WYKORZYSTANIE MODELU GOMPERTZA W ANALIZIE UMIERALNOŚCI

PIOTR SZUKALSKI
Łódź

Zrozumienie procesów prowadzących do wymierania jest od zarania cywilizacji jednym z największych ludzkich pragnień. Uprzednie zrozumienie warunkuje bowiem możliwość wpływania na przebieg tychże procesów. Nie powinno zatem dziwić, iż również począwszy od początku istnienia nowożytnej nauki widoczne było zainteresowanie modelowym ujęciem problematyki wymierania.

W niniejszym opracowaniu chciałbym się skupić na przedstawieniu efektu takiego zainteresowania, czyli powszechnie stosowanej w demografii i matematyce aktuarialnej metody — rozkładu Gompertza.

W demografii wyróżnia się trzy typy modeli wymierania (w zasadzie należałoby używać bardziej rozpowszechnionych nazw: modele przeżycia, trwania życia lub niezawodności), a mianowicie modele opisowe, nieparametryczne i parametryczne. Pierwsze z nich ograniczają się do stwierdzenia związku pomiędzy pewnymi własnościami jednostki, czy zdarzeniami, w których ona uczestniczy a częstością zgonu, bez aspiracji do określenia siły owego związku. Drugie z kolei, choć dostarczają jednoznacznie zdefiniowanej ilościowo informacji o częstości występowania zgonu, nie bazują na żadnych założeniach w odniesieniu do analitycznej postaci rozkładu zmiennej opisującej rozkład czasu oczekiwania na zgon (przykładem takiego modelu są tablice trwania życia), opisują zatem jedynie — z wykorzystaniem wielkości liczbowych informujących o natężeniu i intensywności umieralności — proces ubytku zbiorowości.

Wspomniane powyżej założenie o analitycznej postaci rozkładu jest czynnikiem konstytutywnym dla parametrycznych modeli. W dalszej części niniejszego tekstu zaprezentuję najbardziej zapewne rozpowszechniony — głównie dzięki swej prostocie, długiej historii i nagminnego wykorzystania w praktyce matematyki ubezpieczeniowej — parametryczny model wymierania, a mianowicie model Gompertza.

FUNKCJE WYKORZYSTYWANE W PARAMETRYCZNYCH MODELACH WYMIERANIA

Analiza umieralności bazująca na parametrycznych modelach wymierania korzysta z czterech reprezentatywnych dla danego modelu, powiązanych ze sobą wzajemnie, funkcji: przeżycia, dystrybuanty, gęstości i intensywności.

Funkcja przeżycia $S(t)$ określa prawdopodobieństwo, iż zgon nastąpi później niż w momencie t, przy czym $t>0$ (czas jest bowiem zawsze zmienną dodatnią), czyli prawdopodobieństwo, iż w chwili t jednostka będzie jeszcze żyła. Jeśli przez T oznaczymy zmienną opisującą moment zgonu, wówczas:

$$S(t) = P(T > t) \qquad (1)$$

Z funkcją przeżycia ściśle związana jest dystrybuanta rozkładu $F(t)$, która opisuje prawdopodobieństwo, iż zgon nastąpi najpóźniej w chwili t:

$$F(t) = P(T \geq t) \qquad (2)$$

Pomiędzy dystrybuantą a funkcją przeżycia istnieje oczywisty związek. Dana jednostka w danej chwili wciąż jeszcze żyje bądź już nie. A zatem skoro

$$S(t) + F(t) = 1 \qquad (3)$$

to

$$F(t) = 1 - S(t) \qquad (4)$$

Kolejną ważną funkcją jest funkcja gęstości rozkładu $f(t)$. Określa ona prawdopodobieństwo, iż zgon wystąpi w danej jednostce czasu, czyli

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t)}{\Delta t} \qquad (5)$$

stąd też funkcja związana jest bezpośrednio z dystrybuantą. Informuje ona bowiem, jaki jest rozkład dystrybuanty w czasie:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1 - S(t))}{dt} = -S'(t) \tag{6}$$

co pociąga za sobą:

$$\int_0^{\infty} f(t)\, dt = 1 \tag{7}$$

Tym samym interesuje nas gęstość zgonów w odniesieniu do całej populacji wyjściowej.

