

Finanse

Wycena europejskich opcji kupna w modelach rynku z czasem dyskretnym

Uogólnienia formuły Blacka-Scholesa

Emilia Fraszka-Sobczyk



Wycena europejskich opcji kupna w modelach rynku z czasem dyskretnym

Uogólnienia formuły Blacka-Scholesa



WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

Finanse

Wycena europejskich opcji kupna w modelach rynku z czasem dyskretnym

Uogólnienia formuły Blacka-Scholesa

Emilia Fraszka-Sobczyk



WYDAWNICTWO
UNIwersytetu
ŁÓDZKIEGO

Łódź 2020

Emilia Fraszka-Sobczyk – Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny
Instytut Ekonometrii, Katedra Teorii i Analiz Systemów Ekonomicznych
90-214 Łódź, ul. Rewolucji 1905 r. nr 37/39

RECENZENT

Marek Kałuszka

REDAKTOR INICJUJĄCY

Beata Koźniewska

OPRACOWANIE REDAKCYJNE

Barbara Sikora

SKŁAD I ŁAMANIE

AGENT PR

KOREKTA TECHNICZNA

Leonora Gralka

PROJEKT OKŁADKI

Agencja Reklamowa efectoro.pl

Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Depositphotos.com/wrangler

© Copyright by Emilia Fraszka-Sobczyk, Łódź 2020

© Copyright for this edition by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2020

Publikacja jest udostępniona na licencji Creative Commons

Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0 (CC BY-NC-ND)

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego

Wydanie I. W.09555.19.0.M

Ark. wyd. 7,0; ark. druk. 13,375

ISBN 978-83-8220-136-9

e-ISBN 978-83-8220-137-6

<https://doi.org/10.18778/8220-136-9>

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego

90-131 Łódź, ul. Lindleya 8

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl

e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl

tel. 42 665 58 63

Spis treści

Wstęp	7
Rozdział 1	
Klasyczny model Coxa-Rossa-Rubinsteina (model CRR)	13
1.1. Drzewo dwumianowe. Strategia. Warunek samofinansowania	13
1.2. Twierdzenie CRR	20
1.3. Kalibracja modelu CRR	23
1.4. Formuła Blacka-Scholesa	25
Rozdział 2	
Uogólnienie modelu CRR	29
2.1. Wycena opcji	30
2.2. Przejście graniczne	32
2.3. Współczynniki wrażliwości ceny opcji	37
2.4. Przykłady liczbowe wycen	55
Rozdział 3	
Model CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla dwóch jednostek czasu	61
3.1. Jednostajna zbieżność formuły CRR do formuły Blacka-Scholesa	62
3.2. Graniczna cena akcji w modelu CRR	71
3.2.1. Równania stochastyczne dla granicznego procesu cen akcji	74
3.3. Wycena opcji, gdy parametry rynku są stałe w każdym z dwóch kolejnych przedziałów czasu	77

Rozdział 4

Model CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla trzech jednostek czasu **105**

- 4.1. Jednostajna zbieżność formuły CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla dwóch jednostek czasu 107
- 4.2. Wycena opcji, gdy parametry rynku są stałe w każdym z trzech kolejnych przedziałów czasu 116

Rozdział 5

Model CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla dowolnej liczby jednostek czasu **129**

- 5.1. Jednostajna zbieżność formuły CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla trzech jednostek czasu 129
- 5.2. Wycena opcji, gdy parametry rynku są stałe w każdym z czterech przedziałów czasu 134
- 5.3. Jednostajna zbieżność formuły CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla czterech jednostek czasu 142
- 5.4. Wycena opcji oraz jednostajna zbieżność formuły CRR, gdy parametry rynku są stałe w każdym z dowolnej liczby m przedziałów czasu 143
- 5.5. Współczynniki wrażliwości ceny opcji 145

Rozdział 6

Badania empiryczne **155**

- 6.1. Wycena opcji notowanych na GPW w Warszawie na podstawie modelu Blacka-Scholesa oraz uogólnionego modelu Blacka-Scholesa 157
- 6.2. Wycena opcji notowanych na GPW w Warszawie na podstawie modelu Blacka-Scholesa oraz modelu Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie 163
- 6.3. Podsumowanie 168

Zakończenie 169

Dodatek 1 171

Dodatek 2 187

Wykaz oznaczeń (dla rozdziałów 1-5) 205

Bibliografia 209

Spis rysunków, tabel i wykresów 213

Wstęp

Niniejsza monografia jest poświęcona wycenie opcji europejskiej na akcję w dwóch uogólnieniach modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR). Opcja kupna akcji, opiewająca na daną liczbę akcji określonej spółki, jest instrumentem finansowym, który daje jego posiadaczowi prawo nabycia w przyszłości od wystawcy (sprzedawcy) opcji określonej liczby akcji po cenie wykonania K (określanej terminem *strike price* lub *exercise price*), ustalonej przez obie strony w chwili zawarcia kontraktu. Kontrakt opcyjny daje nabywcy opcji prawo, a nie obowiązek jej realizacji. W przypadku opcji europejskiej posiadacz opcji może zrealizować ją jedynie w ustalonej chwili czasu T , która została określona w momencie zawierania kontraktu opcyjnego. Oczywiście nabywca opcji musi zapłacić pewną kwotę (cenę opcji) wystawcy opcji za prawo nabycia akcji po cenie wykonania K .

Prawidłowa wycena opcji ma fundamentalne znaczenie dla poprawnego funkcjonowania rynków finansowych. Zagadnienie to cieszy się więc ogromną popularnością zarówno w literaturze akademickiej, jak i wśród inwestorów giełdowych.

W 1973 roku Fischer Black i Myron Scholes w artykule *The pricing of options and corporateliabilities* zaprezentowali stochastyczny model wyceny opcji i wyprowadzili słynny wzór na cenę europejskiej opcji kupna wystawionej na akcje. Wzór ten nosi nazwę formuły Blacka-Scholesa i jest rozwiązaniem pewnego stochastycznego równania różniczkowego. W 1979 roku John Cox, Stephen Ross i Mark Rubinstein w pracy *Option pricing. A simplified approach* przedstawili dyskretny model zmian cen akcji i udowodnili wzór na cenę opcji. Ponadto pokazali przejście graniczne ceny opcji. Okazało się, iż przy dużej liczbie chwil handlowania graniczna wycena opcji europejskiej przez strategię replikującą w modelu dyskretnym pokrywa się z formułą Blacka-Scholesa.

Idea klasycznej pracy dotyczącej modelu CRR (Cox, Ross, Rubinstein, 1979) polegała na:

- 1) przybliżeniu wzoru Blacka-Scholesa prostszymi formułami dyskretnymi;
- 2) wyprowadzeniu wzoru Blacka-Scholesa jako granicy formuł dyskretnych elementarnymi metodami zrozumiałymi dla ekonomistów.

Podobna idea jest motywacją tej monografii.

Monografia poświęcona została dwóm uogólnionym modelom Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR), wyznaczaniu formuły na wycenę opcji w zaprezentowanych modelach oraz zbieżności tych wzorów do formuł typu Blacka-Scholesa.

W rozdziale 1 przypomniane zostały podstawowe założenia modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina, twierdzenie Blacka-Scholesa, a także dostatecznie ogólnie sformułowane twierdzenie graniczne.

Rozdział 2 monografii przedstawia pewne uogólnienie modelu CRR (zob. Jarrow, Rudd, 1983), w którym założono, że możliwe górne i dolne zmiany cen akcji między chwilami handlowania u_n , d_n nie spełniają klasycznego warunku modelu CRR, tj. $u_n \cdot d_n = 1$. Założono również, że średnia zmiana logarytmu ceny akcji po n chwilach wynosi ρ , $\rho \in R$, czyli $E[\ln(S(n)/s_0)] = \rho$ (w klasycznym modelu CRR: $E[\ln(S(n)/s_0)] = 0$). Otrzymano wówczas nowe formuły na możliwe górne i dolne zmiany cen akcji spełniające warunek: $u_n \cdot d_n = \exp\{2\rho/n\}$. Ponadto rozważono przejście graniczne przy $n \rightarrow \infty$ uogólnionego modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina do analogu modelu Blacka-Scholesa. Uogólnienie modelu CRR lepiej odzwierciedla rzeczywistość na rynku finansowym, gdyż uwzględnia współczynnik ρ opisujący tendencje zmian ceny akcji. Zaprezentowano także analizę wrażliwości ceny opcji w rozważanym modelu, tj. określono zmiany ceny opcji, które nastąpiły wskutek zmian wartości czynników wpływających na jej wartość. W rozdziale 2 udowodniono również pomocnicze lematy wykorzystane w rozdziałach 3–5.

W rozdziale 3 rozważono model typu CRR ze zmieniającymi się parametrami w czasie dla dwóch długich jednostek czasu (np. miesięcy). W każdej z tych jednostek czasu przyjęto różne stopy procentowe rachunku bankowego (kredytu, obligacji) oraz odmienne współczynniki zmienności cen akcji (*volatility*) σ . Następnie utworzono ciąg uogólnionych modeli CRR (czyli tzw. kalibrację modelu CRR) i udowodniono, że odpowiednie formuły na wycenę opcji w modelach dyskretnych są zbieżne do uogólnionej formuły Blacka-Scholesa. W formule granicznej nadal pojawia się dystrybuenta rozkładu logarytmiczno-normalnego. W rozdziale 3 udowodniona jest również jednostajna zbieżność ze względu na początkową cenę akcji (przyjmując wartości na dodatniej półprostej) formuły na cenę opcji w modelu CRR do formuły Blacka-Scholesa.

Ponadto przedstawione są równania stochastyczne dla granicznego procesu cen akcji w zaprezentowanym modelu.

W rozdziałach 4 i 5 analizowano analogiczny jak w rozdziale 3 model typu CRR ze zmieniającymi się parametrami w czasie – odpowiednio dla trzech i dowolnej liczby długich jednostek czasu (np. miesięcy). Udowodniono wzory na graniczną wycenę opcji oraz jednostajną zbieżność ze względu na początkową cenę akcji formuły na cenę opcji w modelu CRR ze zmieniającymi się parametrami w czasie do formuły typu Blacka-Scholesa. W ostatnim podrozdziale wyliczono współczynniki wrażliwości granicznej ceny opcji w modelu CRR ze zmieniającymi się parametrami w czasie.

Zaprezentowany w rozdziałach 3–5 uogólniony model CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie jest bardziej realistyczny niż klasyczny model CRR – z uwagi na zmieniające się stopy procentowe, współczynniki *volatility* oraz możliwe górne i dolne zmiany ceny akcji w poszczególnych jednostkach czasu. Ponadto, korzystając z udowodnionej jednostajnej zbieżności (ze względu na początkową cenę akcji) formuły na cenę opcji w modelu CRR do formuły Blacka-Scholesa oraz jednostajnej zbieżności (ze względu na początkową cenę akcji) formuły na cenę opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie do formuły typu Blacka-Scholesa, wyprowadzono elementarnymi metodami (bez analizy stochastycznej) wzór typu Blacka-Scholesa na graniczną wycenę opcji dla przedstawionego uogólnionego modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR) z parametrami zmieniającymi się w czasie. Jednocześnie udowodniona zbieżność rozważanych formuł dyskretnych typu CRR stanowi teoretyczne uzasadnienie możliwych przybliżeń numerycznych ceny opcji.

Rozdział 6 stanowi empiryczną część monografii. Sprawdzono, w jakim stopniu wycena opcji na podstawie modelu Blacka-Scholesa oraz zaprezentowanych uogólnień modelu Blacka-Scholesa odzwierciedla wycenę opcji na polskim rynku. Badanie przeprowadzono dla okresu od 27 sierpnia 2019 r. do 20 marca 2020 r. dla opcji kupna na indeks WIG20 o cenach wykonania 1700 punktów, 1800 punktów, 1900 punktów, 2000 punktów, 2100 punktów, 2200 punktów, 2300 punktów z terminem wygaśnięcia 20 marca 2020 r. Przy wyborze najlepszej metody wyceny opcji wykorzystano analizę korelacji dla 140 obserwacji. Przeprowadzono testy istotności współczynników korelacji za pomocą testu *t*-Studenta dla poziomu istotności $\alpha = 0,01$. Policzono błędy standardowe oraz współczynniki zmienności dla omawianych modeli.

W zakończeniu monografii ujęto wnioski płynące z przeprowadzonych badań.

Zawarto również wykaz oznaczeń, dodatek 1, w którym zamieszczono twierdzenia i lematy wykorzystane w rozdziałach 3–5, oraz dodatek 2 zawierający dane rynkowe, a także obliczenia cen opcji na podstawie zaprezentowanych modeli.

W literaturze można odnaleźć wiele publikacji dotyczących modelu CRR (Shreve, 2004; Hoek, Elliott, 2006; Elliot, Kopp, 2005; Musiela, Rutkowski, 2008; Jakubowski, Palczewski, Rutkowski, Stettner, 2006; Hull, 1998), modelu CRR z kosztami transakcji (Cox, Rubinstein, 1985; Stettner, 1997), oszacowania tempa zbieżności formuły CRR wyceny opcji do formuły Blacka-Scholesa (Walsh, 2003; Ratibenyakool, Neammanee, 2019), modyfikacji modelu CRR (Rendleman, Bartter, 1979; Rubinstein, 2000; Jabbour, Kramin, Young, 2001; Karandikar, Rachev, 1995; Rachev, Ruschendorff, 1994) wraz z jego asymptotykami (Chang, Palmer, 2007; Diener, Diener, 2004; Xiao, 2010; Joshi, 2010; Leisen, Reimer, 2006; Heston, Zhou, 2000).

Jednym z rozważanych uogólnień modelu CRR jest model wielomianowy. Należy wspomnieć o pracach: Hua He (1990), Michała Motoczyńskiego i Łukasza Stettnera (1998) oraz Natalii Kan (2005). Modele opisane w wyżej wymienionych opracowaniach dotyczą współczynników stałych w czasie i nie obejmują, rozważanych w niniejszej monografii, modeli z parametrami zmieniającymi się w czasie.

W podrozdziale 2.6 publikacji *Financial Markets in Continuous Time* (Dana, Jeanblanc, 2007) przyjęto podobne założenia jak w rozdziale 2 niniejszej monografii dotyczące możliwych górnych i dolnych zmian cen akcji. Niemniej jednak we wzmiankowanym opracowaniu rozważono inne transformacje zmiennych losowych. Przyjęto pewne korekty dyskretnych zmiennych losowych i w przejściu granicznym zaprezentowanego uogólnienia modelu CRR uzyskano klasyczną formułę Blacka-Scholesa bez poprawek.

Rozdziały 3–5 monografii należy porównać z pracą Van Huu Nguyen i Tran Trong Nguyen (2001), gdzie rozważane są uogólnione modele CRR z parametrami zależnymi od czasu. Dla procesu cen akcji opisanego równaniem stochastycznym (3.2.8) z podrozdziału 3.2.1, tj.

$$\begin{cases} dS_t = r(t) \cdot S_t dt + \sigma(t) \cdot S_t dW_t, & t \in [0, T) \\ S_0 = s_0, \end{cases} \quad (3.2.8)$$

(z deterministycznymi współczynnikami $r(\cdot)$ i $\sigma(\cdot)$ zależnymi od czasu) autorzy rozważają przybliżenia dyskretne, uogólnione dwumianowe, ze współczynnikami zależnymi od N (liczby chwil handlowania) oraz od k -tej bieżącej chwili handlowania. Ten model dyskretny jest wprawdzie ogólniejszy, ale w przypadku współczynników równania (3.2.8) stałych w dużych jednostkach czasu, badanych w monografii, rozważane byłyby w pracy Nguyen Van Huu i Tran Trong Nguyen (2001) inne przybliżenia dyskretne wyceny opcji – oparte na jednej mierze martyngałowej Q_N dla przedziału $[0, T]$ (zależnej od N chwil handlowania). Tutaj dla ustalonego N rozważono różne miary martyngałowe dla poszczególnych dużych jednostek czasu i wzór aproksymacyjny na wycenę opcji w chwili 0 powstaje przez złożenie wzorów dla poszczególnych jednostek czasu. Ponadto przy przejściu granicznym do uogólnionego wzoru Blacka-Scholesa związanego z równaniem (3.2.8) Nguyen Van Huu i Tran Trong Nguyen (2001, theorem 4.4) zakładają, że współczynniki $r(\cdot)$ i $\sigma(\cdot)$ w równaniu (3.2.8) są klasy $C_1(0, T)$. Założenie to nie jest spełnione dla współczynników przedziałami stałych, rozważanych w monografii.

Rozdziały 1–5 monografii stanowią rozwinięcie wyników zawartych w rozprawie doktorskiej (Fraszka-Sobczyk, 2017). Zmiany nastąpiły między innymi w rozdziale 3 (wniosek 3.2.1 i jego dowód), w rozdziale 4 (twierdzenie 4.1.1 wraz z dowodem, wnioski 4.2.1 i 4.2.2 wraz z dowodami, dowód lematu 4.2.2, dowód twierdzenia 4.2.1) oraz w rozdziale 5 (twierdzenie 5.1.1 wraz z dowodem, wnioski 5.2.1 i 5.2.2 wraz z dowodami, dowód lematu 5.2.2, dowód twierdzenia 5.2.1, twierdzenia 5.3.1 i 5.4.1). W niniejszej monografii podano dokładniejsze oszacowanie tempa zbieżności (dokładniej, udowodniono jednostajną zbieżność) formuł na wycenę opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie do formuł typu Blacka-Scholesa. Ponadto monografia została uzupełniona o badania empiryczne (rozdział 6, dodatek 2), przykłady liczbowe (przykład 1.1.1, podrozdział 2.4) oraz wyznaczanie parametrów greckich (podrozdziały 2.3 i 5.5).

Obszerne fragmenty podrozdziałów 2.2, 3.1, 3.3 zostały opublikowane w czasopiśmie „Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź” (Fraszka-Sobczyk, 2014; Chojnowska-Michalik, Fraszka-Sobczyk, 2016; Fraszka-Sobczyk, Chojnowska-Michalik, 2019).

Autorka dziękuje dr hab. Marii Annie Chojnowskiej-Michalik, prof. UŁ, i prof. dr. hab. Adamowi Paszkiewiczowi, którym wiele zawdzięcza w swoim dorobku naukowym.

Rozdział 1

Klasyczny model

Coxa-Rossa-Rubinsteina (model CRR)

W monografii rozważany będzie model rynku doskonałego, tj. taki, który spełnia następujące warunki:

- 1) Stopy procentowe depozytów i kredytów bankowych są jednakowe.
- 2) Wysokość zaciągniętych przez inwestora kredytów bankowych nie jest ograniczona.
- 3) Zapewniona jest idealna płynność obrotu wszystkimi instrumentami, można więc kupować i sprzedawać dowolne ilości wszystkich instrumentów.
- 4) Dopuszczalna jest krótka sprzedaż wszystkich instrumentów.
- 5) Inwestorzy nie ponoszą żadnych dodatkowych kosztów związanych z zawieraniem transakcji.
- 6) Zyski z inwestowania w dowolne instrumenty finansowe nie są obciążone podatkami.

1.1. Drzewo dwumianowe. Strategia. Warunek samofinansowania

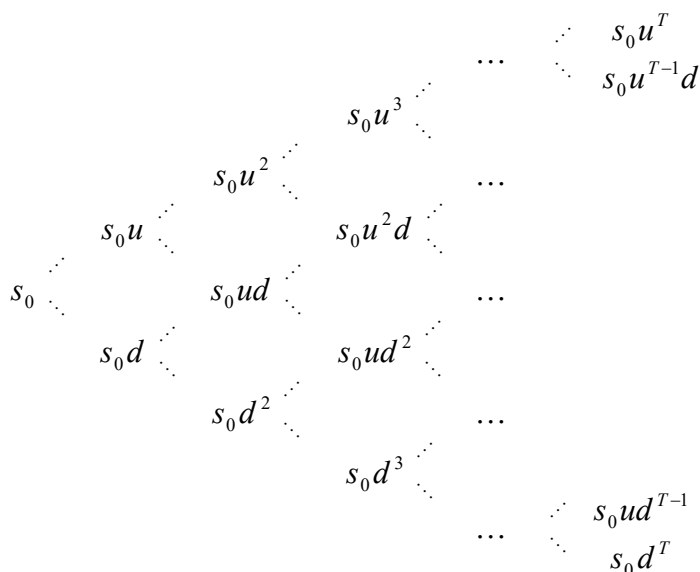
Podrozdział 1.1 przedstawia podstawowe definicje związane z modelem CRR (zob. Cox, Ross, Rubinstein, 1979; Jakubowski, 2006; Paszkiewicz, 2012).

Definicja 1.1.1. Modelem rynku dwumianowym Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR) nazwiemy układ wszystkich ciągów $(S(0), S(1), \dots, S(T))$ spełniających warunki:

$$S(0) = s_0$$

$$S(t) = S(t-1)u \text{ lub } S(t) = S(t-1)d, \quad t \in \mathbb{N}, \quad t \leq T,$$

wraz z pewną liczbą $\hat{r}$, przy czym ustalone są $T \in \mathbb{N}$, $s_0 > 0$, $0 < d < \hat{r} < u$.



Rysunek 1.1.1. Zmiany cen akcji według modelu dwumianowego

Źródło: opracowanie własne na podstawie Cox, Ross, Rubinstein, 1979.

Interpretacja

Ciąg $(S(0), \dots, S(T))$ przedstawia wszystkie możliwe zmiany ceny akcji, $S(t)$ jest ceną akcji w chwili t (np. w „dniu” t) ($t = 0, 1, \dots, T$), zaś $\hat{r} = e^r$, gdzie r jest jednookresową (np. dzienną) stopą nieryzykownego rachunku bankowego (obligacji).

Przykład 1.1.1. Rozważono akcje, których cena w każdym z n kolejnych dni może wzrosnąć u razy lub obniżyć się d razy, przy czym $u > 1$, $d = 1/u$. Przyjęto parzystą liczbę dni (n -parzyste) oraz założono, że

a) cena akcji w n -tym dniu nie ulegnie zmianie w porównaniu z początkową ceną akcji w chwili 0;

b) cena akcji w n -tym dniu jest u^6 razy wyższa w porównaniu z początkową ceną akcji w chwili 0.

Ile różnych scenariuszy zmian cen akcji można otrzymać w ciągu jednego miesiąca ($n = 30$)?

Ad a) Cena akcji w ciągu rozważanych n dni nie ulega zmianie, zatem liczba wzrostów i liczba spadków ceny akcji są takie same. Wówczas liczba możliwych scenariuszy zmian cen akcji wynosi:

$$\binom{n}{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot \left(n - \frac{n}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Dla $n = 30$

$$\binom{30}{15} = \frac{30 \cdot 29 \cdot \dots \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 15} = 155117520.$$

Zatem w ciągu jednego miesiąca można otrzymać 155117520 możliwych scenariuszy zmian ceny akcji przy założeniu, że początkowa i końcowa cena akcji są takie same.

Ad b) Końcowa cena akcji w n -tym dniu wynosi: $s_0 u^6 = s_0 u^l d^{n-l} = s_0 u^{2l-n}$.

Stąd $2l - n = 6$ i w konsekwencji $l = \frac{n+6}{2}$.

Zatem liczba możliwych scenariuszy zmian cen akcji w ciągu jednego miesiąca wynosi:

$$\binom{n}{\frac{n+6}{2}} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot \left(\frac{n}{2} + 5\right) \cdot \left(\frac{n}{2} + 4\right)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \left(\frac{n}{2} - 3\right)} = 86493225.$$

Definicja 1.1.2. Strategią nazwiemy układ par funkcji $(\alpha_0(\cdot), \beta_0(\cdot))$, $(\alpha_1(\cdot), \beta_1(\cdot))$, ..., $(\alpha_T(\cdot), \beta_T(\cdot))$, przy czym $\alpha_t(\cdot), \beta_t(\cdot) \in R$, $t = 0, 1, \dots, T$, $\alpha_t(s), \beta_t(s)$ są określone dla $s \in \{s_0 d^t, s_0 u d^{t-1}, \dots, s_0 u^{t-1} d, s_0 u^t\}$.

Interpretacja

Gracz giełdowy podejmuje decyzję w chwili t i ustala $\alpha_t(s), \beta_t(s)$ w oparciu o obserwację ceny akcji w chwili $t = 0, 1, \dots, T$, tzn. $s \in \{s_0 d^t, s_0 u d^{t-1}, \dots, s_0 u^{t-1} d, s_0 u^t\}$;

$\alpha_t(s)$ jest ilością pieniędzy na rachunku bankowym (w obligacjach) w chwili t (np. w „dniu” t wieczorem), uwzględniającą cenę akcji s w chwili t ;

$\beta_t(s)$ jest liczbą akcji w chwili t (np. w „dniu” t wieczorem), uwzględniającą cenę akcji s w chwili t .

Uwaga 1.1.1. W monografii T oznaczać będzie termin wykonania opcji. Oczywiście gracz giełdowy podejmuje decyzję o zmianie składu portfela do chwili T , tj. w chwili $T-1$. Wówczas ustala strategię $(\alpha_{T-1}(\cdot), \beta_{T-1}(\cdot))$ w oparciu o obserwację ceny akcji s w chwili $T-1$. Zatem $\alpha_{T-1}(s)$ jest ilością pieniędzy na rachunku bankowym (w obligacjach) w chwili $T-1$, zaś $\beta_{T-1}(s)$ jest liczbą akcji w chwili $T-1$, uwzględniającą cenę akcji s w chwili $T-1$. W momencie wygaśnięcia opcji T gracz nie zmienia już składu portfela, tj. $\alpha_T(\cdot) = \alpha_{T-1}(\cdot)$ oraz $\beta_T(\cdot) = \beta_{T-1}(\cdot)$, jednakże ilość jego kapitału w tym momencie liczona jest w oparciu o cenę akcji w chwili T .

Definicja 1.1.3. Strategię $(\alpha_t(\cdot), \beta_t(\cdot))$ nazwiemy strategią samofinansującą, jeżeli dla wszystkich $t = 0, 1, \dots, T-1$, spełnione są równania:

$$\alpha_t(s) \cdot \hat{r} + \beta_t(s) \cdot s \cdot u = \alpha_{t+1}(su) + \beta_{t+1}(su) \cdot s \cdot u,$$

$$\alpha_t(s) \cdot \hat{r} + \beta_t(s) \cdot s \cdot d = \alpha_{t+1}(sd) + \beta_{t+1}(sd) \cdot s \cdot d,$$

gdzie $s \in \{s_0 d^t, s_0 u d^{t-1}, \dots, s_0 u^{t-1} d, s_0 u^t\}$.

Interpretacja

Lewa strona równania oznacza wartość portfela na początku chwili (dnia) $t+1$, prawa strona – wartość portfela na koniec chwili (dnia) $t+1$.

Pierwsze równanie odpowiada zmianie ceny akcji $S(t) = s \rightarrow S(t+1) = su$, zaś drugie równanie – zmianie ceny akcji $S(t) = s \rightarrow S(t+1) = sd$.

Definicja 1.1.3 odzwierciedla fakt, że zmiana wartości portfela zależy tylko od zmian cen i nie ma przyływu gotówki z zewnątrz ani konsumpcji.

Definicja 1.1.4. Kapitałem dla strategii $(\alpha_t(\cdot), \beta_t(\cdot))$, $t = 0, 1, \dots, T$, nazwiemy ciąg funkcji $P_0(\cdot), P_1(\cdot), \dots, P_T(\cdot)$, przy czym $P_t(s)$ jest określone formułą $P_t(s) = \alpha_t(s) + \beta_t(s) \cdot s$ dla $s \in \{s_0 d^t, s_0 u d^{t-1}, \dots, s_0 u^{t-1} d, s_0 u^t\}$.

Interpretacja

$P_t(s)$ jest ilością kapitału gracza giełdowego w chwili t przy cenie akcji s w chwili t .

Definicja 1.1.5. Opcją kupna typu europejskiego z czasem realizacji T nazwiemy funkcję $C_T(\cdot): \{s_0 d^T, s_0 u d^{T-1}, \dots, s_0 u^{T-1} d, \dots, s_0 u^T\} \rightarrow R$, określoną następującą formułą:

$$C_T(s) = (s - K)^+ = \begin{cases} s - K & , \text{ gdy } s > K \\ 0 & , \text{ gdy } s \leq K \end{cases},$$

gdzie K jest ustaloną liczbą.

Interpretacja

$C_T(S(T))$ jest zobowiązaniem wystawcy opcji w chwili T ;

K jest ceną w chwili T , którą ewentualnie zapłaci posiadacz opcji kupna wystawcy opcji w zamian za dostarczony instrument bazowy (tzw. cena wykonania);

T jest momentem ewentualnej realizacji opcji (tzw. termin wygaśnięcia, termin wykonania).

Cena K jest ustalona przez wystawcę i nabywcę opcji w chwili zawierania kontraktu opcyjnego. W literaturze anglosaskiej K jest określana terminem *strike price* lub *exercise price*, zaś moment T terminem *expiration date*.

Opcja kupna typu europejskiego daje posiadaczowi opcji prawo kupna określonej ilości instrumentu bazowego (np. akcji) po ustalonej cenie wykonania K w terminie wygaśnięcia opcji T . Jeśli cena instrumentu bazowego (np. akcji)

w chwili T będzie niższa niż cena wykonania, to posiadacz opcji kupna zrezygnuje z wykonania opcji (nie ma sensu kupowanie akcji po cenie wykonania wyższej niż ich aktualna cena rynkowa). Posiadacz opcji kupna zrealizuje opcję, gdy cena wykonania będzie niższa niż aktualna cena rynkowa danego instrumentu bazowego w chwili T (wówczas posiadacz osiągnie zysk). Zatem nabywca opcji nie musi korzystać z uzyskanego prawa kupna określonej ilości instrumentu bazowego (np. akcji), jednakże musi za to prawo zapłacić. Monografia poświęcona jest wycenie tego prawa (cenie opcji kupna typu europejskiego w chwili zawarcia kontraktu) w różnych modelach dyskretnych cen akcji.

Definicja 1.1.6. Powiemy, że strategia $(\alpha_t(\cdot), \beta_t(\cdot))$, $t = 0, 1, \dots, T$, replikuje opcję kupna typu europejskiego $C_t(\cdot)$, jeżeli

$$P_T(S(T)) = \alpha_T(S(T)) + \beta_T(S(T)) \cdot S(T) = C_T(S(T)).$$

Wyceną opcji kupna typu europejskiego $C_t(s)$ w chwili $t = 0$ nazwiemy liczbę oznaczoną $C_0(s_0)$, jeżeli istnieje strategia samofinansująca replikująca opcję taka, że

$$P_0(s_0) = \alpha_0(s_0) + \beta_0(s_0) \cdot s_0 = C_0(s_0).$$

Interpretacja

$C_0(s_0)$ jest kwotą, którą nabywca opcji płaci wystawcy opcji w chwili zawierania kontraktu.

Lemat 1.1.1. Ciąg funkcji $P_t(s)$, $s \in \{s_0 d^t, s_0 u d^{t-1}, \dots, s_0 u^{t-1} d, s_0 u^t\}$ może być kapitałem pewnej strategii samofinansującej wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi:

$$P_t(s) = \frac{1}{\hat{r}} [P_{t+1}(su) \cdot p^* + P_{t+1}(sd) \cdot q^*], \quad (1.1)$$

gdzie:

$$p^* = \frac{\hat{r} - d}{u - d}, \quad q^* = \frac{u - \hat{r}}{u - d}, \quad p^* + q^* = 1, \quad t \in N, \quad 0 \leq t \leq T-1.$$

Dowód. Na to, aby układ funkcji $P_t(\cdot)$ był kapitałem pewnej strategii samofinansującej potrzeba i wystarcza, by dla każdego $t = 0, 1, \dots, T-1$ istniały liczby $\alpha_t(s), \beta_t(s) \in R$, spełniające:

$$P_t(s) = \alpha_t(s) + \beta_t(s) \cdot s \quad (1)$$

oraz

$$\begin{cases} P_{t+1}(su) = \alpha_t(s) \cdot \hat{r} + \beta_t(s) \cdot su \\ P_{t+1}(sd) = \alpha_t(s) \cdot \hat{r} + \beta_t(s) \cdot sd \end{cases} \quad (2)$$

gdzie $s \in \{s_0 d^t, s_0 u d^{t-1}, \dots, s_0 u^{t-1} d, s_0 u^t\}$.

Wyznacznik

$$W := \begin{vmatrix} \hat{r} & su \\ \hat{r} & sd \end{vmatrix} = s\hat{r}(d-u) \neq 0.$$

Zatem układ równań (2) można rozwiązać, korzystając z twierdzenia Cramera.

Obliczając

$$W_\alpha := \begin{vmatrix} P_{t+1}(su) & su \\ P_{t+1}(sd) & sd \end{vmatrix} = s(dP_{t+1}(su) - uP_{t+1}(sd)),$$

$$W_\beta := \begin{vmatrix} \hat{r} & P_{t+1}(su) \\ \hat{r} & P_{t+1}(sd) \end{vmatrix} = \hat{r}(P_{t+1}(sd) - P_{t+1}(su)),$$

można otrzymać następujące rozwiązanie układu równań (2):

$$\alpha_t(s) = \frac{s(dP_{t+1}(su) - uP_{t+1}(sd))}{s\hat{r}(d-u)} = \frac{uP_{t+1}(sd) - dP_{t+1}(su)}{\hat{r}(u-d)},$$

$$\beta_t(s) = \frac{\hat{r}(P_{t+1}(sd) - P_{t+1}(su))}{s\hat{r}(d-u)} = \frac{P_{t+1}(su) - P_{t+1}(sd)}{s(u-d)}.$$

Wstawiając powyższe rozwiązanie do (1), można otrzymać tezę:

$$P_t(s) = \frac{uP_{t+1}(sd) - dP_{t+1}(su)}{\hat{r}(u-d)} + \frac{P_{t+1}(su) - P_{t+1}(sd)}{s(u-d)} \cdot s =$$

$$= \frac{1}{\hat{r}} [P_{t+1}(su) \cdot p^* + P_{t+1}(sd) \cdot q^*],$$

gdzie:

$$p^* = \frac{\hat{r}-d}{u-d}, \quad q^* = \frac{u-\hat{r}}{u-d}, \quad p^* + q^* = 1, \quad 0 \leq t \leq T-1.$$



Uwaga 1.1.2. Ponieważ w modelu rynku dwumianowym Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR) założono, że $0 < d < \hat{r} < u$ (definicja 1.1.1), więc

$$p^* = \frac{\hat{r} - d}{u - d} > 0, \quad q^* = \frac{u - \hat{r}}{u - d} > 0.$$

1.2. Twierdzenie CRR

Poniżej przypomniano twierdzenie Coxa-Rossa-Rubinsteina (CRR) (Cox, Ross, Rubinstein, 1979).

Twierdzenie 1.2.1. CRR. Niech $C_T(\cdot): \{s_0 d^T, s_0 u d^{T-1}, \dots, s_0 u^{T-1} d, \dots, s_0 u^T\} \rightarrow R$ będzie opcją kupna typu europejskiego z czasem realizacji T . Wycena opcji przez replikację jest dana wzorem:

$$C_0(s_0) = \frac{1}{\hat{r}^T} \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T-k} C_T(s_0 u^k d^{T-k}), \quad (1.2.1)$$

gdzie $s_0 = S(0)$.

