

*Dr Wanda Nowak-Sapota<sup>1</sup>*

*Mgr Piotr Szukalski<sup>2</sup>*

## **SPECYFIKA WYBRANYCH MODELI STATYSTYCZNYCH PROCESU WYGASANIA**

### **1. Wprowadzenie.**

Obserwowany w XX wieku w krajach rozwiniętych proces starzenia się ludności przejawia się wzrostem liczby i udziału osób starych (najczęściej stosowanymi cezurami wieku jest 60 bądź 65 lat). Obecnie coraz częściej demografowie mówią o podwójnym charakterze tego procesu, przejawiającym się starzeniem się również i samej ludności starej; a mówiąc bardziej precyzyjnie - rozrostem w ramach osób starych odsetka osób w tzw. czwartym wieku (ponownie panuje pewna dowolność, jedni autorzy mówią o 75 latach jako granicy między trzecim wiekiem, tj. okresem starości, a czwartym, tj. okresem sędziwej starości, inni o 85 latach, jeszcze inni - a tych obecnie najwięcej - opowiadają się za 80. rokiem życia).

W rezultacie wzrasta ważność wszelkich badań dotyczących ludzi bardzo starych, wraz z rozrostem ich liczebności, a przede wszystkim wraz z obniżeniem się poziomu umieralności do poziomu zapewniającego - wg okresowych tablic trwania życia - dożycie zdecydowanej większości obecnych noworodków wieku sędziwego.

Celem badawczym niniejszego tekstu jest naświetlenie jednego z licznych problemów, których istota i waga są bezpośrednio związane z nasileniem się procesu podwójnego starzenia się ludności, a mianowicie prezentacja występujących w literaturze przedmiotu matematycznych modeli wymierania stosowanych w analizie umieralności osób sędziwych.

### **2. Rozrost populacji osób sędziwych w Europie i w Polsce.**

Zanim przejdziemy do prezentacji modeli wymierania osób sędziwych, zaprezentować chcielibyśmy dane świadczące o konieczności - wskutek rozrostu liczebności osób bardzo starych tak w skali Europy, jak i Polski - baczniejszego i bardziej wnikliwego wglądu w specyfikę procesu wymierania tejże populacji.

<sup>1</sup> Adiunkt Wyższej Szkoły Marketingu i Biznesu, kierownik Zakładu Dydaktycznego Przedmiotów Ilościowych, adiunkt Uniwersytetu Łódzkiego w Katedrze Statystyki.

<sup>2</sup> Wykładowca Uniwersytetu Łódzkiego w Katedrze Statystyki.

W trakcie czterdziestopięciolecia 1950-1995 liczba osób w wieku 60 i więcej lat wzrosła w Europie o 105%, przy czym osób w trzecim wieku "tylko" o 92%, zaś liczba sędziwych starców (przypomnijmy w tym miejscu piękne określenie zaproponowane niegdyś przez nieżyjącego już nestora polskiej demografii E. Rosseta), tj. osób w wieku 80 i więcej lat, o 263%. Średnioroczne tempo wzrostu obydwu populacji wynosiło odpowiednio 1,5% i 2,9%. Ponieważ jednocześnie liczba wszystkich mieszkańców naszego kontynentu wzrosła w analizowanym okresie jedynie o jedną trzecią, wzrosły również udziały osób starych i bardzo starych w ogóle ludności Europy. Ostatecznie obecnie prawie co piąty Europejczyk posiada co najmniej 60 lat, zaś prawie co trzydziesty jest osobą w czwartym wieku.

Największym udziałem osób bardzo starych odznaczają się kraje, w których proces przemian, zwanych przejściem demograficznym zakończył się najwcześniej. Tym niemniej wyraźnie widać, iż począwszy od lat 70. na kształtowanie się udziału osób w czwartym wieku w całej populacji danego kraju coraz większą rolę mają przekształcenia ludnościowe określane mianem drugiego przejścia demograficznego, przede wszystkim zaś malejąca płodność. Tym właśnie zjawiskiem należy wyjaśnić gwałtowne starzenie się ludności Włoch i Hiszpanii, jakie ma miejsce w ostatnim ćwierćwieczu. Społeczeństwa tychże krajów charakteryzują się bowiem jednym z najniższych odnotowywanych obecnie poziomów płodności.