Ostatnią ważną funkcją jest funkcja intensywności — zwana również funkcją hazardu — $\mu(t)$. Opisuje ona prawdopodobieństwo warunkowe zgonu, a zatem prawdopodobieństwo zgonu pod warunkiem, iż dana jednostka dożyła do wieku t:

$$\mu(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t \leq T < t + \Delta t \mid T \geq t)}{\Delta t} \tag{8}$$

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{-S'(t)}{S(t)} \tag{9}$$

W tym przypadku interesuje nas — podobnie jak przy gęstości rozkładu — częstość występowania zgonów, odmiennie jest jednakże zdefiniowana populacja odniesienia, interesują nas bowiem jedynie jednostki, które dożyły do wieku t i zmarły następnie w okresie dt.

Pomiędzy podanymi powyżej funkcjami istnieją wyraźne związki, stąd też możliwe jest ustalenie parametrów wszystkich wspomnianych funkcji, o ile znamy choćby jedną z nich [Szukalski, 2002].

Spośród wymienionych powyżej funkcji podstawowe znaczenie dla rachunku aktuarialnego ma funkcja intensywności zgonów. Stąd też najczęściej podaje się tylko jej postać analityczną lub wartości, zaś pozostałe potrzebne wartości funkcji oblicza się na jej podstawie.

ROZKŁAD GOMPERTZA — PRZESŁANKI I KSZTAŁT

Trwałe miejsce w badaniach aktuarialnych i biodemograficznych zapewnił sobie rozkład autorstwa angielskiego aktuariusza Benjamina Gompertza (1779—1865). Ów aktuariusz, „bawiąc się"[1] w 1825 roku wielkościami pochodzącymi z tablic trwania życia odnoszącymi się do ludności Francji, Szwecji i Wielkiej Brytanii, zauważył stałą różnicę pomiędzy logarytmami naturalnymi liczby ludności w kolejnych grupach pięcioletnich pomiędzy 20. a 60. rokiem życia (niekiedy w literaturze można spotkać informację o wieku pomiędzy 15. a 55. rokiem życia), co doprowadziło go do sformułowania prawa umieralności, które doczekało się dopiero po półtora wieku uzasadnienia „naukowego", tj. ustalenia przyczyn występowania [Olshansky, Carnes, 1997].

Rozkład stworzony przez Gompertza opiera się na przekonaniu, że odporność na śmierć jednostki — zwana również od czasów Lamberta witalnością lub siłą witalności — może być mierzona przez $\frac{1}{\mu(t)}$ (co oznacza, iż owa odporność traktowana jest jako odwrotność intensywności zgonu w danym wieku) i że ta odporność słabnie wraz z wiekiem w stałym stopniu (tj. wykładniczo).

Autor tej koncepcji uważał, iż arytmetycznemu przyrostowi wieku odpowiada wykładniczy wzrost intensywności zgonu. Zasada ta została nazwana prawem umieralności Gompertza. Sformułowana została na podstawie zaobserwowanej stałej różnicy pomiędzy logarytmami naturalnymi liczby dorosłej ludności i stosuje się do tej właśnie subpopulacji. Według Gompertza bowiem, w życiu człowieka wyodrębnić można cztery okresy: niemowlęcy — pierwszych dwanaście miesięcy, dziecięco-młodzieńczy — do dwudziestego roku życia, dojrzały — 20—60 lat oraz starość — powyżej 60. roku życia. Zasada stworzona przez brytyjskiego aktuariusza opisywać miała ewolucję umieralności dla wieku dojrzałego.[2]

Oznaczając przez k stałą stopę zmienności witalności, hipoteza Gompertza wyraża się następującą formułą:

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{\mu(t)} - \frac{1}{\mu(t+\Delta t)}}{\Delta t \frac{1}{\mu(t)}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mu(t+\Delta t) - \mu(t)}{\Delta t \times \mu(t+\Delta t)} \approx \frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = [\ln \mu(t)]' \tag{10}$$

W rezultacie

$$\ln\mu(t) = kt + H = kt + \ln B = \ln e^{kt} + \ln B = \ln Be^{kt} \tag{11}$$

(gdzie H to stała, zaś oszacowane na jej podstawie B to parametr rozkładu)

$$\mu(t) = Be^{kt} = Bc^{t}, \quad z \quad c = e^{k} \tag{12}$$

W powyższym równaniu B > 0, c ≥ 1, zaś $t \geq 0$. Przejdźmy do interpretacji parametrów [Koschin, 1989: 270—271].

W równaniu przedstawionym powyżej parametr B interpretowany jest jako zerowy poziom umieralności, związany z intensywnością umieralności w danym środowisku przyrodniczym i spo-

1) Specyfika parametrycznych modeli wymierania polega na tym, iż trudno znaleźć *a priori* jakieś „w pełni naukowe" uzasadnienie poprawności danego modelu. Najwazniejszą, a niekiedy jedyną, przesłanką sprawiającą, iż dany model jest stosowany, jest jego dobre dopasowanie do danych empirycznych. „Naukowa" podbudowa wyszukiwana jest zwykle a *posteriori*, w konsekwencji dobrego dopasowania do rzeczywistych danych.

2) Sam Gompertz skądinąd początkowo twierdził, iż jego formuła stosuje się do wieku 10—80 lat, później zmienił swój pogląd, ograniczając się do wieku 20—60 lat [Olshansky, Carnes, 1997: 3]. Współczesne badania wskazują, że — jeśli idzie o górną granice wieku — model ten dobrze odzwierciedla umieralność aż do wieku 75 lat (niektórzy mówią o 80, a nawet 85 latach) [Smith, 1997].

łecznym w danym okresie. Parametr ten jest wskazówką co do poziomu zdrowia populacji i jakości środowiska, w jakim owa populacja żyje. Należy zatem oczekiwać, iż wraz z upływem lat (tj. pozytywnymi zmianami ekonomiczno-społecznymi) wartość tego parametru obniża się. Dodajmy, iż parametr ten przyjmuje znacznie wyższe wartości w populacji mężczyzn niż w populacji kobiet.

Parametr c z kolei może być interpretowany jako miara homogeniczności populacji z punktu widzenia umieralności. Im wyższy parametr c, tym dana zbiorowość jest bardziej jednorodna pod względem kalendarium umieralności. Jednocześnie pośrednio parametr ten dostarcza nam informacji o wpływie czynników biologicznych na umieralność. Im jest c wyższe, tym wyższe wartości przyjmuje bowiem k, a zatem przyrost intensywności zgonów jest szybszy. Dodam, iż w długim okresie parametr ten rośnie, wskazując na postępujący wzrost jednorodności populacji.

Skoro mamy ustalone parametry funkcji intensywności, obliczamy funkcję przeżycia:

$$[\ln S(t)] = -\mu(t) = -Bc^t \qquad (13)$$

$$\ln S(t) = -\frac{B}{k}c^t + \ln A = \ln e^{-\frac{B}{k}c^t} + \ln A = \ln Ae^{-\frac{B}{k}c^t} \qquad (14)$$

gdzie A to kolejny parametr rozkładu, co prowadzi do

$$S(t) = Ae^{-\frac{B}{k}c^t} = Ab^{c^t} \qquad (15)$$

gdzie $b = e^{-\frac{B}{k}}$

W tym ostatnim wzorze pojawia się nowy parametr A. Zawiera on informację odnośnie dokładności dopasowania funkcji do danych rzeczywistych. Im lepsze dopasowanie, tym jego wartość jest bliższa 1. Ponieważ funkcja Gompertza nie bierze pod uwagę innego niż wykładniczy wzrostu w dzieciństwie (zdając sobie sprawę z czynionego odstępstwa od rzeczywistości), stąd też wartość A odbiega, z reguły znacząco, w dół od 1.