Dowód. Wzór (1.2.1) można udowodnić indukcyjnie.

I. Dla $T = 1$, zgodnie z zasadą samofinansowania (1.1):

$$C_0(s_0) = \frac{1}{\hat{r}} [C_1(s_0 u) \cdot p^* + C_1(s_0 d) \cdot q^*] = \frac{1}{\hat{r}^1} \left[\binom{1}{1} C_1(s_0 u^1 d^0) \cdot p^{*1} + \binom{1}{0} C_1(s_0 u^0 d^1) \cdot q^{*1} \right].$$

Zatem dla $T = 1$ zachodzi wzór (1.2.1).

II. Zakładając (1.2.1) dla dowolnego T , należy wykazać, że

$$C_0(s_0) = \frac{1}{\hat{r}^{T+1}} \sum_{k=0}^{T+1} \binom{T+1}{k} p^{*k} q^{*T+1-k} C_{T+1}(s_0 u^k d^{T+1-k}).$$

Zgodnie z (1.1) oraz (1.2.1):

$$\begin{aligned} C_0(s_0) &= \frac{1}{\hat{r}^T} \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T-k} C_T(s_0 u^k d^{T-k}) = \\ &= \frac{1}{\hat{r}^T} \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T-k} \frac{1}{\hat{r}} [C_{T+1}(s_0 u^k d^{T-k} u) \cdot p^* + C_{T+1}(s_0 u^k d^{T-k} d) \cdot q^*] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\hat{r}^{T+1}} \left[\sum_{k=0}^T \binom{T}{k} p^{*k+1} q^{*T-k} C_{T+1}(s_0 u^{k+1} d^{T-k}) + \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T+1-k} C_{T+1}(s_0 u^k d^{T+1-k}) \right] = \\
&= \frac{1}{\hat{r}^{T+1}} \left[\sum_{l=1}^{T+1} \binom{T}{l-1} p^{*l} q^{*T+1-l} C_{T+1}(s_0 u^l d^{T+1-l}) + \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T+1-k} C_{T+1}(s_0 u^k d^{T+1-k}) \right] = \\
&= \frac{1}{\hat{r}^{T+1}} \left[\sum_{l=1}^T \binom{T}{l-1} p^{*l} q^{*T+1-l} C_{T+1}(s_0 u^l d^{T+1-l}) + \binom{T}{T+1-1} p^{*T+1} q^{*0} C_{T+1}(s_0 u^{T+1} d^0) + \right. \\
&\quad \left. + \binom{T}{0} p^{*0} q^{*T+1} C_{T+1}(s_0 u^0 d^{T+1}) + \sum_{k=1}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T+1-k} C_{T+1}(s_0 u^k d^{T+1-k}) \right].
\end{aligned}$$

Można zauważyć, że $\binom{T}{T} = 1 = \binom{T+1}{T+1}$ oraz $\binom{T}{0} = 1 = \binom{T+1}{0}$.

Stąd

$$\begin{aligned}
C_0(s_0) &= \frac{1}{\hat{r}^{T+1}} \left[\sum_{k=1}^T \binom{T}{k-1} p^{*k} q^{*T+1-k} C_{T+1}(s_0 u^k d^{T+1-k}) + \binom{T+1}{T+1} p^{*T+1} q^{*0} C_{T+1}(s_0 u^{T+1} d^0) + \right. \\
&\quad \left. + \binom{T+1}{0} p^{*0} q^{*T+1} C_{T+1}(s_0 u^0 d^{T+1}) + \sum_{k=1}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T+1-k} C_{T+1}(s_0 u^k d^{T+1-k}) \right].
\end{aligned}$$

Korzystając z własności: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ dla dowolnych

$n, k \in N, k < n$, można otrzymać:

$$\begin{aligned}
C_0(s_0) &= \frac{1}{\hat{r}^{T+1}} \left[\sum_{k=1}^T \binom{T+1}{k} p^{*k} q^{*T+1-k} C_{T+1}(s_0 u^k d^{T+1-k}) + \binom{T+1}{T+1} p^{*T+1} q^{*0} C_{T+1}(s_0 u^{T+1} d^0) + \right. \\
&\quad \left. + \binom{T+1}{0} p^{*0} q^{*T+1} C_{T+1}(s_0 u^0 d^{T+1}) \right] = \frac{1}{\hat{r}^{T+1}} \sum_{k=0}^{T+1} \binom{T+1}{k} p^{*k} q^{*T+1-k} C_{T+1}(s_0 u^k d^{T+1-k}). \quad \square
\end{aligned}$$

Wniosek 1.2.1. Dla opcji kupna na akcję typu europejskiego $C_T(\cdot): \{s_0 d^T, s_0 u d^{T-1}, \dots, s_0 u^{T-1} d, \dots, s_0 u^T\} \rightarrow R$, z czasem realizacji T i ceną wykupu $K = s_0 u^{k_0} d^{T-k_0}$, $k_0 \in N \cup \{0\}$, wycena przez replikację jest dana wzorem:

$$C_0(s_0) = s_0 \bar{D} - \frac{K}{\hat{r}^T} D^*, \quad (1.2.2)$$

gdzie:

$$\bar{D} = \sum_{k=k_0}^T \binom{T}{k} \cdot \bar{p}^k \cdot \bar{q}^{T-k}, \quad D^* = \sum_{k=k_0}^T \binom{T}{k} \cdot p^{*k} \cdot q^{*T-k},$$

$$k_0 = \frac{\ln \frac{K}{s_0} - T \ln d}{\ln \frac{u}{d}}, \quad p^* = \frac{\hat{r} - d}{u - d}, \quad q^* = \frac{u - \hat{r}}{u - d}, \quad \bar{p} = p^* \cdot \frac{u}{\hat{r}}, \quad \bar{q} = q^* \cdot \frac{d}{\hat{r}}.$$

Dowód. Rozważając opcję europejską z ceną wykupu $K = s_0 u^{k_0} d^{T-k_0}$, można uzyskać

$$\begin{aligned} C_0(s_0) &= \frac{1}{\hat{r}^T} \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T-k} C_T(s_0 u^k d^{T-k}) = \\ &= \frac{1}{\hat{r}^T} \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T-k} (s_0 u^k d^{T-k} - s_0 u^{k_0} d^{T-k_0})^+ = \begin{cases} 0, & k < k_0 \\ s_0 u^k d^{T-k} - K, & k \geq k_0 \end{cases} = \\ &= \frac{1}{\hat{r}^T} \sum_{k=k_0}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T-k} (s_0 u^k d^{T-k} - K) = s_0 \sum_{k=k_0}^T \binom{T}{k} \frac{p^{*k} u^k}{\hat{r}^k} \frac{q^{*T-k} d^{T-k}}{\hat{r}^{T-k}} - \frac{K}{\hat{r}^T} \sum_{k=k_0}^T \binom{T}{k} p^{*k} q^{*T-k}. \end{aligned}$$

Stosując oznaczenia: $\bar{p} = p^* \cdot \frac{u}{\hat{r}}$, $\bar{q} = q^* \cdot \frac{d}{\hat{r}}$, można wykazać, że

$$\bar{p} + \bar{q} = \frac{(\hat{r} - d)u}{(u - d)\hat{r}} + \frac{(u - \hat{r})d}{(u - d)\hat{r}} = \frac{(\hat{r} - d)u + (u - \hat{r})d}{(u - d)\hat{r}} = 1.$$

Ponadto

$$(K = s_0 u^{k_0} d^{T-k_0}) \Leftrightarrow \left(\frac{K}{s_0} \frac{1}{d^T} = \left(\frac{u}{d} \right)^{k_0} \right).$$

Stąd

$$k_0 \ln \frac{u}{d} = \ln \frac{K}{s_0} - T \ln d.$$

Zatem

$$k_0 = \frac{\ln \frac{K}{s_0} - T \ln d}{\ln \frac{u}{d}}.$$



Uwaga 1.2.1. Wzory na p^* , q^* , $\bar{p}$, $\bar{q}$, k_0 nie są zdeterminowane zależnością między górną i dolną zmianą ceny akcji u i d . Założono wyłącznie, że $0 < d < \hat{r} < u$.

Lemat 1.2.1. Wycena opcji kupna typu europejskiego z terminem wykonania T w dowolnej chwili $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t < T$ jest dana wzorem:

$$C_t(s_t) = \frac{1}{\hat{r}^{T-t}} \sum_{k=0}^{T-t} \binom{T-t}{k} p^{*k} q^{*(T-t-k)} C_{T-t}(s_t u^k d^{T-t-k}) \quad (1.2.3)$$

lub równoważnie

$$C_t(s_t) = s_t \bar{D} - \frac{K}{\hat{r}^{T-t}} D^*, \quad (1.2.4)$$

gdzie:

$$\bar{D} = \sum_{k=l_0}^{T-t} \binom{T-t}{k} \cdot \bar{p}^k \cdot \bar{q}^{T-t-k}, \quad D^* = \sum_{k=l_0}^{T-t} \binom{T-t}{k} \cdot p^{*k} \cdot q^{*(T-t-k)},$$

$$l_0 = \frac{\ln \frac{K}{s_t} - (T-t) \cdot \ln d}{\ln \left(\frac{u}{d} \right)}, \quad p^* = \frac{\hat{r} - d}{u - d}, \quad q^* = \frac{u - \hat{r}}{u - d}, \quad \bar{p} = p^* \cdot \frac{u}{\hat{r}}, \quad \bar{q} = q^* \cdot \frac{d}{\hat{r}},$$

C_{T-t} oznacza opcję kupna typu europejskiego z czasem realizacji $T-t$, tj.

$$C_{T-t}(s_t u^k d^{T-t-k}) = (s_t u^k d^{T-t-k} - K)^+, \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq T-t,$$

$$s_t \in \{s_0 d^t, s_0 u d^{t-1}, \dots, s_0 u^{t-1} d, s_0 u^t\}, \quad s_0 = S(0).$$

Dowód. Dowód lematu jest analogiczny do dowodu twierdzenia 1.2.1 i wniosku 1.2.1.

1.3. Kalibracja modelu CRR

W poprzednich podrozdziałach rozważono $T+1$ chwil, tj. chwilę tworzenia portfela (strategii) $t=0$, a następnie kolejne możliwe chwile (dni) handlowania (chwile zmian cen akcji) $t=1, t=2, \dots, t=T$. Oczywiście na rynku finansowym można handlować akcjami w dowolnym momencie w danym dniu,

jak również ceny akcji w danym dniu mogą przyjąć więcej niż dwie wartości. Zatem należy dokonać kalibracji modelu na model bardziej realistyczny.

Niech τ będzie liczbą jednostek czasu do rozliczenia opcji europejskiej (np. liczbą miesięcy), zaś n – liczbą chwil zmiany portfela (handlowania) w jednostce czasu. Wówczas $T = n \cdot \tau$, przy czym należy założyć, iż n dąży do nieskończoności. Ponadto można przyjąć, że zmiany akcji między kolejnymi chwilami: u_n lub d_n są jednakowo prawdopodobne oraz $d_n = \frac{1}{u_n}$. Niech S_n

będzie liczbą wzrostów ceny akcji w jednostce czasu (np. miesiącu). Wówczas cena akcji $S(n)$ po n chwilach wynosi:

$$S(n) = s_0 \cdot u_n^{S_n} \cdot d_n^{n-S_n}.$$

Można zauważyć, że $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, gdzie $X_i = I_{A_i}$ oraz

$A_1, A_2, \dots, A_n$ są niezależnymi zdarzeniami losowymi, $P(A_i) = \frac{1}{2}$,

$$i = 1, 2, \dots, n \text{ oraz } E[S_n] = \frac{1}{2}n, \quad D^2[S_n] = \frac{1}{4}n.$$

Ponadto

$$\frac{S(n)}{s_0} = u_n^{S_n} \cdot \left(\frac{1}{u_n}\right)^{n-S_n}, \quad \ln \frac{S(n)}{s_0} = (\ln u_n) \cdot (2S_n - n),$$

$$E\left[\ln \frac{S(n)}{s_0}\right] = 0, \quad D^2\left[\ln \frac{S(n)}{s_0}\right] = n \cdot (\ln u_n)^2.$$

Założenia klasycznego modelu CRR są następujące:

$$u_n = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad d_n = \frac{1}{u_n} = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad \text{gdzie } \sigma = \sqrt{n} \cdot (\ln u_n) \text{ jest odchyleniem}$$

standardowym zmiennej losowej $\ln \frac{S(n)}{s_0}$.

Symbol $\hat{r}_n$ oznaczać będzie oprocentowanie jednookresowe lokaty bankowej (kredytu, obligacji), zaś r – bankową stopę procentową za daną jednostkę czasu

(np. dany miesiąc). Wówczas $\hat{r}_n = e^{\frac{r}{n}}$ oraz $\hat{r}_n^T = e^{r \cdot \tau}$. Należy założyć, że $0 < d_n < \hat{r}_n < u_n$.

Wniosek 1.3.1. Uwzględniając powyższe założenia i wzór (1.2.2), otrzymać można analogiczny wzór na wycenę europejskiej opcji kupna przez replikację:

$$C_{0,n}(s_0) = s_0 \bar{D}_n - \frac{K}{e^{r\tau}} D_n^*, \quad (1.3)$$

gdzie:

$$\bar{D}_n = \sum_{k=k_{0,n}}^{n\tau} \binom{n\tau}{k} \cdot \bar{p}_n^k \cdot \bar{q}_n^{n\tau-k},$$

$$D_n^* = \sum_{k=k_{0,n}}^{n\tau} \binom{n\tau}{k} \cdot p_n^{*k} \cdot q_n^{*n\tau-k},$$

$$k_{0,n} = \frac{\ln \frac{K}{s_0} - \tau \cdot n \cdot \ln d_n}{\ln \left(\frac{u_n}{d_n} \right)} = \frac{\sqrt{n} \ln \frac{K}{s_0} + \sigma \cdot \tau \cdot n}{2\sigma},$$

$$p_n^* = \frac{\hat{r}_n - d_n}{u_n - d_n}, \quad q_n^* = \frac{u_n - \hat{r}_n}{u_n - d_n}, \quad \bar{p}_n = p_n^* \cdot \frac{u_n}{\hat{r}_n}, \quad \bar{q}_n = q_n^* \cdot \frac{d_n}{\hat{r}_n}.$$

1.4. Formuła Blacka-Scholesa

Niech ceny akcji są procesem stochastycznym z czasem ciągłym $\{S(t) : t \in [0, T]\}$, tzw. geometrycznym ruchem Browna (zob. podrozdział 3.2.1). Poniżej przypomniano wzór na cenę europejskiej opcji (kupna) na akcję podany przez Blacka i Scholesa oraz przejście graniczne modelu CRR przy dużej liczbie chwil handlowania do formuły Blacka-Scholesa.

Twierdzenie 1.4.1. Wzór Blacka-Scholesa. Dla europejskiej opcji kupna akcji S , odpowiadającej wypłacie $C_T(S(T)) = (S(T) - K)^+$ w chwili T , zachodzi następujący wzór na cenę $C_t(S(t))$ opcji w chwili $0 \leq t < T$:

$$C_t(S(t)) = S(t) \cdot \phi(d_+) - Ke^{-r(T-t)} \cdot \phi(d_-), \quad (1.4.1)$$

gdzie $S(t)$ jest ceną akcji w chwili t , na którą jest wystawiona opcja, K jest ceną wykonania opcji, T – terminem wygaśnięcia opcji, $\phi(\cdot)$ jest dystrybuantą

standaryzowanego rozkładu normalnego. Wielkości d_+ oraz d_- są określone wzorami:

$$d_+ = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_- = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

gdzie r jest wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę czasu oraz σ jest zmiennością cen akcji, tj. odchyleniem standardowym zmiennej losowej

$$\ln \frac{S(t)}{S(0)}.$$

Poniższe twierdzenie opisuje przejście graniczne przy $n \rightarrow \infty$ formuły Coxa-Rossa-Rubinsteina do formuły Blacka-Scholesa.

Twierdzenie 1.4.2. Przy założeniach i oznaczeniach podrozdziału 1.3 dla europejskiej opcji kupna z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową (kredytu, obligacji) za daną jednostkę czasu (np. dany miesiąc) r oraz współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ zachodzi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) = s_0 \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) - \frac{K}{e^{r\tau}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \right). \quad (1.4.2)$$

Uwaga 1.4.1. Można zauważyć, że prawa strona (1.4.2) jest ceną opcji opisaną wzorem Blacka-Scholesa (1.4.1) dla $t = 0$ i $T = \tau$.

W dalszej części monografii zostanie udowodnione twierdzenie 2.2.1 (zob. rozdział 2) oraz twierdzenie 3.3.2 (zob. rozdział 3), będące uogólnieniami powyższego twierdzenia 1.4.2.

Poniżej zostało przypomniane dostatecznie ogólnie sformułowane twierdzenie graniczne (będące przypadkiem szczególnym twierdzenia Lindeberga-Fellera), które zostanie wykorzystane w dowodach zamieszczonych w następnych rozdziałach monografii.

Twierdzenie 1.4.3. Dla $n = 1, 2, \dots$ ustalono $0 < p_n < 1$, $q_n = 1 - p_n$. Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $A_{n,1}, A_{n,2}, \dots, A_{n,n}$ będą niezależnymi zdarzeniami losowymi takimi, że $P_n(A_{n,i}) = p_n$, zaś S_n będzie zmienną losową określającą liczbę zachodzących zdarzeń $A_{n,i}$, tj. $S_n = \sum_{i=1}^n I_{A_{n,i}}$. Założono, że zachodzi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \in (0, 1) \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}. \text{ Wówczas}$$

$$P_n\left(\frac{S_n - n \cdot p_n}{\sqrt{n \cdot p_n \cdot q_n}} \leq x_n\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \phi(x)$$

($\phi(\cdot)$ – dystrybuenta standaryzowanego rozkładu normalnego).

Dowód. Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zmienne losowe $I_{A_{n,i}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie dwupunktowym, więc spełniona jest teza lematu (warunek Lapunowa dla rozkładu dwupunktowego) zamieszczonego w dodatku 1. Zatem z twierdzenia Lapunowa (zob. dodatek 1) wynika, że

$$F_n(x) := P_n\left(\frac{S_n - n \cdot p_n}{\sqrt{n \cdot p_n \cdot q_n}} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \phi(x).$$

Funkcje F_n i ϕ spełniają założenia twierdzenia 1 Pólya (zob. dodatek 1), ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja F_n jest niemalejąca i ograniczona, ϕ jest funkcją ciągłą i ograniczoną oraz dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \phi(x)$.

Zatem z wniosku z twierdzenia 1 Pólya (zob. dodatek 1) wynika, że

$$P_n\left(\frac{S_n - n \cdot p_n}{\sqrt{n \cdot p_n \cdot q_n}} \leq x_n\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \phi(x).$$



Następne twierdzenie jest pewnym uogólnieniem poprzedniego twierdzenia.

Twierdzenie 1.4.4. Niech S_n będzie liczbą sukcesów w n -tym schemacie Bernoulliego, n – liczbą prób, $p_n = 1 - q_n$ – prawdopodobieństwem sukcesu w jednej próbie w n -tym schemacie, $n = 1, 2, \dots$, oraz $p_n \rightarrow p$, $p \in (0, 1)$.

Ponadto niech określone są funkcje $x_n(s)$, $x(s)$, $s > 0$ oraz $x_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(s)$ jednostajnie po $s > 0$. Wówczas

$$P_n \left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{D_n^2 S_n}} \leq x_n(s) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(x(s)) \text{ jednostajnie po } s > 0.$$

Dowód. Z twierdzenia Lapunowa (zob. dodatek 1):

$$P_n \left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{D_n^2 S_n}} \leq x \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(x) \text{ dla dowolnego } x \in R.$$

Można zauważyć, że funkcje $\phi(\cdot)$ oraz $F_n(\cdot) := P_n \left(\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{D_n^2 S_n}} \leq \cdot \right)$ są funkcjami

niemalejącymi i ograniczonymi na R oraz ponadto ϕ jest ograniczona i ciągła. Zatem z twierdzenia 1 Pólya (zob. dodatek 1) dla dowolnego ustalonego $\varepsilon > 0$:

$$\exists_{n_1 \in N} \quad \forall_{n_1 \leq n \in N} \quad \sup_{y \in R} |F_n(y) - \phi(y)| < 0,5 \cdot \varepsilon. \quad (1)$$

Z jednostajnej ciągłości funkcji ϕ (zob. lemat w dodatku 1) do $\varepsilon > 0$ należy dobrać $\eta > 0$ takie, że

$$\forall_{x_1, x_2 \in R} \quad (|x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |\phi(x_1) - \phi(x_2)| < 0,5 \cdot \varepsilon), \quad (2)$$

a następnie z jednostajnej zbieżności ciągu funkcji $(x_n(\cdot))_{n=1}^{\infty}$ do funkcji $x(\cdot)$, do $\eta > 0$ należy dobrać $n_0 \in N$ takie, że

$$\forall_{n_0 \leq n \in N} \quad \forall_{s > 0} \quad |x_n(s) - x(s)| < \eta.$$

Stąd i z (2):

$$\forall_{n_0 \leq n \in N} \quad \forall_{s > 0} \quad |\phi(x_n(s)) - \phi(x(s))| < 0,5 \cdot \varepsilon. \quad (3)$$

Z (1) i (3) wynika, że

$$\begin{aligned} & \exists_{n_2 = \max\{n_0, n_1\}} \quad \forall_{n_2 \leq n \in N} \quad \forall_{s > 0} \quad |F_n(x_n(s)) - \phi(x(s))| \leq |F_n(x_n(s)) - \phi(x_n(s))| + \\ & + |\phi(x_n(s)) - \phi(x(s))| \leq \sup_{y \in R} |F_n(y) - \phi(y)| + |\phi(x_n(s)) - \phi(x(s))| < \varepsilon, \end{aligned}$$

co oznacza jednostajną po $s > 0$ zbieżność ciągu funkcji $F_n(x_n(\cdot))$, $n = 1, 2, \dots$, do funkcji $\phi(x(\cdot))$. □

Rozdział 2

Uogólnienie modelu CRR

W poprzednim rozdziale przypomniano klasyczny model CRR, w którym założono, że zmiany akcji u_n i d_n między kolejnymi chwilami handlowania wynoszą odpowiednio:

$$u_n = e^{\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}} \text{ i } d_n = \frac{1}{u_n} = e^{-\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}},$$

gdzie σ jest odchyleniem standardowym zmiennej losowej $\ln \frac{S(n)}{S_0}$ ($S(n)$ jest ceną akcji po n chwilach). W podrozdziale 1.3 pokazano, że

$$E\left[\ln \frac{S(n)}{S_0}\right] = 0 \text{ oraz } D^2\left[\ln \frac{S(n)}{S_0}\right] = n \cdot (\ln u_n)^2.$$

Założenie klasycznego modelu CRR: $u_n = e^{\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}}$, $d_n = e^{-\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}}$ jest konsekwencją dwóch powyższych obliczeń.

W tym rozdziale zostanie zaprezentowany uogólniony model CRR, w którym założono, że średnia zmiana logarytmu ceny akcji po n chwilach wynosi ρ , $\rho \in \mathbb{R}$ (w klasycznym modelu CRR: $E[\ln(S(n)/S_0)] = 0$). Zatem współczynnik ρ będzie opisywać tendencje zmian ceny akcji na rynku finansowym. Powyższe założenie lepiej odzwierciedla rzeczywistość. Inwestor (nabywca opcji) przed podjęciem decyzji o inwestycji (wykupieniem opcji) dokonuje subiektywnej oceny rynku (obserwuje tendencje zmian ceny akcji i na podstawie swojej analizy określa współczynnik ρ). Założenie, że $\rho \neq 0$ powoduje zmianę założenia klasycznego modelu CRR: $u_n \cdot d_n = 1$.

W podrozdziale 2.1 pokazano, że przy założeniu: $E[\ln(S(n)/s_0)] = \rho$, zmiany cen akcji u_n i d_n między kolejnymi chwilami handlowania wyniosą odpowiednio:

$$u_n = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot e^{\rho \frac{1}{n}} \quad \text{ i } \quad d_n = \frac{e^{\frac{2\rho}{n}}}{u_n} = e^{-\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot e^{\rho \frac{1}{n}}$$

i w konsekwencji

$$u_n \cdot d_n = e^{\frac{2\rho}{n}}.$$

Pozostałe założenia modelu CRR pozostaną bez zmian.

2.1. Wycena opcji

Niech s_0 i $S(n)$ będą odpowiednio ceną akcji w chwili 0, tj. w chwili zawarcia kontraktu, i ceną akcji po upływie jednostki czasu (np. po miesiącu), przy czym rozważano n chwil handlowania w danej jednostce czasu. Można zauważyć, że cena akcji $S(n)$ po n chwilach wynosi:

$$S(n) = s_0 \cdot u_n^{S_n} \cdot d_n^{n-S_n},$$

gdzie S_n jest zmienną losową opisującą liczbę wzrostów ceny akcji w jednostce czasu (np. miesiącu). Podobnie jak w modelu CRR założono, że prawdopodobieństwa górnej i dolnej zmiany ceny akcji wynoszą 0,5, tj. $p_n = q_n = 0,5$. Wówczas

$$\ln \frac{S(n)}{s_0} = S_n \cdot \ln u_n + (n - S_n) \cdot \ln d_n,$$

$$E \left[\ln \frac{S(n)}{s_0} \right] = \ln u_n \cdot E[S_n] + n \ln d_n - \ln d_n \cdot E[S_n] =$$

$$= 0,5n \cdot \ln u_n + n \cdot \ln d_n - 0,5n \cdot \ln d_n = 0,5n \cdot \ln u_n + 0,5n \cdot \ln d_n.$$

Zakładając, że $E[\ln S(n)/s_0] = \rho$, można otrzymać $\rho = 0,5n \cdot \ln(u_n \cdot d_n)$

i w konsekwencji

$$u_n \cdot d_n = e^{\frac{2\rho}{n}}.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
 D^2 \left[\ln \frac{S(n)}{s_0} \right] &= E \left[S_n \ln u_n + (n - S_n) \ln d_n - 0,5n \ln(u_n d_n) \right]^2 = \\
 &= E \left[S_n \ln u_n + (n - S_n) \left(\frac{2\rho}{n} - \ln u_n \right) - \rho \right]^2 = E \left[(2S_n - n) \ln u_n + 2\rho \left(1 - \frac{S_n}{n} \right) - \rho \right]^2 = \\
 &= E \left[(2S_n - n) \left(\ln u_n - \rho \frac{1}{n} \right) \right]^2 = \left(\ln u_n - \rho \frac{1}{n} \right)^2 E \left[2(S_n - \frac{1}{2}n) \right]^2 = \\
 &= \left(\ln u_n - \rho \frac{1}{n} \right)^2 4D^2[S_n] = n \left(\ln u_n - \rho \frac{1}{n} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Oznaczając $\sigma^2 := D^2 \left[\ln \frac{S(n)}{s_0} \right]$, można uzyskać następujące formuły:

$$u_n = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot e^{\rho \frac{1}{n}} \quad \text{ i } \quad d_n = \frac{e^{2\rho \frac{1}{n}}}{u_n} = e^{-\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot e^{\rho \frac{1}{n}}.$$

Uwzględniając powyższe wzory i wniosek 1.3.1, można sformułować następujący:

Wniosek 2.1.1. Dla zaprezentowanego w tym rozdziale uogólnionego modelu CRR, w którym $u_n \cdot d_n = \exp(2\rho/n)$ wzór na wycenę europejskiej opcji kupna przez replikację ma postać

$$C_{0,n}(s_0) = s_0 \bar{D}_n - \frac{K}{e^{r\tau}} D_n^*, \quad (2.1)$$

gdzie:

$$\bar{D}_n = \sum_{k=k_{0,n}}^{n\tau} \binom{n\tau}{k} \cdot \bar{p}_n^k \cdot \bar{q}_n^{n\tau-k}, \quad D_n^* = \sum_{k=k_{0,n}}^{n\tau} \binom{n\tau}{k} \cdot p_n^{*k} \cdot q_n^{*n\tau-k},$$

$$k_{0,n} = \frac{\ln \frac{K}{s_0} - \tau \cdot n \cdot \ln d_n}{\ln \left(\frac{u_n}{d_n} \right)} = \frac{\sqrt{n} \ln \frac{K}{s_0} + \sigma \cdot \tau \cdot n - \sqrt{n} \cdot \tau \cdot \rho}{2\sigma},$$

$$p_n^* = \frac{\hat{r}_n - d_n}{u_n - d_n}, \quad q_n^* = \frac{u_n - \hat{r}_n}{u_n - d_n}, \quad \bar{p}_n = p_n^* \cdot \frac{u_n}{\hat{r}_n}, \quad \bar{q}_n = q_n^* \cdot \frac{d_n}{\hat{r}_n},$$

gdzie $u_n = e^{\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot e^{\rho \frac{1}{n}}$ i $d_n = \frac{e^{2\rho \frac{1}{n}}}{u_n} = e^{-\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot e^{\rho \frac{1}{n}}$.

Uwaga 2.1.1. Z uwagi 1.2.1 (na końcu podrozdziału 1.2) można wnioskować o poprawności wzoru (2.1).

Uwaga 2.1.2. σ jest współczynnikiem zmienności logarytmu ceny akcji po jednej jednostce czasu (np. po jednym miesiącu), tj. σ jest odchyleniem standardowym zmiennej losowej $\ln \frac{S(n)}{s_0}$.

2.2. Przejście graniczne

Podrozdział ten poświęcony jest opisaniu przejścia granicznego przy $n \rightarrow \infty$ formuły na cenę opcji w uogólnionym modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina do analogu formuły Blacka-Scholesa. Zamieszczone poniżej twierdzenie 2.2.1, lematy 2.2.1–2.2.3 wraz z dowodami zostały opublikowane w czasopiśmie „Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź” (Fraszka-Sobczyk, 2014).

Twierdzenie 2.2.1. Dla europejskiej opcji kupna z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową (kredytu, obligacji) za daną jednostkę czasu (np. dany miesiąc) r oraz współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu zachodzi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) = s_0 \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r - \rho + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) - \frac{K}{e^{r\tau}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r - \rho - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{\tau}} \right),$$

gdzie ρ jest współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu, np. miesiącu, $\phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

W dowodzie powyższego twierdzenia należy skorzystać z poniższych lematów.

Lemat 2.2.1. Występują następujące zbieżności:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{p_n^* \cdot q_n^*} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\bar{p}_n \cdot \bar{q}_n} = \frac{1}{2}.$$

Dowód. Korzystając ze wzorów: $p_n^* = \frac{\hat{r}_n - d_n}{u_n - d_n}$, $q_n^* = \frac{u_n - \hat{r}_n}{u_n - d_n}$, $\hat{r}_n = e^{\frac{1}{r \cdot n}}$,

$u_n = e^{\frac{1}{\sigma \sqrt{n}}} \cdot e^{\rho \frac{1}{n}}$, $d_n = e^{-\frac{1}{\sigma \sqrt{n}}} \cdot e^{\rho \frac{1}{n}}$ i podstawiając $\varepsilon := 1/\sqrt{n}$ można otrzymać:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{p_n^* \cdot q_n^*} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\frac{e^{r \cdot \varepsilon^2} - e^{-\sigma \cdot \varepsilon} e^{\rho \varepsilon^2}}{e^{\sigma \cdot \varepsilon} e^{\rho \cdot \varepsilon^2} - e^{-\sigma \cdot \varepsilon} e^{\rho \cdot \varepsilon^2}} \cdot \frac{e^{\sigma \cdot \varepsilon} e^{\rho \cdot \varepsilon^2} - e^{r \cdot \varepsilon^2}}{e^{\sigma \cdot \varepsilon} e^{\rho \cdot \varepsilon^2} - e^{-\sigma \cdot \varepsilon} e^{\rho \cdot \varepsilon^2}}} \stackrel{H}{=} \dots = \sqrt{\frac{\sigma^2}{(\sigma + \sigma)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\bar{p}_n \cdot \bar{q}_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{p_n^* \cdot \frac{e^{\frac{\sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}} \cdot e^{\rho \cdot \frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{r \cdot n}}}} \cdot q_n^* \cdot \frac{e^{-\frac{\sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}} \cdot e^{\rho \cdot \frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{r \cdot n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{p_n^* \cdot q_n^*} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

W kolejnych dwóch lematach należy skorzystać z symbolu $o(n^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, który oznacza dowolny ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniający $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = 0$ oraz z następujących oczywistych własności:

- $o(n^\alpha) \cdot o(n^\beta)$ można zastąpić $o(n^{\alpha+\beta})$,
- dla $\alpha \leq \beta$, $o(n^\alpha) + o(n^\beta)$ można zastąpić $o(n^\beta)$,
- $o(n^\alpha) \cdot n^\beta$ można zastąpić $o(n^{\alpha+\beta})$,
- $\frac{1}{1+o(n^\alpha)}$ można zastąpić $1+o(n^\alpha)$, gdy $\alpha < 0$.

