n}, \dots, d_{n,n})'$, $\underline{Z}^* = (Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)})'$, $\underline{H} = (\underline{I} -$

- $11'n$, $u(\underline{C}) = \underline{d}'_n \underline{Z}^*$, $s^2(\underline{C}) = \underline{Z}^{*'} \underline{H} \underline{Z}^* = \underline{C}' \underline{A} \underline{C} = \underline{C}' \underline{U} \underline{H} \underline{U}' \underline{C}$ oraz $\underline{A} = \underline{U} \underline{H} \underline{U}'$. Zmienna $W^*(\underline{C})$ wyrażona jest poprzez wektor $\underline{C} \neq 0$. Wyznaczeniem tego wektora zajmujemy się dalej. Możliwe jest przedstawienie $W^*(\underline{C})$ jeszcze w innej wersji

$$W^*(\underline{C}) = \underline{C}' \underline{I} \underline{I}' \underline{C} / \underline{C}' \underline{A} \underline{C} = (\underline{C}' \underline{I})^2 / \underline{C}' \underline{A} \underline{C},$$

gdzie: $\underline{I} = \sum_{j=1}^n d_{j,n} \underline{X}_{(j)}$ i $\underline{X}_{(j)}$ są wektorami kolumnowymi macierzy $\underline{U}$ ustawionymi w kolejności zgodnej z porządkiem $Z_{(1)}, \dots, Z_{(n)}$.

Niektóre własności $W^*(\underline{C})$ wyrażają następujące lematy:

Lemat 1. $W^*(\underline{C}) \leq \underline{I}' \underline{A}^{-1} \underline{I}$ dla każdego $\underline{C} \in R^P$.

Lemat 2. $\sup W^*(\underline{C}) = \underline{I}' \underline{A}^{-1} \underline{I}$, przy czym supremum jest osiągnięte przez $\underline{C} = \underline{A}^{-1} \underline{I}$.

Lemat 3. $W^*(\underline{C}) = \underline{D}' \underline{P} \underline{D} / \underline{D}' \underline{D}$, $\underline{D} = (\underline{A}^{1/2}) \underline{C}$, $\underline{P} = \underline{A}^{1/2} \underline{I} \underline{I}' (\underline{A}^{1/2})'$, gdzie: $\underline{A}^{1/2}$ jest pierwiastkiem kwadratowym macierzy $\underline{A}$ takim, że $\underline{A}^{1/2} (\underline{A}^{1/2})' = \underline{A}$.

Lemat 4. $\sup W^*(\underline{C}) = \lambda$, gdzie λ jedyną niezerową wartość własną macierzy $\underline{P}$ określonej w lemacie 3.

Lemat 5. $W^*(\underline{C})$ jest niezmiennicza względem liniowego przekształcenia nieosobliwego, gdy $\underline{d}'_n \underline{1} = 0$.

Dowody lematów wynikają z własności form kwadratowych (patrz np. R a o [9]).

Dla sprawdzenia hipotezy H_0 wymaga się wyznaczenia $W^* = \min W^*(\underline{C})$, $\underline{C} \in R^P$ i porównania W^* z wartością krytyczną $K^*(\alpha)$ taką, że $P(W^* \leq K^*(\alpha) | H_0) = \alpha$, gdzie α jest zadany prawdopodobieństwem (poziomem istotności). Hipotezę H_0 odrzucamy, gdy $W^* \leq K^*(\alpha)$. Test oparty na statystyce W^* wymaga lewostronnego obszaru krytycznego.

Przechodzimy teraz do sprecyzowania statystyki testowej $W^*(\underline{C})$. Przyjmujemy za $\underline{d}_n$ wektor $\underline{a}_n = (a_{1,n}, \dots, a_{n,n})'$, którego składowe są współczynnikami kombinacji liniowej obserwacji z próby dla wyznaczenia najlepszego liniowego nieobciążonego estymatora odchylenia standardowego w rozkładzie normalnym (S a r h a n,

Greenberg [11]). Współczynniki te podali Shapiro, Wilk [12] dla $n = 3(1)50$ (także Pearson, Hartley [8]). Royston [10] podał odpowiednie wzory dla obliczania współczynników dla $n \in \langle 3, 2000 \rangle$. Program obliczeniowy tych współczynników na emc RIAD przygotowali Domański, Gadecki, Wagner [1].