Mówiąc o szybkim wzroście liczby osób najstarszych stwierdzić należy, iż ów wzrost jest wynikiem łącznego oddziaływania dwóch efektów: dochodzenia do czwartego wieku względnie licznych w chwili urodzenia generacji oraz obniżania się prawdopodobieństw zgonów w trakcie całego życia. Odnośnie do pierwszego czynnika przywołać należy fakt, iż żyjące obecnie osoby w wieku 80 i więcej lat to osoby urodzone w przypadku wielu krajów zachodnioeuropejskich w okresie relatywnie dużej dzietności kobiet w fazie tranzycyjnej w pierwszych dekadach XX wieku, osoby które jednocześnie przez całe swe (przynajmniej dorosłe) życie korzystały z posttranzycyjnego poziomu umieralności. Warto w tym miejscu wspomnieć, iż wspomniane generacje zostały znacznie przerzedzone w trakcie obu wojen światowych (głównie drugiej), w innym przypadku liczba i proporcja starców (zwłaszcza mężczyzn) byłaby prawdopodobnie znacząco wyższa.

Odnośnie do tego drugiego czynnika ograniczymy się jedynie do analizy zmian umieralności w populacji ludzi starych. Dostępne dane brytyjskie<sup>3</sup> wskazują, iż pomiędzy 1930 a 1990 rokiem prawdopodobieństwa zgonów w czwartym wieku obniżyły swe wartości o 10-30%, przy czym większe zmiany zanotowano w młodszych grupach pięcioletnich oraz wśród kobiet. We Francji pomiędzy rokiem 1900 a 1990 prawdopodobieństwo, iż sześćdziesięcioletnia kobieta dożyje

<sup>3</sup> Thatcher A.R.: Trends in numbers and mortality at high ages in England and Wales. "Population Studies", 1992, vol. 46.

do dnia swych osiemdziesiątych urodzin, podniosło się z 0,25 do nieco ponad 0,70. Jednocześnie w kraju tym pomiędzy 1981 a 1991 rokiem  $e_{85}$  (tj. dalsze trwanie życia osoby w wieku osiemdziesięciu pięciu lat) zwiększyło swą wartość w przypadku mężczyzn z 4,4 na 5,0 lat, natomiast kobiet z 5,4 na 6,2 lat, zaś pomiędzy 1955 a 1985 rokiem  $e_{100}$  odpowiednio z 1,38 na 1,68 oraz z 1,53 na 2,05<sup>4</sup>.

Również i w Polsce w całym powojennym okresie widoczne było zwiększanie się zarówno liczby, jak i proporcji osób sędziwych zarówno na tle całego społeczeństwa, jak i osób starych. O ile bowiem liczba osób w wieku 60 lat i więcej zwiększyła się pomiędzy rokiem 1950 a 1999 trzykrotnie (z 2074 tys. na 6354 tys.), o tyle liczba sędziwych starców zwiększyła się ponad czterokrotnie (ze 178 tys. na 746 tys.). Widoczne jest zatem również i w naszym kraju - przybierające na sile w krajach znajdujących się na wyższym poziomie rozwoju demograficznego - "podwójne" starzenie się populacji, czyli zwiększanie się znaczenia osób sędziwych w ramach rozrastającej się populacji osób starych. Ogółem liczba osób sędziwych zwiększyła się znacznie ponad czterokrotnie, przy czym większy wzrost odnotowano wśród kobiet (czteropółkrotny) niż wśród mężczyzn (trzyipółkrotny), co zaowocowało podniesieniem się wskaźnika feminizacji tejże grupy wieku w przywołanym okresie z 189 na 235 kobiet na stu żyjących mężczyzn<sup>5</sup>.