Lemat 2.2.2. Prawdziwe są następujące asymptotyki:

$$p_n^* = \frac{1}{2} + \left(\frac{r-\rho}{2\sigma} - \frac{1}{4}\sigma \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2},$$

$$\bar{p}_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{r-\rho}{2\sigma} + \frac{1}{4}\sigma \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

Dowód. Korzystając z a)–d):

$$\begin{aligned} p_n^* &= \frac{e^{\frac{(r-\rho)}{n}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} = \frac{1 + (r-\rho)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \sigma\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{1 + \sigma\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \sigma\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \\ &= \frac{\sigma\frac{1}{\sqrt{n}} + (r-\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{2\sigma\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{r-\rho}{2\sigma} - \frac{\rho}{2\sigma} - \frac{1}{4}\sigma \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{o(1/n)}{2\sigma(1/\sqrt{n})}}{1 + \frac{o(1/n)}{2\sigma(1/\sqrt{n})}} = \\ &= \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{r-\rho}{2\sigma} - \frac{\rho}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] \cdot \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{r-\rho}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned} \bar{p}_n &= p_n^* \cdot \frac{u_n}{\hat{f}_n} = \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{r-\rho}{2\sigma} - \frac{1}{4}\sigma \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] \cdot \frac{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{e^{\frac{(r-\rho)}{n}}} = \\ &= \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{r-\rho}{2\sigma} - \frac{1}{4}\sigma \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] \cdot \frac{1 + \sigma\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{1 + (r-\rho)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n} \right)} = \\ &= \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{r-\rho}{2\sigma} - \frac{1}{4}\sigma \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] \cdot \left(1 + \sigma\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \cdot \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{r-\rho}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{r-\rho}{2\sigma} + \frac{\sigma}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right). \end{aligned}$$

Lemat 2.2.3. Występują następujące zbieżności:

$$\sqrt{n}(1 - 2p_n^*) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\sigma - \frac{r-\rho}{\sigma},$$

$$\sqrt{n}(1 - 2\bar{p}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}\sigma - \frac{r-\rho}{\sigma}.$$



Dowód. Z lematu 2.2.2 wynika, że

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(1-2p_n^*) &= -2\sqrt{n}\left(\left(\frac{r-\rho}{2\sigma}-\frac{\sigma}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{\sigma}{2}-\frac{r-\rho}{\sigma}+o(1) \xrightarrow{n\rightarrow\infty} \frac{\sigma}{2}-\frac{r-\rho}{\sigma}, \\ \sqrt{n}(1-2\bar{p}_n) &= -2\sqrt{n}\left(\left(\frac{r-\rho}{2\sigma}+\frac{\sigma}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = -\frac{\sigma}{2}-\frac{r-\rho}{\sigma}+o(1) \xrightarrow{n\rightarrow\infty} -\frac{\sigma}{2}-\frac{r-\rho}{\sigma}.\end{aligned}$$

□

Dowód twierdzenia 2.2.1. Zachodzi:

$$\frac{k_{o,n}-n\tau\cdot\bar{p}_n}{\sqrt{n\tau\cdot\bar{p}_n\bar{q}_n}} = \frac{\ln\frac{K}{s_0}+\tau\sigma\sqrt{n}(1-2\bar{p}_n)}{2\sqrt{\tau}\sigma\sqrt{\bar{p}_n\bar{q}_n}}, \quad \frac{k_{o,n}-n\tau\cdot p_n^*}{\sqrt{n\tau\cdot p_n^*q_n^*}} = \frac{\ln\frac{K}{s_0}+\tau\sigma\sqrt{n}(1-2p_n^*)}{2\sqrt{\tau}\sigma\sqrt{p_n^*q_n^*}}.$$

Z lematu 2.2.1 i lematu 2.2.3 wiadomo, że istnieją granice przy $n\rightarrow\infty$ powyższych wyrażeń.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\bar{y} = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\ln\frac{K}{s_0}+\tau\sigma\sqrt{n}(1-2\bar{p}_n)}{2\sqrt{\tau}\sigma\sqrt{\bar{p}_n\bar{q}_n}}, \quad y^* = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{\ln\frac{K}{s_0}+\tau\sigma\sqrt{n}(1-2p_n^*)}{2\sqrt{\tau}\sigma\sqrt{p_n^*q_n^*}},$$

$S_{n\tau}$ – liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego przy $n\tau$ próbach, z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie wynoszącym $\bar{p}_n$.

Wówczas ze wzorów we wniosku 2.1.1 oraz z twierdzenia 1.4.3 i lematu 2.2.2 wynika, że

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \bar{D}_n = \lim_{n\rightarrow\infty} P(S_{n\tau} > k_{o,n}) = \lim_{n\rightarrow\infty} P\left(\frac{S_{n\tau}-n\tau\cdot\bar{p}_n}{\sqrt{n\tau\cdot\bar{p}_n\bar{q}_n}} > \frac{k_{o,n}-n\tau\cdot\bar{p}_n}{\sqrt{n\tau\cdot\bar{p}_n\bar{q}_n}}\right) = 1-\phi(\bar{y}),$$

analogicznie:

$$\lim_{n\rightarrow\infty} D_n^* = 1-\phi(y^*).$$

Stąd i z lematów 2.2.1 i 2.2.3 można otrzymać:

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty} C_{0,n}(s_0) &= s_0(1-\phi(\bar{y})) - \frac{K}{e^{r\tau}}(1-\phi(y^*)) = \\ &= s_0\phi\left(\frac{\ln\frac{s_0}{K}+\tau(r-\rho+\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \frac{K}{e^{r\tau}}\phi\left(\frac{\ln\frac{s_0}{K}+\tau(r-\rho-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\tau}}\right).\end{aligned}$$

□

Uwaga 2.2.1. W rozdziale 1 i 2 przedstawione wyceny opcji (w modelu CRR, w modelu Blacka-Scholesa oraz w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa w twierdzeniu 2.2.1) dotyczą chwili $t=0$, a czas trwania opcji wynosił T (wówczas T oznaczał jednocześnie czas trwania opcji i moment wykonania opcji). Przyjęcie $t=0$ jest tylko kwestią wygody. Jeśli chwilę czasu t potraktujemy jako chwilę początkową, w której znane są wartości parametrów funkcji wyceny opcji, to uzyskamy analogiczne formuły na wyceny opcji z ceną początkową akcji s_t (ustaloną w chwili t) oraz z czasem pozostałym do rozliczenia opcji $\tau = T - t$.

Wniosek 2.2.1. Niech s_t będzie ceną akcji w chwili t oraz

$$l_{0,n} := \frac{\ln \frac{K}{s_t} - \tau \cdot n \cdot \ln d_n}{\ln \left(\frac{u_n}{d_n} \right)} = \frac{\sqrt{n} \ln \frac{K}{s_t} + \sigma \cdot \tau \cdot n - \sqrt{n} \cdot \tau \cdot \rho}{2\sigma}.$$

Korzystając z lematu 1.2.1 oraz przyjmując $l_{0,n}$ zamiast $k_{0,n}$ i $\tau = T - t$ we wnioskach 1.3.1 i 2.1.1 oraz dowodzie twierdzenia 2.2.1, można uzyskać analogiczną uogólnioną formułę Blacka-Scholesa dla wyceny opcji w chwili t (formuła w twierdzeniu 2.2.1 dotyczy wyceny opcji w chwili 0):

$$s_t \cdot \phi \left(\frac{\ln \frac{s_t}{K} + (T-t)(r - \rho + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) - \frac{K}{e^{r(T-t)}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_t}{K} + (T-t)(r - \rho - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{T-t}} \right) =: C_t(s_t),$$

gdzie:

t – obecna chwila czasu, $0 \leq t < T$,

s_t – cena akcji w chwili t .

Uwaga 2.2.2. W powyższej formule stopa procentowa rachunku bankowego r , współczynnik zmienności cen akcji (*volatility*) σ oraz współczynnik ρ są ustalane w chwili wyceny t . Niemniej jednak zaznaczenie zależności tych zmiennych od chwili czasu t zostało pominięte w celu zwiększenia czytelności zapisu.

2.3. Współczynniki wrażliwości ceny opcji

Analiza wrażliwości instrumentu pochodnego polega na określeniu zmian wartości instrumentu, które nastąpiły w skutek zmian wartości czynników wpływających na wartość instrumentu. W ujęciu matematycznym analiza wrażliwości polega na analizie zmiany wartości funkcji wyceniającej instrument (zmiany ceny europejskiej opcji kupna) w wyniku zmian wartości zmiennych będących argumentami tej funkcji na podstawie wyznaczonych pochodnych cząstkowych tej funkcji względem odpowiednich zmiennych.

Analiza wrażliwości zostanie omówiona dla europejskich opcji kupna na podstawie wzoru na cenę opcji w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa (zob. twierdzenie 2.2.1). W klasycznym modelu Blacka-Scholesa cena opcji uzależniona jest od pięciu czynników: ceny instrumentu podstawowego (np. ceny akcji), ceny wykonania, długości okresu do terminu wygaśnięcia opcji, stopy wolnej od ryzyka oraz zmienności cen instrumentu podstawowego (*volatility*). W wyprowadzonej uogólnionej formule Blacka-Scholesa (zob. twierdzenie 2.2.1) cena opcji zależy również od szóstego czynnika – współczynnika ρ opisującego średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu, np. miesiącu. Wszystkie wymienione powyżej czynniki, z wyjątkiem ceny wykonania, która jest ustalana w chwili zawarcia umowy, mogą ulec zmianie w trakcie trwania kontraktu opcyjnego i zmiany tych czynników mogą mieć wpływ na zmianę ceny opcji.

W inżynierii finansowej (zob. Jajuga, Jajuga, 2006) pochodne cząstkowe ceny opcji względem danego czynnika oznaczane są symbolami greckich liter (z wyjątkiem pochodnej cząstkowej względem *volatility*) i nazywane są współczynnikami greckimi.

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \tau(r - \rho + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad \tilde{d}_2 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \tau(r - \rho - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Lemat 2.3.1. Dla powyższych oznaczeń zachodzi:

$$\tilde{d}_2 = \tilde{d}_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

Lemat 2.3.2. Dla powyższych oznaczeń zachodzi:

$$\frac{\partial \phi(\tilde{d}_2)}{\partial \tilde{d}_2} = \frac{s_0}{K} e^{(r-\rho)\tau} \frac{\partial \phi(\tilde{d}_1)}{\partial \tilde{d}_1}.$$

Dowód. Można zauważyć, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\tilde{d}_2)}{\partial \tilde{d}_2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\tilde{d}_2^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5(\tilde{d}_1 - \sigma\sqrt{\tau})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\tilde{d}_1^2} \cdot e^{\tilde{d}_1\sigma\sqrt{\tau}} \cdot e^{-0,5\sigma^2\tau} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\tilde{d}_1^2} \cdot e^{\frac{\ln s_0}{K} + \left(r-\rho + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau} \cdot e^{-0,5\sigma^2\tau} = \frac{s_0}{K} e^{(r-\rho)\tau} f(\tilde{d}_1) = \frac{s_0}{K} e^{(r-\rho)\tau} \frac{\partial \phi(\tilde{d}_1)}{\partial \tilde{d}_1}, \end{aligned}$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego. $\square$

Definicja 2.3.1. Współczynnikiem *delta* nazywamy pierwszą pochodną cząstkową ceny opcji względem ceny instrumentu podstawowego:

$$\Delta_{call} = \frac{\partial C_o}{\partial s_0}.$$

Twierdzenie 2.3.1. Współczynnik *delta* dla europejskiej opcji kupna w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę czasu r , współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu oraz współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ dany jest wzorem:

$$\Delta_{call} = \phi(\tilde{d}_1) + \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}).$$

Dowód. Z twierdzenia 2.2.1 cena opcji ma postać:

$$C_o(s_0) = s_0 \cdot \phi(\tilde{d}_1) - Ke^{-r\tau} \cdot \phi(\tilde{d}_2),$$

gdzie s_0 oznacza cenę początkową akcji.

Z lematu 2.3.1 oraz lematu 2.3.2 można otrzymać:

$$\begin{aligned} \Delta_{call} &= \frac{\partial C_o}{\partial s_0} = \phi(\tilde{d}_1) + s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} - Ke^{-r\tau} \cdot \phi'(\tilde{d}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_2}{\partial s_0} = \\ &= \phi(\tilde{d}_1) + s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} - Ke^{-r\tau} \cdot \phi'(\tilde{d}_2) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} - \frac{\partial(\sigma\sqrt{\tau})}{\partial s_0} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(\tilde{d}_1) + s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} - K e^{-r\tau} \cdot \frac{s_0}{K} e^{(r-\rho)\tau} \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} \right) = \\
&= \phi(\tilde{d}_1) + \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} - s_0 e^{-\rho\tau} \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{1}{s_0\sigma\sqrt{\tau}} = \phi(\tilde{d}_1) + \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho\tau})
\end{aligned}$$

Interpretacja

Współczynnik *delta* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się cena opcji, gdy cena instrumentu podstawowego wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (czas trwania opcji, stopa wolna od ryzyka, *volatility*, współczynnik ρ) nie ulegną zmianie.

Wniosek 2.3.1. Współczynnik *delta* ma następujące własności:

- dla $\rho = 0$ w twierdzeniu 2.2.1 można otrzymać klasyczną formułę Blacka-Scholesa, dla której współczynnik *delta* $\Delta_{call}^{BS} = \phi(\tilde{d}_1) \in (0, 1)$;
- $0 < \Delta_{call}^{BS} < \Delta_{call} < \Delta_{call}^{BS} + \frac{1 - e^{-\rho\tau}}{\sqrt{2\pi\tau} \cdot \sigma} < 1 + \frac{1 - e^{-\rho\tau}}{\sqrt{2\pi\tau} \cdot \sigma}$, gdy $\rho > 0$;
- $\frac{1 - e^{-\rho\tau}}{\sqrt{2\pi\tau} \cdot \sigma} < \Delta_{call}^{BS} + \frac{1 - e^{-\rho\tau}}{\sqrt{2\pi\tau} \cdot \sigma} < \Delta_{call} < \Delta_{call}^{BS} < 1$, gdy $\rho < 0$.

Definicja 2.3.2. Współczynnikiem *gamma* nazywamy drugą pochodną cząstkową ceny opcji względem ceny instrumentu podstawowego:

$$\Gamma_{call} = \frac{\partial^2 C_o}{\partial s_0^2} = \frac{\partial \Delta_{call}}{\partial s_0}.$$

Twierdzenie 2.3.2. Współczynnik *gamma* dla europejskiej opcji kupna w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę czasu r , współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu oraz współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ dany jest wzorem:

$$\Gamma_{call} = \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0\sigma\sqrt{\tau}} \cdot \left(1 - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma\sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right) = \frac{\phi'(\tilde{d}_1)}{s_0\sigma\sqrt{\tau}} \cdot \left(1 - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma\sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right),$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Z twierdzenia 2.3.1:

$$\begin{aligned}\Gamma_{call} &= \frac{\partial \Delta_{call}}{\partial s_0} = \phi'(\tilde{d}_1) \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} + \frac{1 - e^{-\rho\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} f'(\tilde{d}_1) = f(\tilde{d}_1) \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}s_0} + \frac{1 - e^{-\rho\tau}}{\sigma\sqrt{\tau}} f(\tilde{d}_1) \frac{-\tilde{d}_1}{\sigma\sqrt{\tau}s_0} = \\ &= \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0\sigma\sqrt{\tau}} \cdot \left(1 - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma\sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho\tau})\right) = \frac{\phi'(\tilde{d}_1)}{s_0\sigma\sqrt{\tau}} \cdot \left(1 - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma\sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho\tau})\right),\end{aligned}$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego. □

Interpretacja

Współczynnik *gamma* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się wartość współczynnika *delta*, gdy cena instrumentu podstawowego wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (czas trwania opcji, stopa wolna od ryzyka, *volatility*, współczynnik ρ) nie ulegną zmianie.

Wniosek 2.3.2. Współczynnik *gamma* ma następujące własności:

- dla $\rho = 0$ w twierdzeniu 2.2.1 można otrzymać klasyczną formułę Blacka-

-Scholesa, dla której współczynnik *gamma* $\Gamma_{call}^{BS} = \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0\sigma\sqrt{\tau}} > 0$;

- $\frac{-\tilde{d}_1 \cdot (1 - e^{-\rho\tau})}{\sqrt{2\pi}s_0\sigma^2\tau} < \Gamma_{call}^{BS} + \frac{-\tilde{d}_1 \cdot (1 - e^{-\rho\tau})}{\sqrt{2\pi}s_0\sigma^2\tau} < \Gamma_{call} < \Gamma_{call}^{BS} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}s_0\sigma\sqrt{\tau}}$, gdy

$$\rho \cdot \tilde{d}_1 > 0;$$

- $0 < \Gamma_{call}^{BS} < \Gamma_{call} < \Gamma_{call}^{BS} + \frac{-\tilde{d}_1 \cdot (1 - e^{-\rho\tau})}{\sqrt{2\pi}s_0\sigma^2\tau}$, gdy $\rho \cdot \tilde{d}_1 < 0$.

Definicja 2.3.3. Współczynnikiem *vega* (współczynnikiem *kappa*) nazywamy pierwszą pochodną cząstkową ceny opcji względem zmienności instrumentu podstawowego:

$$v_{call} = \frac{\partial C_o}{\partial \sigma}.$$

Twierdzenie 2.3.3. Współczynnik *vega* dla europejskiej opcji kupna w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę

czasu r , współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu oraz współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ dany jest wzorem:

$$v_{call} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left(\sqrt{\tau} - \frac{d_1}{\sigma} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right) = s_0 \cdot f(\tilde{d}_1) \cdot \left(\sqrt{\tau} - \frac{d_1}{\sigma} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right),$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Korzystając z lematu 2.3.1 oraz lematu 2.3.2, można otrzymać:

$$\begin{aligned} v_{call} &= \frac{\partial C_o}{\partial \sigma} = s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \sigma} - \frac{K \phi'(\tilde{d}_2)}{e^{r\tau}} \frac{\partial \tilde{d}_2}{\partial \sigma} = s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \sigma} - \frac{s_0 \phi'(\tilde{d}_1)}{e^{\rho\tau}} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \sigma} - \sqrt{\tau} \right) = \\ &= s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r - \rho)}{\sqrt{\tau}} \cdot \frac{-1}{\sigma^2} + 0,5\sqrt{\tau} \right) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) + s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \sqrt{\tau} e^{-\rho\tau} = \\ &= s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \cdot \left(\sqrt{\tau} - \frac{d_1}{\sigma} \right) + s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \sqrt{\tau} e^{-\rho\tau} = s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left(\sqrt{\tau} - \frac{d_1(1 - e^{-\rho\tau})}{\sigma} \right). \end{aligned}$$



Interpretacja

Współczynnik *vega* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się cena opcji, gdy zmienność instrumentu podstawowego (*volatility*) wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (cena instrumentu podstawowego, czas trwania opcji, stopa wolna od ryzyka, współczynnik ρ) nie ulegną zmianie.

Wniosek 2.3.3. Współczynnik *vega* ma następujące własności:

- dla $\rho = 0$ w twierdzeniu 2.2.1 można otrzymać klasyczną formułę Blacka-

$$\text{-Scholesa, dla której współczynnik } vega \ v_{call}^{BS} = s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \sqrt{\tau} \in \left(0, s_0 \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \right);$$

- $-\frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} (1 - e^{-\rho\tau}) < v_{call}^{BS} - \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} (1 - e^{-\rho\tau}) < v_{call} < v_{call}^{BS} < s_0 \sqrt{\frac{\tau}{2\pi}},$

gdzie $\rho \cdot \tilde{d}_1 > 0$;

$$\bullet \quad 0 < v_{call}^{BS} < v_{call} < v_{call}^{BS} - \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} (1 - e^{-\rho\tau}) < \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{\tau} - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} (1 - e^{-\rho\tau}) \right),$$

gdy $\rho \cdot \tilde{d}_1 < 0$.

Definicja 2.3.4. Współczynnikiem *theta* (zob. Weron, Weron, 1998) nazywamy pierwszą pochodną cząstkową ceny opcji względem czasu trwania opcji (liczby jednostek czasu do terminu wygaśnięcia opcji europejskiej):

$$\theta_{call} = \frac{\partial C_o}{\partial \tau}.$$

Twierdzenie 2.3.4. Współczynnik *theta* dla europejskiej opcji kupna w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę czasu r , współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu oraz współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ dany jest wzorem:

$$\theta_{call} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left[\left(\frac{r - \rho}{\sigma \sqrt{\tau}} - \frac{\tilde{d}_2}{2\tau} \right) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} e^{-\rho\tau} \right] + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \cdot \phi(\tilde{d}_2),$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Z lematu 2.3.1 oraz lematu 2.3.2 można otrzymać:

$$\begin{aligned} \theta_{call} &= \frac{\partial C_o}{\partial \tau} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \tau} + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \cdot \phi(\tilde{d}_2) - \frac{K}{e^{r\tau}} \cdot \phi'(\tilde{d}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_2}{\partial \tau} = \\ &= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \tau} + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \cdot \phi(\tilde{d}_2) - \frac{K}{e^{r\tau}} \cdot \left(\frac{s_0}{K} e^{(r-\rho)\tau} \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \right) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_2}{\partial \tau} = \\ &= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \tau} + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \cdot \phi(\tilde{d}_2) - s_0 \phi'(\tilde{d}_1) e^{-\rho\tau} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} \right) = \\ &= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \tau} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \cdot \phi(\tilde{d}_2) + s_0 \phi'(\tilde{d}_1) e^{-\rho\tau} \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} = \\ &= s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \cdot \left[\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r - \rho - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{\tau}} \cdot \frac{-1}{2\tau} + \frac{r - \rho}{\sigma \sqrt{\tau}} \right] + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \phi(\tilde{d}_2) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{s_0 \phi'(\tilde{d}_1) e^{-\rho\tau} \sigma}{2\sqrt{\tau}} = s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left[\left(\frac{r-\rho}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\tilde{d}_2}{2\tau} \right) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) + \frac{e^{-\rho\tau} \sigma}{2\sqrt{\tau}} \right] + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \phi(\tilde{d}_2).$$



Interpretacja

Współczynnik *theta* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się cena opcji, gdy czas trwania opcji (liczba jednostek czasu do terminu wygaśnięcia opcji europejskiej) wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (cena instrumentu podstawowego, *volatility*, stopa wolna od ryzyka, współczynnik ρ) nie ulegną zmianie.

Biorąc pod uwagę uogólnioną formułę Blacka-Scholesa dla wyceny opcji w chwili t (zob. wniosek 2.2.1), współczynnik *theta* można zdefiniować jako:

$$\theta_{call}^* = \frac{\partial C_o}{\partial t} = -\frac{\partial C_o}{\partial \tau}$$

i wówczas współczynnik *theta*^{*} określa, o ile w przybliżeniu zmieni się cena opcji wraz z upływem czasu do chwili wygaśnięcia opcji europejskiej o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (cena instrumentu podstawowego, *volatility*, stopa wolna od ryzyka, współczynnik ρ) nie ulegną zmianie.

Wniosek 2.3.4. Współczynnik *theta* ma następujące własności:

- dla $\rho = 0$ w twierdzeniu 2.2.1 można otrzymać klasyczną formułę Blacka-Scholesa, dla której współczynnik *theta*

$$\theta_{call}^{BS} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \cdot \phi(\tilde{d}_2) \in \left(0, s_0 \cdot \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi\tau}} + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \right);$$

- $\theta_{call}^{BS} > 0$, $\theta_{call}^{*BS} = -\theta_{call}^{BS} < 0$;

$$\theta_{call} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left[\left(\frac{r-\rho}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\tilde{d}_2}{2\tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} \right) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right] + \theta_{call}^{BS};$$

$$0 < \theta_{call}^{BS} < \theta_{call} < \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[\left(\frac{r-\rho}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\tilde{d}_2}{2\tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} \right) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right] + \theta_{call}^{BS} < \\ < \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[\left(\frac{r-\rho}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\tilde{d}_2}{2\tau} \right) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} e^{-\rho\tau} \right] + \frac{Kr}{e^{r\tau}},$$

$$\begin{aligned}
& \text{gd}y \ \rho \cdot \left(\tilde{d}_2 - \frac{2\sqrt{\tau}(r - \rho - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma} \right) < 0; \\
& \bullet \quad \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{r - \rho}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\tilde{d}_2}{2\tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} \right) (1 - e^{-\rho\tau}) \right] < \theta_{call}^{BS} + \frac{s_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \\
& \quad \cdot \left[\left(\frac{r - \rho}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\tilde{d}_2}{2\tau} - \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} \right) (1 - e^{-\rho\tau}) \right] < \theta_{call} < \theta_{call}^{BS} < \frac{s_0}{2\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}} + \frac{Kr}{e^{r\tau}}, \\
& \text{gd}y \ \rho \cdot \left(\tilde{d}_2 - \frac{2\sqrt{\tau}(r - \rho - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma} \right) > 0.
\end{aligned}$$

Definicja 2.3.5. Współczynnikiem *rho* nazywamy pierwszą pochodną cząstkową ceny opcji względem stopy procentowej:

$$\rho_{call} = \frac{\partial C_o}{\partial r}.$$

Twierdzenie 2.3.5. Współczynnik *rho* dla europejskiej opcji kupna w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę czasu r , współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu oraz współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ dany jest wzorem:

$$\rho_{call} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) + \tau \cdot K e^{-r\tau} \cdot \phi(\tilde{d}_2).$$

Dowód. Korzystając z lematu 2.3.1 oraz lematu 2.3.2, można otrzymać:

$$\begin{aligned}
 \rho_{call} &= \frac{\partial C_o}{\partial r} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial r} - Ke^{-r\tau} \cdot \phi'(\tilde{d}_2) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_2}{\partial r} + \tau \cdot Ke^{-r\tau} \cdot \phi(\tilde{d}_2) = \\
 &= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial r} - Ke^{-r\tau} \cdot \frac{s_0}{K} e^{r\tau} e^{-\rho\tau} \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial r} + \tau \cdot Ke^{-r\tau} \cdot \phi(\tilde{d}_2) = \\
 &= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) + \tau \cdot Ke^{-r\tau} \cdot \phi(\tilde{d}_2).
 \end{aligned}$$



Interpretacja

Współczynnik ρ określa, o ile w przybliżeniu zmieni się cena opcji, gdy stopa wolna od ryzyka wzrośnie o jednostkę (z reguły o jeden punkt procentowy), przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (cena instrumentu podstawowego, czas trwania opcji, volatility , współczynnik ρ) nie ulegną zmianie.

Wniosek 2.3.5. Współczynnik ρ ma następujące własności:

- dla $\rho = 0$ w twierdzeniu 2.2.1 można otrzymać klasyczną formułę Blacka-Scholesa, dla której współczynnik ρ $\rho_{call}^{BS} = \tau \cdot Ke^{-r\tau} \cdot \phi(\tilde{d}_2) \in \left(0, \frac{K\tau}{e^{r\tau}}\right)$;
- $0 < \rho_{call}^{BS} < \rho_{call} < \rho_{call}^{BS} + \frac{s_0 \sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) < \frac{K\tau}{e^{r\tau}} + \frac{s_0 \sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot (1 - e^{-\rho\tau})$,
gdzie $\rho > 0$;
- $\frac{s_0 \sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) < \rho_{call}^{BS} + \frac{s_0 \sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) < \rho_{call} < \rho_{call}^{BS} < \frac{K\tau}{e^{r\tau}}$,
gdzie $\rho < 0$.

Uogólniona formuła Blacka-Scholesa (zob. twierdzenie 2.2.1), w odróżnieniu od klasycznej formuły Blacka-Scholesa, zależy również od współczynnika ρ opisującego średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu. W celu określenia wrażliwości ceny opcji na zmianę współczynnika ρ należy wyznaczyć pochodną cząstkową ceny opcji względem ρ .

Wprowadzono następującą definicję:

Definicja 2.3.6. Współczynnikiem ρ_{call}^* nazywamy pierwszą pochodną cząstkową ceny opcji względem współczynnika ρ opisującego średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu:

$$\rho_{call}^* = \frac{\partial C_o}{\partial \rho}.$$

Twierdzenie 2.3.6. Współczynnik ρ_{call}^* dla europejskiej opcji kupna w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę czasu r , współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu oraz współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ wynosi:

$$\rho_{call}^* = \frac{\partial C_o}{\partial \rho} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \cdot (e^{-\rho\tau} - 1).$$

Dowód. Korzystając z lematu 2.3.1 oraz lematu 2.3.2, można uzyskać następujące obliczenia:

$$\begin{aligned} \rho_{call}^* &= \frac{\partial C_o}{\partial \rho} = s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \rho} - K e^{-r\tau} \phi'(\tilde{d}_2) \frac{\partial \tilde{d}_2}{\partial \rho} = s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \rho} - s_0 e^{-\rho\tau} \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \rho} = \\ &= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \cdot (e^{-\rho\tau} - 1). \quad \square \end{aligned}$$

Interpretacja

Współczynnik ρ_{call}^* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się cena opcji, gdy współczynnik opisujący średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (cena instrumentu podstawowego, czas trwania opcji, *volatility*, stopa wolna od ryzyka) nie ulegną zmianie.

Wniosek 2.3.6. Współczynnik ρ_{call}^* ma następujące własności:

- dla $\rho = 0$ w twierdzeniu 2.2.1 można otrzymać klasyczną formułę Blacka-Scholesa (niezależną od współczynnika ρ), dla której współczynnik $\rho_{call}^{*BS} = 0$;
- $s_0 \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot (e^{-\rho\tau} - 1) < \rho_{call}^* < 0$, gdy $\rho > 0$;
- $0 < \rho_{call}^* < s_0 \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot (e^{-\rho\tau} - 1)$, gdy $\rho < 0$.

Na zmianę ceny opcji europejskiej na akcję największy wpływ mają zmiana ceny instrumentu podstawowego (ceny akcji) oraz zmiana współczynnika zmienności cen akcji (*volatility*) σ . Stąd warto dokonać analizy dodatkowych współczynników wrażliwości ceny opcji, którymi są pierwsze pochodne Δ_{call} , Γ_{call} , v_{call} względem s_0 i względem σ .

Definicja 2.3.7. Współczynnikiem *vanna* nazywamy drugą pochodną ceny opcji względem ceny instrumentu podstawowego i względem zmienności instrumentu podstawowego:

$$vanna = \frac{\partial^2 C_o}{\partial s_0 \partial \sigma} = \frac{\partial \Delta_{call}}{\partial \sigma} = \frac{\partial v_{call}}{\partial s_0}.$$

Twierdzenie 2.3.7. Współczynnik *vanna* dla europejskiej opcji kupna w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę czasu r , współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu oraz współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ dany jest wzorem:

$$vanna = \phi(\tilde{d}_1) \cdot \left[\frac{-\tilde{d}_2}{\sigma} + \frac{\tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2 - 1}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right],$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Można zauważyć, że

$$\begin{aligned}
 vanna &= \frac{\partial \Delta_{call}}{\partial \sigma} = \phi'(\tilde{d}_1) \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \sigma} + f(\tilde{d}_1) \cdot (-\tilde{d}_1) \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \sigma} \frac{1}{\sqrt{\tau} \sigma} (1 - e^{-\rho \tau}) + f(\tilde{d}_1) \frac{-1}{\sqrt{\tau} \sigma^2} (1 - e^{-\rho \tau}) = \\
 &= \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left(-\frac{\ln \frac{S_0}{K} + \tau(r - \rho)}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{2} \right) - f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_1 \cdot \left(-\frac{\ln \frac{S_0}{K} + \tau(r - \rho)}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{2} \right) \frac{(1 - e^{-\rho \tau})}{\sqrt{\tau} \sigma} + \\
 &+ f(\tilde{d}_1) \cdot \frac{-(1 - e^{-\rho \tau})}{\sqrt{\tau} \cdot \sigma^2} = \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left[\frac{-\tilde{d}_2}{\sigma} + \frac{\tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2 - 1}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) \right].
 \end{aligned}$$

Ponadto korzystając z lematu 2.3.1, można otrzymać:

$$\begin{aligned}
 vanna &= \frac{\partial v_{call}}{\partial s_0} = \left(f(\tilde{d}_1) - \tilde{d}_1 s_0 f(\tilde{d}_1) \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} \right) \cdot \left(\sqrt{\tau} - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} (1 - e^{-\rho \tau}) \right) + s_0 f(\tilde{d}_1) \frac{e^{-\rho \tau} - 1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} = \\
 &= f(\tilde{d}_1) \cdot \left[\sqrt{\tau} - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} (1 - e^{-\rho \tau}) - \frac{\tilde{d}_1}{\sqrt{\tau} \sigma} \sqrt{\tau} + \frac{\tilde{d}_1^2}{\sqrt{\tau} \cdot \sigma^2} (1 - e^{-\rho \tau}) - \frac{s_0}{\sigma} (1 - e^{-\rho \tau}) \frac{1}{\sqrt{\tau} \sigma \cdot s_0} \right] = \\
 &= \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left[\frac{-\tilde{d}_2}{\sigma} + \frac{\tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2 - 1}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) \right]. \quad \square
 \end{aligned}$$

Interpretacja

Współczynnik *vanna* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się wartość współczynnika *delta*, gdy zmienność instrumentu podstawowego (*volatility*) wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (cena instrumentu podstawowego, czas trwania opcji, stopa wolna od ryzyka, współczynnik ρ) nie ulegną zmianie. Współczynnik *vanna* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się wartość współczynnika *vega*, gdy cena instrumentu podstawowego wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (czas trwania opcji, *volatility*, stopa wolna od ryzyka, współczynnik ρ) nie ulegną zmianie.

Definicja 2.3.8. Współczynnikiem *volga* nazywamy drugą pochodną ceny opcji względem zmienności instrumentu podstawowego:

$$volga = \frac{\partial^2 C_o}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial v_{call}}{\partial \sigma}.$$

Twierdzenie 2.3.8. Współczynnik *volga* dla europejskiej opcji kupna w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę czasu r , współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu oraz współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ dany jest wzorem:

$$volga = s_0 \cdot f(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} \cdot \left[\tilde{d}_2 \sqrt{\tau} + \frac{1}{\sigma} (1 - \tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right],$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Można zauważyć, że

$$\begin{aligned} volga &= \frac{\partial v_{call}}{\partial \sigma} = -s_0 f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_1 \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \sigma} \cdot \left(\sqrt{\tau} - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right) + s_0 f(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\tilde{d}_1}{\sigma^2} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) = \\ &= s_0 \cdot f(\tilde{d}_1) \cdot \left[-\tilde{d}_1 \cdot \frac{-\tilde{d}_2}{\sigma} \cdot \left(\sqrt{\tau} - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right) + \frac{\tilde{d}_1}{\sigma^2} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right] = \\ &= s_0 \cdot f(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} \cdot \left[\tilde{d}_2 \sqrt{\tau} + \frac{1}{\sigma} (1 - \tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Interpretacja

Współczynnik *volga* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się wartość współczynnika *vega*, gdy zmienność instrumentu podstawowego (*volatility*) wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (cena instrumentu podstawowego, czas trwania opcji, stopa wolna od ryzyka, współczynnik ρ) nie ulegną zmianie.

Poniższe twierdzenie przedstawia kolejne współczynniki wrażliwości ceny opcji – pierwsze pochodne Γ_{call} względem s_0 i względem σ , które w literaturze nie mają nazewnictwa.