Wektor $\underline{a}_n$ spełnia warunki: $\underline{a}'_n \underline{1} = 0$ i $\underline{a}'_n \underline{a}_n = 1$. Oznaczmy przez $W(\underline{C})$ statystykę $W^*(\underline{C})$, gdy $\underline{d}_n = \underline{a}_n$, tzn.

$$W(\underline{C}) = (\underline{a}'_n \underline{Z}^*)^2 / \underline{Z}^{*'} \underline{H} \underline{Z}^*.$$

Widocznym jest, że $W(\underline{C})$ spełnia warunki lematu 5.

Lemat 6. Dla każdego $\underline{C} \in R^P$ i $\underline{C} \neq \underline{0}$ spełniona jest nierówność

$$na_{1,n}^2 / (n-1) \leq W(\underline{C}) \leq 1.$$

Dowód (Shapiro, Wilk [12]).

Z lematu 6 wynika, że $W(\underline{C})$ są ograniczone w pewnym przedziale dla każdego $\underline{C} \in R^P$. Wybierzemy takie $\underline{C}$, aby $W(\underline{C})$ przyjmowało dolne ograniczenie. Zauważamy, że $\underline{C}' \underline{A} \underline{C} = \sum_{j=1}^n (\underline{C}' \underline{R}_j)^2$, $\underline{R}_j = \underline{X}_j - \bar{\underline{X}}$. Aby osiągnąć $\underline{C}' \underline{A} \underline{C} \rightarrow \min$ należy dobrać współczynniki $\underline{W} = (w_1, \dots, w_n)'$ takie, aby $\underline{w}' \underline{1} = 0$ i $\underline{w}' \underline{w} = (n-1)/na_{1,n}^2$. Wprowadzamy oznaczenia $g = w_1 = n-1/na_{1,n}$ i $d = w_j = -1/na_{1,n}$, $j = 2, \dots, n$. Wybieramy $\underline{C}$, minimalizując funkcję

$$Q(\underline{C}) = \sum_{j=1}^n (\underline{C}' \underline{R}_j - w_j)^2 = (\underline{C}' \underline{R}_1 - g)^2 + \sum_{j=2}^n (\underline{C}' \underline{R}_j + d)^2.$$

Różniczkując względem $\underline{C}$, otrzymujemy

$$\frac{\partial Q(\underline{C})}{\partial \underline{C}} = 2(\underline{C}' \underline{R}_1 - g) \underline{R}'_1 + 2 \sum_{j=2}^n (\underline{C}' \underline{R}_j + d) \underline{R}'_j = \underline{0}',$$

z czego po prostych przekształceniach mamy $\underline{C}' \underline{A} - g \underline{R}'_1 - d \underline{R}'_1 = \underline{0}'$,

gdzie $\sum_{j=1}^n \underline{R}_j = \underline{0}$ i $\sum_{j=1}^n \underline{R}_j \underline{R}'_j = \underline{A}$. Dalej $\underline{C}' \underline{A} = \underline{R}'_1/a_{1,n}$ oraz

$\underline{C} = \underline{A}^{-1} \underline{R}_1 / a_{1,n} = \underline{A}^{-1} (\underline{X}_1 - \underline{\bar{X}}) / a_{1,n}$. Dla tak wyznaczonego $\underline{C}$ obliczymy ile wynosi $Q(\underline{C})$. Szczegółowe obliczenia prowadzą do uzyskania:

$$\begin{aligned} Q(\underline{C}) &= \frac{1}{a_{1,n}^2} \left\{ \left(\underline{R}_1' \underline{A}^{-1} \underline{R}_1 - \frac{n-1}{1} \right)^2 + \sum_{j=2}^n \left(\underline{R}_j' \underline{A}^{-1} \underline{R}_j + \frac{1}{n} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{a_{1,n}^2} \left\{ \sum_{j=1}^n \left(\underline{R}_j' \underline{A}^{-1} \underline{R}_j \right)^2 - 2 \underline{R}_1' \underline{A}^{-1} \underline{R}_1 + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 + \frac{n-1}{b^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{a_{1,n}^2} \left\{ \underline{R}_1' \underline{A}^{-1} \underline{R}_1 - 2 \underline{R}_1' \underline{A}^{-1} \underline{R}_1 + \frac{n-1}{n} \right\} = \frac{1}{a_{1,n}^2} \left(\frac{n-1}{n} - \underline{R}_1' \underline{A}^{-1} \underline{R}_1 \right). \end{aligned}$$