Postarajmy się obecnie ustalić związek pomiędzy parametrem k a okresem, w którym intensywność umieralności podwaja się. Mamy zatem:

z jednej strony $\mu(t) = Be^{kt}$ (16)

z drugiej strony $\mu(t+d) = Be^{k(t+d)} = 2Be^{kt}$ (17)

w rezultacie $e^{kd} = 2$ (18)

$$d = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0{,}693}{k} \qquad (19)$$

Jak należało oczekiwać, im wyższe tempo wzrostu intensywności zgonów k, tym jednocześnie krótszy okres, jaki niezbędny jest do podwojenia się wartości funkcji hazardu.

Kończąc niniejszy punkt chciałbym zaznaczyć, iż formuła Gompertza używana jest niekiedy w zmodyfikowanych postaciach, z których dwie przywołuję za Gawriłowami [1991: 44]. Pierwsza z nich szacując wartość funkcji intensywności odwołuje się do formy wykorzystującej dwumian

$$\mu(x) = A + Be^{\alpha x + \beta x 2} \qquad (20)$$

zaś druga korzysta z wielomianu

$$\mu(x) = A + Be^{(a_0 x + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)} \qquad (21)$$

PROSTA METODA OSZACOWANIA WARTOŚCI PARAMETRÓW

Aby udowodnić, iż przedstawione powyżej formuły to nie tylko teoretyczne zabawy, pokażę jak w prosty sposób, bazując na parametrach tablic trwania życia, otrzymać można parametry rozkładu Gompertza [Pressat, 1995].
Według formuły Gompertza (15)

$$S(t) = Ab^{c^t}$$

Utwórzmy zatem nową funkcję $\hat{S}(t)$, która będzie nam opisywać liczbę ludności w wieku t lat, czyli l_t. Wiemy, iż $\hat{S}(t) = l_t = S(t) \times l_0$ czyli nasza nowa funkcja różnić się będzie od znanej nam funkcji przeżywalności jedynie tym, iż jest iloczynem tej drugiej i pewnej stałej, a mianowicie początkowej liczby ludności (tj. ludności w wieku 0 ukończonych lat). Do obliczeń użyjemy danych z tablic przeżycia dla wieku t, $t+n$, $t+2n$, uwzględniając konieczność oszacowania trzech parametrów $\hat{A}$, c, b. Zapiszemy zatem następująco:

$$\log \hat{S}(t) = \log \hat{A} + c^t \log b \qquad (22)$$

$$\log \hat{S}(t+n) = \log \hat{A} + c^{t+n} \log b \qquad (23)$$

$$\log \hat{S}(t+2n) = \log \hat{A} + c^{t+2n} \log b \qquad (24)$$

a następnie

$$\Delta \log \hat{S}(t) = \log \hat{S}(t+n) - \log \hat{S}(t) = c^t(c^n - 1)\log b \qquad (25)$$

$$\Delta \log \hat{S}(t+n) = \log \hat{S}(t+2n) - \log \hat{S}(t+n) = c^{t+n}(c^n - 1)\log b \qquad (26)$$

i ostatecznie

$$\frac{\Delta \hat{S}(t+n)}{\Delta \hat{S}(t)} = c^n \qquad (27)$$

Znając parametr c, można b wyprowadzić z relacji

$$\log b = \frac{\Delta \log \hat{S}(t)}{c^t (c^n - 1)} \tag{28}$$

zaś parametr $\hat{A}$

$$\log \hat{A} = \log \hat{S}(t) - c^t \log b \tag{29}$$

Dokonajmy odpowiednich obliczeń odwołując się do przykładu pochodzącego z polskich tablic trwania życia z roku 2000. Interesować nas będą mężczyźni, przy czym jako wiek wyjściowy (t) przyjmiemy 45 lat, zaś jako przyrost wieku (n) 5 lat (jak pamiętamy, jesteśmy ograniczeni w wyborze wieku przedziałem, do którego bezwzględnie stosować można formułę Gompertza, tj. 20—60 lat; z drugiej strony najbardziej wiarygodne dane w zakresie umieralności dotyczą osób w wieku niemobilnym). Wyjściowe dane tablicowe są następujące:

$$\hat{S}(45) = 92644 \qquad \hat{S}(50) = 89204 \qquad \hat{S}(55) = 84228$$

Łatwo możemy obliczyć wartości logarytmów

$$\log \hat{S}(45) = 4{,}9668175 \qquad \log \hat{S}(50) = 4{,}9503842$$

$$\log \hat{S}(55) = 4{,}9254566$$

Z kolei

$$\Delta \log \hat{S}(45) = 4{,}9503842 - 4{,}9668175 = -0{,}0164333$$

$$\Delta \log S(50) = 4{,}9254566 - 4{,}9503842 = -0{,}0249276$$

zaś

$$\frac{\Delta \log \hat{S}(50)}{\Delta \log \hat{S}(45)} = \frac{-0{,}0249276}{-0{,}0164333} = 1{,}5168 = c^5$$

co daje $c = 1{,}0869039$

Mając oszacowany parametr c, przystępujemy do obliczania wartości parametru b

$$\log b = \frac{\Delta \log \hat{S}(45)}{c^{45}(c^5 - 1)} = \frac{-0{,}0164333}{42{,}520815 \times (1{,}5168 - 1)} =$$

$$= \frac{-0{,}0164333}{21{,}974757} = -0{,}00074782624$$

$b = 0{,}99827956$

Jako ostatni szacujemy parametr $\hat{A}$:

$$\log \hat{A} = \log \hat{S}(45) - c^{45} \log b = 4{,}9668175 - 42{,}520815 \times$$

$$\times (-0{,}00074782624) = 4{,}9668175 + 0{,}031797065 = 4{,}9986146$$

$\hat{A} = 99681{,}507$

Ostatecznie możemy zapisać funkcję liczby ludności (zmodyfikowana funkcja przeżycia) w postaci:

$$\hat{S}(t) = 99681{,}507 \times 0{,}99827956^{1{,}0869039^t}$$

zaś samą funkcję przeżycia — pamiętając iż $l_0 = 100000$ jako

$$S(t) = 0{,}99681507 \times 0{,}99827956^{1{,}0869039^t}$$

Sprawdźmy dokładność naszego oszacowania, wykorzystując powyższą formułę do oszacowania wartości funkcji liczby ludności w wieku 45, 50 i 55 lat. Uzyskujemy odpowiednio

$$\hat{S}(45) = 92642{,}148 \quad \hat{S}(50) = 89200{,}461 \quad \hat{S}(50) = 84222{,}18$$

podczas gdy liczby mężczyzn dożywających danego wieku pochodzące z polskich tablic trwania życia dla roku 2000 wynoszą odpowiednio:
wieku 45 lat — 92644; w wieku 50 lat — 89204; w wieku 55 lat — 84228.

Choć zatem nie uzyskaliśmy dokładnych wartości tablicowych, oszacowane na podstawie znajomości funkcji liczby ludności wartości są im bardzo bliskie. Niewielkie odchylenia złożyć należy po części na karb zastosowanej uproszczonej metody szacowania wartości parametrów, po części zaś wynikają one z faktu, iż dane odnoszą się do populacji hipotetycznej (do czego szerzej wrócimy dalej).