Twierdzenie 2.3.9. Dla europejskiej opcji kupna w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę czasu r , współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu oraz współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ zachodzi:

$$\frac{\partial \Gamma_{call}}{\partial s_0} = \frac{\partial^3 C_o}{\partial s_0^3} = \frac{-f(\tilde{d}_1)}{s_0^2 \sigma \sqrt{\tau}} \cdot \left[1 + \frac{\tilde{d}_1}{\sigma \sqrt{\tau}} e^{-\rho\tau} - \frac{\tilde{d}_1^2 - 1}{\sigma^2 \tau} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right],$$

$$\frac{\partial \Gamma_{call}}{\partial \sigma} = \frac{\partial^3 C_o}{\partial s_0^2 \partial \sigma} = \frac{\partial^2 v}{\partial s_0^2} = \frac{\partial v_{anna}}{\partial s_0} = \frac{f(\tilde{d}_1) \left[\tilde{d}_1 \tilde{d}_2 - 1 + \frac{1 - e^{-\rho\tau}}{\sigma \sqrt{\tau}} (3\tilde{d}_1 - \tilde{d}_1^2 \tilde{d}_2 - \sigma \sqrt{\tau}) \right]}{s_0 \sigma^2 \sqrt{\tau}},$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Można zauważyć, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{call}}{\partial s_0} &= \left(\frac{-f(\tilde{d}_1)}{s_0^2 \sigma \sqrt{\tau}} - \frac{f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_1}{s_0 \sigma \sqrt{\tau}} \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} \right) \cdot \left(1 - \frac{\tilde{d}_1 (1 - e^{-\rho\tau})}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) - \frac{f(\tilde{d}_1) \cdot (1 - e^{-\rho\tau})}{s_0 \sigma^2 \sqrt{\tau} \sqrt{\tau}} \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} = \\ &= \frac{-f(\tilde{d}_1)}{s_0^2 \sigma \sqrt{\tau}} - \frac{f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_1}{s_0^2 \sigma^2 \tau} + \left(\frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0^2 \sigma \sqrt{\tau}} + \frac{f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_1}{s_0^2 \sigma^2 \tau} \right) \cdot \frac{\tilde{d}_1 \cdot (1 - e^{-\rho\tau})}{\sigma \sqrt{\tau}} - \frac{f(\tilde{d}_1) \cdot (1 - e^{-\rho\tau})}{s_0^2 \sigma^3 \tau \sqrt{\tau}} = \\ &= \frac{-f(\tilde{d}_1)}{s_0^2 \sigma \sqrt{\tau}} \cdot \left[1 + \frac{\tilde{d}_1}{\sigma \sqrt{\tau}} - \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \left(\tilde{d}_1 + \frac{\tilde{d}_1^2 - 1}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right] = \\ &= \frac{-f(\tilde{d}_1)}{s_0^2 \sigma \sqrt{\tau}} \cdot \left[1 + \frac{\tilde{d}_1}{\sigma \sqrt{\tau}} e^{-\rho\tau} - \frac{\tilde{d}_1^2 - 1}{\sigma^2 \tau} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right]. \end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{call}}{\partial \sigma} &= -f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_1 \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} \cdot \left[\frac{-\tilde{d}_2}{\sigma} + \frac{\tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2 - 1}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) \right] + \\ &+ f(\tilde{d}_1) \cdot \left[\frac{-1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{d}_2}{\partial s_0} + \frac{(1 - e^{-\rho\tau})}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial s_0} \tilde{d}_2 + \frac{\partial \tilde{d}_2}{\partial s_0} \tilde{d}_1 \right) \right] = \\ &= \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma \sqrt{\tau}} \cdot \left[\frac{\tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2}{\sigma} - \frac{\tilde{d}_1 \cdot (\tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2 - 1)}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) - \frac{1}{\sigma} + \frac{(1 - e^{-\rho\tau})}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \cdot (\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2) \right] = \\ &= \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma^2 \sqrt{\tau}} \cdot \left[\tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2 - 1 + \frac{(1 - e^{-\rho\tau})}{\sigma \sqrt{\tau}} \cdot (3\tilde{d}_1 - \tilde{d}_1^2 \cdot \tilde{d}_2 - \sigma \sqrt{\tau}) \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Poniżej zostaną obliczone pierwsze pochodne Δ_{call} , Γ_{call} , v_{call} względem ρ .

Twierdzenie 2.3.10. Dla europejskiej opcji kupna w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa z ceną realizacji K , czasem realizacji τ , ceną początkową akcji s_0 , wolną od ryzyka stopą procentową za daną jednostkę czasu r , współczynnikiem zmienności cen akcji (*volatility*) σ za daną jednostkę czasu oraz współczynnikiem opisującym średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ zachodzi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta_{call}}{\partial \rho} &= \frac{f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_2}{\sigma^2} (1 - e^{-\rho\tau}), \\ \frac{\partial \Gamma_{call}}{\partial \rho} &= \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma^3 \sqrt{\tau}} (1 - \tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_1 \cdot \sigma \sqrt{\tau}) (1 - e^{-\rho\tau}), \\ \frac{\partial \nu_{call}}{\partial \rho} &= s_0 \cdot f(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma^2} \cdot (\tilde{d}_1 \sigma \sqrt{\tau} - \tilde{d}_1^2 + 1) \cdot (1 - e^{-\rho\tau}),\end{aligned}$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Można zauważyć, że

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta_{call}}{\partial \rho} &= f(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \rho} - \frac{f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_1}{\sigma \sqrt{\tau}} \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \rho} \cdot (1 - e^{-\rho\tau}) + \frac{f(\tilde{d}_1)}{\sigma \sqrt{\tau}} \cdot \tau \cdot e^{-\rho\tau} = \\ &= \frac{-\sqrt{\tau} f(\tilde{d}_1)}{\sigma} \left(1 - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma \sqrt{\tau}} (1 - e^{-\rho\tau}) - e^{-\rho\tau} \right) = \frac{f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_2}{\sigma^2} (1 - e^{-\rho\tau})\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{call}}{\partial \rho} &= \frac{f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_1}{s_0 \sigma \sqrt{\tau}} \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \rho} \left(\frac{\tilde{d}_1 (1 - e^{-\rho\tau})}{\sigma \sqrt{\tau}} - 1 \right) - \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma \sqrt{\tau}} \left(\frac{1 - e^{-\rho\tau}}{\sigma \sqrt{\tau}} \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \rho} + \frac{\tilde{d}_1 e^{-\rho\tau} \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) = \\ &= \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma^2} \left(\tilde{d}_1 - \frac{\tilde{d}_1^2}{\sigma \sqrt{\tau}} + \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) (1 - e^{-\rho\tau}) = \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma^3 \sqrt{\tau}} (1 - \tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_1 \cdot \sigma \sqrt{\tau}) (1 - e^{-\rho\tau}).\end{aligned}$$

Ponadto

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu_{call}}{\partial \rho} &= s_0 \tilde{d}_1 f(\tilde{d}_1) \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \rho} \left(\frac{\tilde{d}_1 (1 - e^{-\rho\tau})}{\sigma} - \sqrt{\tau} \right) - s_0 f(\tilde{d}_1) \left(\frac{1 - e^{-\rho\tau}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{d}_1}{\partial \rho} + \frac{\tilde{d}_1 e^{-\rho\tau} \tau}{\sigma} \right) = \\ &= \frac{s_0 f(\tilde{d}_1) \sqrt{\tau} (1 - e^{-\rho\tau}) \left(\frac{1}{\sigma} + \tilde{d}_1 \sqrt{\tau} - \frac{\tilde{d}_1^2}{\sigma} \right)}{\sigma} = \frac{s_0 f(\tilde{d}_1) \sqrt{\tau} (\tilde{d}_1 \sigma \sqrt{\tau} - \tilde{d}_1^2 + 1) (1 - e^{-\rho\tau})}{\sigma^2}.\end{aligned}$$



Uwaga 2.3.1. Przy interpretacjach współczynników wrażliwości ceny opcji należy rozważać jedynie wpływ niewielkich zmian danego czynnika na cenę opcji. Fakt ten wynika wprost z definicji pochodnej funkcji.

Analizując poszczególne współczynniki wrażliwości ceny opcji, rozważano wyłącznie wpływ danego czynnika na cenę opcji, nie uwzględniając wpływu innych czynników. W celu oszacowania zmiany ceny opcji z uwzględnieniem zmian wszystkich czynników należy zastosować wzór Taylora (dla funkcji wielu zmiennych).

Cena opcji wyznaczona w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa (zob. twierdzenie 2.2.1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) = s_0 \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r - \rho + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) - \frac{K}{e^{r\tau}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r - \rho - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) =: C_0(s_0)$$

jest funkcją, której argumentami są: cena instrumentu podstawowego (np. cena akcji), cena wykonania, długość okresu do terminu wygaśnięcia opcji, stopa wolna od ryzyka, zmienność cen instrumentu podstawowego (*volatility*), współczynnik ρ opisujący średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu. Wszystkie wyżej wymienione parametry, z wyjątkiem ceny wykonania opcji (ustalana w kontrakcie), są wielkościami zmiennymi. Zatem należy analizować wpływ zmian pięciu zmiennych parametrów na zmianę ceny opcji. Stąd

$$C_0(s_0, \tau, r, \sigma, \rho) = s_0 \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r - \rho + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) - \frac{K}{e^{r\tau}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r - \rho - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) =: C_0(s_0).$$

Zmianę wartości funkcji (ceny opcji) C_0 w wyniku zmiany ceny początkowej akcji o wielkość Δs_0 , zmiany czasu trwania o wielkość $\Delta \tau$, zmiany stopy procentowej o wielkość Δr , zmiany *volatility* o wielkość $\Delta \sigma$ oraz zmiany współczynnika ρ o wielkość $\Delta \rho$

$$\Delta C_0 = C_0(s_0 + \Delta s_0, \tau + \Delta \tau, r + \Delta r, \sigma + \Delta \sigma, \rho + \Delta \rho) - C_0(s_0, \tau, r, \sigma, \rho)$$

zgodnie ze wzorem Taylora można przybliżyć następująco:

$$\begin{aligned}
\Delta C_0 \approx & \frac{\partial C_0}{\partial s_0} \Delta s_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_0}{\partial s_0^2} (\Delta s_0)^2 + \frac{\partial^2 C_0}{\partial s_0 \partial \sigma} \Delta s_0 \Delta \sigma + \frac{\partial C_0}{\partial \sigma} \Delta \sigma + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_0}{\partial \sigma^2} (\Delta \sigma)^2 + \frac{\partial C_0}{\partial \tau} \Delta \tau + \\
& + \frac{\partial C_0}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial C_0}{\partial \rho} \Delta \rho + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_0}{\partial s_0^3} (\Delta s_0)^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C_0}{\partial s_0^2 \partial \sigma} (\Delta s_0)^2 \Delta \sigma + \frac{\partial^2 C_0}{\partial s_0 \partial \rho} \Delta s_0 \Delta \rho + \\
& + \frac{\partial^2 C_0}{\partial \sigma \partial \rho} \Delta \sigma \Delta \rho + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 C_0}{\partial s_0^2 \partial \rho} (\Delta s_0)^2 \Delta \rho.
\end{aligned}$$

Stąd i z twierdzeń 2.3.1–2.3.10 można otrzymać następującą formułę na zmianę ceny opcji:

Twierdzenie 2.3.11. W wyniku zmiany ceny początkowej akcji o wielkość Δs_0 , zmiany czasu trwania o wielkość $\Delta \tau$, zmiany stopy procentowej o wielkość Δr , zmiany *volatility* o wielkość $\Delta \sigma$ oraz zmiany współczynnika ρ o wielkość $\Delta \rho$ cena opcji w uogólnionym modelu Blacka-Scholesa ulegnie zmianie o wielkość:

$$\begin{aligned}
\Delta C_0 \approx & \left(\phi(\tilde{d}_1) + \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) \right) \Delta s_0 + \frac{1}{2} \frac{\phi'(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma \sqrt{\tau}} \cdot \left(1 - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma \sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) \right) (\Delta s_0)^2 + \\
& + \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left[\frac{-\tilde{d}_2}{\sigma} + \frac{\tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2 - 1}{\sigma^2 \sqrt{\tau}} \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) \right] \Delta s_0 \Delta \sigma + s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left(\sqrt{\tau} - \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) \right) \Delta \sigma + \\
& + \frac{1}{2} s_0 \cdot f(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} \cdot \left[\tilde{d}_2 \sqrt{\tau} + \frac{1}{\sigma} (1 - \tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2) \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) \right] (\Delta \sigma)^2 + \\
& + \left(s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \left[\left(\frac{r - \rho}{\sigma \sqrt{\tau}} - \frac{\tilde{d}_2}{2\tau} \right) \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) + \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} e^{-\rho \tau} \right] + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \cdot \phi(\tilde{d}_2) \right) \Delta \tau + \\
& + \left(s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) + \tau \cdot K e^{-r\tau} \cdot \phi(\tilde{d}_2) \right) \Delta r + \left(s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma} \cdot (e^{-\rho \tau} - 1) \right) \Delta \rho + \\
& + \frac{1}{6} \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0^2 \sigma \sqrt{\tau}} \cdot \left[1 + \frac{\tilde{d}_1}{\sigma \sqrt{\tau}} e^{-\rho \tau} - \frac{\tilde{d}_1^2 - 1}{\sigma^2 \tau} \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) \right] (\Delta s_0)^3 + \\
& + \frac{1}{2} \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma^2 \sqrt{\tau}} \cdot \left[\tilde{d}_1 \cdot \tilde{d}_2 - 1 + \frac{(1 - e^{-\rho \tau})}{\sigma \sqrt{\tau}} \cdot (3\tilde{d}_1 - \tilde{d}_1^2 \cdot \tilde{d}_2 - \sigma \sqrt{\tau}) \right] (\Delta s_0)^2 \Delta \sigma + \\
& + \frac{f(\tilde{d}_1) \cdot \tilde{d}_2}{\sigma^2} (1 - e^{-\rho \tau}) \Delta s_0 \Delta \rho + s_0 \cdot f(\tilde{d}_1) \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\sigma^2} \cdot (\tilde{d}_1 \sigma \sqrt{\tau} - \tilde{d}_1^2 + 1) \cdot (1 - e^{-\rho \tau}) \Delta \sigma \Delta \rho + \\
& + \frac{1}{2} \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma^3 \sqrt{\tau}} (1 - \tilde{d}_1^2 + \tilde{d}_1 \cdot \sigma \sqrt{\tau}) (1 - e^{-\rho \tau}) (\Delta s_0)^2 \Delta \rho.
\end{aligned}$$

Wniosek 2.3.7. W wyniku zmiany ceny początkowej akcji o wielkość Δs_0 , zmiany czasu trwania o wielkość $\Delta \tau$, zmiany stopy procentowej o wielkość Δr ,

zmiany *volatility* o wielkość $\Delta\sigma$ oraz zmiany współczynnika ρ o wielkość $\Delta\rho$ cena opcji w modelu Blacka-Scholesa ulegnie zmianie o wielkość:

$$\begin{aligned}\Delta C_o \approx & \phi(\tilde{d}_1) \Delta s_0 + \frac{1}{2} \frac{\phi'(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma \sqrt{\tau}} (\Delta s_0)^2 - \frac{\tilde{d}_2}{\sigma} \phi'(\tilde{d}_1) \Delta s_0 \Delta \sigma + s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \sqrt{\tau} \Delta \sigma + \\ & + \frac{1}{2} s_0 f(\tilde{d}_1) \frac{\tilde{d}_1}{\sigma} \tilde{d}_2 \sqrt{\tau} (\Delta \sigma)^2 + \left(s_0 \phi'(\tilde{d}_1) \frac{\sigma}{2\sqrt{\tau}} e^{-\rho\tau} + \frac{Kr}{e^{r\tau}} \phi(\tilde{d}_2) \right) \Delta \tau + K e^{-r\tau} \tau \phi(\tilde{d}_2) \Delta r + \\ & + \frac{1-f(\tilde{d}_1)}{6 s_0^2 \sigma \sqrt{\tau}} \left(1 + \frac{\tilde{d}_1}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) (\Delta s_0)^3 + \frac{1}{2} \frac{f(\tilde{d}_1)}{s_0 \sigma^2 \sqrt{\tau}} (\tilde{d}_1 \tilde{d}_2 - 1) (\Delta s_0)^2 \Delta \sigma.\end{aligned}$$

Z wniosku 2.3.1, z wniosków 2.3.3–2.3.5 oraz twierdzenia 2.3.6 można otrzymać następujące wnioski:

Wniosek 2.3.8. W uogólnionym modelu Blacka-Scholesa:

- jeśli $\rho > 0$, to funkcja C_0 jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej s_0 ;
jeśli $\rho > 0$, to cena europejskiej opcji kupna rośnie wraz ze wzrostem początkowej ceny akcji;
- jeśli $\rho > 0$, to funkcja C_0 jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej r ;
jeśli $\rho > 0$, to cena europejskiej opcji kupna rośnie wraz ze wzrostem stopy procentowej wolnej od ryzyka;
- jeśli $\rho < 0$, to funkcja C_0 jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej ρ ;
jeśli $\rho < 0$, to cena europejskiej opcji kupna rośnie wraz ze wzrostem współczynnika opisującego średnią zmianę logarytmu ceny akcji;
- jeśli $\rho > 0$, to funkcja C_0 jest funkcją malejącą jako funkcja zmiennej ρ ;
jeśli $\rho > 0$, to cena europejskiej opcji kupna maleje wraz ze wzrostem współczynnika opisującego średnią zmianę logarytmu ceny akcji.

Wniosek 2.3.9. W modelu Blacka-Scholesa:

- funkcja C_0 jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej s_0 ;
cena europejskiej opcji kupna rośnie wraz ze wzrostem początkowej ceny akcji;
- funkcja C_0 jest funkcją malejącą jako funkcja zmiennej K ;
cena europejskiej opcji kupna maleje wraz ze wzrostem ceny wykonania;
- funkcja C_0 jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej τ ;

cena europejskiej opcji kupna rośnie wraz ze wzrostem czasu pozostałego do terminu wykonania opcji;
 cena europejskiej opcji kupna maleje wraz z upływem czasu pozostałego do terminu wykonania opcji;

- funkcja C_0 jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej σ ;
 cena europejskiej opcji kupna rośnie wraz ze wzrostem współczynnika zmienności cen akcji (*volatility*);
- funkcja C_0 jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej r ;
 cena europejskiej opcji kupna rośnie wraz ze wzrostem stopy procentowej wolnej od ryzyka.

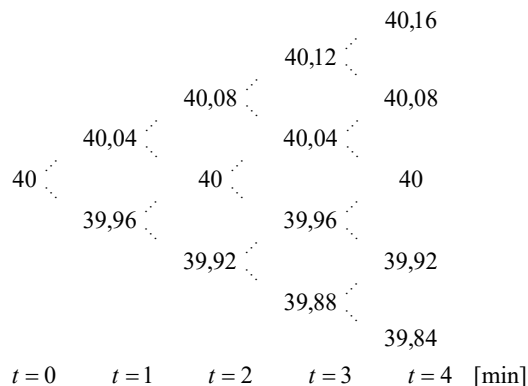
2.4. Przykłady liczbowe wycen

Przykład 2.4.1. Założono, że początkowa cena akcji w momencie $t = 0$ wynosi 40 \$, współczynnik zmienności cen akcji (*volatility*) σ w każdym miesiącu wynosi 0,3, zaś średnia zmiana logarytmu ceny akcji w ciągu każdego miesiąca (po n chwilach) wynosi 0,2. Ceny akcji są obserwowane co minutę.

Zatem $s_0 = 40$, $\sigma = 0,3$, $\rho = 0,2$, $n = 60 \cdot 24 \cdot 30 = 43200$ (przyjęto 30 dni w miesiącu).

$$\text{Stąd } u_n = e^{\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot e^{\rho \frac{1}{n}} \approx 1,001, \quad d_n = e^{-\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot e^{\rho \frac{1}{n}} \approx 0,999.$$

Otrzymano następujące możliwe ceny akcji w uogólnionym modelu CRR w ciągu kolejnych czterech minut (zob. definicja 1.1.1):



Rysunek 2.4.1. Zmiany cen akcji w ciągu czterech minut według uogólnionego modelu CRR

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 2.4.2. Początkowa cena akcji w momencie $t = 0$ wynosi 50 \$, współczynnik zmienności cen akcji (*volatility*) σ w każdym miesiącu wynosi 0,2, zaś średnia zmiana logarytmu ceny akcji w ciągu każdego miesiąca (po n chwilach) wynosi 0,04. Ponadto miesięczna bankowa stopa procentowa $r = 0,4\%$. Analizie podlega europejska opcja kupna na akcję z czasem wykonania wynoszącym trzy miesiące i ceną wykonania w wysokości $K = 48$ \$.

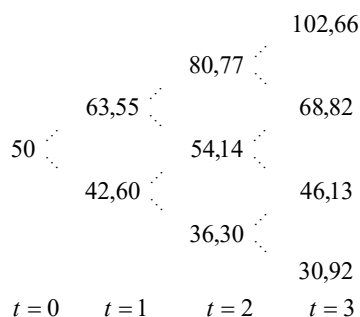
Zatem $s_0 = 50$, $\sigma = 0,2$, $\rho = 0,04$, $\tau = 3$, $n = 1$.

Stąd

$$u_n = e^{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot e^{\frac{\rho}{n}} \approx 1,271, \quad d_n = e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \cdot e^{\frac{\rho}{n}} \approx 0,852, \quad \hat{r}_n = e^{\frac{r}{n}} \approx 1,004,$$

$$p_n^* = \frac{\hat{r}_n - d_n}{u_n - d_n} = 0,363, \quad q_n^* = \frac{u_n - \hat{r}_n}{u_n - d_n} = 0,637.$$

Poniższy diagram przedstawia możliwe ceny akcji w uogólnionym modelu CRR w ciągu kolejnych trzech miesięcy $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ (zob. definicja 1.1.1):



Rysunek 2.4.2. Zmiany cen akcji w ciągu trzech miesięcy według uogólnionego modelu CRR

Źródło: opracowanie własne.

Z definicji 1.1.5 wynika, że wartości opcji w chwili wygaśnięcia w kolejnych węzłach wynoszą: 54,66 \$, 20,82 \$, 0 \$, 0 \$. Wartości opcji przed momentem wygaśnięcia w kolejnych węzłach należy obliczyć ze wzoru (1.1) (zob. lemat 1.1.1) oraz skorzystać z definicji 1.1.6. Zatem wartość opcji w chwili t w danym węźle jest zdyskontowaną ważoną średnią opcji w węzłach kolejnego okresu, tj.:

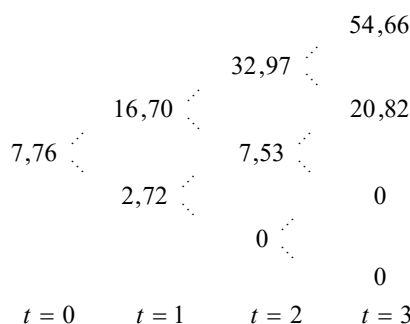
$$C_t(s) = \frac{1}{\hat{r}} [p_n^* \cdot C_{t+1}^+ + q_n^* \cdot C_{t+1}^-],$$

gdzie:

C_{t+1}^+ jest wartością opcji w chwili $t+1$ w przypadku wzrostu ceny akcji w chwili t z danego węzła,

C_{t+1}^- jest wartością opcji w chwili $t+1$ w przypadku spadku ceny akcji w chwili t z danego węzła.

Poniższy diagram przedstawia ceny opcji w poszczególnych węzłach dla kolejnych rozważanych chwil czasu w uogólnionym modelu CRR.



Rysunek 2.4.3. Ceny europejskiej opcji kupna według uogólnionego modelu CRR

Źródło: opracowanie własne.

Dla przykładu przedstawiono obliczenia ceny opcji dla chwili $t=2$ dla węzła z ceną akcji wynoszącą 80,77 \$:

$$C_2(80,77) = \frac{1}{\hat{r}} [p_n^* \cdot C_3^+ + q_n^* \cdot C_3^-] = \frac{1}{1,004} [0,363 \cdot 54,66 + 0,637 \cdot 20,82] = 32,97.$$

Ostatecznie cena europejskiej opcji kupna w momencie $t=0$ wynosi $C_0(s_0) = 7,76$ \$.

Przykład 2.4.3. Graniczną cenę opcji w uogólnionym modelu CRR należy wyznaczyć ze wzoru (zob. twierdzenie 2.2.1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) = s_0 \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r - \rho + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{\tau}} \right) - \frac{K}{e^{r\tau}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r - \rho - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma \sqrt{\tau}} \right).$$

Założono, że w chwili obecnej cena akcji wynosi 42 \$ oraz roczna bankowa stopa procentowa wynosi 10%. Analizie podlega europejska opcja kupna z terminem wygaśnięcia wynoszącym sześć miesięcy i ceną wykonania w wysokości 40 \$. Rozważono wzrosty ceny akcji kolejno o 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60% oraz spadki ceny akcji kolejno o 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%.

Tabela 2.4.1. Zmiany cen akcji

Wzrost/spadek początkowej ceny akcji o:													
	-60%	-50%	-40%	-30%	-20%	-10%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%
S_T	16,8	21	25,2	29,4	33,6	37,8	42	46,2	50,4	54,6	58,8	63	67,2
ρ	-0,92	-0,69	-0,51	-0,36	-0,22	-0,11	0,00	0,10	0,18	0,26	0,34	0,41	0,47

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2.4.2. Graniczna cena opcji w uogólnionym modelu CRR dla $\sigma = 0,2$

ρ	-0,92	-0,69	-0,51	-0,36	-0,22	-0,11	0,00	0,10	0,18	0,26	0,34	0,41	0,47
$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0)$	3,95	3,96	4,02	4,18	4,43	4,66	4,76	4,65	4,31	3,82	3,23	2,64	2,09

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2.4.3. Graniczna cena opcji w uogólnionym modelu CRR dla $\sigma = 0,3$

ρ	-0,92	-0,69	-0,51	-0,36	-0,22	-0,11	0,00	0,10	0,18	0,26	0,34	0,41	0,47
$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0)$	4,04	4,25	4,60	5,01	5,38	5,63	5,71	5,63	5,41	5,08	4,68	4,24	3,79

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2.4.4. Graniczna cena opcji w uogólnionym modelu CRR dla $\sigma = 0,4$

ρ	-0,92	-0,69	-0,51	-0,36	-0,22	-0,11	0,00	0,10	0,18	0,26	0,34	0,41	0,47
$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0)$	4,51	5,03	5,59	6,09	6,46	6,68	6,75	6,68	6,52	6,27	5,96	5,62	5,26

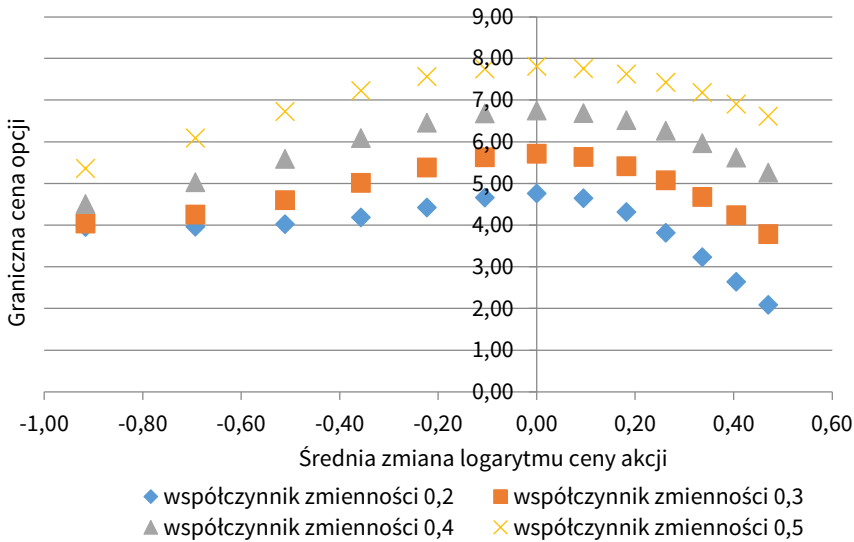
Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2.4.5. Graniczna cena opcji w uogólnionym modelu CRR dla $\sigma = 0,5$

ρ	-0,92	-0,69	-0,51	-0,36	-0,22	-0,11	0,00	0,10	0,18	0,26	0,34	0,41	0,47
$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0)$	5,36	6,09	6,73	7,22	7,56	7,75	7,81	7,76	7,62	7,43	7,18	6,91	6,61

Źródło: opracowanie własne.

Poniższy wykres przedstawia zależność granicznej ceny opcji w uogólnionym modelu CRR od współczynnika opisującego średnią zmianę logarytmu ceny akcji po danej jednostce czasu ρ .

**Wykres 2.4.1.** Zależność granicznej ceny opcji w uogólnionym modelu CRR od współczynnika ρ **Źródło:** opracowanie własne.

Zauważmy, że wraz ze wzrostem średniej zmiany logarytmu cen akcji ρ graniczna cena akcji w uogólnionym modelu CRR (zob. wniosek 2.3.8):

- maleje, gdy $\rho > 0$,
- wzrasta, gdy $\rho < 0$.

Rozdział 3

Model CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla dwóch jednostek czasu

Rozdział ten jest poświęcony modelowi typu CRR, w którym zmieniają się parametry, tj. stopy procentowe rachunku bankowego (kredytu, obligacji) oraz współczynniki zmienności cen akcji (*volatility*) σ w kolejnych (długich) jednostkach czasu, np. w następnych miesiącach. Utworzono ciąg modeli CRR, czyli tzw. kalibrację modelu CRR, zgodnie z klasycznymi zasadami opisanymi w podrozdziale 1.3. Ostatecznie zostanie uzyskana formuła na graniczną wycenę opcji przez replikację, będąca uogólnieniem formuły Blacka-Scholesa, w której nadal wystąpi dystrybuanta rozkładu logarytmiczno-normalnego. Dokładniej, będzie rozpatrywany model zmian cen akcji i stóp procentowych wolnych od ryzyka parametryzowany liczbą naturalną n . Będzie rozważany okres czasu T obejmujący dwie długie jednostki czasu (np. dwa miesiące). Czas mierzony w miesiącach oznaczono przez τ , czyli przyjęto $\tau=2$. W każdym z dwóch rozpatrywanych miesięcy wystąpi n chwil zmiany portfela (chwil handlowania). Zatem rozważany okres czasu $\tau=2$ zostaje podzielony na $T=2n$ równych przedziałów (chwil handlowania). Zostaje ustalona początkowa cena akcji s_0 , a ponadto w każdej z dwóch jednostek czasu (w każdym z dwóch rozpatrywanych miesięcy) zostają ustalone stopa procentowa wolna od ryzyka (stopa procentowa rachunku bankowego, kredytu lub obligacji) i współczynnik zmienności cen akcji σ . Tym samym pozostają ustalone oprocentowanie rachunku bankowego między kolejnymi chwilami handlowania oraz górna i dolna zmiana cen akcji między tymi chwilami.

Wprowadźmy oznaczenia:

s_{i-1} – cena akcji na początku i -tego miesiąca, $i = 1$ lub $i = 2$ (s_1 jest więc pewną zmienną losową), s_0 jest stałą, jak poprzednio,

r_i – stopa procentowa wolna od ryzyka za i -ty miesiąc,

σ_i – współczynnik zmienności cen akcji w i -tym miesiącu,

$\hat{r}_{i,n} = e^{r_i \frac{1}{n}}$ – oprocentowanie rachunku bankowego w i -tym miesiącu między chwilami handlowania,

$u_{i,n}$ – możliwa górna zmiana ceny akcji w i -tym miesiącu między chwilami handlowania,

$d_{i,n}$ – możliwa dolna zmiana ceny akcji w i -tym miesiącu między chwilami handlowania,

$$u_{i,n} = e^{\sigma_i \frac{1}{\sqrt{n}}}, \quad d_{i,n} = e^{-\sigma_i \frac{1}{\sqrt{n}}},$$

$p_{i,n}^*$ – prawdopodobieństwo martyngałowe wzrostu ceny akcji między chwilami handlowania w i -tym miesiącu,

$$p_{i,n}^* = \frac{\hat{r}_{i,n} - d_{i,n}}{u_{i,n} - d_{i,n}}, \quad q_{i,n}^* = 1 - p_{i,n}^* = \frac{u_{i,n} - \hat{r}_{i,n}}{u_{i,n} - d_{i,n}},$$

gdzie $i = 1$ lub $i = 2$.

3.1. Jednostajna zbieżność formuły CRR do formuły Blacka-Scholesa

Na wstępie zostaje przypomniana nierówność Bernsteina (Jakubowski, Sztencel, 2000), z której skorzystano w dowodzie twierdzenia 3.1.2.

Twierdzenie 3.1.1. Nierówność Bernsteina. Jeżeli S_n jest liczbą sukcesów w schemacie n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie p , to

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right) \leq e^{-n \frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad P\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq e^{-n \frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Poniższy lemat zostanie również wykorzystany w dowodzie twierdzenia 3.1.2.

Lemat 3.1.1. Niech $\gamma < 0$. Zachodzą następujące oszacowania:

$$\int_{-\infty}^{\gamma} f(x) dx \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2},$$

$$\int_{-\infty}^{\gamma} f(x) dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2} \cdot \frac{1}{-\gamma},$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Niech $\gamma < 0$. Stosując podstawienie $u = x - \gamma$, można otrzymać:

$$\int_{-\infty}^{\gamma} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\gamma+u)^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2} \int_{-\infty}^0 e^{-\gamma u - \frac{1}{2}u^2} du \leq e^{-\frac{1}{2}\gamma^2} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}.$$

Ponadto

$$\int_{-\infty}^{\gamma} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\gamma+u)^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2} \int_{-\infty}^0 e^{-\gamma u - \frac{1}{2}u^2} du \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2} \int_{-\infty}^0 e^{-\gamma u} du = \frac{1}{-\gamma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}.$$



Poniższe twierdzenie opisuje jednostajną zbieżność formuły CRR do formuły Blacka-Scholesa przy ustalonym czasie $\tau = 1$, ustalonej cenie wykupu K , przy cenie początkowej akcji s_0 przebiegającej przedział $(0, \infty)$ i przy bardzo dużej liczbie chwil handlowania w danej jednostce czasu, tj. przy $n \rightarrow \infty$. W oznaczeniach poniższego twierdzenia pominięto indeks i , gdyż rozważana będzie wyłącznie jedna ustalona jednostka czasu, tj. $\tau = 1$ (np. jeden miesiąc).

Twierdzenie 3.1.2. Jednostajna zbieżność formuły CRR do formuły Blacka-Scholesa (Chojnowska-Michalik, Fraszka-Sobczyk, 2016). Dla europejskiej opcji kupna z ceną realizacji K , czasem realizacji $\tau = 1$, ceną początkową akcji s_0 , stopą procentową rachunku bankowego (kredytu, obligacji) w danej jednostce czasu (np. w danym miesiącu) r oraz współczynnikiem zmienności cen akcji (volatility) σ za daną jednostkę czasu zachodzi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) = s_0 \phi(d_+) - \frac{K}{e^r} \phi(d_-) \text{ jednostajnie po } s_0 \in (0, \infty),$$

gdzie:

$$C_{0,n}(s_0) = s_0 \bar{D}_n - \frac{K}{e^{r\tau}} D_n^*,$$

$$\bar{D}_n = \sum_{k=k_{0,n}}^n \binom{n}{k} \cdot \bar{p}_n^k \cdot \bar{q}_n^{n-k}, \quad D_n^* = \sum_{k=k_{0,n}}^n \binom{n}{k} \cdot p_n^{*k} \cdot q_n^{*n-k},$$

$$k_{0,n} = \left\lfloor \frac{\sqrt{n} \ln \frac{K}{s_0} + \sigma \cdot n}{2\sigma} \right\rfloor,$$

$$p_n^* = \frac{\hat{r}_n - d_n}{u_n - d_n}, \quad q_n^* = \frac{u_n - \hat{r}_n}{u_n - d_n}, \quad \bar{p}_n = p_n^* \cdot \frac{u_n}{\hat{r}_n}, \quad \bar{q}_n = q_n^* \cdot \frac{d_n}{\hat{r}_n}, \quad \hat{r}_n = e^{\frac{r}{n}},$$

$$d_+ = \frac{\ln \frac{s_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}, \quad d_- = \frac{\ln \frac{s_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}.$$

Dowód. Zostaną rozważone dwa przypadki.