Postępowanie odnieśliśmy do wektora $\underline{X}_1$. Wcześniej podaliśmy mianownik $W(\underline{C})$ w postaci $\underline{C}' \underline{A} \underline{C}$, do którego podstawiając podane już $\underline{C}$ otrzymamy $\underline{R}_1' \underline{A}^{-1} \underline{A} \underline{A}^{-1} \underline{R}_1 / a_{1,n}^2 = \underline{R}_1' \underline{A}^{-1} \underline{R}_1 / a_{1,n}^2$. Zatem aby uzyskać minimum $Q(\underline{C})$, ewentualnie najmniejszą wartość $W(\underline{C})$ winniśmy tak wybrać wektory $\underline{X}_j$, $j = 1, \dots, n$, aby forma kwadratowa $\underline{R}_j' \underline{A}^{-1} \underline{R}_j$ osiągnęła wartość maksymalną. Oznaczmy przez $\tilde{\underline{X}}_j = \underline{A}^{-1/2} (\underline{X}_j - \underline{\bar{X}})$ i niech maksimum, o którym mówiliśmy, będzie osiągnięte przez $\tilde{\underline{Q}} = \tilde{\underline{X}}_m' \tilde{\underline{X}}_m = \max (\tilde{\underline{X}}_j' \tilde{\underline{X}}_j)$. Statystykę Shapiro-Wilka przy dobranym $\underline{C}$ wyrażamy w postaci (M a l k o v i c h, A f i r i [7])

$$W_m = (\underline{a}_n' \tilde{\underline{Z}})^2 / \tilde{\underline{Q}},$$

gdzie: $\tilde{\underline{Z}} = (\tilde{z}_{(1)}, \dots, \tilde{z}_{(n)})'$, $\tilde{z}_{(1)} \leq \dots \leq \tilde{z}_{(n)}$ oraz $\tilde{z}_j = \tilde{\underline{X}}_m' \tilde{\underline{X}}_j$. Ponieważ $\min W(\underline{C})$ osiągamy dla $\underline{C} = \underline{A}^{-1} (\underline{X}_m - \underline{\bar{X}}) / a_{1,n}$, zatem sprawdzenie hipotezy H_0 polega na porównaniu wartości W_m wyznaczonej z próby $\underline{U}$ z wartością krytyczną $K(\alpha)$ taką, by $P(W_m \leq K(\alpha) | H_0) = \alpha$. Jeżeli wystąpi nierówność $W_m \leq K(\alpha)$, to hipotezę H_0 odrzucamy na poziomie α .

Dokładny rozkład W_m nie jest znany, a empiryczne wartości krytyczne dla $p = 2(1)8$, $n = 10(5)50$ podał L u d w i c z a k [6]¹.

¹ Dokładniejsze tablice uzyskali autorzy (por. D o m a ń s k i, G a d e c k i, W a g n e r [1]).

Odnotujmy jeszcze interesujące wyprowadzenie wektora $\underline{C}$ dokonane przez G r e c o [5], który wykorzystał lemat 6 dla górnego ograniczenia statystyki $W(\underline{C})$.

3. Wprowadzenie do badania mocy

Sprawdzenie hipotezy H_0 przeprowadzamy testem W_m . Statystykę testową tego testu oznaczyliśmy przez

$$W_m = W_m(\underline{U}) = W_m(X_1, \dots, X_n).$$

Hipotezę H_0 odrzucamy na zadanym poziomie istotności α , gdy

$$W_m \leq K(\alpha) = K(\alpha, p, n),$$

gdzie: $P(W_m \leq K(\alpha) | H_0) = \alpha$.