Postarajmy się na podstawie oszacowanych wartości funkcji przeżycia obliczyć wartość funkcji intensywności. Z faktu, iż

$$c = e^k = 1{,}0869089$$

obliczamy wartość parametru k

$$k = 0{,}083337798$$

Następnie przechodzimy do obliczenia B

$$b = e^{\frac{B}{k}} = 0{,}99827956$$

$$\frac{-B}{k} = -0{,}001722$$

$$B = 0{,}020662917$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\mu(t) = Bc^t = 0{,}020662917 \times 1{,}08690089^t$$

Dysponując obliczonym k, możemy jednocześnie obliczyć okres, po upływie jakiego intensywność umieralności podwaja się

$$d = \frac{0{,}693}{k} = \frac{0{,}693}{0{,}083337798} = 8{,}316$$

A zatem w populacji badanych mężczyzn intensywność umieralności podwaja się co 8,3 roku.

INTERPRETACJA PARAMETRÓW

Zanim przedstawię interpretację parametrów modelu Gompertza, chciałbym dokonać oszacowania tychże parametrów na bazie informacji pochodzących z różnorodnych tablic trwania życia (zwanych wcześniej tablicami umieralności) odnoszących się do ludności Polski w XX wieku. Poniższa tablica zawiera obliczone wartości poszczególnych parametrów dla mężczyzn. Spośród poniższych wielkości, kilka najważniejszych spróbuję zinterpretować.

podobną sytuacją i trudnościami interpretacyjnymi zetknął się F. Koschin [1989], który próbował analizować przemiany umieralności w Czechosłowacji w pierwszych powojennym czterdziestoleciu. Czeski demograf zakłócenia spodziewanej ewolucji wartości parametrów kładł na karb przyspieszonych i niekoniecznie w każdym przypadku korzystnych przemian, jakich jego kraj doświadczał w owym czasie.

Mówiąc o niezgodnościach pomiędzy rzeczywistymi a spodziewanymi wartościami parametrów funkcji Gompertza, zaznaczyć należy jeszcze jedno ich potencjalne źródło. Jeśli bowiem usiłujemy

Tab. 1

PARAMETRY FUNKCJI GOMPERTZA W RÓŻNYCH LATACH W POPULACJI MĘŻCZYZN W POLSCE

Parametr	1931—1932	1952—1953	1960—1961	1970—72	1980—1981	1990—91	2000
B	0,99593018	0,99408775	0,998583	0,998411	0,998381	0,99645	0,99828
$\bar{A}$ (A × 100000)	71948,59	73536,36	87539,71	95176,47	96769,19	99652,13	99681,5
B	0,053648	0,090832	0,017758	0,019303	0,018738	0,047356	0,020657
c	1,07897901	1,06746096	1,083124	1,08587	1,09032	1,077988	1,086904
k	0,07601524	0,06528289	0,079849	0,082382	0,086471	0,075097	0,083333
d	9,116	10,615	8,678	8,412	8,014	9,228	8,316

Źródło: Obliczenia własne na podstawie polskich tablic trwania życia z różnych lat.

Jeśli idzie o wartość parametru $\hat{A}$, zgodnie z oczekiwaniami jego wartość w całym analizowanym okresie wzrastała, wskazując na coraz lepsze dopasowanie danych modelowych do rzeczywistych, wskutek obniżania się poziomu umieralności w pierwszych dwudziestu latach życia (w tym zwłaszcza w pierwszym roku życia).

Odmiennie kształtował się parametr *B*. Początkowo zachowywał się „tak jak powinien", tj. zmniejszał swą wartość, co wskazywało na dokonywanie się postępu społeczno-ekonomicznego ograniczającego wyjściowy poziom umieralności. Jednakże już dla lat 1970—1972 wartość tego parametru była nieco wyższa niż odnotowywana dekadę wcześniej. Katastrofalnie duży był wzrost tego parametru odnotowany w latach osiemdziesiątych. Jest to jeszcze jedno potwierdzenie kryzysu zdrowotnego występującego w Polsce w tym czasie, kryzysu, który dosięgał przede wszystkim mężczyzn. Zastanawiające jest to, że obecnie poziom wyjściowy intensywności umieralności jest wyższy niż w latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych.