I. $s_0 > \tilde{s}$, gdzie $\tilde{s}$ będzie odpowiednio dobraną liczbą.

Wówczas

$$\begin{aligned} & \left| C_{0,n}(s_0) - (s_0 \phi(d_+) - Ke^{-r} \phi(d_-)) \right| = \\ & = \left| s_0 \sum_{k=k_{0,n}}^n \binom{n}{k} \cdot \bar{p}_n^k \bar{q}_n^{n-k} - Ke^{-r} \sum_{k=k_{0,n}}^n \binom{n}{k} \cdot p_n^{*k} q_n^{*n-k} - s_0 \phi(d_+) + Ke^{-r} \phi(d_-) \right| = \\ & = \left| s_0 P(\bar{S}_n \geq k_{0,n}) - Ke^{-r} P(S_n^* \geq k_{0,n}) - s_0 \phi(d_+) + Ke^{-r} \phi(d_-) \right| = \\ & = \left| -s_0 P(\bar{S}_n < k_{0,n}) + Ke^{-r} P(S_n^* < k_{0,n}) + s_0 \phi(-d_+) - Ke^{-r} \phi(-d_-) \right| \leq \\ & \leq s_0 P(\bar{S}_n \leq k_{0,n}) + s_0 \phi(-d_+) + Ke^{-r} P(S_n^* \leq k_{0,n}) + Ke^{-r} \phi(-d_-), \end{aligned}$$

gdzie $\bar{S}_n, S_n^*$ oznaczają liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego przy n próbach, z prawdopodobieństwami sukcesu w pojedynczej próbie wynoszącymi odpowiednio $\bar{p}_n$ i p_n^* .

Można zauważyć, że

$$\frac{k_{0,n}}{n} = \frac{\sqrt{n} \ln \frac{K}{s_0} + \sigma \cdot n}{2\sigma \cdot n} = \frac{\ln \frac{K}{s_0}}{2\sigma \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \quad \text{dla } s_0 > K.$$

Ponieważ

$\frac{o(1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, to istnieje wskaźnik m (zależny od konkretnego ciągu

$o(1/\sqrt{n})$) taki, że $\forall_{m \leq n \in \mathbb{N}} -\frac{1}{4}\sigma < \frac{o(1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} < \frac{1}{4}\sigma$ (m jest brane dla ciągów $o(1/\sqrt{n})$ występujących w definicji $\bar{p}_n$ oraz p_n^*).

Zatem z lematu 2.2.2, gdzie $\rho = 0$, można otrzymać dla $n \geq m$:

$$\bar{p}_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{r}{2\sigma} + \frac{1}{4}\sigma \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) > \frac{1}{2} + \frac{r}{2\sigma\sqrt{n}} + \frac{\sigma}{4\sqrt{n}} - \frac{\sigma}{4\sqrt{n}} > \frac{1}{2}.$$

W konsekwencji dla $s_0 > K$:

$$\forall_{m \leq n \in \mathbb{N}} \bar{p}_n - \frac{k_{0,n}}{n} > 0. \quad (1)$$

Analogicznie można uzyskać następującą nierówność dla $n \geq m$:

$$p_n^* = \frac{1}{2} + \left(\frac{r}{2\sigma} - \frac{1}{4}\sigma \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) > \frac{1}{2} + \frac{r}{2\sigma} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dla $n \geq m$ można zauważyć, że

$$p_n^* - \frac{k_{0,n}}{n} = \frac{r}{2\sigma\sqrt{n}} - \frac{\sigma}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\ln K - \ln s_0}{2\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{\ln s_0 + r - \ln K - \sigma^2}{2\sigma\sqrt{n}}.$$

Ponadto

$$\exists_{s^* \geq K} \forall_{s'' < s_0} \ln s_0 + r - \ln K - \sigma^2 > 0.$$

Zatem

$$p_n^* - \frac{k_{0,n}}{n} \geq \frac{\ln s_0 + r - \ln K - \sigma^2}{2\sigma\sqrt{n}} > 0, \text{ dla dowolnego } s_0 > s'' \text{ oraz dowolnego } n \geq m. \quad (2)$$

Dla $n \geq m$ można uzyskać następujące wzmocnienie oszacowania (1):

$$\begin{aligned} \bar{p}_n - \frac{k_{0,n}}{n} &= \frac{1}{2} + \left(\frac{r}{2\sigma} + \frac{\sigma}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\sqrt{n} \ln \frac{K}{s_0} + n\sigma}{2n\sigma} = \frac{r + \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma\sqrt{n}} - \frac{\ln \frac{K}{s_0}}{2\sigma\sqrt{n}} + \\ &+ o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{\ln s_0 + r - \ln K}{2\sigma\sqrt{n}} + \frac{0,5 \cdot \sigma^2}{2\sigma \cdot \sqrt{n}} - \frac{1}{4}\sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\ln s_0 + r - \ln K}{2\sigma\sqrt{n}} > 0. \end{aligned}$$

Stąd oraz z nierówności Bernsteina i dowodu lematu 2.2.3 (dla $\rho = 0$) dla $n \geq m$ zachodzi:

$$\begin{aligned} s_0 \cdot P(\bar{S}_n \leq k_{0,n}) &= s_0 \cdot P\left(\frac{\bar{S}_n}{n} \leq \bar{p}_n - \left(\bar{p}_n - \frac{k_{0,n}}{n}\right)\right) \leq s_0 \cdot \exp\left(-\frac{1}{4}n \cdot \left(\bar{p}_n - \frac{k_{0,n}}{n}\right)^2\right) \leq \\ &= s_0 \exp\left(-\frac{n}{4} \left(\frac{\ln s_0 + r - \ln K}{2\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right) = \exp\{\ln s_0\} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln s_0 + r - \ln K)^2}{16\sigma^2}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{16\sigma^2}[(\ln s_0 + r - \ln K)^2 - 16\sigma^2 \ln s_0]\right). \end{aligned}$$

Zastosowano oznaczenie:

$$h(s_0) := (\ln s_0 + r - \ln K)^2 - 16\sigma^2 \ln s_0.$$

Wówczas

$$h(s_0) = (\ln s_0)^2 \left[\left[\frac{r - \ln K}{\ln s_0} + 1 \right]^2 - \frac{16\sigma^2}{\ln s_0} \right] \xrightarrow{s_0 \rightarrow \infty} \infty.$$

Stąd

$$s_0 \cdot P(\bar{S}_n \leq k_{0,n}) \leq \exp\left(-\frac{1}{16\sigma^2} \cdot h(s_0)\right) \xrightarrow{s_0 \rightarrow \infty} 0.$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustaloną liczbą. Zatem

$$\exists_{\bar{s} \in (0, \infty)} \quad \forall_{\bar{s} \leq s_0} \quad s_0 \cdot P(\bar{S}_n \leq k_{0,n}) < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ dla dowolnego } n \geq m.$$

Z lematu 3.1.1 wynika, że

$$\begin{aligned} s_0 \cdot \phi(-d_+) &\leq s_0 \cdot \exp(-0,5 \cdot d_+^2) = s_0 \cdot \exp\left(-0,5 \cdot \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\right)^2\right) = \\ &= s_0 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln s_0}{\sigma} + C\right)^2\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \ln s_0 \left(\frac{\ln s_0}{\sigma^2} + \frac{2C}{\sigma} - 2\right)\right) \exp\left(-\frac{C^2}{2}\right) \xrightarrow{s_0 \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$C = \frac{-\ln K + (r + \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma} \text{ jest stałą.}$$

Zatem

$$\exists_{\bar{s} \in (0, \infty)} \quad \forall_{\bar{s} \leq s_0} \quad s_0 \cdot \phi(-d_+) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Analogicznie z nierówności Bernsteina i (2) dla $n \geq m$ można otrzymać:

$$\begin{aligned} Ke^{-r} P(S_n^* \leq k_{0,n}) &= Ke^{-r} P\left(\frac{S_n^*}{n} \leq p_n^* - \left(p_n^* - \frac{k_{0,n}}{n}\right)\right) \leq Ke^{-r} \exp\left(-\frac{n}{4} \left(p_n^* - \frac{k_{0,n}}{n}\right)^2\right) \leq \\ &\leq Ke^{-r} \exp\left(-\frac{n}{4} \left(\frac{\ln s_0 + r - \ln K - \sigma^2}{2\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right) = Ke^{-r} \exp\left(-\frac{(\ln s_0 + r - \ln K - \sigma^2)^2}{16\sigma^2}\right) \xrightarrow{s_0 \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Dla ustalonego $\varepsilon > 0$ zachodzi:

$$\exists_{\hat{s} \in (0, \infty)} \quad \forall_{\hat{s} \leq s_0} \quad Ke^{-r} \cdot P(S_n^* \leq k_{0,n}) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{dla dowolnego } n \geq m.$$

Z lematu 3.1.1 wynika, że

$$\begin{aligned} Ke^{-r} \cdot \phi(-d_-) &\leq Ke^{-r} \exp\left(-\frac{1}{2} d_-^2\right) = Ke^{-r} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}\right)^2\right) = \\ &= Ke^{-r} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln s_0}{\sigma} + \tilde{C}\right)^2\right) = Ke^{-r} \exp\left(-\frac{\ln s_0}{2} \left(\frac{\ln s_0}{\sigma^2} + \frac{2\tilde{C}}{\sigma}\right)\right) \exp\left(-\frac{\tilde{C}^2}{2}\right) \xrightarrow{s_0 \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\tilde{C} = \frac{-\ln K + (r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma} \in \mathbb{R}.$$

Zatem

$$\exists_{s' \in (0, \infty)} \quad \forall_{s' \leq s_0} \quad Ke^{-r} \cdot \phi(-d_-) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Biorąc $\tilde{s} = \max\{\hat{s}, \bar{s}, \hat{s}, s', s''\}$, dla dowolnego $n \geq m$ oraz dowolnego $s_0 > \tilde{s}$, można otrzymać:

$$\begin{aligned} \left| C_{0,n}(s_0) - \left(s_0 \phi(d_+) - Ke^{-r} \phi(d_-) \right) \right| &\leq s_0 P(\bar{S}_n \leq k_{0,n}) + s_0 \phi(-d_+) + \\ &+ Ke^{-r} P(S_n^* \leq k_{0,n}) + Ke^{-r} \cdot \phi(-d_-) < \varepsilon. \end{aligned}$$

II. $s_0 \in [0, \tilde{s}]$.

Przyjęto: $C_{0,n}(0) = 0 = C_0(0)$.

Dla dowolnego $n \in N$ funkcja $C_{0,n}(\cdot)$ jest niemalejąca, co wynika ze wzoru (1.2.1), oraz ograniczona na przedziale $[0, \tilde{s}]$ ($|C_{0,n}(s_0)| \leq s_0 \leq \tilde{s}$). Ponadto

funkcja $C_0(s_0) = s_0 \phi(d_+) - \frac{K}{e^{r\tau}} \phi(d_-)$ jest funkcją ciągłą na $[0, \tilde{s}]$.

Z przypomnianego w rozdziale 1 twierdzenia 1.4.2 (dowód uogólnienia twierdzenia 1.4.2 zamieszczony jest w rozdziale 2 – twierdzenie 2.2.1 dla $\rho = 0$)

wynika, że dla dowolnie ustalonego $s_0 > 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) = s_0 \phi(d_+) - \frac{K}{e^{r\tau}} \phi(d_-)$.

Zatem z twierdzenia 2 Pólya (zob. dodatek 1) można wnioskować, iż

$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) = s_0 \phi(d_+) - \frac{K}{e^{r\tau}} \phi(d_-)$ jednostajnie na $[0, \tilde{s}]$.

Z części I i II dowodu wynika teza. Istotnie. Dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$, na podstawie I części dowodu, wybierając $m \in N$ i $\tilde{s} > 0$ takie, że dla $s_0 > \tilde{s}$ oraz $n \geq m$, zachodzi:

$$\left| C_{0,n}(s_0) - \left(s_0 \cdot \phi(d_+) - Ke^{-r\tau} \cdot \phi(d_-) \right) \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Następnie na podstawie II części dowodu, korzystając z jednostajnej zbieżności ciągu funkcji $C_{0,n}(\cdot)$ na przedziale $[0, \tilde{s}]$, do ε oraz $\tilde{s}$, należy dobrać m_0 ($m_0 \geq m$) takie, że dla wszystkich $n \geq m_0$ oraz $s \in [0, \tilde{s}]$ zachodzi nierówność (3).

Ostatecznie udowodnione zostało, że:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{m_0} \forall_{n \geq m_0} \forall_{s_0 \in (0, \infty)} \left| C_{0,n}(s_0) - \left(s_0 \cdot \phi(d_+) - Ke^{-r\tau} \cdot \phi(d_-) \right) \right| < \varepsilon, \text{ czyli teza.}$$



Uwaga 3.1.1. Z dowodu twierdzenia 1.2.1 oraz dowodu wniosku 1.2.1 można wywnioskować o równoważności dwóch następujących wzorów na wycenę europejskiej opcji kupna przez replikację dla dowolnej chwili j (uwzględniając wycenę z chwili $T = j + 1$):

$$\begin{aligned} \bullet \quad C_{j,n}(s_j) &= \frac{1}{\hat{r}_{j+1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{j+1,n}^* \cdot q_{j+1,n}^{*n-l} \cdot C_T(s_j \cdot u_{j+1,n}^l \cdot d_{j+1,n}^{n-l}) = \\ &= \frac{1}{e^{r_{j+1}}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{j+1,n}^* \cdot q_{j+1,n}^{*n-l} \cdot (s_j \cdot u_{j+1,n}^l \cdot d_{j+1,n}^{n-l} - K)^+; \\ \bullet \quad C_{j,n}(s_j) &= s_j \bar{D}_{j,n} - \frac{K}{\hat{r}_{j+1}} D_{j,n}^* = s_j \bar{D}_{j,n} - \frac{K}{e^{r_{j+1}}} D_{j,n}^*, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{j,n} &= \sum_{l=l_{0,n}}^n \binom{n}{l} \cdot \bar{p}_{j+1,n}^l \cdot \bar{q}_{j+1,n}^{n-l}, \\ D_{j,n}^* &= \sum_{l=l_{0,n}}^n \binom{n}{l} \cdot p_{j+1,n}^* \cdot q_{j+1,n}^{*n-l}, \\ l_{0,n} &= \frac{\ln \frac{K}{s_j} - n \cdot \ln d_{j+1,n}}{\ln \left(\frac{u_{j+1,n}}{d_{j+1,n}} \right)} = \frac{\sqrt{n} \ln \frac{K}{s_j} + \sigma_{j+1,n} \cdot n}{2\sigma_{j+1,n}}, \\ p_{j+1,n}^* &= \frac{\hat{r}_{j+1,n} - d_{j+1,n}}{u_{j+1,n} - d_{j+1,n}}, \quad q_{j+1,n}^* = \frac{u_{j+1,n} - \hat{r}_{j+1,n}}{u_{j+1,n} - d_{j+1,n}}, \quad \bar{p}_{j+1,n} = p_{j+1,n}^* \cdot \frac{u_{j+1,n}}{\hat{r}_{j+1,n}}, \\ \bar{q}_{j+1,n} &= q_{j+1,n}^* \cdot \frac{d_{j+1,n}}{\hat{r}_{j+1,n}}. \end{aligned}$$

Wniosek 3.1.1. Niech $\hat{C}_{j,n}(t) = \frac{1}{e^{r_{j+1}}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} p_{j+1,n}^* \cdot q_{j+1,n}^{*n-l} (e^{t\sigma_j} u_{j+1,n}^l d_{j+1,n}^{n-l} - K)^+$

$$\text{ i } \hat{c}_j(t) := e^{\sigma_j t} \phi \left(\frac{\sigma_j t - \ln K + r_{j+1} + \frac{\sigma_{j+1}^2}{2}}{\sigma_{j+1}} \right) - \frac{K}{e^{r_{j+1}}} \phi \left(\frac{\sigma_j t - \ln K + r_{j+1} - \frac{\sigma_{j+1}^2}{2}}{\sigma_{j+1}} \right), \quad j = 0, 1.$$

Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{C}_{j,n}(t) = \hat{c}_j(t)$ jednostajnie po $t \in (-\infty, \infty)$.

Dowód. Oddzielnie dla $j = 0$ i $j = 1$ zmienną $t \in R$ można zapisać jako

$$t := t(s_j) = \frac{\ln s_j}{\sigma_j}.$$

Zatem

$$\hat{C}_{j,n}(t) = \hat{C}_{j,n}\left(\frac{\ln s_j}{\sigma_j}\right) = C_{j,n}(s_j) = \frac{1}{e^{r_{j+1}}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} p_{j+1,n}^* q_{j+1,n}^{*n-l} (s_j u_{j+1,n}^l d_{j+1,n}^{n-l} - K)^+.$$

Analogicznie:

$$\hat{c}_j(t) = C_j(s_j) = s_j \phi \left(\frac{\ln \frac{s_j}{K} + \tau(r_{j+1} + \frac{\sigma_{j+1}^2}{2})}{\sigma_{j+1} \cdot \sqrt{\tau}} \right) - \frac{K}{e^{r_{j+1}\tau}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_j}{K} + \tau(r_{j+1} - \frac{\sigma_{j+1}^2}{2})}{\sigma_{j+1} \cdot \sqrt{\tau}} \right),$$

przy czym $\tau = 1$ (rozważana jest jedna jednostka czasu, $j = 0$ lub $j = 1$).

Korzystając z twierdzenia 3.1.2 z σ_{j+1} zamiast σ oraz r_{j+1} zamiast r , można otrzymać tezę wniosku 3.1.1.

Dla $j = 0$ zachodzi:

$$\hat{C}_{0,n}(t) = \hat{C}_{0,n}\left(\frac{\ln s_0}{\sigma_0}\right) = C_{0,n}(s_0)$$

(σ_0 jest współczynnikiem zmienności cen akcji przed pierwszą rozważaną jednostką czasową) oraz

$$\hat{c}_0(t) = \hat{c}_0\left(\frac{\ln s_0}{\sigma_0}\right) = C_0(s_0) = s_0 \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r_1 + \frac{\sigma_1^2}{2})}{\sigma_1 \cdot \sqrt{\tau}} \right) - \frac{K}{e^{r_1\tau}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0}{K} + \tau(r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})}{\sigma_1 \cdot \sqrt{\tau}} \right),$$

gdzie prawa strona powyższej równości jest formułą Blacka-Scholesa z $r = r_1$, $\sigma = \sigma_1$ i $\tau = 1$ (rozważana jest jedna jednostka czasu, $j = 0$).

Analogicznie dla $j = 1$:

$$\hat{C}_{1,n}(t) = \hat{C}_{1,n}\left(\frac{\ln s_1}{\sigma_1}\right) = C_{1,n}(s_1),$$

$$\hat{c}_1(t) = \hat{c}_1\left(\frac{\ln s_1}{\sigma_1}\right) = C_1(s_1) = s_1 \phi \left(\frac{\ln \frac{s_1}{K} + \tau(r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2})}{\sigma_2 \cdot \sqrt{\tau}} \right) - \frac{K}{e^{r_2\tau}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_1}{K} + \tau(r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2})}{\sigma_2 \cdot \sqrt{\tau}} \right).$$

Prawa strona powyższej równości jest dla $\tau = 1$ wyceną Blacka-Scholesa po pierwszej jednostce czasowej.



3.2. Graniczna cena akcji w modelu CRR

Cenę akcji $S(n)$ po upływie pierwszej jednostki czasu (tj. po n chwilach handlowania) można zapisać jako:

$$S(n) = s_0 \cdot e^{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n V_{1,j}^{(n)}},$$

gdzie:

$$V_{i,j}^{(n)} = \frac{\ln U_{i,j}^{(n)}}{\sigma_i / \sqrt{n}},$$

$U_{i,j}^{(n)}$ jest zmienną losową przyjmującą wartość $u_{i,n} = e^{\sigma_i \frac{1}{\sqrt{n}}}$ z prawdopodobieństwem $p_{i,n}^* = \frac{\hat{r}_{i,n} - d_{i,n}}{u_{i,n} - d_{i,n}} = \frac{e^{r_i/n} - e^{-\sigma_i/\sqrt{n}}}{e^{\sigma_i/\sqrt{n}} - e^{-\sigma_i/\sqrt{n}}}$ oraz wartość $d_{i,n} = e^{-\sigma_i \frac{1}{\sqrt{n}}}$ z prawdopodobieństwem $q_{i,n}^* = 1 - p_{i,n}^* = \frac{u_{i,n} - \hat{r}_{i,n}}{u_{i,n} - d_{i,n}}$ ($i = 1, 2$, gdyż przyjęto wyłącznie jedną jednostkę czasu).

Ponadto dla ustalonego n zmienne losowe $(U_{i,j}^{(n)})_{j=1}^n$, $i = 1, 2$ są niezależne, a więc niezależne są też $(V_{i,j}^{(n)})_{j=1}^n$, $i = 1, 2$.

Wówczas

$$E[V_{i,j}^{(n)}] = E\left[\frac{\ln U_{i,j}^{(n)}}{\sigma_i / \sqrt{n}}\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_i} \left[\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \cdot p_{i,n}^* - \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \cdot q_{i,n}^* \right] = 2p_{i,n}^* - 1,$$

$$E[(V_{i,j}^{(n)})^2] = \frac{n}{\sigma_i^2} \left[\frac{\sigma_i^2}{n} \cdot p_{i,n}^* + \frac{\sigma_i^2}{n} \cdot q_{i,n}^* \right] = 1,$$

$$Var[V_{i,j}^{(n)}] = 1 - (2p_{i,n}^* - 1)^2 = 4p_{i,n}^* - 4p_{i,n}^{*2} = 4p_{i,n}^* \cdot q_{i,n}^*.$$

Analogicznie jak w lemacie w dodatku 1 łatwo sprawdzić, że zmienne losowe $(V_{i,j}^{(n)})_{j=1}^n$ spełniają warunek Lapunowa, a zatem z Centralnego Twierdzenia Granicznego Lapunowa (twierdzenie Lapunowa – zob. dodatek 1) zachodzi:

$$\frac{\sum_{j=1}^n V_{i,j}^{(n)} - \sum_{j=1}^n EV_{i,j}^{(n)}}{\sqrt{n \cdot 4 \cdot p_{i,n}^* \cdot q_{i,n}^*}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z \sim N(0, 1).$$

Stąd

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{n \cdot 4 \cdot p_{i,n}^* \cdot q_{i,n}^*}} \left(\sum_{j=1}^n V_{i,j}^{(n)} - n(2p_{i,n}^* - 1) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sigma_i Z \sim N(0, \sigma_i^2).$$

Ponieważ $4 \cdot p_{i,n}^* \cdot q_{i,n}^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ (lemat 2.2.2), to

$$\frac{\sigma_i \cdot \sqrt{4 \cdot p_{i,n}^* \cdot q_{i,n}^*}}{\sqrt{n \cdot 4 \cdot p_{i,n}^* \cdot q_{i,n}^*}} \left(\sum_{j=1}^n V_{i,j}^{(n)} - n(2p_{i,n}^* - 1) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sigma_i Z \sim N(0, \sigma_i^2),$$

a stąd, ponieważ $\sqrt{n}(2p_{i,n}^* - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{r}{\sigma_i} - \frac{1}{2}\sigma_i$ (lemat 2.2.3), zachodzi:

$$\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n V_{i,j}^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \sigma_i Z + r_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 \sim N(r_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2, \sigma_i^2).$$

W konsekwencji

$$\ln S(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \ln s_0 + r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \sigma_1 \cdot Z,$$

gdzie Z jest zmienną losową o rozkładzie $N(0, 1)$

oraz

$$S(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} s_0 \cdot e^{r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \sigma_1 \cdot Z}.$$

Niech $S(i, n)$ oznacza cenę akcji po upływie jednej dużej jednostki czasu od chwili $i-1$ (po n chwilach handlowania), tj. $S(i, n)$ oznacza cenę akcji w chwili i . Zatem

$$S(i, n) = s_{i-1} \cdot e^{\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{j=1}^n V_{i,j}^{(n)}},$$

gdzie s_{i-1} jest wartością dodatniej zmiennej losowej $S(i-1, n)$.

Zatem

$$S(i, n) = S(i-1, n) \cdot e^{\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{j=1}^n V_{i,j}^{(n)}}.$$

Uwzględniając powyższe obliczenia, można otrzymać następujący lemat:

Lemat 3.2.1. Graniczna cena akcji. Przyrost względny ceny akcji po upływie jednej jednostki czasu ma w granicy rozkład lognormalny, tj.

$$\frac{S(i, n)}{S(i-1, n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} e^{r_i \frac{1}{2} \sigma_i^2 + \sigma_i \cdot Z},$$

gdzie Z jest zmienną losową o rozkładzie $N(0, 1)$.

Lemat 3.2.2. Zachodzi następująca zbieżność:

$$E \left[\frac{S(i, n)}{S(i-1, n)} \right] = e^{r_i} = E \left[e^{r_i \frac{1}{2} \sigma_i^2 + \sigma_i \cdot Z} \right].$$

Dowód. Można zauważyć, że

$$\begin{aligned} E \left[\frac{S(i, n)}{S(i-1, n)} \right] &= E \left[e^{\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{j=1}^n V_{i,j}^{(n)}} \right] = \left[e^{\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \cdot p_{i,n}^*} + e^{-\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \cdot q_{i,n}^*} \right]^n = \\ &= \left[e^{\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{e^{r_i \frac{1}{n}} - e^{-\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}}}{e^{\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}}} + e^{-\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}} \cdot \frac{e^{\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}} - e^{r_i \frac{1}{n}}}{e^{\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}}} \right]^n = \left[\frac{e^{r_i \frac{1}{n}} \left(e^{\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}} \right)}{e^{\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}} - e^{-\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}}} \right]^n = \left(e^{r_i \frac{1}{n}} \right)^n = e^{r_i}. \end{aligned}$$

Ponadto

$$E \left[e^{r_i \frac{1}{2} \sigma_i^2 + \sigma_i \cdot Z} \right] = e^{r_i \frac{1}{2} \sigma_i^2} \cdot E \left[e^{\sigma_i Z} \right] = e^{r_i \frac{1}{2} \sigma_i^2} \cdot e^{\frac{1}{2} \sigma_i^2} = e^{r_i}.$$

Zatem

$$E \left[\frac{S(i, n)}{S(i-1, n)} \right] = e^{r_i} = E \left[e^{r_i \frac{1}{2} \sigma_i^2 + \sigma_i \cdot Z} \right].$$



Wniosek 3.2.1. Dla pierwszej jednostki czasu (bo s_0 jest stałą nieujemną) zachodzi:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} S(1, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) \stackrel{d}{=} s_0 \cdot e^{r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \sigma_1 \cdot Z} := s(1),$
 b) $E[S(1, n)] = E[S(n)] = s_0 \cdot e^{r_1} = E[s(1)].$

3.2.1. Równania stochastyczne dla granicznego procesu cen akcji

W literaturze cenę akcji w modelu Blacka-Scholesa często opisuje się za pomocą geometrycznego ruchu Browna, tj. procesu $(S_t)_{t \in [0, T]}$ w postaci:

$$S_t = s_0 \cdot e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot t + \sigma \cdot W_t},$$

gdzie $r \in R$, $\sigma > 0$, W_t jest procesem Wienera.

Proces $(S_t)_{t \in [0, T]}$ jest rozwiązaniem równania stochastycznego:

$$\begin{cases} dS_t = r \cdot S_t dt + \sigma \cdot S_t dW_t \\ S_0 = s_0 \in R, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

które można zapisać w postaci całkowej

$$S_t = s_0 + \int_0^t r \cdot S_u du + \int_0^t \sigma \cdot S_u dW_u, \quad t \in [0, T],$$

gdzie druga całka jest całką Ito.

W rozdziale 3 rozpatrywanych będzie m poszczególnych jednostek czasu, na jakie został podzielony okres od chwili zawarcia kontraktu opcyjnego do momentu rozliczenia opcji. Ponadto przyjmuje się, iż w każdej jednostce czasu następuje zmiana stopy procentowej rachunku bankowego r oraz zmiana współczynnika zmienności cen akcji σ . Zatem można założyć, że w każdej jednostce czasu cena akcji opisana jest geometrycznym ruchem Browna z różnymi parametrami r i σ . Można przyjąć, że

$$\left\{ \begin{array}{l} S_t^1 = s_0 \cdot e^{(r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2) \cdot t + \sigma_1 \cdot W_t}, \quad t \in (0, 1] \\ S_t^2 = S_1^1 \cdot e^{(r_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2) \cdot (t-1) + \sigma_2 \cdot (W_t - W_1)}, \quad t \in (1, 2] \\ \vdots \\ S_t^m = S_{m-1}^{m-1} \cdot e^{(r_m - \frac{1}{2}\sigma_m^2) \cdot (t-m+1) + \sigma_m \cdot (W_t - W_{m-1})}, \quad t \in (m-1, m]. \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

Proces $(S_t^1)_{t \in [0, T]}$ opisuje cenę akcji w pierwszej jednostce czasu, proces $(S_t^2)_{t \in [0, T]}$ – w drugiej jednostce czasu, ..., proces $(S_t^m)_{t \geq 0}$ – w m -tej jednostce czasu. Wówczas można otrzymać następujące równania stochastyczne dla poszczególnych jednostek czasu:

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_t^1 = r_1 \cdot S_t^1 dt + \sigma_1 \cdot S_t^1 dW_t, \quad t \in (0, 1], \quad S_0^1 = s_0 \\ dS_t^2 = r_2 \cdot S_t^2 dt + \sigma_2 \cdot S_t^2 dW_t, \quad t \in (1, 2], \quad S_1^2 = S_1^1 \\ \vdots \\ dS_t^m = r_m \cdot S_t^m dt + \sigma_m \cdot S_t^m dW_t, \quad t \in (m-1, m], \quad S_{m-1}^m = S_{m-1}^{m-1}. \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

Proces $(S_t^i)_{t \in (i-1, i]}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$ jest rozwiązaniem równania stochastycznego:

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_t^i = r_i \cdot S_t^i dt + \sigma_i \cdot S_t^i dW_t, \quad t \in (i-1, i] \\ S_{i-1}^i = S_{i-1}^{i-1}, \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

które w postaci całkowej można zapisać:

$$S_t^i = S_{i-1}^{i-1} + \int_{i-1}^t r_i \cdot S_u^i du + \int_{i-1}^t \sigma_i \cdot S_u^i dW_u, \quad t \in (i-1, i], \quad (3.2.5)$$

gdzie druga całka jest całką Ito, a S_{i-1}^{i-1} jest zmienną losową niezależną od $\{W_t - W_{i-1}, \quad t > i-1\}$.

Ogólnie można zapisać proces (3.2.2) opisujący cenę akcji w rozpatrywanym okresie czasu od chwili zawarcia kontraktu opcyjnego do chwili rozliczenia opcji (przyjmując $T = m$) następująco:

$$S_t = s_0 \cdot e^{(r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)) \cdot t + \sigma(t) \cdot W_t}, \quad t \in [0, T], \quad (3.2.6)$$

gdzie:

$$r(t) = \begin{cases} r_1, & t \in (0, 1] \\ r_2, & t \in (1, 2] \\ \vdots \\ r_m, & t \in (m-1, m] \end{cases}, \quad \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1, & t \in (0, 1] \\ \sigma_2, & t \in (1, 2] \\ \vdots \\ \sigma_m, & t \in (m-1, m] \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Wówczas proces $(S_t)_{t \in [0, T]}$ określony wzorami (3.2.6) i (3.2.7) jest rozwiązaniem równania stochastycznego, będącego uogólnieniem równania (3.2.1):

$$\begin{cases} dS_t = r(t) \cdot S_t dt + \sigma(t) \cdot S_t dW_t, & t \in [0, T] \\ S_0 = s_0, \end{cases} \quad (3.2.8)$$

gdzie współczynniki równania $r(\cdot)$ i $\sigma(\cdot)$ są zdefiniowane wzorem (3.2.7).

Rozważono proces $(\hat{S}(t, n))_{t \in [0, T]}$ z czasem ciągłym taki, że $\hat{S}(i, n) = S(i, n)$ dla $i = 1, 2, \dots, m$ oraz na przedziałach postaci $(i-1, i)$ proces $(\hat{S}(t, n))_{t \in [0, T]}$ został otrzymany z procesu $(S(i, n))_{i \in \{1, 2, \dots, m\}}$ przez interpolację liniową. W rozdziale 3.2 została pokazana zbieżność według rozkładu

$$S(i, n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} s_{i-1} \cdot e^{r_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \sigma_i \cdot Z},$$

gdzie s_{i-1} jest wartością dodatniej zmiennej losowej $S(i-1, n)$, a Z jest zmienną losową o rozkładzie $N(0, 1)$.

Zatem na krańcach przedziału postaci $[i-1, i]$:

$$\frac{\hat{S}(i, n)}{\hat{S}(i-1, n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} e^{r_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2 + \sigma_i \cdot (W_i - W_{i-1})} = \frac{S_i}{S_{i-1}}.$$

Można również pokazać, że proces $(\hat{S}(t, n))_{t \in [0, T]}$ zbiega słabo w $C[0, T]$ do procesu $(S_t)_{t \in [0, T]}$, określonego wzorem (3.2.2) i będącego rozwiązaniem równania (3.2.8) (Jakubowski, 2006: 75).

3.3. Wycena opcji, gdy parametry rynku są stałe w każdym z dwóch kolejnych przedziałów czasu

W tym podrozdziale rozważana będzie opcja europejska realizowana po dwóch jednostkach czasu (np. po dwóch miesiącach). Zostanie wyznaczona graniczna cena początkowa opcji (wyceniona przez replikację) przy liczbie chwil handlowania w jednym miesiącu $n \rightarrow \infty$.

Przy ustalonym n górna i dolna zmiana ceny akcji (między kolejnymi chwilami handlowania) oraz stopa procentowa wolna od ryzyka w pierwszym miesiącu wynosić będą odpowiednio:

$$u_{1,n} = e^{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}, \quad d_{1,n} = e^{-\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}, \quad r_1,$$

w drugim miesiącu odpowiednio:

$$u_{2,n} = e^{\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}}, \quad d_{2,n} = e^{-\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}}, \quad r_2.$$

Podobnie jak w przypadku klasycznym będą stosowane oznaczenia:

$$p_{i,n}^* = \frac{\hat{r}_{i,n} - d_{i,n}}{u_{i,n} - d_{i,n}}, \quad q_{i,n}^* = 1 - p_{i,n}^* = \frac{u_{i,n} - \hat{r}_{i,n}}{u_{i,n} - d_{i,n}}, \quad \hat{r}_{i,n} = e^{\frac{r_i}{n}}, \quad i = 1, 2.$$

Uwaga 3.3.1. Rozważane będą dwie jednostki czasu. W każdej jednostce czasu następuje n chwil zmiany ceny akcji. Niech $s_0 > 0$ będzie początkową ceną akcji. Wówczas na początku drugiej jednostki czasu cena akcji osiągnie wartość: $s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}$, gdzie l jest pewną liczbą naturalną. Zatem w pierwszej jednostce czasu cena akcji l razy wzrosła. Wyceniając teraz opcję kupna na początku drugiej jednostki czasu, należy wziąć pod uwagę początkową cenę akcji s_1 dla tej jednostki, tj. cenę $s_1 = s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}$. Stąd wycena opcji kupna na początku drugiej jednostki czasu wynosi:

$$C_{1,n}(s_1) = \frac{1}{e^{r_2}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*(n-l)} \cdot (s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l} - K)^+, \quad s_1 \in (0, \infty). \quad (3.3.1)$$

Uwaga 3.3.2. Funkcja $C_{1,n}(\cdot): (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ określona powyżej jest nieujemną i niemalejącą na $(0, \infty)$ funkcją argumentu s_1 .