Jak już wyżej wspominaliśmy, jednym z podstawowych czynników warunkujących rozrost populacji ludzi bardzo starych jest obniżanie się prawdopodobieństw zgonów. Choć najbardziej spektakularne ograniczenie umieralności dotyczy tej w pierwszym roku życia (jeszcze sto kilkadziesiąt lat temu w Europie pierwszych urodzin nie dożywała jedna czwarta, jedna piąta nowonarodzonych, obecnie dotyczy to jedynie kilku dzieci na tysiąc), umieralność obniżała się również w pozostałym wieku. W ostatnich dwóch dekadach w krajach rozwiniętych, wobec niewielkich możliwości znacznego zmniejszenia umieralności dzieci i osób dorosłych w wieku produkcyjnym, coraz większą wagę dla kształtowania się procesu wymierania populacji posiada redukcja poziomu umieralności w wieku poprodukcyjnym, w tym coraz bardziej w wieku sędziwym. W efekcie, obecnie opracowywane tablice trwania życia wskazują, iż zdecydowana większość dzisiejszych noworodków - przy założeniu, iż w trakcie swego życia doświadczaliby natężenia umieralności takiego, jakie panuje w danym roku w całej populacji osób w różnym wieku - w krajach rozwiniętych dożyłaby do wieku sędziwego (ponad 60%, w skrajnych przypadkach w populacji kobiet ponad

<sup>4</sup> Robine J.M.: Amelioration de l'état de sante et progression de l'esperance de vie sans incapacite. "Probleme economique", 1997, nr 2.523 (pierwodruk [w:] "Retraite et societe", 1996, decembre).

<sup>5</sup> Szukalski P.: Najstarsi Polacy: szkic demograficzny. "Gerontologia Polska", 2000, t. 8, nr 4.

<sup>6</sup> Niestety, w tym przypadku dane polskie wskazują na znaczne zapóźnienie cywilizacyjne. Według najnowszych tablic trwania życia [GUS, 2001], pochodzących z 2000 roku, spośród nowonarodzonych jedynie 28,5% mężczyzn oraz 53,5% kobiet, przy założeniu utrzymania się poziomu umieralności w trakcie ich całego życia, dożyłoby do wieku 80 lat.

70%<sup>6</sup>). Niektórzy autorzy, ekstrapolując trendy w zakresie ograniczania umieralności, twierdzą, iż w przyszłości ekstremalnie sędziwy wiek osiągany będzie przez liczne jednostki - np. J. Vallin i F. Meslé<sup>7</sup> optymistycznie mówią o 5% noworodków płci męskiej i aż 16% płci żeńskiej we Francji urodzonych w 2001 dożywających do wieku 100 lat.

### 3. Parametryczne modele wymierania.

Wraz z wydłużaniem się ludzkiego życia coraz ważniejszą rolę odgrywa znajomość prawidłowości rządzących umieralnością osób sędziwych. Kwestia ta bowiem obecnie staje się ważna z przyczyn czysto praktycznych, choćby z punktu widzenia zastosowań w celach aktuarialnych. Staje się również ważna w Polsce, zważywszy, z jednej strony, na coraz większą wagę umieralności osób sędziwych, z drugiej zaś na specyfikę procesu wymierania w tym wieku<sup>8</sup>.

W niniejszym tekście przedstawimy wykorzystywane coraz powszechniej modele opisujące porządek wymierania osób bardzo starych, tj. w wieku przynajmniej 75 lat oraz wyniki ich weryfikacji na danych pochodzących z krajów posiadających wiarygodne statystyki odnośnie do wieku ludności<sup>9</sup>. Z pewnych względów - o których szerzej wspomnimy dalej - stosowanie rozpowszechnionych modeli służących do analizy umieralności osób dorosłych prowadzi do przekłamania, głównie przeszacowania umieralności osób sędziwych, co rodzić może znaczne problemy praktyczne.