Równie niejednorodną interpretacją, jak w przypadku parametru *B* należałoby obdarzyć pozostałe parametry. Spośród wszystkich parametrów tylko *A* charakteryzował się widoczną wyraźną tendencją. Z przypisać formule Gompertza jakąkolwiek interpretację, oznacza to, że uznajemy ją za wizualizację zasady mającej biofizjologiczną proweniencję. W takim przypadku zaś formuły nie powinno się stosować do danych przekrojowych (a do takich należą dane pochodzące z okresowych tablic trwania życia), lecz jedynie do danych wzdłużnych (tj. odnoszących się do konkretnej grupy jednostek śledzonych przez całe życie grupy). Niestosowanie się do powyższego zastrzeżenia prowadzić może do wyraźnej dominacji efektu chwili i częściowo efektu generacji nad efektem wieku, co przekładać się może na obserwowane zakłócenia spodziewanej ewolucji wartości parametrów rozkładu.

Zwróćmy jeszcze uwagę na kształtowanie się wartości parametru *d*, potwierdzające — pomimo znacznej labilności w polskich warunkach — tzw. zasadę kompensacji umieralności [Gavrilov, Gavrilova, 2001]. Zgodnie z tą zasadą w populacjach charakteryzujących się wysokim poziomem umieralności występuje niskie tempo wzrostu intensywności zgonów (czyli dłuższy okres niezbędny do podwojenia się jego poziomu), natomiast w zbiorowościach odznaczających się niską umieralnością zaobserwować można wyższe tempo wzrostu $\mu(x)$, czyli krótszy okres podwajania się poziomu umieralności. W rezultacie wraz z przechodzeniem do jednostek coraz starszych w populacjach odznaczających się różnymi poziomami umieralności, następuje powolne upodabnianie się wartości intensywności umieralności pomimo początkowych bardzo znaczących niekiedy różnic.

PODSUMOWANIE

Choć obecnie coraz częściej prowadzone są próby opracowania nowych modeli umieralności, nie wynika to w jakiś szczególny sposób ze złej jakości modelu Gompertza, lecz przede wszystkim ze wzrastającej ważności umieralności osób bardzo starych nieuwzględnianych w tym rozkładzie. W tym przypadku model Gompertza wyraźnie przeszacowuje intensywność zgonów, co jest już wystarczającym powodem dla osób i organizacji wykorzystujących ów model do celów praktycznych do zastąpienia go przez inne modele — przede wszystkim przez model logistyczny, którego wariantem jest skądinąd rozkład autorstwa Gompertza[3] [Thatcher, 1999].

Powyższe rozbieżności są jednocześnie przesłanką do podejmowania prób formułowania nowych koncepcji teoretycznych odnośnie przebiegu i charakteru procesu starzenia się i wynikającego stąd wymierania. Jedną z takich — wyjaśniających dopuszczalność używania modelu Gompertza dla dorosłego wieku — koncepcji jest rozwijana obecnie przez biologów teoria niezawodności (*reliability theory*) [Gavrilov, Gavrilova, 2001], wedle której początkowy wykładniczy wzrost umieralności wraz z wiekiem, jak i dostrzegalne w późniejszym wieku zatrzymanie się tempa wzrostu umieralności są nieuniknioną cechą wszystkich modeli starzenia się, zakładających, iż proces starzenia się polega na stopniowym akumulowaniu się przypadkowych uszkodzeń. Jeśli uszkodzenia organizmu pojawiają się nie na jednym, lecz w większej liczbie etapów, w rezultacie widoczne jest występowanie i zanikanie wzrostu intensywności umieralności. W organizmach prostych bowiem każde uszkodzenie prowadzi do zgonu (jego prawdopodobieństwo jest stałe), podczas gdy w bardziej skomplikowanych organizmach posiadających fizjologiczne rezerwy, na pierwszym etapie mamy do czynienia z wykładniczym wzrostem umieralności w wyniku akumulacji losowych szkód, następnie zaś, gdy szkody wyczerpują rezerwy fizjologiczne, organizm złożony przekształca się w organizm prosty, w którym każda nowa szkoda prowadzi do zgonu. W rezultacie umieralność jednostek zaawansowanych wiekiem osiąga stały poziom. Teoria niezawodności prowadzi nawet do przewidywania spadku poziomu umieralności osób ekstremalnie starych wskutek wzrostu wynikającej z procesu zanikania heterogeniczności populacji.