Lemat 3.3.1. Przy powyższych oznaczeniach niech dla każdego $s_0 > 0$

$$C_{0,n}(s_0) := \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}), \quad (3.3.1.1)$$

gdzie $(C_{1,n}(\cdot))_{n \in N}$ jest pewnym ciągiem funkcji takim, że $C_{1,n}(s_1) \geq 0$ dla dowolnej liczby $s_1 > 0$. Jeżeli dla każdego wyrazu ciągu $(C_{1,n}(\cdot))_{n \in N}$ zachodzi oszacowanie z dołu przez funkcję przedziałami stałą (niezależną od n), przyjmującą skończoną liczbę wartości:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_1) \leq C_{1,n}(s_1) \quad \text{dla dowolnego } s_1 > 0, \quad (3.3.1.2)$$

gdzie $x_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$, oraz przedziały $(s'_{1,k}, s''_{1,k}]$ są wzajemnie rozłączne, to dla dowolnego $s_0 > 0$ zachodzi oszacowanie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) \geq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{(\frac{1}{\sigma_1} \ln s'_{1,k}, \frac{1}{\sigma_1} \ln s''_{1,k}]}(t) dt,$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Wstawiając do (3.3.1.1) $C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) = I_{(-\infty, s'_{1,k}]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l})$, można uzyskać

$$C_{0,n}(s_0) = \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(-\infty, s'_{1,k}]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) = \frac{1}{e^{r_1}} P(S_n \leq l'_0),$$

gdzie S_n jest zmienną losową o rozkładzie Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie $p_{1,n}^*$, opisującą ilość wzrostów cen akcji w pierwszym danym miesiącu, tj. od chwili 0 do chwili 1; l'_0 jest rozwiązaniem równania $s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l} = s'_{1,k}$, tj.

$$l'_0 = \frac{\ln s'_{1,k} - \ln s_0 + \sigma_1 \sqrt{n}}{2 \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}. \quad (1)$$

Z twierdzenia 1.4.3 wynika, że

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} P(S_n \leq l'_0) = \frac{1}{e^{r_1}} \phi \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l'_0 - np_{1,n}^*}{\sqrt{np_{1,n}^* q_{1,n}^*}} \right). \quad (2)$$

Z lematu 2.2.1 i z lematu 2.2.3 (dla $\rho = 0$) przy $n \rightarrow \infty$ otrzymano:

$$\sqrt{p_{1,n}^* \cdot q_{1,n}^*} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ oraz } \sqrt{n}(1 - 2p_{1,n}^*) \rightarrow \frac{1}{2}\sigma_1 - \frac{r_1}{\sigma_1}.$$

Stąd i z (1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l'_0 - np_{1,n}^*}{\sqrt{np_{1,n}^* q_{1,n}^*}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{s'_{1,k}}{s_0} + \sigma_1 \sqrt{n}(1 - 2p_{1,n}^*)}{2\sigma_1 \sqrt{p_{1,n}^* q_{1,n}^*}} = \frac{\ln \frac{s'_{1,k}}{s_0}}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1.$$

Zatem z (2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) = \frac{1}{e^{r_1}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s'_{1,k}}{s_0}}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1 \right). \quad (3)$$

Oszacowanie (3.3.1.2) daje

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq \\ & \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}). \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\forall_{k,l \in N \cup \{0\}} \forall_{n \in N} p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} > 0 \text{ oraz } x_k \geq 0,$$

więc można zmienić kolejność sumowania (Fichtenholz, 1976) i stąd

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}). \end{aligned}$$

Ponadto można zauważyć, że

$$\forall_{k,n \in N} x_k \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq 0.$$

Zatem dla dowolnego $M \in N$ można uzyskać następujące oszacowania:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'')} (s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq \\
& \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^M x_k \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'')} (s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq \\
& \geq \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^M x_k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'')} (s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}).
\end{aligned}$$

Z dowolności M wynika, że

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'')} (s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq \\
& \geq \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'')} (s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}).
\end{aligned}$$

Stąd i z (3):

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'')} (s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq \\
& \geq \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left(\phi \left(\frac{\ln \frac{s_{1,k}''}{s_0}}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) - \phi \left(\frac{\ln \frac{s_{1,k}'}{s_0}}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \right).
\end{aligned}$$

Przyjmując $t_k'' = \frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}''$ oraz $t_k' = \frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}'$, można otrzymać:

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'')} (s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq \\
& \geq \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left(\phi \left(t_k'' - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) - \phi \left(t_k' - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \right) = \\
& = \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \int_{t_k'}^{t_k''} f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) dt = \\
& = \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \int_R x_k f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \cdot I_{(t_k', t_k'')} (t) dt.
\end{aligned}$$

Można zauważyć, że

$$\forall_{t \in R} x_k f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot I_{(t_k', t_k'']} (t) \geq 0.$$

Zatem z twierdzenia 2 (zob. dodatek 1) wynika, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_R x_k f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) I_{(t_k', t_k'']} (t) dt = \int_R f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_{(t_k', t_k'']} (t) dt.$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq \\ & \geq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{(t_k', t_k'']} (t) dt = \\ & = \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{(\frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}', \frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}'')} (t) dt. \quad \square \end{aligned}$$

Lemat 3.3.2. Niech $C_{1,n}(s_1) \geq 0$, $s_1 > 0$, $n = 1, 2, \dots$, będą funkcjami zdefiniowanymi wzorem (3.3.1). Niech $0 = s_{1,0}' < s_{1,0}'' = s_{1,1}' < s_{1,1}'' = \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{1,k}' = \infty$. Jeżeli przy poprzednich oznaczeniach dla każdego $s_0 > 0$

$$C_{0,n}(s_0) = \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}), \quad (3.3.2.1)$$

gdzie dla ciągu funkcji $(C_{1,n}(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$, $C_{1,n}(s_1) \geq 0$, $s_1 > 0$ zachodzi dla każdego wyrazu $C_{1,n}(\cdot)$ oszacowanie z góry przez funkcję przedziałami stałą (niezależną od n):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'')} (s_1) \geq C_{1,n}(s_1) \quad \text{dla dowolnego } s_1 > 0, \quad (3.3.2.2)$$

gdzie $\tilde{x}_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$,

to dla dowolnego $s_0 > 0$ zachodzi oszacowanie:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) \leq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot I_{(\frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}', \frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}'')} (t) dt,$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Uwaga 3.3.3. W przeciwieństwie do dowodu poprzedniego lematu 3.3.1 w dowodzie lematu 3.3.2 nie można wejść z granicą pod sumę nieskończoną. Zatem tezę lematu 3.3.2 należy udowodnić, rozważając pomocniczą sumę skończoną.

Z założeń wynika, że przedziały $(s'_{1,k}, s''_{1,k}]$, $k = 0, 1, \dots$, są wzajemnie rozłączne oraz dla dowolnego $\nu > 0$, przedział $(0, \nu]$ przecina się ze skończoną liczbą M_ν tych przedziałów.

Dowód. Ustalono dowolną liczbę $\nu > 0$ i niech $(0, \nu] \subset \bigcup_{k=0}^{M_\nu} (s'_{1,k}, s''_{1,k}]$.

Wówczas

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} [C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot \\ &\cdot I_{(0, \nu]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) + C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l})] \stackrel{(3.3.2.2)}{\leq} \\ &\leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot \sum_{k=1}^{M_\nu} \tilde{x}_k \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) + \\ &+ \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}). \end{aligned}$$

Rozważono dwa etapy dowodu.

I. Należy wykazać, że

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot \sum_{k=1}^{M_\nu} \tilde{x}_k \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) &\leq \\ &\leq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot I_{(\frac{1}{\sigma_1} \ln s'_{1,k}, \frac{1}{\sigma_1} \ln s''_{1,k}]}(t) dt. \end{aligned}$$

Istotnie. Sumy mają skończoną liczbę składników, zatem można zmienić kolejność sumowania (Fichtenholz, 1976):

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \sum_{k=1}^{M_\nu} \tilde{x}_k \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) &= \\ = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{M_\nu} \tilde{x}_k \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}). \end{aligned}$$

Powyższa suma ma skończoną liczbę składników, stąd

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{M_v} \tilde{x}_k \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]} \left(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l} \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{M_v} \tilde{x}_k \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]} \left(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l} \right). \end{aligned}$$

Ponadto wszystkie wyrażenia pod sumą są nieujemne, zatem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{M_v} \tilde{x}_k \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]} \left(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l} \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]} \left(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l} \right). \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe i wzór (3) z dowodu lematu 3.3.1, można wnioskować, że

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{M_v} \tilde{x}_k \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]} \left(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l} \right) \leq \\ & \leq \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]} \left(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l} \right) = \\ & = \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \left(\phi \left(\frac{\ln \frac{s''_{1,k}}{s_0}}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) - \phi \left(\frac{\ln \frac{s'_{1,k}}{s_0}}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \right). \end{aligned}$$

Podstawiając $t_k'' = \frac{1}{\sigma_1} \ln s''_{1,k}$ oraz $t_k' = \frac{1}{\sigma_1} \ln s'_{1,k}$, można otrzymać:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \left(\phi \left(\frac{\ln \frac{s''_{1,k}}{s_0}}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) - \phi \left(\frac{\ln \frac{s'_{1,k}}{s_0}}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \right) = \\ & = \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \left(\phi \left(t_k'' - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) - \phi \left(t_k' - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \right) = \\ & = \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \int_{t_k'}^{t_k''} f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) dt. \end{aligned}$$

Analogicznie jak w dowodzie lematu 3.3.1 należy skorzystać z twierdzenia 2 (zob. dodatek 1). Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \int_{t_k}^{t_k''} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) dt &= \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k I_{(t_k, t_k'']} (t) dt = \\ &= \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k I_{\left(\frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}', \frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}''\right]} (t) dt. \end{aligned}$$

Ostatecznie dla dowolnego $\nu > 0$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot \sum_{k=1}^{M_n} \tilde{x}_k \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'']} (s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) &\leq \\ \leq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot I_{\left(\frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}', \frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}''\right]} (t) dt. \end{aligned}$$

II. Należy pokazać, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \nu > 0 \quad \forall \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} p_{1,n}^{*l} q_{1,n}^{*n-l} C_{1,n}(s_0 u_{1,n}^l d_{1,n}^{n-l}) I_{(\nu, \infty)}(s_0 u_{1,n}^l d_{1,n}^{n-l}) \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Istotnie. Z twierdzenia 3.1.2 (Jednostajna zbieżność formuły CRR do formuły Blacka-Scholesa) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można otrzymać dla n większych od pewnego n_ε (gdzie n_ε nie zależy od ν):

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) &\leq \\ \leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot [C_1(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) + 0,5 \cdot \varepsilon] \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}). \end{aligned}$$

Można zauważyć, że $C_1(s_1) \leq s_1$. Stąd

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) &\leq \\ \leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot [s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l} + 0,5 \cdot \varepsilon] \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) &= \\ = E[(S(1, n) + 0,5 \cdot \varepsilon) \cdot I_{(\nu, \infty)}(S(1, n))] &\leq E[S(1, n) \cdot I_{(\nu, \infty)}(S(1, n))] + 0,5 \cdot \varepsilon, \quad (2) \end{aligned}$$

gdzie $S(1, n)$ oznacza cenę akcji po upływie jednej jednostki czasu (tj. po n chwilach handlowania), $S(1, 0) = s_0$.

Należy pokazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[(S(1, n)) \cdot I_{(v, \infty)}(S(1, n)) \right] = E \left[(s(1)) \cdot I_{(v, \infty)}(s(1)) \right],$$

gdzie $s(1) := s_0 \cdot e^{r_1 \frac{1}{2} \sigma_1^2 + \sigma_1 \cdot Z}$, Z ma rozkład normalny $N(0, 1)$.

Z wniosku 3.2.1: $S(1, n) \xrightarrow{d} s(1)$.

Z twierdzenia Skorochoda (zob. dodatek 1) wynika, że istnieją przestrzeń probabilistyczna $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ i ciąg zmiennych losowych $(\tilde{S}(1, n))_{n=1}^{\infty}$ oraz zmienna losowa $\tilde{s}(1)$ takie, że $\forall_{n \in \mathbb{N}} \tilde{S}(1, n) \stackrel{d}{=} S(1, n)$, $\tilde{s}(1) \stackrel{d}{=} s(1)$ oraz $\tilde{S}(1, n) \xrightarrow{p.n.} \tilde{s}(1)$.

Ponieważ $\tilde{s}(1)$ ma rozkład ciągły, więc

$$\tilde{P}(\tilde{s}(1) = v) = 0.$$

Wówczas

$$h(\tilde{S}(1, n)) \xrightarrow{p.n.} h(\tilde{s}(1)),$$

gdzie $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $h(x) = x \cdot I_{[0, v]}(x)$ jest funkcją ograniczoną ($0 \leq h(x) \leq v$ dla dowolnego $x \in [0, \infty)$).

Stąd i z twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanej zbieżności wynika, że $\tilde{E}h(\tilde{S}(1, n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{E}h(\tilde{s}(1))$, gdzie $\tilde{E}$ oznacza wartość oczekiwaną względem $\tilde{P}$.

Zatem

$$Eh(S(1, n)) = \tilde{E}h(\tilde{S}(1, n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{E}h(\tilde{s}(1)) = Eh(s(1)). \quad (3)$$

Można zauważyć, że

$$E(S(1, n)) = E[(S(1, n)) \cdot I_{[0, v]}(S(1, n))] + E[(S(1, n)) \cdot I_{(v, \infty)}(S(1, n))]$$

oraz

$$E(s(1)) = E[(s(1)) \cdot I_{[0, v]}(s(1))] + E[(s(1)) \cdot I_{(v, \infty)}(s(1))].$$

Stąd, z (3) oraz z wniosku 3.2.1 b):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(S(1, n)) \cdot I_{(v, \infty)}(S(1, n))] = E[(s(1)) \cdot I_{(v, \infty)}(s(1))]. \quad (4)$$

Należy pokazać, że

$$\lim_{v \rightarrow \infty} E[(s(1)) \cdot I_{(v, \infty)}(s(1))] = 0. \quad (5)$$

Istotnie. Niech $v_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$. Wówczas zmienna losowa

$\zeta_m := s(1) \cdot I_{(v_m, \infty)}(s(1)) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ p.n. Ponieważ zmienna losowa $s(1) \geq 0$ i $E[s(1)] < \infty$ oraz $\forall \omega \in \Omega \quad 0 \leq \zeta_m(\omega) \leq s(1)$, więc z twierdzenia Lebesgue'a

o zbieżności zmajoryzowanej (zob. dodatek 1) można wnioskować, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \zeta_m dP = \int_{\Omega} \lim_{m \rightarrow \infty} \zeta_m dP = \int_{\Omega} 0 dP = 0.$$

Z (2) i (4) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ oraz dla wszystkich $v > 0$ zachodzi:

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot I_{(v, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\ & \leq \frac{1}{e^{r_1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(E[(S(1, n)) \cdot I_{(v, \infty)}(S(1, n))] + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{1}{e^{r_1}} \left(E[(s(1)) \cdot I_{(v, \infty)}(s(1))] + \frac{\varepsilon}{2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Stąd i z (5) wynika (1).

Ostatecznie, uwzględniając obliczenia w I i II etapie dowodu dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ oraz odpowiednio dużych $v > 0$ ($v > v_\varepsilon > 0$), zachodzi:

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot \sum_{k=1}^{M_v} \tilde{x}_k \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k})}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) + \\ & + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot I_{(v, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\ & \leq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot I_{(\frac{1}{\sigma_1} \ln s'_{1,k}, \frac{1}{\sigma_1} \ln s''_{1,k})}(t) dt + \varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ wynika teza lematu. □

Uwaga 3.3.4. Rozważono cenę akcji po n chwilach handlowania, czyli po jednej jednostce czasu (np. po jednym miesiącu). Założono, że w rozważanej i -tej jednostce czasu ($i = 1, 2$) początkowa cena akcji s_{i-1} wzrośnie k razy, tj. cena akcji na koniec i -tej jednostki czasu wyniesie: $s_{i-1} \cdot u_{i,n}^k \cdot d_{i,n}^{n-k}$. Oczywiście europejska opcja kupna zostanie zrealizowana, gdy $K \leq s_{i-1} \cdot u_{i,n}^k \cdot d_{i,n}^{n-k}$. Z założeń modelu CRR wiadomo, że $u_{i,n} \cdot d_{i,n} = 1$. Stąd $K \leq s_{i-1} \cdot u_{i,n}^{2k-n}$. Ponadto w modelu CRR założono, że prawdopodobieństwa górnej i dolnej zmiany ceny akcji wynoszą 0,5, tj. $p_{i,n} = q_{i,n} = 0,5$. Przyjmując $k = 0,5 \cdot n$ (najbardziej prawdopodobna liczba wzrostów ceny akcji), w konsekwencji $K \leq s_{i-1} \leq s_{i-1} \cdot e^{r_i}$ (r_i jest stopą procentową wolną od ryzyka za i -ty miesiąc). Stąd $K \leq e^{\sigma_{i-1}^t} \cdot e^{r_i}$, gdzie $t := t(s_i) = \ln s_i / \sigma_i$.

Interpretacja

Rozważono pierwszą jednostkę czasu ($i = 1$). Na zakup europejskiej opcji kupna na akcję zdecydować się inwestorzy, którzy przewidują wzrost ceny akcji powyżej kwoty $s_0 \cdot e^{r_1}$, którą otrzymaliby z pewnej inwestycji, jaką jest lokata bankowa. Oczywiście inwestorzy preferują jak najniższą cenę wykonania, gdyż wówczas osiągną większy zysk. Posiadacz europejskiej opcji kupna na akcję wolałby ustalić jak najwyższą cenę wykonania. Gdyby jednak ustalona w chwili zawierania kontraktu cena wykonania $K > s_0 \cdot e^{r_1}$, to tylko nieliczni inwestorzy, inwestorzy lubiący ryzyko, zdecydowałoby się na zakup europejskiej opcji kupna na akcję. Zdecydowana większość inwestorów (inwestorzy niechętni ryzyku) przy cenie wykonania $K > s_0 \cdot e^{r_1}$ zdecydowałaby się na inwestycję bez ryzyka, tj. lokatę bankową.

Uwaga 3.3.5. Zdefiniowana we wniosku 3.1.1 (na końcu podrozdziału 3.1) funkcja (dla $j = 0, 1$ i $t \in R$)

$$\hat{c}_j(t) := e^{\sigma_j t} \phi \left(\frac{t\sigma_j - \ln K + r_{j+1} + \frac{\sigma_{j+1}^2}{2}}{\sigma_{j+1}} \right) - \frac{K}{e^{r_{j+1}}} \phi \left(\frac{t\sigma_j - \ln K + r_{j+1} - \frac{\sigma_{j+1}^2}{2}}{\sigma_{j+1}} \right)$$

jest nieujemna (jako granica nieujemnych funkcji $\hat{C}_{j,n}(t)$).

Wniosek 3.3.1. Jeżeli przy ustalonym $K > 0$ za $C_{1,n}(\cdot)$ w lemacie 3.3.1 zostanie podstawione (3.3.1), tj.

$$C_{1,n}(s_1) = \frac{1}{e^{r_2}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot (s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l} - K)^+, \quad s_1 > 0, \quad (3.3.1)$$

to zachodzi następujące oszacowanie z dołu:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq \\ & \geq \sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt, \end{aligned}$$

gdzie, przy ustalonym $\varepsilon > 0$, zbiór $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ jest zbiorem funkcji określonych na R przedziałami stałych, przyjmujących skończoną liczbę wartości, ograniczających od dołu funkcję $(\hat{c}_1(\cdot) - \varepsilon)^+$, gdzie:

$$\hat{c}_1(t) := e^{\sigma_1 t} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) - \frac{K}{e^{r_2}} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right), \quad t \in R,$$

$\phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Funkcja $(\hat{c}_1(\cdot) - \varepsilon)^+$ jest ciągła (jako złożenie funkcji ciągłych) i nieujemna. Zatem z twierdzenia o przybliżaniu z dołu funkcjami schodkowymi (zob. dodatek 1) można wnioskować, że zbiór $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ jest niepusty. Niech $\varphi(\cdot): R \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją przyjmującą skończoną liczbę wartości, stałą na rozłącznych przedziałach postaci $(t', t'']$ i ograniczającą od dołu funkcję

$$(\hat{c}_1(\cdot) - \varepsilon)^+, \quad \text{tj. } \varphi(t) \leq (\hat{c}_1(t) - \varepsilon)^+ \quad \text{dla dowolnego } t \in R. \quad \text{Niech } t := \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1.$$

Z jednostajnej zbieżności formuły CRR do formuły Blacka-Scholesa (zob. wniosek 3.1.1 dla $\tau = 1$) wynika, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n_0 \leq n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{t \in R} \quad \left| \hat{c}_1(t) - \hat{C}_{1,n}(t) \right| \leq \varepsilon,$$

$$\text{gdzie} \quad \hat{C}_{1,n}(t) = \frac{1}{e^{r_2}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot (e^{t\sigma_1} \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l} - K)^+ = C_{1,n}(s_1),$$

$$s_1 = e^{\sigma_1 t}.$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustaloną liczbą. Stąd dla $n \geq n_0$:

$$\forall_{t \in R} \quad (\hat{c}_1(t) - \varepsilon)^+ \leq \hat{C}_{1,n}(t) \leq \hat{c}_1(t) + \varepsilon.$$

Zatem

$$\forall_{\varphi \in \Phi_\varepsilon} \quad \forall_{t \in R} \quad \varphi(t) \leq \hat{C}_{1,n}(t).$$

Wówczas również

$$\forall_{\varphi \in \Phi_\varepsilon} \quad \forall_{s_1 = e^{\sigma_1 t} > 0} \quad \tilde{\varphi}(e^{\sigma_1 t}) = \tilde{\varphi}(s_1) \leq C_{1,n}(s_1), \text{ gdzie } \tilde{\varphi}(s_1) \stackrel{df}{=} \varphi\left(\frac{\ln s_1}{\sigma_1}\right) = \varphi(t).$$

Z lematu 3.3.1 wynika, że

$$\forall_{\varphi \in \Phi_\varepsilon} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) \geq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt,$$

a w konsekwencji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) \geq \sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt. \quad \square$$

Wniosek 3.3.2. Jeżeli przy ustalonym $K > 0$ za $C_{1,n}(\cdot)$ zostanie podstawione znów (3.3.1), to zachodzi następujące oszacowanie z góry:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\ & \leq \inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt, \end{aligned}$$

gdzie, przy ustalonym $\varepsilon > 0$, $\Psi_\varepsilon(\cdot)$ jest zbiorem funkcji określonych na R , ograniczających od góry funkcję $\hat{c}_1(\cdot) + \varepsilon$, stałych na przedziałach rozłącznych postaci $(t'_{1,k}, t''_{1,k}]$, spełniających założenia lematu 3.3.2, z tym że $t'_{1,0} = -\infty$, gdzie:

$$\hat{c}_1(t) := e^{\sigma_1 t} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) - \frac{K}{e^{r_2}} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right), \quad t \in R,$$

$\phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego $N(0, 1)$, f jest gęstością $N(0, 1)$.

Dowód. Funkcja $\hat{c}_1(\cdot) + \varepsilon$ jest ciągła (jako złożenie funkcji ciągłych). Zatem z wniosku o przybliżaniu z góry funkcjami schodkowymi (zob. dodatek 1) dla funkcji $C_1(\cdot) + \varepsilon$, gdzie $C_1(s) \stackrel{df}{=} \hat{c}_1\left(\frac{\ln s}{\sigma_1}\right)$, $s > 0$, wynika, że zbiór $\Psi_\varepsilon(\cdot)$ jest niepusty. Niech $\psi(\cdot) : R \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją z klasy $\Psi_\varepsilon(\cdot)$. Wówczas $\psi(t) \geq \hat{c}_1(t) + \varepsilon$ dla dowolnego $t \in R$. Niech $t := \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1$. Z jednostajnej zbieżności formuły CRR do formuły Blacka-Scholesa (zob. wniosek 3.1.1 dla $\tau = 1$) można otrzymać:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n_0 \leq n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{t \in R} \quad \left| \hat{c}_1(t) - \hat{C}_{1,n}(t) \right| \leq \varepsilon,$$

gdzie

$$\hat{C}_{1,n}(t) = \frac{1}{e^{r_2}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*n-l} (e^{t\sigma_1} \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l} - K)^+ = C_{1,n}(s_1) \geq 0, \quad s_1 = e^{\sigma_1 t}.$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustaloną liczbą. Stąd dla $n \geq n_0$:

$$\forall_{t \in R} \quad \hat{c}_1(t) - \varepsilon \leq \hat{C}_{1,n}(t) \leq \hat{c}_1(t) + \varepsilon,$$

a zatem

$$\forall_{\psi \in \Psi_\varepsilon} \quad \forall_{t \in R} \quad \psi(t) \geq \hat{C}_{1,n}(t).$$

Wówczas również

$$\forall_{\psi \in \Psi_\varepsilon} \quad \forall_{s_1 = e^{\sigma_1 t} > 0} \quad \tilde{\psi}(e^{\sigma_1 t}) = \tilde{\psi}(s_1) \geq C_{1,n}(s_1), \quad \text{gdzie } \tilde{\psi}(s_1) \stackrel{df}{=} \psi\left(\frac{\ln s_1}{\sigma_1}\right) = \psi(t).$$

Z lematu 3.3.2 wynika, że

$$\forall_{\psi \in \Psi_\varepsilon} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) \leq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt,$$

a w konsekwencji

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) \leq \inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt.$$



Twierdzenie 3.3.1. Przy poprzednich oznaczeniach $p_{i,n}^*, q_{i,n}^*, u_{i,n}, d_{i,n}, r_i, \sigma_i$, $i = 1, 2$, ustalonym $K > 0$ oraz $C_{1,n}(s_1)$ zadany jak poprzednio przez wzór (3.3.1) zachodzi następująca równość (dla dowolnego $s_0 > 0$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) = \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \left[e^{\sigma_1 t} \cdot \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) - \frac{K}{e^{r_2}} \cdot \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) \right] dt,$$

gdzie jak poprzednio:

$f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego,

$\phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Z wniosków 3.3.1 i 3.3.2 wiadomo, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{o,n}(s_0) \geq \sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt, \quad (1)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_{o,n}(s_0) \leq \inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt. \quad (2)$$

Wystarczy pokazać równości:

$$\sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \hat{c}_1(t) dt \quad (3)$$

oraz

$$\inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \psi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \hat{c}_1(t) dt, \quad (4)$$

$$\text{gdzie } \hat{c}_1(t) := e^{\sigma_1 t} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) - \frac{K}{e^{r_2}} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right).$$

Dowód zostanie podzielony na dwa etapy.

I. Dowód (3). Z lematu o przybliżaniu z dołu funkcjami schodkowymi (zob. dodatek 1) dla dowolnie ustalonego $n \in N$ istnieje niemalejący ciąg $(\tilde{\varphi}_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ funkcji nieujemnych przedziałami stałych taki, że:

$$\tilde{\varphi}_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 - \frac{1}{n} \right)^+.$$

Zatem

$$0 \leq \tilde{\varphi}_{1,1} \leq \tilde{\varphi}_{1,2} \leq \dots \leq \tilde{\varphi}_{1,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 - \frac{1}{1} \right)^+,$$

$$\tilde{\varphi}_{2,1} \leq \tilde{\varphi}_{2,2} \leq \dots \leq \tilde{\varphi}_{2,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 - \frac{1}{2} \right)^+,$$

$\vdots$

$$\tilde{\varphi}_{n,1} \leq \tilde{\varphi}_{n,2} \leq \dots \leq \tilde{\varphi}_{n,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 - \frac{1}{n} \right)^+.$$

Niech $m \in N$ będzie ustalone (czyli numer kolumny powyżej). Niech $(\varphi_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o następujących wyrazach:

$$\varphi_{1,m} = \tilde{\varphi}_{1,m},$$

$$\varphi_{2,m} = \max(\varphi_{1,m}, \tilde{\varphi}_{2,m}) = \max(\tilde{\varphi}_{1,m}, \tilde{\varphi}_{2,m}),$$

$\vdots$

$$\varphi_{n,m} = \max(\varphi_{n-1,m}, \tilde{\varphi}_{n,m}) = \max(\tilde{\varphi}_{1,m}, \tilde{\varphi}_{2,m}, \dots, \tilde{\varphi}_{n,m}), \quad n \in N.$$

Ponieważ dla ustalonego $n \in N$ wiersz $(\tilde{\varphi}_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ był niemalejącym ciągiem funkcji przedziałami stałych, stąd dla ustalonego $n \in N$, $(\varphi_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ jest również niemalejącym ciągiem funkcji przedziałami stałych zbieżnym punktowo do funkcji $(\hat{c}_1 - 1/n)^+$.

Zatem

$$\varphi_{1,1} \leq \varphi_{1,2} \leq \dots \leq \varphi_{1,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 - \frac{1}{1} \right)^+,$$

$\wedge$

$\wedge$

$\wedge$

$$\begin{aligned}
& \varphi_{2,1} \leq \varphi_{2,2} \leq \dots \leq \varphi_{2,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 - \frac{1}{2} \right)^+, \\
& \vdots \\
& \varphi_{n-1,1} \leq \varphi_{n-1,2} \leq \dots \leq \varphi_{n-1,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 - \frac{1}{n-1} \right)^+, \\
& \text{|\AA} \qquad \text{|\AA} \qquad \text{|\AA} \\
& \varphi_{n,1} \leq \varphi_{n,2} \leq \dots \leq \varphi_{n,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 - \frac{1}{n} \right)^+, \quad n \in N.
\end{aligned} \tag{5}$$

Niech μ będzie rozkładem z gęstością $\tilde{f}$, gdzie:

$$\tilde{f}(t) = f(t-a), \quad a = \frac{\ln s_0}{\sigma_1} + \frac{r_1}{\sigma_1} - \frac{1}{2} \sigma_1, \quad t \in R,$$

czyli $\mu = N(a, 1)$. Z tego, że dla dowolnego $n \in N$

$$\varphi_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 - \frac{1}{n} \right)^+ \text{ punktowo w } R$$

wynika, że dla dowolnego $n \in N$, $\varphi_{n,m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mu} \left(\hat{c}_1 - \frac{1}{n} \right)^+$ (bo μ jest miarą unormowaną na $(B, \mathfrak{R}(B))$).

Zbieżność według miary unormowanej jest metryzowalna z metryką ρ (określoną w lemacie 2 w dodatku 1).

Zatem dla n -tego wiersza zachodzi:

$$\exists_{m(n) \in N} \quad \forall_{m \geq m(n)} \quad \rho \left(\left(\hat{c}_1 - \frac{1}{n} \right)^+, \varphi_{n,m} \right) < \frac{1}{n}. \tag{6}$$

Należy wybrać teraz ciąg $(\varphi_{n,m_n})_{n=1}^{\infty}$ taki, że zachodzi (6), przy czym w $(n+1)$ -ym kroku należy wziąć $m_{n+1} = \max(m(n+1), m_n)$, gdzie $m(n+1)$ jest numerem określonym w (6) dla $(n+1)$ -ego wiersza.

Wówczas

$\varphi_{n+1,m_{n+1}} \geq \varphi_{n,m_{n+1}} \geq \varphi_{n,m_n}$ (bo $(\varphi_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ to ciąg niemalejący w kolumnie i wzdłuż wiersza w (5)).

Ponadto z (6) (bo $m_{n+1} \geq m(n+1)$) zachodzi:

$$\rho\left(\left(\hat{c}_1 - \frac{1}{n+1}\right)^+, \varphi_{n+1, m_{n+1}}\right) < \frac{1}{n+1}. \quad (7)$$

Ponadto

$$\rho\left((\hat{c}_1 - \varepsilon)^+, \hat{c}_1\right) \leq \varepsilon \text{ dla dowolnego } \varepsilon > 0. \quad (8)$$

Z (7) i (8) wynika, że

$$\rho(\hat{c}_1, \varphi_{n+1, m_{n+1}}) < \frac{2}{n+1}. \quad (9)$$

Zatem uzyskano ciąg niemalejący funkcji schodkowych nieujemnych $(\varphi_{n, m_n})_{n=1}^{\infty}$ zbieżny według miary μ do funkcji $\hat{c}_1$. Należy teraz wybrać podciąg zbieżny μ prawie wszędzie do $\hat{c}_1$ (z twierdzenia Riesz'a w dodatku 1). Wówczas $\varphi_{n_k, m_{n_k}} \in \Phi_{\varepsilon}$, gdzie $\varepsilon = 1/n_k$.

Stąd

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_{\varepsilon}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \varphi(t) dt &\geq \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \varphi_{n_k, m_{n_k}}(t) dt = \\ &= \int_R \varphi_{n_k, m_{n_k}} d\mu. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej (zob. dodatek 1) wynika, że

$$\sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_{\varepsilon}} \int_R \varphi d\mu \geq \lim_{n_k \uparrow \infty} \int_R \varphi_{n_k, m_{n_k}} d\mu = \int_R \hat{c}_1 d\mu. \quad (10)$$

$$\text{Ponadto } \forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{\varphi \in \Phi_{\varepsilon}} \quad \varphi \leq \hat{c}_1, \text{ a stąd } \int_R \varphi d\mu \leq \int_R \hat{c}_1 d\mu$$

i w konsekwencji

$$\sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_{\varepsilon}} \int_R \varphi d\mu \leq \int_R \hat{c}_1 d\mu. \quad (11)$$

Z (10) i (11) wynika (3).

II. Dowód (4). Z lematu o przybliżaniu z góry funkcjami schodkowymi (zob. dodatek 1) dla dowolnie ustalonego $n \in N$ istnieje nierosnący ciąg $(\tilde{\psi}_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ funkcji z klasy $\Psi_{\varepsilon}(\cdot)$, gdzie $\varepsilon = 1/n$, taki, że

$$\tilde{\psi}_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 + \frac{1}{n} \right).$$

Zatem

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{1,1} &\geq \tilde{\psi}_{1,2} \geq \dots \geq \tilde{\psi}_{1,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 + \frac{1}{1} \right), \\ \tilde{\psi}_{2,1} &\geq \tilde{\psi}_{2,2} \geq \dots \geq \tilde{\psi}_{2,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 + \frac{1}{2} \right), \\ &\vdots \\ \tilde{\psi}_{n,1} &\geq \tilde{\psi}_{n,2} \geq \dots \geq \tilde{\psi}_{n,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Ustalmy $m \in N$. Niech $(\psi_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem o następujących wyrazach:

$$\begin{aligned} \psi_{1,m} &= \tilde{\psi}_{1,m}, \\ \psi_{2,m} &= \min(\tilde{\psi}_{1,m}, \tilde{\psi}_{2,m}) = \min(\tilde{\psi}_{1,m}, \tilde{\psi}_{2,m}), \\ &\vdots \\ \psi_{n,m} &= \min(\psi_{n-1,m}, \tilde{\psi}_{n,m}) = \min(\tilde{\psi}_{1,m}, \tilde{\psi}_{2,m}, \dots, \tilde{\psi}_{n,m}). \end{aligned}$$

Ciąg $(\psi_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ jest nierosnącym ciągiem funkcji przedziałami stałych (dla ustalonego $n \in N$). Stąd dla ustalonego $n \in N$, $(\psi_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ jest również nierosnącym ciągiem funkcji przedziałami stałych (na przedziałach spełniających założenia lematu 3.3.2), zbieżnym punktowo do funkcji $(\hat{c}_1 + 1/n)$.