Podzielmy przestrzeń prób $\mathfrak{X}$ na dwie rozłączne podprzestrzenie $\mathfrak{X}_0$ i $\mathfrak{X}_1$ takie, że $\mathfrak{X}_0 \cup \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}$. Statystyka W_m jest funkcją $\underline{U}$ z podprzestrzeni $\mathfrak{X}_0$, którą tak dobieramy, aby

$$P(\underline{U} \in \mathfrak{X}_0 | H_0) = \alpha.$$

Podprzestrzeń $\mathfrak{X}_0$ określamy jako obszar krytyczny dla testu W_m o rozmiarze α . Przez α rozumiemy prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju, a przez β prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju, czyli $P(\underline{U} \in \mathfrak{X}_1 | H_1) = \beta$. Powstaje zagadnienie wyznaczenia prawdopodobieństwa odrzucenia H_0 na korzyść alternatywy H_1 zależnie od dobranych rozkładów $\mathcal{P}$ nie należących do klasy N_p , co notujemy $\mathcal{P} \notin N_p$. Prawdopodobieństwo to traktowane jako funkcja dla wszystkich dopuszczalnych rozkładów $\mathcal{P}$, nazywamy funkcją mocy testu i oznaczamy przez

$$M(\mathfrak{X}_0, \mathcal{P}) = P(\underline{U} \in \mathfrak{X}_0 | \mathcal{P}).$$

Wartość funkcji $M(\mathfrak{X}_0, \mathcal{P})$ dla konkretnego rozkładu $\mathcal{P}$ nazywamy mocą testu przy alternatywie H_1 .

Tak więc zagadnienie wyznaczenia mocy testu opartego na statystyce testowej W_m sprowadza się do wyznaczenia wartości funkcji

$$M(K(\alpha); \mathcal{P}) = P(W_m \leq K(\alpha) | \mathcal{P}),$$

gdzie: $P(W_m \leq K(\alpha) | H_0) = \alpha$.

Dokładny rozkład W_m przy hipotezie H_0 nie jest znany. Unie-
możliwia to wyznaczenie kwantyli $K(\alpha)$. Nieznane wielkości $K(\alpha)$
zastępujemy kwantylami empirycznymi $\tilde{K}(\alpha)$, które znajdujemy meto-
dą symulacji Monte Carlo.

Kwantyle $\tilde{K}(\alpha)$ rozkładu W_m pozwalają określić moc empiryczną
testu. W tym celu wyznaczamy statystykę W_m dla zadanego rozkładu
 $\mathcal{P} \in \mathcal{N}_p$ reprezentowanego przez próbę $\underline{u}$. Przyjmujemy, że wyzna-
czonych zostało $q = 1001$, $1 \in N$ (wartości statystyki $W_m^*(1) \leq$
 $\dots, \leq W_m^*(q)$). Zliczamy następnie ile wyrazów ciągu $W_m^*(1), \dots,$
 $W_m^*(q)$ poprzedza wyraz $\tilde{K}(\alpha)$. Niech ta liczba wyrazów wynosi r .
Moc empiryczną testu opartego na statystyce W_m określamy ilora-
zem

$$M(\tilde{K}(\alpha); \mathcal{P}) = r/q.$$

Dla badania mocy za rozkłady $\mathcal{P}$ przyjmuje się takie rozkłady
wektora losowego $\underline{X}$, aby wszystkie jego rozkłady brzegowe były i-
dentyczne. Wybiera się wtedy rozkłady jednowymiarowe ze znanymi
 $\sqrt{\beta_1}$ i β_2 .

Moc testu W_m była analizowana przez wielu autorów, lecz wyni-
ki są odniesione tylko do niewielkich prób ($n \leq 50$). Wynika to z
nieznajomości współczynników $a_{j,n}$, które zostały opublikowane dla
 $n = 3, 4, \dots, 50$. Najobszerniejsze badania mocy W_m zostały prze-
prowadzone przez G i o r g i, F a t t o r i n i ([4], tabl. 1)
oraz L u d w i c z a k a ([6], tabl. 2).