Generalnie wyróżnić można trzy typy modeli wymierania (w zasadzie należałoby używać bardziej rozpowszechnionych nazw: modele przeżycia, trwania życia lub niezawodności), a mianowicie modele opisowe, nieparametryczne i parametryczne. Pierwsze z nich ograniczają się do stwierdzenia związku pomiędzy pewnymi własnościami jednostki czy zdarzeniami, w których ona uczestniczy, a częstością zgonu. Drugie z kolei, choć dostarczają jednoznacznie zdefiniowanej ilościowo informacji o częstości występowania zgonu, nie bazują na żadnych założeniach odnośnie do analitycznej postaci rozkładu zmiennej opisującej rozkład czasu oczekiwania na zgon (przykładem takiego modelu są tablice trwania życia). Wspomniane założenie o analitycznej postaci rozkładu jest czynnikiem konstytutywnym dla parametrycznych modeli. W dalszej części niniejszego tekstu bazować będziemy wyłącznie na modelach parametrycznych.

<sup>7</sup> Vallin J., Meslé F.: *Vivre au-delà de 100 ans*. "Population et Sociétés", 2001, nr 365, Fevrier.

<sup>8</sup> Szukalski P.: *Umieralność osób bardzo starych w Polsce*. [w:] Kowaleski J.T., Szukalski P. (red.): *Sytuacja zdrowotna osób starych w Polsce - aspekt medyczny i społeczno-demograficzny*. Łódź, OW IMP, 2000.

<sup>9</sup> Znaczna część państw współczesnego świata nie dysponuje wiarygodnymi danymi dotyczącymi subpopulacji osób sędziwych, głównie ze względu na niemożność weryfikacji deklarowanego wieku w przypadku, gdy dokładna ewidencja ludności wprowadzona została względnie niedawno, tj. w okresie krótszym jak 80 lat. Powyższa uwaga dotyczy jednakże nie tylko krajów o niskim poziomie rozwoju gospodarczego, ale również np. Stanów Zjednoczonych [Wilmoth, Lundstrom, 1996; Kannisto, 1994].

Specyfika parametrycznych modeli wymierania polega na tym, iż trudno znaleźć *a priori* jakieś "w pełni naukowe" uzasadnienie poprawności danego modelu. Najważniejszą, a niekiedy jedyną, przesłanką sprawiającą, iż dany model jest stosowany, jest jego dobre dopasowanie do danych empirycznych. "Naukowa" podbudowa wyszukiwana jest zwykle *a posteriori*, w konsekwencji dobrego dopasowania do rzeczywistych danych.

W dalszej części przedstawimy kilka modeli opisujących porządek wymierania osób bardzo starych, modeli, które w opinii znawców zagadnienia najlepiej odzwierciedlają rzeczywiste procesy ubywania z populacji ludzi sędziwych. Prezentować będziemy, zgodnie z praktyką stosowaną w badaniach aktuarialnych, jedynie funkcję intensywności  $\mu(x)$ , opisującą warunkowe prawdopodobieństwo zgonu osoby w wieku  $x$  lat w ciągu roku. Gdy znamy  $\mu(x)$ , czyli funkcję intensywności rozkładu, fakt, iż

$$\mu(x) = \frac{-S'(x)}{S(x)} \quad (1)$$

oznacza, że

$$\mu(x) = -[\ln S(x)]' \quad (2)$$

a dalej

$$-\ln S(x) = \int_0^x \mu(t) dt \quad (3)$$

Stąd też można oszacować wartość funkcji przeżycia

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt} \quad (4)$$

następnie dystrybuanty rozkładu

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu(t) dt} \quad (5)$$

oraz natężenie umieralności

$$f(x) = \mu(x) e^{-\int_0^x \mu(t) dt} \quad (6)$$

#### 4. Stosowane modele.

Punktem wyjścia naszej prezentacji będą najpopularniejsze modele, przedstawiane w każdym podręczniku z zakresu matematyki aktuarialnej. Modelem najczęściej zapewne używanym jest opracowany przez B. Gompertza rozkład nazwany jego imieniem, a opisujący umieralność osób dorosłych. W tym przypadku