Zatem

$$\begin{aligned} \psi_{1,1} &\geq \psi_{1,2} \geq \dots \geq \psi_{1,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 + \frac{1}{1} \right), \\ \forall \quad \quad \quad \forall \quad \quad \quad \forall \\ \psi_{2,1} &\geq \psi_{2,2} \geq \dots \geq \psi_{2,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 + \frac{1}{2} \right), \\ &\vdots \end{aligned} \tag{12}$$

$$\psi_{n-1,1} \geq \psi_{n-1,2} \geq \dots \geq \psi_{n-1,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 + \frac{1}{n-1} \right),$$

$$\psi_{n,1} \geq \psi_{n,2} \geq \dots \geq \psi_{n,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 + \frac{1}{n} \right).$$

Niech jak w poprzednim kroku μ będzie rozkładem z gęstością $\tilde{f}$, czyli $\mu = N(a, 1)$. Z tego, że dla dowolnego $n \in N$

$$\psi_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 + \frac{1}{n} \right) \text{ punktowo na } R,$$

wynika, że dla dowolnego $n \in N$, $\psi_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \left(\hat{c}_1 + \frac{1}{n} \right)$.

Zbieżność względem miary unormowanej jest metryzowalna z metryką ρ (zob. lemat 2 w dodatku 1).

Zatem dla n -tego wiersza zachodzi:

$$\exists \tilde{m}(n) \in N \quad \forall m \geq \tilde{m}(n) \quad \rho\left(\hat{c}_1 + \frac{1}{n}, \psi_{n,m}\right) < \frac{1}{n}, \text{ czyli jak poprzednio } \rho(\hat{c}_1, \psi_{n,m}) < \frac{2}{n}. \quad (13)$$

Należy wybrać ciąg $(\psi_{n,m_n})_{n=1}^{\infty}$ taki, że zachodzi (13). W $(n+1)$ -ym kroku należy wziąć $m_{n+1} = \max(\tilde{m}(n+1), m_n)$.

Wówczas

$$\psi_{n+1,m_{n+1}} \leq \psi_{n,m_{n+1}} \leq \psi_{n,m_n} \text{ (ciąg nierosnący w kolumnie i wzdłuż wiersza w (12)).}$$

Ponadto z (13) (bo $m_{n+1} \geq \tilde{m}(n+1)$) zachodzi:

$$\rho(\hat{c}_1, \psi_{n+1,m_{n+1}}) < \frac{2}{n+1}. \quad (14)$$

Zatem uzyskano ciąg nierosnący funkcji schodkowych $(\psi_{n,m_n})_{n=1}^{\infty}$ zbieżny według miary μ do funkcji $\hat{c}_1$. Należy teraz wybrać podciąg zbieżny μ prawie

wszędzie do $\hat{C}_1$ (z twierdzenia Riesz'a w dodatku 1). Wówczas $\psi_{n_k, m_{n_k}} \in \Psi_\varepsilon$, gdzie $\varepsilon = 1/n_k$.

Stąd

$$\begin{aligned} \inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \psi(t) dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \psi_{n_k, m_{n_k}}(t) dt = \\ &= \int_R \psi_{n_k, m_{n_k}} d\mu. \end{aligned} \quad (15)$$

Chcąc skorzystać z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej (zob. podpunkt b w dodatku 1), należy pokazać, że

$$\forall_{n, m \in N} \psi_{n, m} \leq \eta, \text{ gdzie } \int_R \eta d\mu < \infty. \quad (16)$$

Należy wykazać, że można znaleźć ciąg $(\psi_{n, m})_{n, m=1}^\infty$ spełniający (12) oraz (16).

Łatwo zauważyć, że $0 < C_1(s_1) \leq s_1$, dla $s_1 > 0$, oraz przyjmując $C_1(0) = 0$, można otrzymać funkcję ciągłą na $[0, \infty)$.

Niech

$$\bar{\psi}_{1, m}(s) = 1 + \max_{s_1 \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]} C_1(s_1), \text{ dla } s \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right], k \in N \cup \{0\}.$$

Wówczas dla $s \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]$:

$$\bar{\psi}_{1, m}(s) \stackrel{df}{=} \max_{s_1 \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]} C_1(s_1) + 1 \leq \max_{s_1 \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]} s_1 + 1 \leq \frac{k+1}{2^m} + 1 \leq \frac{k}{2^m} + 2 \leq s + 2.$$

Stąd

$$\forall_{s > 0} \bar{\psi}_{1, m}(s) \leq s + 2.$$

Ponadto ciąg $(\bar{\psi}_{1, m})_{m=1}^\infty$ jest nierosnący (max jest brane po mniejszych przedziałach jak w dowodzie lematu o przybliżaniu z góry funkcjami schodkowymi (zob. dodatek 1). W konsekwencji

$$\forall_{t \in R} \psi_{1, m}(t) \stackrel{df}{=} \bar{\psi}_{1, m}(e^{\sigma_1 t}) \leq e^{\sigma_1 t} + 2 \stackrel{df}{=} \eta(t).$$

Analogicznie należy zdefiniować dla $n \in N$, $s \in (0, \infty)$:

$$\bar{\psi}_{n,m}(s) = \frac{1}{n} + (\bar{\psi}_{1,m}(s) - 1).$$

Wówczas dla ustalonego $n \in N$ ciąg $(\bar{\psi}_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ jest nierosnący oraz

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\psi}_{n,m}(s) = C_1(s) + \frac{1}{n}, \quad s > 0. \quad \text{Ponadto dla ustalonego } m \in N \text{ ciąg } (\bar{\psi}_{n,m})_{n=1}^{\infty} \text{ jest też nierosnący.}$$

Niech

$$\forall_{n,m \in N} \quad \psi_{n,m}(t) = \bar{\psi}_{n,m}(e^{\sigma_1 t}), \quad t \in R.$$

Zatem ciąg $(\psi_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ spełnia (12).

Ponieważ ciąg $(\psi_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem nierosnącym, więc dla dowolnego $t \in R$

$$\forall_{n \in N} \quad \forall_{m \in N} \quad \psi_{n,m}(t) \leq \psi_{1,m}(t) \leq \eta(t).$$

Korzystając z równości $a = \frac{\ln s_0}{\sigma_1} + \frac{r_1}{\sigma_1} - \frac{1}{2} \sigma_1$, można otrzymać:

$$\begin{aligned} \int_R \eta d\mu &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2 + e^{\sigma_1 t}) \cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2}} dt = 2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma_1 t} \cdot e^{-\frac{(t-a)^2}{2}} dt = \\ &= 2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t-a-\sigma_1)^2}{2}} e^{a\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2} dt = 2 + \exp\left\{a\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right\} = 2 + s_0 \cdot e^{r_1} < \infty. \end{aligned}$$

Zostało więc wykazane, że dla dowolnego $t \in R$,

$$\forall_{n,m \in N} \quad \psi_{n,m}(t) \leq \eta(t), \quad \text{gdzie } \int_R \eta d\mu < \infty. \quad (16)$$

Zatem z (15) i (16) oraz twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej (zob. podpunkt b w dodatku 1) wynika, że

$$\inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_{\varepsilon}} \int_R \psi d\mu \leq \lim_{n_k \uparrow \infty} \int_R \psi_{n_k, m_{n_k}} d\mu = \int_R \hat{c}_1 d\mu. \quad (17)$$

Ponadto

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \forall_{\psi \in \Psi_{\varepsilon}} \quad \psi \geq \hat{c}_1.$$

Stąd

$$\int_R \psi \, d\mu \geq \int_R \hat{c}_1 \, d\mu$$

i w konsekwencji

$$\inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \int_R \psi \, d\mu \geq \int_R \hat{c}_1 \, d\mu. \quad (18)$$

Z (17) i (18) można otrzymać (4). □

Zostanie omówiony teraz główny wynik rozdziału 3. Poniższe twierdzenie podaje formułę na graniczną wycenę opcji przez replikację będącą uogólnieniem formuły Blacka-Scholesa.

Twierdzenie 3.3.2. Przy poprzednich oznaczeniach $p_{i,n}^*, q_{i,n}^*, u_{i,n}, d_{i,n}, r_i, \sigma_i$, $i = 1, 2$, i założeniach, ustalonym $K > 0$ oraz

$$C_{1,n}(s_1) = \frac{1}{e^{r_2}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot (s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l} - K)^+, \quad s_1 > 0,$$

zachodzi zbieżność:

dla dowolnego $s_0 > 0$ graniczna cena początkowa opcji ma postać

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) = \\ &= s_0 \cdot \phi(A \cdot \ln s_0 + B) - \frac{K}{e^{r_1} \cdot e^{r_2}} \cdot \phi(A \cdot \ln s_0 + \tilde{B}), \end{aligned}$$

gdzie:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}},$$

$$B = A \cdot \left(-\ln K + r_1 + r_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right),$$

$$\tilde{B} = A \cdot \left(-\ln K + r_1 + r_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right),$$

$\phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

W dowodzie powyższego twierdzenia 3.3.2 należy skorzystać z następującego znanego lematu:

Lemat 3.3.3. Niech X i Y będą zmiennymi losowymi niezależnymi o ciągłych rozkładach, f_X – gęstość zmiennej losowej X , $\phi_Y(a) := \int_{-\infty}^a f_Y(u)du$ – dystrybuanta zmiennej losowej Y . Wówczas $P(X + Y < a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) \cdot \phi_Y(a - s)ds$.

Dowód twierdzenia 3.3.2. Z twierdzenia 3.3.1 wynika, że

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} C_{1,n}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) = \\ &= \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \left[e^{\sigma_1 t} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) - \frac{K}{e^{r_2}} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) \right] dt = \\ &= \frac{1}{e^{r_1} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right)^2\right) \cdot \\ &\cdot \left[e^{\sigma_1 t} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) - \frac{K}{e^{r_2}} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) \right] dt = \\ &= \frac{1}{e^{r_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_0 \cdot e^{r_1} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right)^2\right) \cdot \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) dt - \right. \\ &\left. - \frac{K}{e^{r_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right)^2\right) \cdot \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}\right) dt \right]. \end{aligned}$$

Podstawiając $w = \frac{\sigma_1 t}{\sigma_2}$, można otrzymać:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) = \frac{1}{e^{r_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \left[s_0 e^{r_1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_2 w}{\sigma_1} - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right)^2\right) \cdot \right.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\phi \left(w + \frac{-\ln K + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) dw - \frac{K}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2 w}{\sigma_1} - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right)^2 \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left. \left(\phi \left(w + \frac{-\ln K + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) dw \right) \right] = \\
& = s_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{w - \left(\ln s_0 + r_1 + \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \frac{1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \right)^2 \right) \left(\left(1 - \phi \left(-w + \frac{\ln K - r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) \right) dw + \\
& - \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{w - \left(\ln s_0 + r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) \frac{1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \right)^2 \right) \left(\left(1 - \phi \left(-w + \frac{\ln K - r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) \right) dw.
\end{aligned}$$

Można zauważyć, że

$$f_X(w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{w - \left(\ln s_0 + r_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \frac{1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \right)^2 \right)$$

jest gęstością zmiennej losowej X o rozkładzie

$$N \left(\left(\ln s_0 + r_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \frac{1}{\sigma_2}, \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right).$$

Jeżeli Y jest zmienną losową o rozkładzie $N(0, 1)$, niezależną od X , to (lemat 3.3.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{w - \left(\ln s_0 + r_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \frac{1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \right)^2 \right) \cdot \left(\phi \left(-w + \frac{\ln K - r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) \right) dw =$$

$$= P \left(X + Y < \frac{\ln K - r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right).$$

Oczywiście $X + Y$ jest zmienną losową o rozkładzie

$$N \left(\left(\ln s_0 + r_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \frac{1}{\sigma_2}, 1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right), \text{ a więc zmienna losowa}$$

$$\frac{X + Y - \left(\ln s_0 + r_1 + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \frac{1}{\sigma_2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2}}$$

ma rozkład normalny $N(0, 1)$.

Podobnie

$$f_{\tilde{X}}(w) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{w - \left(\ln s_0 + r_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \frac{1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \right)^2 \right)$$

jest gęstością zmiennej losowej $\tilde{X}$ o rozkładzie

$$N \left(\left(\ln s_0 + r_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \frac{1}{\sigma_2}, \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 \right).$$

Jeżeli znów zmienna losowa Y ma rozkład normalny $N(0, 1)$ i jest niezależna od zmiennej losowej $\tilde{X}$, to (lemat 3.3.3)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{w - \left(\ln s_0 + r_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \frac{1}{\sigma_2}}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \right)^2 \right) \cdot \phi \left(-w + \frac{\ln K - r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) dw = \\ & = P \left(\tilde{X} + Y < \frac{\ln K - r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right), \end{aligned}$$

zmienna losowa $\tilde{X} + Y$ ma rozkład $N\left(\left(\ln s_0 + r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\frac{1}{\sigma_2}, 1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2\right)$,

zatem zmienna losowa

$$\frac{\tilde{X} + Y - \left(\ln s_0 + r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)\frac{1}{\sigma_2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2}}$$

ma rozkład normalny $N(0, 1)$.

Stąd

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}(s_0) &= s_0 \left(1 - P \left(X + Y < \frac{\ln K - r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) - \\ &- \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2}} \left(1 - P \left(\tilde{X} + Y < \frac{\ln K - r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) = s_0 \left(1 - \phi \left(\frac{\ln K - r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} - \ln s_0 - r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \right) - \\ &- \frac{K}{e^{r_1 + r_2}} \left(1 - \phi \left(\frac{\ln K - r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} - \ln s_0 - r_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right) \right) = s_0 \phi(A \ln s_0 + B) - \frac{K}{e^{r_1 + r_2}} \phi(A \ln s_0 + \tilde{B}), \end{aligned}$$

zgodnie z tezą twierdzenia 3.3.2. □

Uwaga 3.3.6. Wstawiając w tezę powyższego twierdzenia 3.3.2 $r_1 = r_2 = r$ oraz $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, można otrzymać tezę twierdzenia 1.4.2 dla $\tau = 2$, tj. klasyczny wzór Blacka-Scholesa.

Rozdział 4

Model CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla trzech jednostek czasu

W tym rozdziale omawiany będzie okres czasu T obejmujący trzy długie jednostki czasu (np. trzy miesiące), czyli $\tau = 3$. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach, w każdej długiej jednostce czasu wystąpi n chwil zmiany portfela. Zatem ewentualna realizacja opcji nastąpi w momencie $T = 3n$. W kolejnym rozdziale rozważonych zostanie m długich jednostek czasu ($\tau = m$). Wówczas $T = m \cdot n$.

Analogicznie jak w poprzednim rozdziale 3 w rozdziałach 4–5 będą zastosowane następujące oznaczenia:

s_{i-1} – cena akcji na początku i -tego miesiąca, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ (s_i jest więc pewną zmienną losową), s_0 jest stałą, jak poprzednio,

r_i – stopa procentowa wolna od ryzyka za i -ty miesiąc,

σ_i – współczynnik zmienności cen akcji w i -tym miesiącu,

$\hat{r}_{i,n} = e^{r_i \cdot \frac{1}{n}}$ – oprocentowanie rachunku bankowego w i -tym miesiącu między chwilami handlowania,

$u_{i,n}$ – możliwa górna zmiana ceny akcji w i -tym miesiącu między chwilami handlowania,

$d_{i,n}$ – możliwa dolna zmiana ceny akcji w i -tym miesiącu między chwilami

handlowania, $u_{i,n} = e^{\sigma_i \frac{1}{\sqrt{n}}}$, $d_{i,n} = e^{-\sigma_i \frac{1}{\sqrt{n}}}$,

$p_{i,n}^*$ – prawdopodobieństwo martyngałowe wzrostu ceny akcji między chwilami handlowania w i -tym miesiącu,

$$p_{i,n}^* = \frac{\hat{r}_{i,n} - d_{i,n}}{u_{i,n} - d_{i,n}}, \quad q_{i,n}^* = 1 - p_{i,n}^* = \frac{u_{i,n} - \hat{r}_{i,n}}{u_{i,n} - d_{i,n}},$$

gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, m$.

Ponadto zostają wprowadzone nowe następujące oznaczenia:

$$C_{i-1,n}^{(i)}(s_{i-1}) := \frac{1}{e^{r_i}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{i,n}^{*l} \cdot q_{i,n}^{*n-l} \cdot (s_{i-1} \cdot u_{i,n}^l \cdot d_{i,n}^{n-l} - K)^+,$$

$$C_{j,n}^{(i+1)}(s_j) := \frac{1}{e^{r_{j+1}}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{j+1,n}^{*l} \cdot q_{j+1,n}^{*n-l} \cdot C_{j+1,n}^{(i+1)}(s_j \cdot u_{j+1,n}^l \cdot d_{j+1,n}^{n-l}), \quad 0 \leq j \leq i-1,$$

$$C_0^{(i+1)}(s_0) := s_0 \cdot \phi(A_0^{(i+1)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(i+1)}) - \frac{K}{e^{r_1} \cdot e^{r_2} \cdot \dots \cdot e^{r_{i+1}}} \cdot \phi(A_0^{(i+1)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(i+1)}),$$

$$C_j^{(i+1)}(s_j) := s_j \cdot \phi(A_j^{(i+1)} \cdot \ln s_j + B_j^{(i+1)}) - \frac{K}{e^{r_{j+1}} \cdot e^{r_{j+2}} \cdot \dots \cdot e^{r_{i+1}}} \cdot \phi(A_j^{(i+1)} \cdot \ln s_j + \tilde{B}_j^{(i+1)}), \quad 0 \leq j \leq i,$$

$$A_0^{(i+1)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2}},$$

$$B_0^{(i+1)} = A_0^{(i+1)} \cdot \left(-\ln K + r_1 + r_2 + \dots + r_{i+1} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2) \right),$$

$$\tilde{B}_0^{(i+1)} = A_0^{(i+1)} \cdot \left(-\ln K + r_1 + r_2 + \dots + r_{i+1} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2) \right),$$

$$A_j^{(i+1)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{j+1}^2 + \sigma_{j+2}^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2}}, \quad 0 \leq j \leq i,$$

$$B_j^{(i+1)} = A_j^{(i+1)} \cdot \left(-\ln K + r_{j+1} + r_{j+2} + \dots + r_{i+1} + \frac{1}{2}(\sigma_{j+1}^2 + \sigma_{j+2}^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2) \right), \quad 0 \leq j \leq i,$$

$$\tilde{B}_j^{(i+1)} = A_j^{(i+1)} \cdot \left(-\ln K + r_{j+1} + r_{j+2} + \dots + r_{i+1} - \frac{1}{2}(\sigma_{j+1}^2 + \sigma_{j+2}^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2) \right), \quad 0 \leq j \leq i,$$

gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, m, j = 0, 1, 2, 3, \dots, m$.

W powyższych formułach na wycenę opcji indeks górny oznaczać będzie liczbę rozważanych długich jednostek czasu, natomiast indeks dolny będzie określał chwilę wyceny opcji oraz (w przypadku dwóch pierwszych formuł na wycenę opcji w uogólnionym modelu CRR) liczbę chwil handlowania w każdej poszczególniej długiej jednostce czasu (przyjęto, iż w każdej jednostce czasu występuje n chwil zmiany ceny akcji). Na przykład wycena opcji $C_{j,n}^{(i+1)}(s_j)$ (dla $i+1$ dużych

jednostek czasu liczona na chwilę j) dokonywana jest, gdy do końca kontraktu pozostaje $i + 1 - j$ dużych jednostek czasu, przy czym $0 \leq j \leq i$.

Zatem ulegną zmianie następujące oznaczenia z rozdziału 3 (w szczególności w twierdzeniu 3.3.2):

$$C_{1,n}^{(2)}(s_1) := C_{1,n}(s_1) = \frac{1}{e^{r_2}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot (s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l} - K)^+,$$

$$C_{0,n}^{(2)}(s_0) := C_{0,n}(s_0) = \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(2)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}).$$

Ponadto

$$C_0^{(2)}(s_0) := s_0 \cdot \phi(A_0^{(2)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(2)}) - \frac{K}{e^{r_1} \cdot e^{r_2}} \cdot \phi(A_0^{(2)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(2)}),$$

gdzie:

$$A_0^{(2)} = A = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}},$$

$$B_0^{(2)} = B = A \cdot \left(-\ln K + r_1 + r_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right),$$

$$\tilde{B}_0^{(2)} = \tilde{B} = A \cdot \left(-\ln K + r_1 + r_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right).$$

4.1. Jednostajna zbieżność formuły CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla dwóch jednostek czasu

Lemat 4.1.1. Niech dla dodatniej stałej α

$$\forall_{u \in R} v_\alpha(u) \stackrel{df}{=} e^u \phi(-\alpha u), \text{ gdzie } \phi = F_{N(0,1)}.$$

Wówczas funkcje v_α i pochodna v'_α są ograniczone na R oraz v_α jest lipszycowska na R .

Dowód. Łatwo zauważyć, że:

- (1) $\forall_{u \in R} v_\alpha(u) > 0$,
- (2) $\lim_{u \rightarrow -\infty} v_\alpha(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} (e^u \phi(-\alpha u)) = 0$,
- (3) $\lim_{u \rightarrow \infty} v_\alpha(u) = 0$.

Istotnie. (3) zachodzi, zob. dowód lematu 3.1.1, gdyż

$$\forall_{u > 0} 0 < e^u \phi(-\alpha u) \leq e^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\alpha^2 u^2} \frac{1}{\alpha u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \alpha u} e^{-u(0,5\alpha^2 u - 1)} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0.$$

Z ciągłości funkcji v_α na R oraz (1)–(3) wynika, że v_α jest funkcją ograniczoną:

$$\forall_{u \in R} 0 < v_\alpha(u) \leq M = \max_{x \in R} v_\alpha(x) < \infty. \quad (4)$$

Następnie dla dowolnego $u \in R$ zachodzi:

$$v'_\alpha(u) = (e^u \phi(-\alpha u))' = e^u \phi(-\alpha u) - \alpha e^u \phi'(-\alpha u) = v_\alpha(u) - \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\alpha^2 u^2 + u} \quad (5)$$

oraz

$$e^{-0,5\alpha^2 u^2 + u} = e^{-\alpha^2 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{2u/\alpha^2}{2} \right)} = e^{-\alpha^2 \frac{(u - 1/\alpha^2)^2}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2\alpha^2}} \leq e^{\frac{1}{2\alpha^2}}.$$

Stąd oraz z (4) i (5):

$$\forall_{u \in R} |v'_\alpha(u)| \leq M + \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2\alpha^2}} \stackrel{df}{=} M_1 < \infty. \quad (6)$$

Zatem v'_α jest ograniczona na R . Z (6) oraz twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że funkcja v_α jest lipszycowska na R :

$$\forall_{u, x \in R} |v_\alpha(u) - v_\alpha(x)| \leq M_1 |u - x|. \quad (7)$$



Lemat 4.1.2. Niech $Y \sim N(r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 - \sigma_2 B_2^{(1)}, \sigma_1^2)$, gdzie $B_2^{(1)} \in R$. Wówczas

$$\text{zachodzi: } \lim_{s_0 \rightarrow \infty} E \left(\phi \left(\frac{1}{\sigma_2} (-\ln s_0 - Y) \right) \right) = 0.$$

Dowód. Zachodzi:

$$E \left(\phi \left(\frac{1}{\sigma_2} (-\ln s_0 - Y) \right) \right) = \int_R \phi \left(\frac{1}{\sigma_2} (-\ln s_0 - y) \right) d\mu_Y(y).$$

Dla dowolnie ustalonego $y \in R$: $-\ln s_0 - y \xrightarrow{s_0 \rightarrow \infty} -\infty$. Stąd

$$\forall_{y \in R} \quad h_n(y) \stackrel{df}{=} \phi\left(\frac{1}{\sigma_2}(-\ln s_0^{(n)} - y)\right) \xrightarrow{s_0^{(n)} \rightarrow \infty} 0.$$

Ponadto $0 \leq h_n(y) \leq 1$, $\int_R 1 d\mu_Y(y) = 1$. Zatem z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej:

$$\int_R h_n(y) d\mu_Y(y) = \int_R \phi\left(\frac{1}{\sigma_2}(-\ln s_0^{(n)} - y)\right) d\mu_Y(y) \xrightarrow{s_0^{(n)} \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Lemat 4.1.3. Niech $W \sim N(r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2, \sigma_1^2)$ oraz $B_1^{(1)} \in R$. Przy oznaczeniach lematu 4.1.1 zachodzi: $E[v_\alpha(\ln s_0 + W + B_1^{(1)})] \xrightarrow{s_0 \rightarrow \infty} 0$.

Dowód. Wprowadzono następujące oznaczenie $Z = W + B_1^{(1)}$. Wówczas

$$E\left[e^{\ln s_0 + W + B_1^{(1)}} \cdot \phi(-\alpha(\ln s_0 + W + B_1^{(1)}))\right] = \int_R e^{\ln s_0 + z} \cdot \phi(-\alpha(\ln s_0 + z)) d\mu_Z(z).$$

Dla dowolnie ustalonego $z \in R$: $\ln s_0 + z \xrightarrow{s_0 \rightarrow \infty} \infty$. Niech, gdy $n \rightarrow \infty$,

$$s_0^{(n)} \rightarrow \infty$$

$$\forall_{\alpha > 0} \quad \forall_{z \in R} \quad g_n(z) \stackrel{df}{=} s_0^{(n)} e^z \phi(-\alpha(\ln s_0^{(n)} + z)).$$

Z dowodu lematu 4.1.1, (3), wiadomo, że dla dowolnie ustalonego $z \in R$:

$$g_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1)$$

Zatem

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad 0 \leq g_n(z) \leq M = \max_{u \in R} v_\alpha(u) < \infty \quad \text{oraz} \quad \int_R M d\mu_Z(z) = M. \quad \text{Z twierdzenia}$$

Lebesgue'a o zmajoryzowanej zbieżności i z (1):

$$\int_R g_n(z) d\mu_Z(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0.$$

Stąd

$$E[s_0 e^Z \phi(-\alpha Z)] = E[v_\alpha(\ln s_0 + W + B_1^{(1)})] \xrightarrow{s_0 \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Poniższe twierdzenie jest odpowiednikiem twierdzenia 3.1.2, opisuje jednostajną zbieżność w twierdzeniu 3.3.2:

Twierdzenie 4.1.1. Przy założeniach i oznaczeniach twierdzenia 3.3.2 zachodzi:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad \forall_{s_0 \in (0, \infty)} \quad \left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - \left(s_0 \phi(A \cdot \ln s_0 + B) - \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2}} \phi(A \cdot \ln s_0 + \tilde{B}) \right) \right| \leq \varepsilon,$$

gdzie:

$$A = A_0^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}},$$

$$B = B_0^{(2)} = A \cdot \left(-\ln K + r_1 + r_2 + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right),$$

$$\tilde{B} = \tilde{B}_0^{(2)} = A \cdot \left(-\ln K + r_1 + r_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right).$$

Dowód. Zostaną rozważone dwa przypadki.

I. $s_0 > \tilde{s}$, gdzie $\tilde{s} \in (0, \infty)$ będzie odpowiednio dobraną liczbą.

Dla dowolnego $s_0 \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - C_0^{(2)}(s_0) \right| &= \left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - s_0 \cdot \phi(A \cdot \ln s_0 + B) + \frac{K}{e^{r_1} \cdot e^{r_2}} \cdot \phi(A \cdot \ln s_0 + \tilde{B}) \right| = \\ &= \left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - s_0 + s_0 \cdot \phi(-A \cdot \ln s_0 - B) + \frac{K}{e^{r_1} \cdot e^{r_2}} - \frac{K}{e^{r_1} \cdot e^{r_2}} \cdot \phi(-A \cdot \ln s_0 - \tilde{B}) \right| \leq \\ &\leq \left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - s_0 + \frac{K}{e^{r_1 + r_2}} \right| + \left| s_0 \cdot \phi(-A \cdot \ln s_0 - B) \right| + \left| \frac{K}{e^{r_1 + r_2}} \cdot \phi(-A \cdot \ln s_0 - \tilde{B}) \right| \stackrel{df}{=} \\ &= J_1(n, s_0) + J_2(s_0) + J_3(s_0). \end{aligned} \quad (1)$$

W dowodzie twierdzenia 3.1.2 (gdzie $r = r_1 + r_2$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$) wykazane zostało, że

$$\lim_{s_0 \rightarrow \infty} J_2(s_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{s_0 \rightarrow \infty} J_3(s_0) = 0.$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustaloną liczbą. Zatem istnieje $\tilde{s} \in (0, \infty)$ takie, że:

$$\forall_{s_0 \geq \tilde{s}} \quad J_2(s_0) + J_3(s_0) \leq 0,25 \cdot \varepsilon. \quad (2)$$

Rozważać będziemy $J_1(n, s_0)$. Wiadomo, że

$$C_{0,n}^{(2)}(s_0) := C_{0,n}(s_0) = \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(2)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}). \quad (3)$$

Z twierdzenia 3.1.2 wynika, że

$$\exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_1} \quad \forall_{s_0 \in (0, \infty)} \quad \forall_{l=0,1,\dots,n} \quad \left| C_{1,n}^{(2)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) - C_1^{(2)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \right| \leq \frac{1}{4} \varepsilon \cdot e^{r_1}, \quad (4)$$

gdzie

$$C_1^{(2)}(s_1) = s_1 \cdot \phi \left(\frac{\ln \frac{s_1}{K} + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) - \frac{K}{e^{r_2}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_1}{K} + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right). \quad (5)$$

Z (3) i (4) dla dowolnego $n \geq n_1$ oraz $s_0 \in (0, \infty)$ można uzyskać oszacowanie:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{4} &\geq \left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} C_1^{(2)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \right| = \\ &= \left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - \frac{1}{e^{r_1}} E \left(C_1^{(2)}(s_0 \cdot Y_n^{(1)}) \right) \right|, \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $Y_n^{(1)} = \frac{S(s_0, 1, n)}{s_0}$ ($S(s_0, 1, n) := S(1, n)$ – oznaczenie z podrozdziału

3.2) opisuje względny przyrost ceny akcji po pierwszej długiej jednostce czasu oraz n chwilach handlowania i jest zmienną losową o rozkładzie:

$$P(Y_n^{(1)} = u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) = \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l},$$

gdzie $l = 0, 1, \dots, n$.

Z wniosku 3.2.1 wiadomo, że

$$Y_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} e^{r_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2 + \sigma_1 \cdot Z} := e^W, \quad (7)$$

gdzie $Z \sim N(0, 1)$, $W \sim N(r_1 - \frac{1}{2} \sigma_1^2, \sigma_1^2)$,

oraz

$$E Y_n^{(1)} = e^{r_1}. \quad (8)$$

Z (5) i (8) wynika, że

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{e^{r_1}} E(C_1^{(2)}(s_0 \cdot Y_n^{(1)})) - s_0 + \frac{K}{e^{r_1+r_2}} \right| = \\
& = \left| \frac{1}{e^{r_1}} E \left(s_0 \cdot Y_n^{(1)} \cdot \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) - s_0 - \frac{1}{e^{r_1}} E \left(\frac{K}{e^{r_2}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) + \frac{K}{e^{r_1+r_2}} \right| \leq \\
& \leq \left| \frac{1}{e^{r_1}} E \left(s_0 \cdot Y_n^{(1)} \cdot \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) - \frac{1}{e^{r_1}} E(s_0 Y_n^{(1)}) + s_0 \frac{E(Y_n^{(1)})}{e^{r_1}} - s_0 \right| + \\
& + \frac{K}{e^{r_1+r_2}} E \left(1 - \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} + r_2 - \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) \leq \\
& \leq \frac{1}{e^{r_1}} E \left(s_0 \cdot Y_n^{(1)} \cdot \phi \left(-\frac{1}{\sigma_2} \ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} - \frac{1}{\sigma_2} \left(r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \right) \right) + \frac{K}{e^{r_1+r_2}} E \left(\phi \left(\frac{-\ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} - r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2} \right) \right) = \\
& \stackrel{df}{=} A_1(n, s_0) + A_2(n, s_0). \tag{9}
\end{aligned}$$

Ponadto dla dowolnego $n \in N$ oraz $s_0 \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$\begin{aligned}
A_2(n, s_0) & \leq \frac{K}{e^{r_1+r_2}} \left\{ E \left(\phi \left(\frac{1}{\sigma_2} (-\ln s_0 - \ln Y_n^{(1)}) + B_2^{(1)} \right) \right) - E \left(\phi \left(\frac{1}{\sigma_2} (-\ln s_0 - W) + B_2^{(1)} \right) \right) \right\} + \\
& + E \left(\phi \left(\frac{1}{\sigma_2} (-\ln s_0) - \frac{W}{\sigma_2} + B_2^{(1)} \right) \right),
\end{aligned}$$

gdzie

$$B_2^{(1)} = \frac{\ln K - r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma_2}.$$

Z twierdzenia Skorochoda (zob. dodatek 1) istnieją przestrzeń probabilistyczna

$(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ i ciąg zmiennych losowych $(\ln \tilde{Y}_n^{(1)})_{n=1}^\infty$ oraz zmienna losowa $\tilde{W}$ takie,

że $\forall_{n \in N} \ln \tilde{Y}_n^{(1)} \stackrel{d}{=} \ln Y_n^{(1)}$, $\tilde{W} \stackrel{d}{=} W$, oraz $\ln \tilde{Y}_n^{(1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.n.} \tilde{W}$. Stąd

$$A_2(n, s_0) \leq \frac{K}{e^{r_1+r_2}} \left\{ \left| \tilde{E} \left(\phi \left(\frac{-\ln s_0 - \ln \tilde{Y}_n^{(1)}}{\sigma_2} + B_2^{(1)} \right) \right) - \tilde{E} \left(\phi \left(\frac{-\ln s_0 - \tilde{W}}{\sigma_2} + B_2^{(1)} \right) \right) \right| + \right. \\ \left. + E \left(\phi \left(\frac{1}{\sigma_2} (-\ln s_0) - \frac{W}{\sigma_2} + B_2^{(1)} \right) \right) \right\}. \quad (10)$$

Ponadto wiadomo, że

$$\forall_{u \in R} \quad 0 \leq \phi'(u) = f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5u^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Zatem z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że funkcja ϕ jest funkcją lipszycowską na R :

$$\forall_{u, x \in R} \quad |\phi(u) - \phi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |u - x|.$$

Stąd

$$A_2(n, s_0) \leq \frac{K}{e^{r_1+r_2}} \tilde{E} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} |\ln \tilde{Y}_n^{(1)} - \tilde{W}| \right) + \frac{K}{e^{r_1+r_2}} E \left(\phi \left(\frac{-\ln s_0}{\sigma_2} - \frac{W}{\sigma_2} + B_2^{(1)} \right) \right) = \\ \stackrel{df}{=} A_2^{(1)}(n) + A_2^{(2)}(s_0). \quad (11)$$

Należy pokazać, że zachodzi zbieżność: $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{E}(|\ln \tilde{Y}_n^{(1)} - \tilde{W}|) = 0$. Istotnie.