W niniejszym opracowaniu ograniczono się jedynie do przedstawienia podstawowych informacji o rozkładzie Gompertza i możliwości jego zastosowania. Bardziej rozbudowany wykaz zastosowań w badaniach umieralności znaleźć można w pracy J. H. Pollarda [1991], zaś zastosowania do badań demograficznych w innych dziedzinach w artykule autorstwa Pollarda i Valkovicsa [1992].[4]

Relatywna prostota modelu Gompertza oraz dobre dopasowanie do rzeczywistego przebiegu procesu wymierania w szerokim przedziale wieku są przyczynami, dla których model ten jest wciąż powszechnie wykorzystywanym narzędziem, zwłaszcza przez uczestników kursów matematyki aktuarialnej. Moje osobiste doświadczenia wskazują jednak, iż choć wiele osób zna ten model, znajomość najczęściej ogranicza się do analitycznej postaci, natomiast biologiczne uzasadnienie znane jest niewielu. Mam nadzieję, iż tekst ten nieco zmieni tę sytuację.

LITERATURA:

1. L. A. Gavrilov., N. S. Gavrilova, *The biology of life span. A quantitative approach*, Harwood Academic Publishers, Chur 1991.
2. Gavrilov L. A., Gavrilova N. S., *The reliability theory of aging and longevity*, „Journal of Theoretical Biology" 2001 vol. 213 (tekst dostępny na stronie: www.idealibrary.com).
3. M. Gazińska., M. Mojsiewicz, *Model Gompertza jako narzędzie analizy śmiertelności z powodu raka krtani i gardła dolnego*, „Studia Demograficzne" 2001 nr 1 (139).
4) F. Koschin, *Mortality and age structure at old age*, [w:] *Ageing of population in developed countries. Causes — consequences — policies*, „Acta Demographica" 1989 nr IX/3.
5. S. Y. Olshansky, B. A. Carnes, *Ever since Gompertz*, „Demography" 1997 vol. 34 nr 1, February.
6. J. H. Pollard, *Fun with Gompertz*, „Genus" 1991 vol. XLVII nr 1—2.
7. J. H. Pollard, E. J. Valkovics, *The Gompertz distribution and its applications*, „Genus" 1992 vol. XLVIII nr 3—4.
8. R. Pressat, *Elements de demographie mathematique*, AIDELF 1995, Paris.
9. D. W. E. Smith, *Centenarians: Human longevity outliers*, „The Gerontologist" 1997 vol. 37 nr 2.
10. P. Szukalski, *Parametryczne modele wymierania osób bardzo starych*, „Wiadomości Ubezpieczeniowe" 2002 nr 3—4.
11. A. R. Thatcher, *The long–term pattern of adult mortality and the highest attained age*, „Journal of Royal Statistical Society", 1999 series A vol. 162 part 1.

---

3) Rozkład Gompertza był punktem wyjścia dla innych modeli — przede wszystkim modeli Makehama (bardziej znanego w postaci $\mu(x) = A + Be^{c^x}$ oraz drugiego mniej rozpowszechnionego $\mu(x) = A + Bx + De^{c^x}$ zakładających, iż oprócz wykładniczego wzrostu wraz z wiekiem intensywność zgonów zależy od innych czynników, oraz wspomnianego już modelu logistycznego autorstwa Perksa $(\mu_x = c + \frac{ae^{bx}}{1+\alpha e^{bx}})$.

4) Po polsku w ostatnich latach ukazał się artykuł wykorzystujący rozkład Gompertza do analizy umieralności na nowotwory krtani i gardła dolnego [Gazińska, Mojsiewicz, 2001].