Z przedstawionych wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

- a) badanie mocy ograniczono do małych prób ($n \leq 50$);
- b) ponieważ symulacja Monte Carlo była przeprowadzona tylko
dla $q = 500$ prób, więc w niektórych przypadkach jest naruszona za-
sada, że moc testu rośnie wraz ze wzrostem liczebności próby (tak
jest np. dla testu W_m przy $p = 3$ i χ_{10}^2 , kiedy moc przy $n = 20$
wynosi 0,702, a przy $n = 30$ tylko 0,680);
- c) moc testu maleje przy rozkładach, gdy rośnie liczba stopni
swobody dla tych rozkładów (np. przy $p = 3$, $n = 30$ i χ_4^2 jest
moc równa 0,902, a przy $p = 3$, $n = 30$ i χ_{10}^2 jest 0,680) włas-

ność ta wynika z tego, że rozkład χ^2 przy dużej liczbie stopni swobody jest dobrze przybliżony rozkładem normalnym;

d) moc testu rośnie ze wzrostem wielkości próby n oraz zmiennej p , własność ta wynika z tego, że przy dużej próbie, będącej realizacją zmiennej losowej o danym rozkładzie Φ , będzie ona lepiej dopasowana do tego rozkładu niż do rozkładu normalnego;

e) przy rozkładzie Φ o składowych wektora losowego będących zmiennymi losowymi o rozkładzie $LN(0,1)$ moc testu jest bardzo duża.

T a b l i c a 1

Empiryczna moc testu Shapiro-Wilka
dla $p = 2, 3, 4, 5$; $n = 12, 16, 20, 24, 30, 40, 50$;
 $q = 500$; $\alpha = 0,10$

p	Rozkład	n = 12	20	30	40	50
2	χ^2_4	0,526	0,720	0,840	0,898	0,928
	χ^2_{10}	0,400	0,404	0,562	0,590	0,728
	LN(0,1)	0,894	0,984	0,996	1,000	1,000
3	χ^2_4	n = 16 0,796	20 0,844	30 0,902	40 0,932	50 0,934
	χ^2_{10}	0,683	0,702	0,680	0,766	0,744
	LN(0,1)	0,982	0,992	0,998	1,000	1,000
4	χ^2_4	n =	20 0,958	30 0,958	40 0,958	50 0,982
	χ^2_{10}		0,848	0,834	0,872	0,842
	LN(0,1)		1,000	1,000	1,000	1,000
5	χ^2_4	n =	24 0,966	30 0,988	40 0,984	50 0,976
	χ^2_{10}		0,958	0,928	0,938	0,922
	LN(0,1)		1,000	1,000	1,000	1,000

Rozkłady Φ wektorów losowych $\underline{X}$ o niezależnych składowych będących zmiennymi losowymi o rozkładach: A_1 - wykładniczy ($\lambda = 1$), A_2 - t-Studenta z 5 stopniami swobody, A_3 - równomierny na sympleksie, A_4 - równomierny na sferze.

T a b l i c a 2

Empiryczna moc testu Shapiro-Wilka
dla $p = 3, 5, 8$; $n = 10, 20, 25, 50$; $q = 100$;
 $\alpha = 0,01, 0,02, 0,05, 0,10$

p	Rozkład	n	$\alpha = 0,01$	0,02	0,05	0,10
1	2	3	4	5	6	7
3	A_1	10	0,58	0,69	0,79	0,91
		20	0,73	0,86	0,90	0,92
		25	0,85	0,90	0,95	0,98
		50	0,97	0,97	0,98	0,99
	A_2	10	0,34	0,42	0,66	0,81
		20	0,52	0,61	0,75	0,82
		25	0,57	0,61	0,80	0,87
		50	0,63	0,66	0,75	0,82
	A_3	10	0,27	0,39	0,60	0,73
		20	0,43	0,58	0,69	0,75
		25	0,44	0,55	0,67	0,79
		50	0,71	0,86	0,89	1,00
	A_4	10	0,08	0,17	0,27	0,41
		20	0,00	0,04	0,10	0,17
		25	0,01	0,03	0,06	0,15
		50	0,10	0,18	0,32	0,61
5	A_1	10	0,99	0,99	1,00	1,00
		20	0,97	0,99	1,00	1,00
		25	0,93	0,95	0,99	0,99
		50	0,97	0,98	1,00	1,00
	A_2	10	0,91	0,97	0,98	0,99
		20	0,88	0,95	0,98	0,98
		25	0,88	0,91	0,95	0,98
		50	0,84	0,91	0,96	0,98
	A_3	10	0,89	0,98	0,99	1,00
		20	0,80	0,95	0,93	0,98
		25	0,79	0,87	0,95	0,98
		50	0,87	0,94	0,96	0,98

Tablica 2 (cd.)