$$\mu_x = ae^{bx} \quad (7)$$

Ten doskonale znany wszystkim analitykom umieralności model bazuje na założeniu stałej stopy wzrostu intensywności zgonów. Oznacza to, iż według formuły Gompertza niezależnie od badanego wieku intensywność umieralności podwaja się w dorosłym życiu co taki sam okres. Tymczasem obserwacje rzeczywistej umieralności osób sędziwych wskazują, iż po przekroczeniu pewnego wieku (w granicach 75-85 lat, sporny jest bowiem nie sam fakt, lecz jedynie dokładny wiek, zależny zapewne w jakimś stopniu od specyficznych dla danego społeczeństwa czynników ekonomicznych, kulturowych i genetycznych) prawdopodobieństwo zgonu nie wzrasta już tak szybko. Dzieje się tak zapewne wskutek procesów selekcyjnych, sprawiających, iż wiek sędziwy dożywają jedynie najzdrowsze i najbardziej wytrzymałe jednostki.

Rozbieżność pomiędzy oczekiwaniami wynikającymi z modelu Gompertza a rzeczywistym poziomem umieralności osób bardzo starych widoczna była w najbardziej zaawansowanych pod względem rozwoju demograficznego krajach już na początku XX wieku. Efektem prowadzonych prac było sformułowanie przez Perksa modelu logistycznego, mającego opisywać umieralność osób w czwartym wieku, a dokładniej począwszy od 75. roku życia. W tym przypadku

$$\mu_x = c + \frac{ae^{bx}}{1 + \alpha e^{bx}} \quad (8)$$

Zaznaczmy, iż szczególnymi jego przypadkami są: po pierwsze, gdy  $c = 0$ , znany model Makehama, po drugie, gdy  $\alpha = 1$ , wspomniany wcześniej model Gompertza. Podstawową zaletą modelu logistycznego jest fakt, iż zakłada on powolne zmniejszanie się tempa wzrostu intensywności zgonów wraz z wiekiem, co - jak już wiemy - odpowiada rzeczywistości.

Przedstawmy z kolei dwa modele parametryczne, opracowane w trakcie ostatnich kilkunastu lat specjalnie w celu pozyskania narzędzia analitycznego, zdolnego do opisu rzeczywistego przebiegu procesu wymierania osób bardzo starych. Okazało się bowiem, iż poziom umieralności wśród osób sędziwych jest znacząco niższy, niż ten wynikający z modeli Gompertza i Perksa.

Na początku lat dziewięćdziesiątych Vaino Kannisto, wybitny znawca umieralności osób sędziwych, zaproponował specyficzny rodzaj modelu logistycznego, przy założeniu, iż  $\alpha = a$

$$\mu_x = \frac{ae^{bx}}{1 + ae^{bx}} \quad (10)$$

W opinii Kannisto taka właśnie formuła lepiej odzwierciedla rzeczywistą umieralność w czwartym wieku.

Ostatni prezentowany w niniejszym opracowaniu model bazuje na funkcji kwadratowej. Jest to koncepcja autorstwa Coale'a i Kiskera, mająca opisywać umieralność osób w wieku 85-110 lat, w której

$$\ln(\mu_x) = a + bx + cx^2 \quad (11)$$

z ujemnym parametrem  $c$  - model ten nazywać będziemy dalej kwadratowym.