1	2	3	4	5	6	7
	A_4	10	0,72	0,81	0,92	0,98
		20	0,06	0,15	0,24	0,43
		25	0,02	0,06	0,13	0,21
		50	0,00	0,02	0,04	0,05
8	A_1	10	1,00	1,00	1,00	1,00
		20	1,00	1,00	1,00	1,00
		25	1,00	1,00	1,00	1,00
		50	1,00	1,00	1,00	1,00
	A_2	10	1,00	1,00	1,00	1,00
		20	0,99	1,00	1,00	1,00
		25	0,99	0,99	1,00	1,00
		50	0,99	0,99	1,00	1,00
	A_3	10	1,00	1,00	1,00	1,00
		20	1,00	1,00	1,00	1,00
		25	1,00	1,00	1,00	1,00
		50	1,00	1,00	1,00	1,00
	A_4	10	1,00	1,00	1,00	1,00
		20	0,98	0,99	1,00	1,00
		25	0,76	0,86	0,99	1,00
		50	0,04	0,08	0,22	0,35

Z podanych wyników możemy sformułować następujące wnioski:

a) moc testu W_m , podobnie jak to wynika z liczb zawartych w tabl. 2, jest bardzo wysoka;

b) dla ustalonego n moc testu wzrasta wraz ze wzrostem p , co oznacza, że test W_m charakteryzuje się tendencją do odrzucenia hipotezy H_0 dla dużych p , tzn. dla dużych p należy dysponować próbami o dużej liczebności n ;

c) mała jest moc przy A_4 i $n = 50$, co może być wynikiem mało efektywnego algorytmu generowania prób dla rozkładu równomiernego na sferze przy $q = 100$.

4. Program dalszych badań

Prezentowane wyniki dotyczące mocy testu wielowymiarowej normalności Shapiro-Wilka nie dają podstaw do wniosków praktycznych, głównie dlatego, że opierają się one na małej liczbie powtórzeń eksperymentu Monte Carlo $q = 100$ lub $q = 500$ oraz wąskiej klasie rozkładów alternatywnych. W związku z tym należy przeprowadzić badania metodą Monte Carlo spełniające następujące warunki:

- (i) liczba powtórzeń w eksperymencie wynosić będzie przynajmniej $q = 1000$ (jeśli koszty będą zbyt wysokie zmniejszymy q , ale jedynie w przypadkach sprawdzonych);
- (ii) klasa rozkładów alternatywnych oprócz omówionych będzie poszerzona m. in. przez rozkład Wisharta (opis programu GENW 85 dotyczący generatora tego rozkładu został podany w [1], podobnie jak dla rozkładu równomiernego);
- (iii) badanie mocy zarówno dla hipotez prostych jak i złożonych;
- (iv) przy porównaniach testów opartych na statystykach o rozkładzie dyskretnym i rozkładzie ciągłym zastosowanie testów zrandomizowanych;
- (v) zróżnicowanie p , n i α dla testu Shapiro-Wilka W_m ;
- (vi) interpretacja wyników.

Omówiony eksperyment realizowany jest na emc RIAD 32 na podstawie programów RMOCI 871.

Literatura

- [1] Domański Cz., Gadecki H., Wagner W. (1989): Wartości krytyczne uogólnionego testu normalności Shapiro-Wilka, Przegląd Statystyczny, 36, 2, 107-112.
- [2] Domański Cz., Tomaszewicz A. (1980): Moc testu Hellwiga przeciw niektórym hipotezom alternatywnym, Przegląd Statystyczny, 27, 1/2, 173-182.
- [3] Domański Cz., Wagner W. (1984): Testy wie-

- lowymiarowej normalności, Przegląd Statystyczny, 31, 3/44, 259-270.
- [4] G i o r g i G. M., F a t t o r i n i L. (1976): An Empirical Study of Some Tests for Multivariate Normality, Quaderni dell'Istituto di Statistica, 20, 1-8.
 - [5] G r e c o L. (1980): Nota critica su un test di multinormalità di Malkovich e Afifi, Quaderni Dell'Istituto di Statistica, 45, 1-15.
 - [6] L u d w i c z a k B. (1982): Próba porównania testów Hellwiga i Shapiro-Wilka dla weryfikacji hipotezy o normalności rozkładu wielowymiarowej zmiennej losowej, Zeszyty Naukowe AE w Krakowie, 165, 23-39.
 - [7] M a l k o v i c h J. E., A f i f i A. A. (1973): On Tests for Multivariate Normality, J. Am. Statist. Assoc., 68, 176-179.
 - [8] P e a r s o n E. S., H a r t l e y H. O. (1972): Biometrika Tables for Statisticians, vol. 2, Cambridge University Press.
 - [9] R a o C. R. (1982): Modele liniowe statystyki matematycznej, PWN, Warszawa.
 - [10] R o y s t o n J. P. (1982): An Extension of Shapiro and Wilks Test for Normality to Large Samples, Appl. Statist., 31, 115-124.
 - [11] S a r h a n A. E., G r e e n b e r g B. G. (1956): Estimation of Location and Scale Parameters by Order Statistics from Singly and Doubly Conserved Samples, Part I, Ann. Math. Stat., 27, 427-451.
 - [12] S h a p i r o S. S., W i l k M. B. (1965): An Analysis of Variance Test Normality (Complete Samples), Biometrika, 52, 591-611.

Czesław Domański, Wiesław Wagner

REMARKS ON THE SHAPIRO-WILK MULTIDIMENSIONAL NORMALITY TEST

In the view of the preformed examinations one can conclude that the Shapiro-Wilk one dimensional normality test is the

most powerful one as against broad class of alternative distributions.

The article presents the Shapiro-Wilk generalized test of multidimensional normality and its power for $n \leq 50$, $p = 3, 5, 8$ and four distributions: exponential, t-Student's, uniform on simplex and uniform on sphere.

WYKŁADY STATYSTYCZNE

WYKŁADY STATYSTYCZNE

WYKŁADY

W niniejszym wykładzie przedstawię ogólną teorię testów statystycznych. Zaczniemy od przypomnienia podstawowych pojęć i definicji. Następnie przejdziemy do omówienia testów parametrycznych i nieparametrycznych. W końcu omówimy testy wielokierunkowe.

Testem statystycznym nazywamy funkcję, która dla każdej próby losowej z danej populacji przyjmuje jedną z dwóch wartości: 0 lub 1. Wartość 0 oznacza, że próba nie została odrzucona, a wartość 1 oznacza, że próba została odrzucona. Testy statystyczne służą do sprawdzania hipotez o parametrach populacji. Najbardziej znanymi testami są testy t-Studenta, testy F, testy chi-kwadrat i testy rankowe. Testy te różnią się sposobem obliczania statystyki testowej i rozkładem jej podlegającym. Wybór testu zależy od rodzaju danych i hipotezy, którą chcemy sprawdzić.

W tym wykładzie skupimy się na testach wielokierunkowych, które służą do sprawdzania hipotez o równości wektorów parametrów. Do takich testów należą testy Hotellinga, testy Wilksa i testy Pillea. Testy te są ogólnizacjami testów t-Studenta i testów F dla wielokierunkowych danych.

W niniejszym wykładzie omówimy testy wielokierunkowe dla danych z rozkładem normalnym. Zaczniemy od przypomnienia definicji rozkładu normalnego i jego własności. Następnie przejdziemy do omówienia testów wielokierunkowych i ich mocy. W końcu omówimy testy wielokierunkowe dla danych z rozkładem t-Studenta.

W tym wykładzie omówimy testy wielokierunkowe dla danych z rozkładem t-Studenta. Zaczniemy od przypomnienia definicji rozkładu t-Studenta i jego własności. Następnie przejdziemy do omówienia testów wielokierunkowych i ich mocy. W końcu omówimy testy wielokierunkowe dla danych z rozkładem normalnym.