### 5. Weryfikacja modeli.

Przedstawione powyżej modele zasadzają się na odmiennych założeniach, co prowadzi do znacznych rozbieżności w otrzymanywnych wynikach. Ustalenia Thatchera i współpracowników<sup>10</sup> wskazują, iż dopasowane na podstawie danych dla wieku 80-95 lat parametry modeli prowadzą w wieku 105 lat (kiedy to intensywność wynikająca z modelu Gompertza osiąga, przekroczoną później, sensowną wartość 1) do całkowicie odmiennych oczekiwań. Różnica odnośnie do estymowanej intensywności zgonów pomiędzy ekstremalnymi wielkościami równa jest bowiem ok. 80% wartości minimalnej.

Zgodnie z powyższymi badaniami prezentowane modele umieralności charakteryzowały się różnym stopniem dopasowania do rzeczywistego poziomu umieralności w populacji osób sędziwych. Z reguły w miarę poprawne wartości otrzymywano jedynie do 95. roku życia, po czym pojawiały się rosnące niezgodności. Relacja między rzeczywistym a wynikającym z danego modelu poziomem umieralności okazała się stała w poszczególnych, analizowanych dekadach, jak i w ramach wyodrębnionej quasigeneracji jednostek urodzonych pomiędzy 1871 a 1880 rokiem. Na podstawie porównań autorzy ustalili ranking modeli według stopnia dopasowania do rzeczywistych danych. Najwyższym poziomem dopasowania odznaczał się model logistyczny, następnie model Kannisto, model bazujący na funkcji kwadratowej i na końcu ten Gompertza.

Zbliżone wyniki uzyskano, gdy posługiwano się połączoną populacją osób sędziwych. Dokonany w tym przypadku za pomocą testu zgodności chi-kwadrat i metody najwyższej wiarygodności sprawdzian stopnia dopasowania wartości modelowych do rzeczywistości wskazuje, iż trzy modele: logistyczny, Kannisto i kwadratowy są zdecydowanie najlepiej dopasowane. Poczynione następnie

porównania stopy wzrostu  $\ln \mu_x$  ( $\frac{d \ln \mu_x}{dx}$ , zgodnie z propozycją Coale'a i Horriuchiego), ilorazów prawdopodobieństw zgonów mężczyzn i kobiet, liczby dożywających (która informuje o kumulacji niekiedy różnokierunkowych odchyień) oraz maksymalnego, dożywanego wieku, zgodnego z osiągniętym w kohorcie osób urodzonych w latach 1871-1880, również potwierdzają zdecydowaną wyższość trzech wspomnianych powyżej modeli. Co ciekawe, różnice w poziomie stopnia dopasowania poszczególnych modeli zależne są od płci osób sędziwych. Przeprowadzone następnie porównanie danych przekrojowych i quasikohortowych wskazuje na formułę Kannisto jako najlepiej odzwierciedlającą rzeczywistość.

### 6. Zakończenie.

Na podstawie przedstawionej powyżej weryfikacji modeli wymierania trudno jednoznacznie ocenić, które z prezentowanych wyżej ujęć jest najlepiej przysta-

<sup>10</sup> Thatcher A. R., Kannisto V., Vaupel J. W.: The force of mortality at ages 80 to 120. "Odense Monographs on Population Aging", 1998, nr 5, Odense University Press, Odense (Dania).

jące do rzeczywistości. Najlepszym sprawdzianem byłyby powtarzane na kolejnych populacjach osób sędziwych badania. Być może wskazówką odnośnie do wyboru odpowiedniej formuły, stosowanej w badaniach aktuarialnych, są ustalenia A. R. Thatchera<sup>11</sup>, który stwierdził, iż umieralność osób dorosłych i sędziwych opisana jest bardzo dobrze dzięki odwołaniu się do zapisanego w nieco odmiennej postaci modelu logistycznego:

$$\mu_x = \frac{\kappa z}{1+z} + \gamma \quad (12)$$

$$\text{gdzie } z = \alpha \exp(\beta x) = \exp\{\beta(x - \phi)\} \quad (13)$$

$$\text{zaś } \phi = -\ln(\alpha) / \beta. \quad (14)$$

W stosunku do poprzednio podanej formuły (8) zachodzą równości:

$$\gamma = c; \beta = b; \kappa\alpha = a.$$

Ponieważ dane pochodzące z kilkunastu współczesnych rozwiniętych krajów wskazują, iż  $\gamma$  jest bliska 1, powyższy model zapisany być może w prostszej postaci, tożsamej z modelem Kannisto (10):

$$\mu_x = \frac{z}{1+z} + \gamma. \quad (15)$$

Szacunki dokonane przez Thatchera wskazują, na dobre dopasowanie tego właśnie modelu do danych odnośnie do porządku wymierania dla Węgier z X-XII wieku i Anglii z lat 1640-1689, dla Wrocławia z lat 1687-1691, Anglii i Walii z roku 1841 i lat 1980-1982, w dwóch ostatnich przypadkach z podziałem na kobiety i mężczyzn. Co więcej, Thatcher dokonał biomedycznej interpretacji parametrów funkcji logistycznej:  $\alpha, \beta, \phi, \gamma$ .

Wedle niego parametr  $\gamma$  jest bliski średniemu poziomowi wartości funkcji intensywności w wieku 30-35 lat, stąd też zmiany w jego wartości występujące wraz z upływem czasu kalendarzowego (a dokładnie stały spadek) Thatcher utożsamia z eliminacją przyczyn zgonów osób w tym wieku w przeszłości, a zatem przede wszystkim - chorób zakaźnych i w przypadku kobiet zgonów okołoporodowych.

Z kolei parametr  $\beta$  jest ściśle związany ze stopą wzrostu intensywności umieralności wraz z wiekiem. W modelu logistycznym owa stopa, w przeciwieństwie do np. modelu Gomperta, nie jest stała, lecz zmienna, obniżając się wraz z wiekiem. Parametr ten okazuje się być względnie stabilny w analizowanych epokach historycznych, wskazując najprawdopodobniej na istnienie genetycznie zdeterminowanego wzorca starzenia się populacji.

Kolejny parametr  $\phi$  określa wiek, w którym intensywność umieralności osiąga wartość 0,5, zaś prawdopodobieństwo zgonu wartość około 0,4. Jednocześnie jest to wiek określający pojawienie się punktu przegięcia wykresu funkcji

<sup>11</sup> Thatcher A. R.: The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age. "Journal of Royal Statistical Society", 1999, series A, vol. 162, part 1.



logistycznej, wiek wynoszący około dziewięćdziesiąt/dziewięćdziesiąt kilka lat. Porównanie oszacowanych wartości parametru  $\phi$  wskazuje, iż dopiero w ostatnich dziesięcioleciach wystąpiły zmiany poziomu umieralności sędziwych starców, pomimo wcześniejszych zmian w populacji osób młodszych.

O ile, jak wcześniej wspomniano, intensywność umieralności wśród młodych dorosłych (30-35 lat) zdeterminowana jest przez parametr  $\mu$ , zaś w wieku bardzo wysokim (powyżej 90 lat) przez parametr  $\phi$ , o tyle w wieku średnim dominuje parametr  $\alpha$ . W dzisiejszych społeczeństwach, gdzie umieralność w wieku 30-35 lat jest bardzo niska, zachodzi następująca relacja:  $\mu_{50} \approx \sqrt{\alpha}$ . Patrząc na szacunki oparte o dane historyczne widać, iż właśnie ten parametr w największym stopniu podlegał zmianom (następnym pod tym względem był  $\phi$ ), co potwierdza wnioski z innych badań, poświęconych fenomenowi procesu starzenia się ludności.

Powyższy model charakteryzuje się w opinii A. R. Thatchera dobrym dopasowaniem do danych, co nie powinno dziwić, zważywszy na ścisłe powiązanie z modelami Kannisto, Makehama i w mniejszym stopniu Gomperta.

Znajomość prawidłowości rządzących umieralnością osób bardzo starych zyskuje obecnie coraz większą wagę, zaś zastosowanie niewłaściwej metody prognozowania intensywności procesu wymierania osób w czwartym wieku prowadzić może do nadmiernie pesymistycznych wyników, efektem czego będzie mnóstwo żyjących - aczkolwiek nieuwzględnionych w prognozach - starców. Dlatego też przedstawione w niniejszym referacie modele wymierania osób bardzo starych zasługują na zapoznanie się z nimi tak przez demografów, jak i specjalistów z zakresu biometrii i matematyki aktuarialnej. Miejmy nadzieję, iż udostępnienie przez polskie publiczne służby statystyczne szczegółowych danych informacji o umieralności osób sędziwych (zwłaszcza niepublikowanych w żadnej postaci informacji odnoszących się do osób w wieku 100 i więcej lat) pozwoli na przeprowadzenie weryfikacji prezentowanych w niniejszym tekście modeli parametrycznych na rodzimym materiale statystycznym.

**Literatura:**

1. Kannisto V.: Development of the oldest-old mortality, 1950-1990: Evidence from 28 developed countries, Monographs on Population Aging, nr 1, Odense University Press, Odense, 1994.
2. Robine J.M.: Amelioration de l'etat de sante et progression de l'esperance de vie sans incapacite. "Probleme economique", 1997, nr 2.523 (pierwodruk [w:] "Retraite et societe", 1996, decembre).
3. Szukalski P.: Ludzie sędziwi w Europie. "Wiadomości Statystyczne", 2000, nr 6.
4. Szukalski P.: Najstarsi Polacy: szkic demograficzny. "Gerontologia Polska", 2000, t. 8, nr 4.
5. Szukalski P.: Umieralność osób bardzo starych w Polsce. [w:] Kowaleski J.T., Szukalski P. (red.): Sytuacja zdrowotna osób starych w Polsce - aspekt medyczny i społeczno-demograficzny. Łódź, OW IMP, 2000.
6. Thatcher A. R., Kannisto V., Vaupel J. W.: The force of mortality at ages 80 to 120. "Odense Monographs on Population Aging", 1998, nr 5, Odense University Press, Odense (Dania).
7. Thatcher A. R.: The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age. "Journal of Royal Statistical Society", 1999, series A, vol. 162, part 1.
8. Thatcher A.R.: Trends in numbers and mortality at high ages in England and Wales. "Population Studies", 1992, vol. 46.
9. Trwanie życia w 2000 r. "Informacje i Opracowania Statystyczne", Warszawa, GUS (Główny Urząd Statystyczny), 2001.
10. Vallin J., Meslé F.: Vivre au-dela de 100 ans. "Population et Sociétés", 2001, nr 365, Fevrier.
11. Wilmoth J.R., Lundström H.: Extreme longevity in five countries. Presentation of trends with special attention to issues of data quality. "European Journal of Population", 1996, vol. 12, nr 1.

---

Wanda Nowak-Sapota  
Piotr Szukalski  
Zakład Demografii  
Instytut Ekonometrii i Statystyki UŁ

## **MODELE WYMIERANIA OSÓB BARDZO STARYCH**

### **Streszczenie**

Wzrastająca liczba osób bardzo starych (najczęściej definiowanych jako mające 80 i więcej lat), jak i podnoszące się prawdopodobieństwo dożycia do wieku sędziwego, wzmagają ważność znajomości formuł opisujących proces wymierania tychże osób.

Celem artykułu jest przedstawienie rozpowszechnionych w literaturze demograficznej modeli wymierania osób bardzo starych. Zaprezentowano w nim formuły: Gompertza, logistyczny, Kannisto oraz model Coale'a-Kiskera. Przywołana weryfikacja modeli dokonana na podstawie wiarygodnych baz danych wskazuje na wyższość dwóch modeli: logistycznego i Kannisto. Za tymi formułami przemawiają dodatkowo badania Thatchera, sugerujące, iż model logistyczny w wersji Kannisto służyć może do opisywania intensywności wymierania osób począwszy już od wieku 30 lat.