Z twierdzenia Skorochoda wiadomo, że

$$\tilde{\xi}_n := \ln \tilde{Y}_n^{(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{W}. \quad (12)$$

Ponadto, stosując oznaczenia z podrozdziału 3.2 $\left(V_{i,j}^{(n)} = \frac{\ln U_{i,j}^{(n)}}{\sigma_i / \sqrt{n}} \right)$, można

otrzymać:

$$\tilde{E}[\tilde{\xi}_n^2] = \tilde{E}[(\ln \tilde{Y}_n^{(1)})^2] = \tilde{E} \left[\left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n V_{i,j}^{(n)} \right)^2 \right] = \tilde{D}^2 \left[\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n V_{i,j}^{(n)} \right] + \left(\tilde{E} \left[\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n V_{i,j}^{(n)} \right] \right)^2 = \\ = \frac{\sigma_1^2}{n} \cdot n \cdot 4 \cdot p_{1,n}^* \cdot q_{1,n}^* + \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \cdot n \cdot (2p_{1,n}^* - 1) \right)^2 = 4\sigma_1^2 \cdot p_{1,n}^* \cdot q_{1,n}^* + \sigma_1^2 n (2p_{1,n}^* - 1)^2.$$

Z lematu 2.2.1 oraz lematu 2.2.3 wynika, że

$$\tilde{E}[\tilde{\xi}_n^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma_1^2 + \sigma_1^2 \left(\frac{r_1}{\sigma_1} - \frac{1}{2} \sigma_1 \right)^2.$$

Zatem ciąg $\left(\tilde{E}\left[\tilde{\xi}_n^2\right]\right)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zbieżnym, a więc również ograniczonym. Stąd i z lematu 3 (zob. dodatek 1) $\left(\tilde{\xi}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ są jednostajnie całkowalne. Z lematu 4 (zob. dodatek 1) oraz (12) wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{E}\left(\left|\ln \tilde{Y}_n^{(1)} - \tilde{W}\right|\right) = 0$. Stąd

$$\exists_{n_2 \in N} \quad \forall_{n \geq n_2} \quad A_2^{(1)}(n) \leq \frac{1}{8} \varepsilon. \quad (13)$$

Z lematu 4.1.2 zachodzi:

$$\exists_{\bar{s} > 0} \quad \forall_{s_0 \in (\bar{s}, \infty)} \quad A_2^{(2)}(s_0) \leq \frac{1}{8} \varepsilon. \quad (14)$$

Z (11)–(14) można otrzymać:

$$A_2(n, s_0) \leq \frac{1}{4} \varepsilon.$$

Ponadto

$$\begin{aligned} A_1(n, s_0) &= \frac{1}{e^{r_1}} E \left(s_0 \cdot Y_n^{(1)} \cdot \phi \left(-\frac{1}{\sigma_2} \ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} - \frac{1}{\sigma_2} \left(r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{e^{r_1}} E \left(s_0 \cdot Y_n^{(1)} \cdot \phi \left(-\left(\frac{1}{\sigma_2} \ln s_0 + \frac{1}{\sigma_2} \ln Y_n^{(1)} \right) - \frac{1}{\sigma_2} \left(-\ln K + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Wprowadzono następujące oznaczenia:

$$B_1^{(1)} \stackrel{df}{=} -\ln K + r_2 + \frac{\sigma_2^2}{2},$$

$$u \stackrel{df}{=} \ln s_0 + \ln Y_n^{(1)} + B_1^{(1)},$$

$$\forall_{u \in R} \quad v(u) \stackrel{df}{=} v_{\alpha}(u) \stackrel{df}{=} e^u \phi(-\alpha u), \text{ gdzie } \phi = F_{N(0,1)}, \quad \alpha = 1/\sigma_2.$$

Zatem z twierdzenia Skorochoda

$$\begin{aligned} A_1(n, s_0) &= \frac{1}{e^{r_1} e^{B_1^{(1)}}} E \left(s_0 Y_n^{(1)} e^{B_1^{(1)}} \phi \left(\frac{\ln s_0 + \ln Y_n^{(1)} + B_1^{(1)}}{-\sigma_2} \right) \right) = \frac{E \left(v \left(\ln s_0 + \ln Y_n^{(1)} + B_1^{(1)} \right) \right)}{e^{r_1} e^{B_1^{(1)}}} = \\ &= \frac{1}{e^{r_1} e^{B_1^{(1)}}} E \left(v \left(\ln s_0 + \ln Y_n^{(1)} + B_1^{(1)} \right) - v \left(\ln s_0 + W + B_1^{(1)} \right) + v \left(\ln s_0 + W + B_1^{(1)} \right) \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{e^{r_1} e^{B_1^{(1)}}} \tilde{E} \left(v \left(\ln s_0 + \ln \tilde{Y}_n^{(1)} + B_1^{(1)} \right) - v \left(\ln s_0 + \tilde{W} + B_1^{(1)} \right) \right) + \frac{E \left(v \left(\ln s_0 + W + B_1^{(1)} \right) \right)}{e^{r_1} e^{B_1^{(1)}}}. \end{aligned}$$

Z lematu 4.1.1 (zob. wzór (7) w dowodzie lematu) wynika, że

$$A_1(n, s_0) \leq \frac{M_1 \tilde{E} \left(\left| \ln \tilde{Y}_n^{(1)} - \tilde{W} \right| \right)}{e^{r_1} e^{B_1^{(1)}}} + \frac{E \left(\nu \left(\ln s_0 + W + B_1^{(1)} \right) \right)^{df}}{e^{r_1} e^{B_1^{(1)}}} = A_1^{(1)}(n) + A_1^{(2)}(s_0). \quad (15)$$

Zatem analogicznie jak dla $A_2^{(1)}(n)$, $A_2^{(2)}(s_0)$ ((13) i (14)) można udowodnić, że

$$\exists_{n_3 \in N} \quad \forall_{n \geq n_3} \quad A_1^{(1)}(n) \leq \frac{1}{8} \varepsilon. \quad (16)$$

Z lematu 4.1.3 zachodzi:

$$\exists_{\tilde{s} > 0} \quad \forall_{s_0 \in (\tilde{s}, \infty)} \quad A_1^{(2)}(s_0) \leq \frac{1}{8} \varepsilon. \quad (17)$$

Ze wzorów (9)–(17) wynika, że

$$\forall_{n \geq \max\{n_2, n_3\}} \quad \forall_{s_0 > \max\{\tilde{s}, \tilde{s}\}} \quad \left| \frac{1}{e^{r_1}} EC_1^{(2)}(s_0 Y_n^{(1)}) - s_0 + \frac{K}{e^{r_1+r_2}} \right| < \frac{1}{2} \varepsilon, \quad (18)$$

a z (18) oraz (6) i (1) można uzyskać:

$$\begin{aligned} \forall_{n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}} \quad \forall_{s_0 > \max\{\tilde{s}, \tilde{s}\}} \quad J_1(n, s_0) &\leq \left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - \frac{1}{e^{r_1}} EC_1^{(2)}(s_0 Y_n^{(1)}) \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{e^{r_1}} EC_1^{(2)}(s_0 Y_n^{(1)}) - s_0 + \frac{K}{e^{r_1+r_2}} \right| \leq \frac{1}{4} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{3}{4} \varepsilon. \end{aligned} \quad (19)$$

Ostatecznie ze wzorów (19) oraz (1) i (2):

$$\forall_{n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}} \quad \forall_{s_0 > \tilde{s} = \max\{\tilde{s}, \tilde{s}\}} \quad \left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - C_0^{(2)}(s_0) \right| \leq \varepsilon.$$

II. $s_0 \in [0, \tilde{s}]$.

Przyjmęto: $C_{0,n}^{(2)}(0) = 0 = C_0^{(2)}(0)$.

Argumentując jak w dowodzie twierdzenia 3.1.2 (część II):

(1) dla dowolnego $n \in N$ funkcja $C_{0,n}^{(2)}(\cdot)$ jest niemalejąca oraz ograniczona na przedziale $[0, \tilde{s}]$;

(2) funkcja $C_0^{(2)}(\cdot)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[0, \tilde{s}]$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(2)}(s_0) = C_0^{(2)}(s_0)$ dla dowolnego $s_0 > 0$ (zob. twierdzenie 3.3.2);

z twierdzenia 2 Pólya (zob. dodatek 1) można wnioskować, iż $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(2)}(s_0) = C_0^{(2)}(s_0)$ jednostajnie na przedziale $[0, \tilde{s}]$.

Z części I i II dowodu wynika teza. Istotnie. Dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ na podstawie I części dowodu należy wybrać $m \in N$ i $\tilde{s} > 0$ takie, że dla $s_0 > \tilde{s}$ oraz $n \geq m$ zachodzi:

$$\left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - C_0^{(2)}(s_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Następnie na podstawie II części dowodu, korzystając z jednostajnej zbieżności ciągu funkcji $C_{0,n}^{(2)}(\cdot)$ na przedziale $[0, \tilde{s}]$, do ε oraz $\tilde{s}$, należy dobrać m_0 ($m_0 \geq m$) takie, że dla wszystkich $n \geq m_0$ oraz $s \in [0, \tilde{s}]$ zachodzi nierówność: $\left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - C_0^{(2)}(s_0) \right| \leq \varepsilon$.

Ostatecznie udowodnione zostało, że:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{m_0 \in N} \quad \forall_{n \geq m_0} \quad \forall_{s_0 \in (0, \infty)} \quad \left| C_{0,n}^{(2)}(s_0) - \left(s_0 \cdot \phi(A \cdot \ln s_0 + B) - \frac{K}{e^{r_1} \cdot e^{r_2}} \cdot \phi(A \cdot \ln s_0 + \tilde{B}) \right) \right| \leq \varepsilon.$$



4.2. Wycena opcji, gdy parametry rynku są stałe w każdym z trzech kolejnych przedziałów czasu

Należy przypomnieć, że

$$C_{1,n}^{(3)}(s_1) = \frac{1}{e^{r_2}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^* \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot C_{2,n}^{(3)}(s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l}), \quad s_1 \in (0, \infty), \quad (4.2)$$

$$\text{gdzie } C_{2,n}^{(3)}(s_2) = \frac{1}{e^{r_3}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{3,n}^* \cdot q_{3,n}^{*n-l} \cdot (s_2 \cdot u_{3,n}^l \cdot d_{3,n}^{n-l} - K)^+.$$

Uwaga 4.2.1. Funkcja $C_{1,n}^{(3)}(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ określona powyżej jest nieujemną i niemalejącą na $(0, \infty)$ funkcją argumentu s_1 .

Analogicznie jak w paragrafie 3.3 (zob. rozdział 3) można otrzymać następujące lematy 4.2.1–4.2.2.

Lemat 4.2.1. Odpowiednik lematu 3.3.1. Przy powyższych oznaczeniach niech dla każdego $s_0 > 0$

$$C_{0,n}^{(3)}(s_0) := \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}), \quad (4.2.1.1)$$

gdzie $(C_{1,n}^{(3)}(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ jest pewnym ciągiem funkcji takim, że $C_{1,n}^{(3)}(s_1) \geq 0$ dla dowolnej liczby $s_1 > 0$. Jeżeli dla każdego wyrazu ciągu $(C_{1,n}^{(3)}(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ zachodzi oszacowanie z dołu przez funkcję przedziałami stałą (niezależną od n), przyjmującą skończoną liczbę wartości:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_1) \leq C_{1,n}^{(3)}(s_1) \text{ dla dowolnego } s_1 > 0, \quad (4.2.1.2)$$

gdzie $x_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$, oraz przedziały $(s'_{1,k}, s''_{1,k}]$ są wzajemnie rozłączne, to dla dowolnego $s_0 > 0$ zachodzi oszacowanie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) \geq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{(\frac{1}{\sigma_1} \ln s'_{1,k}, \frac{1}{\sigma_1} \ln s''_{1,k}]}(t) dt,$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu lematu 3.3.1 (zob. rozdział 3).

Lemat 4.2.2. Odpowiednik lematu 3.3.2. Niech $C_{1,n}^{(3)}(s_1) \geq 0$, $s_1 > 0$, $n = 1, 2, \dots$, będą funkcjami zdefiniowanymi wzorem (4.2). Niech $0 = s'_{1,0} < s''_{1,0} = s'_{1,1} < s''_{1,1} = \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} s'_{1,k} = \infty$. Jeżeli przy poprzednich oznaczeniach dla każdego $s_0 > 0$

$$C_{0,n}^{(3)}(s_0) = \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}), \quad (4.2.2.1)$$

gdzie dla ciągu funkcji $(C_{1,n}^{(3)}(\cdot))_{n \in \mathbb{N}}$, $C_{1,n}^{(3)}(s_1) \geq 0$, $s_1 > 0$ zachodzi dla każdego wyrazu $C_{1,n}^{(3)}(\cdot)$ oszacowanie z góry przez funkcję przedziałami stałą (niezależną od n):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot I_{(s'_{1,k}, s''_{1,k}]}(s_1) \geq C_{1,n}^{(3)}(s_1) \text{ dla dowolnego } s_1 > 0, \quad (4.2.2.2)$$

gdzie $\tilde{x}_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$,

to dla dowolnego $s_0 > 0$ zachodzi oszacowanie:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) \leq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot I_{\left(\frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}', \frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}''\right]}(t) dt,$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. I etap dowodu dotyczący skończonej sumy przedziałów jest analogiczny do dowodu lematu 3.3.2 (zamiast funkcji $C_{1,n}(s_1)$ należy rozważyć funkcję $C_{1,n}^{(3)}(s_1)$, zdefiniowaną wzorem (4.2)). Postać funkcji $C_{1,n}(s_1)$ nie była istotna w I etapie dowodu lematu 3.3.2.

Rozważyć należy również II etap dowodu lematu 3.3.2. W pierwszej nierówności dowodu warunku (1) zamiast z jednostajnej zbieżności z twierdzenia 3.1.2 należy skorzystać z twierdzenia 4.1.1 i wówczas można uzyskać oszacowanie:

dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można otrzymać dla n większych od pewnego n_ε (gdzie n_ε nie zależy od ν):

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\ & \leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \left[C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) + \frac{\varepsilon}{2} \right] \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}), \quad (1) \end{aligned}$$

gdzie:

$$C_1^{(3)}(s_1) := s_1 \cdot \phi(A_1^{(3)} \cdot \ln s_1 + B_1^{(3)}) - \frac{K}{e^{r_2} \cdot e^{r_3}} \cdot \phi(A_1^{(3)} \cdot \ln s_1 + \tilde{B}_1^{(3)}),$$

$$A_1^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}},$$

$$B_1^{(3)} = A_1^{(3)} \cdot \left(-\ln K + r_2 + r_3 + \frac{1}{2}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) \right),$$

$$\tilde{B}_1^{(3)} = A_1^{(3)} \cdot \left(-\ln K + r_2 + r_3 - \frac{1}{2}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) \right).$$

Ponadto $0 \leq C_1^{(3)}(s_1) \leq s_1$, zatem z (1) zachodzi:

$$\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot \left[C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) + 0,5 \cdot \varepsilon \right] \cdot I_{(v, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\
&\leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot \left[s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l} + 0,5 \cdot \varepsilon \right] \cdot I_{(v, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\
&\leq E\left[(S(1, n)) \cdot I_{(v, \infty)}(S(1, n)) \right] + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Dalsze rozumowanie w dowodzie lematu 3.3.2 pozostaje bez zmian. □

Wniosek 4.2.1. Odpowiednik wniosku 3.3.1. Jeżeli przy ustalonym $K > 0$ za $C_{1,n}^{(3)}(\cdot)$ w lemacie 4.2.1 zostanie podstawiona funkcja określona wzorem (4.2), to zachodzi następujące oszacowanie z dołu:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq \\
&\geq \sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt,
\end{aligned}$$

gdzie przy ustalonym $\varepsilon > 0$, $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ jest zbiorem funkcji określonych na R przedziałami stałymi, przyjmujących skończoną liczbę wartości, ograniczających od dołu funkcję $(\hat{c}_1^{(3)}(t) - \varepsilon)^+$, $t \in R$, gdzie:

$$\hat{c}_1^{(3)}(t) := e^{\sigma_1 t} \phi \left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}} \right) - \frac{K}{e^{r_2 + r_3}} \phi \left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}} \right),$$

$t \in R$, $\phi(\cdot)$ jest dystrybuentą standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Funkcja $(\hat{c}_1^{(3)}(t) - \varepsilon)^+$ jest ciągła na R (jako złożenie funkcji ciągłych) i nieujemna. Zatem z twierdzenia o przybliżaniu z dołu funkcjami schodkowymi (zob. dodatek 1) można wnioskować, że zbiór $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ jest niepusty. Niech $\varphi(\cdot) : R \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją przyjmującą skończoną liczbę wartości, stałą na rozłącznych przedziałach postaci $(t', t'']$ i ograniczającą od dołu funkcję $(\hat{c}_1^{(3)}(t) - \varepsilon)^+$, tj. $\varphi(t) \leq (\hat{c}_1^{(3)}(t) - \varepsilon)^+$ dla dowolnego $t \in R$. Niech $t := \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1$.

Wówczas z twierdzenia 4.1.1 zachodzi:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n_0 \leq n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{s_1 > 0} \quad |C_1^{(3)}(s_1) - C_{1,n}^{(3)}(s_1)| \leq \varepsilon,$$

gdzie:

$$C_1^{(3)}(s_1) := s_1 \cdot \phi(A_1^{(3)} \cdot \ln s_1 + B_1^{(3)}) - \frac{K}{e^{r_2} \cdot e^{r_3}} \cdot \phi(A_1^{(3)} \cdot \ln s_1 + \tilde{B}_1^{(3)}),$$

$$C_{1,n}^{(3)}(s_0) = \frac{1}{e^{r_2}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot C_{2,n}^{(3)}(s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l}),$$

$$C_{2,n}^{(3)}(s_2) = \frac{1}{e^{r_3}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{3,n}^{*l} \cdot q_{3,n}^{*n-l} \cdot (s_2 \cdot u_{3,n}^l \cdot d_{3,n}^{n-l} - K)^+.$$

Dla $t := \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1$, $t \in \mathbb{R}$, $s_1 = e^{\sigma_1 t}$, $\hat{C}_1^{(3)}(t) = C_1^{(3)}(s_1)$, $\hat{C}_{1,n}^{(3)}(t) = C_{1,n}^{(3)}(s_1)$, a więc

$$\forall_{n_0 \leq n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{t \in \mathbb{R}} \quad |\hat{C}_1^{(3)}(t) - \hat{C}_{1,n}^{(3)}(t)| \leq \varepsilon,$$

a stąd dla $n \geq n_0$ i dowolnego $t \in \mathbb{R}$:

$$[\hat{C}_1^{(3)}(t) - \varepsilon]^+ \leq \hat{C}_{1,n}^{(3)}(t) \leq \hat{C}_1^{(3)}(t) + \varepsilon.$$

Zatem

$$\forall_{\varphi \in \Phi_\varepsilon} \quad \forall_{t \in \mathbb{R}} \quad \varphi(t) \leq \hat{C}_{1,n}^{(3)}(t).$$

Wówczas również

$$\forall_{\varphi \in \Phi_\varepsilon} \quad \forall_{s_1 = e^{\sigma_1 t} > 0} \quad \tilde{\varphi}(e^{\sigma_1 t}) = \tilde{\varphi}(s_1) \leq C_{1,n}^{(3)}(s_1), \quad \text{gdzie} \quad \tilde{\varphi}(s_1) \stackrel{df}{=} \varphi\left(\frac{\ln s_1}{\sigma_1}\right) = \varphi(t).$$

Z lematu 4.2.1 wynika, że

$$\forall_{\varphi \in \Phi_\varepsilon} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) \geq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt,$$

a w konsekwencji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) \geq \sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt.$$



Wniosek 4.2.2. Odpowiednik wniosku 3.3.2. Jeżeli przy ustalonym $K > 0$ za $C_{1,n}^{(3)}(\cdot)$ w lemacie 4.2.2 zostanie podstawiona funkcja określona wzorem (4.2), to zachodzi następujące oszacowanie z góry:

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\ & \leq \inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt, \end{aligned}$$

gdzie przy ustalonym $\varepsilon > 0$, $\Psi_\varepsilon(\cdot)$ jest zbiorem funkcji określonych na R , ograniczających od góry funkcję $\hat{c}_1^{(3)}(t) + \varepsilon$, stałych na przedziałach rozłącznych postaci $(t'_{1,k}, t''_{1,k}]$, spełniających założenia lematu 4.2.2, z tym że $t'_{1,0} = -\infty$, gdzie:

$$\hat{c}_1^{(3)}(t) := e^{\sigma_1 t} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}}\right) - \frac{K}{e^{r_2 + r_3}} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}}\right),$$

$t \in R$, $\phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego $N(0, 1)$, f jest gęstością $N(0, 1)$.

Dowód. Funkcja $\hat{c}_1^{(3)}(\cdot) + \varepsilon$ jest ciągła (jako złożenie funkcji ciągłych). Zatem z wniosku o przybliżaniu z góry funkcjami schodkowymi (zob. dodatek 1) dla funkcji $C_1^{(3)}(\cdot) + \varepsilon$, gdzie $C_1^{(3)}(s) \stackrel{df}{=} \hat{c}_1^{(3)}\left(\frac{\ln s}{\sigma_1}\right)$, $s > 0$, można wnioskować, że zbiór $\Psi_\varepsilon(\cdot)$ jest niepusty. Niech $\psi(\cdot): R \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją z klasy $\Psi_\varepsilon(\cdot)$. Wówczas $\psi(t) \geq \hat{c}_1^{(3)}(t) + \varepsilon$ dla dowolnego $t \in R$. Niech $t := \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1$.

Wówczas z twierdzenia 4.1.1 wynika, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n_0 \leq n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{s_1 > 0} \quad \left| C_1^{(3)}(s_1) - C_{1,n}^{(3)}(s_1) \right| \leq \varepsilon,$$

gdzie:

$$C_1^{(3)}(s_1) := s_1 \cdot \phi\left(A_1^{(3)} \cdot \ln s_1 + B_1^{(3)}\right) - \frac{K}{e^{r_2} \cdot e^{r_3}} \cdot \phi\left(A_1^{(3)} \cdot \ln s_1 + \tilde{B}_1^{(3)}\right),$$

$$C_{1,n}^{(3)}(s_0) = \frac{1}{e^{r_2}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot C_{2,n}^{(3)}(s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l}).$$

Dla $t := \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1$, $t \in R$, $s_1 = e^{\sigma_1 t}$, $\hat{C}_1^{(3)}(t) = C_1^{(3)}(s_1)$, $\hat{C}_{1,n}^{(3)}(t) = C_{1,n}^{(3)}(s_1)$, a więc

$$\forall_{n_0 \leq n \in N} \quad \forall_{t \in R} \quad \left| \hat{C}_1^{(3)}(t) - \hat{C}_{1,n}^{(3)}(t) \right| \leq \varepsilon,$$

a stąd dla $n \geq n_0$ i dowolnego $t \in R$:

$$\hat{C}_1^{(3)}(t) - \varepsilon \leq \hat{C}_{1,n}^{(3)}(t) \leq \hat{C}_1^{(3)}(t) + \varepsilon.$$

Zatem

$$\forall_{\psi \in \Psi_\varepsilon} \quad \forall_{t \in R} \quad \psi(t) \geq \hat{C}_{1,n}^{(3)}(t).$$

Wówczas również

$$\forall_{\psi \in \Psi_\varepsilon} \quad \forall_{s_1 = e^{\sigma_1 t} > 0} \quad \tilde{\psi}(e^{\sigma_1 t}) = \tilde{\psi}(s_1) \geq C_{1,n}^{(3)}(s_1), \text{ gdzie } \tilde{\psi}(s_1) \stackrel{df}{=} \psi\left(\frac{\ln s_1}{\sigma_1}\right) = \psi(t).$$

Z lematu 4.2.2 wynika, że

$$\forall_{\psi \in \Psi_\varepsilon} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) \leq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt,$$

a w konsekwencji

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) \leq \inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt. \quad \square$$

Twierdzenie 4.2.1. Odpowiednik twierdzenia 3.3.1. Przy poprzednich oznaczeniach $p_{i,n}^*$, $q_{i,n}^*$, $u_{i,n}$, $d_{i,n}$, r_i , σ_i , $i = 1, 2, 3$, ustalonym $K > 0$ oraz $C_{1,n}^{(3)}(s_1)$ i $C_{2,n}^{(3)}(s_2)$ zadanych jak poprzednio przez wzór (4.2) zachodzi następująca zbieżność (dla dowolnego $s_0 > 0$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) = \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0 + r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \left[e^{\sigma_1 t} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}}\right) - \frac{K}{e^{r_2 + r_3}} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}}\right) \right] dt,$$

gdzie jak poprzednio:

$f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego,

$\phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Z wniosków 4.2.1 i 4.2.2 wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) \geq \sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) \leq \inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt. \quad (2)$$

Wystarczy pokazać równości:

$$\sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \hat{c}_1^{(3)}(t) dt \quad (3)$$

oraz

$$\inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \hat{c}_1^{(3)}(t) dt, \quad (4)$$

gdzie $\hat{c}_1^{(3)}$ jest funkcją określoną wzorem:

$$\hat{c}_1^{(3)}(t) := e^{\sigma_1 t} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}}\right) - \frac{K}{e^{r_2 + r_3}} \phi\left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}}\right),$$

$t \in R$.

Dowód zostanie podzielony na dwa etapy.

I. Dowód (3). Wprowadzono oznaczenie: $\tilde{c}_n(t) := \left(\hat{c}_1^{(3)}(t) - \frac{1}{n}\right)^+$, $t \in R$, $n \in N$.

Z lematu o przybliżaniu z dołu funkcjami schodkowymi (zob. dodatek 1) dla dowolnie ustalonego $n \in N$ istnieje niemalejący ciąg $(\tilde{\varphi}_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ funkcji nieujemnych przedziałami stałych taki, że $\tilde{\varphi}_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{c}_n(t)$.

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3.3.1 należy skonstruować ciąg $(\varphi_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ funkcji przedziałami stałych takich, że

$$\begin{aligned}
 &\varphi_{1,1} \leq \varphi_{1,2} \leq \dots \leq \varphi_{1,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{c}_1, \\
 &\quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \\
 &\varphi_{2,1} \leq \varphi_{2,2} \leq \dots \leq \varphi_{2,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{c}_2, \\
 &\quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \\
 &\vdots \\
 &\varphi_{n-1,1} \leq \varphi_{n-1,2} \leq \dots \leq \varphi_{n-1,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{c}_{n-1}, \\
 &\quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \\
 &\varphi_{n,1} \leq \varphi_{n,2} \leq \dots \leq \varphi_{n,m} \leq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{c}_n, \quad n \in N.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Dalszy ciąg dowodu (3) jest analogiczny do etapu I dowodu twierdzenia 3.3.1, w którym zamiast ciągu funkcyjnego $\left(\hat{c}_1^{(3)}(\cdot) - \frac{1}{n}\right)^+$ rozważono ciąg funkcyjny

$$\left(\hat{c}_1(\cdot) - \frac{1}{n}\right)^+.$$

II. Dowód (4). Wprowadzono oznaczenie: $\tilde{\tilde{c}}_n(t) := \hat{c}_1^{(3)}(t) + \frac{1}{n}$, $t \in R$, $n \in N$.

Z lematu o przybliżaniu z góry funkcjami schodkowymi (zob. dodatek 1) dla dowolnie ustalonego $n \in N$ istnieje nierosnący ciąg $(\tilde{\psi}_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ funkcji z klasy $\Psi_{\varepsilon}(\cdot)$, gdzie $\varepsilon = 1/n$, taki, że $\tilde{\psi}_{n,m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{c}}_n(t)$.

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 3.3.1 otrzymano ciąg $(\psi_{n,m})_{n=1}^{\infty}$ funkcji przedziałami stałych (na przedziałach spełniających założenia lematu 4.2.2) takich, że

$$\begin{aligned}
 &\psi_{1,1} \geq \psi_{1,2} \geq \dots \geq \psi_{1,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{c}}_1, \\
 &\quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \\
 &\psi_{2,1} \geq \psi_{2,2} \geq \dots \geq \psi_{2,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{c}}_2, \\
 &\quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \\
 &\vdots \\
 &\psi_{n-1,1} \geq \psi_{n-1,2} \geq \dots \geq \psi_{n-1,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{c}}_{n-1}, \\
 &\quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \quad \quad \quad \vee \\
 &\psi_{n,1} \geq \psi_{n,2} \geq \dots \geq \psi_{n,m} \geq \dots \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{c}}_n.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Dalszy ciąg dowodu (4) jest analogiczny do etapu II dowodu twierdzenia 3.3.1, w którym zamiast ciągu funkcyjnego $\left(\hat{c}_1^{(3)}(\cdot) + \frac{1}{n}\right)^+$ rozważono ciąg funkcyjny $\left(\hat{c}_1(\cdot) + \frac{1}{n}\right)^+$. Ponadto należy zauważyć, że $0 < C_1^{(3)}(s_1) \leq s_1$, dla $s_1 > 0$ oraz przyjąć, że $C_1^{(3)}(0) = 0$. Wówczas $C_1^{(3)}(s_1)$ jest funkcją ciągłą dla $s_1 \in [0, \infty)$. Należy również zdefiniować:

$$\bar{\psi}_{n,m}(s) := \frac{1}{n} + \max_{s_1 \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right]} C_1^{(3)}(s_1), \text{ dla } s \in \left(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right], \quad k \in N \cup \{0\}, \quad m, n \in N.$$



Twierdzenie 4.2.2. Odpowiednik twierdzenia 3.3.2. Graniczna początkowa cena opcji dla trzech jednostek czasowych (tj. z czasem realizacji $T = 3n$, przy $n \rightarrow \infty$) ma postać:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) = s_0 \phi \left(A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(3)} \right) - \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} \left(A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(3)} \right),$$

gdzie:

$$A_0^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2}},$$

$$B_0^{(3)} = A_0^{(3)} \cdot \left(-\ln K + r_3 + r_2 + r_1 + \frac{1}{2}(\sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2) \right),$$

$$\tilde{B}_0^{(3)} = A_0^{(3)} \cdot \left(-\ln K + r_3 + r_2 + r_1 - \frac{1}{2}(\sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2) \right).$$

Dowód. Korzystając z twierdzenia 4.2.1 (podstawiając $t = \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1$), można

otrzymać:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) = \\
&= \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2}\right) \cdot \left[e^{t\sigma_1} \phi\left(A_1^{(3)} \cdot t\sigma_1 + B_1^{(3)}\right) - \frac{K}{e^{r_2} e^{r_3}} \phi\left(A_1^{(3)} \cdot t\sigma_1 + \tilde{B}_1^{(3)}\right) \right] dt = \\
&= \frac{1}{e^{r_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right)^2\right) e^{\sigma_1 t} \cdot \phi\left(A_1^{(3)} \cdot t\sigma_1 + B_1^{(3)}\right) dt - \right. \\
&\quad \left. - \frac{K}{e^{r_2} e^{r_3}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right)^2\right) \phi\left(A_1^{(3)} \cdot t\sigma_1 + \tilde{B}_1^{(3)}\right) dt \right] = \\
&= \frac{1}{e^{r_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_0 e^{r_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right)^2\right) \phi\left(A_1^{(3)} \cdot t\sigma_1 + B_1^{(3)}\right) dt - \right. \\
&\quad \left. - \frac{K}{e^{r_2} e^{r_3}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right)^2\right) \phi\left(A_1^{(3)} \cdot t\sigma_1 + \tilde{B}_1^{(3)}\right) dt \right].
\end{aligned}$$

Podstawiając $v = A_1^{(3)} \cdot t \cdot \sigma_1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) &= \frac{1}{e^{r_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} A_1^{(3)} \sigma_1} \left[s_0 e^{r_1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{A_1^{(3)} \sigma_1} - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} - \frac{\sigma_1}{2}\right)^2\right) \cdot \phi(v + B_1^{(3)}) dv - \right. \\
&\quad \left. - \frac{K}{e^{r_2} e^{r_3}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{A_1^{(3)} \sigma_1} - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right)^2\right) \cdot \phi(v + \tilde{B}_1^{(3)}) dv \right] = \\
&= s_0 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{A_1^{(3)} \sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v - (\ln s_0 + r_1 + 0,5\sigma_1^2) A_1^{(3)}}{A_1^{(3)} \sigma_1}\right)^2\right) \cdot (1 - \phi(-v - B_1^{(3)})) dv - \right. \\
&\quad \left. - \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{A_1^{(3)} \sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v - (\ln s_0 + r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}) A_1^{(3)}}{A_1^{(3)} \sigma_1}\right)^2\right) \cdot (1 - \phi(-v - \tilde{B}_1^{(3)})) dv \right].
\end{aligned}$$

Można zauważyć, że

$$f_{X_1}(v) := \frac{1}{\sqrt{2\pi} A_1^{(3)} \sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \left(\ln s_0 + r_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right) A_1^{(3)}}{A_1^{(3)} \sigma_1}\right)^2\right)$$

jest gęstością zmiennej losowej X_1 o rozkładzie

$$N\left(\left(\ln s_0 + r_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)A_1^{(3)}, \left(A_1^{(3)}\sigma_1\right)^2\right).$$

Jeżeli Y jest zmienną losową o rozkładzie $N(0, 1)$, Y niezależną od X , to (lemat 3.3.3)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{A_1^{(3)}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v - (\ln s_0 + r_1 + 0,5\sigma_1^2)A_1^{(3)}}{A_1^{(3)}\sigma_1}\right)^2\right) \cdot \phi(-v - B_1^{(3)}) dv = \\ & = P(X_1 + Y < -B_1^{(3)}). \end{aligned}$$

Oczywiście $X_1 + Y$ jest zmienną losową o rozkładzie

$$N\left(\left(\ln s_0 + r_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)A_1^{(3)}, \left(A_1^{(3)}\sigma_1\right)^2 + 1\right), \text{ zatem}$$

$$\frac{X_1 + Y - \left(\ln s_0 + r_1 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)A_1^{(3)}}{\sqrt{1 + \left(A_1^{(3)}\sigma_1\right)^2}} \sim N(0, 1).$$

Podobnie

$$f_{\tilde{X}_1}(v) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}A_1^{(3)}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v - \left(\ln s_0 + r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)A_1^{(3)}}{A_1^{(3)}\sigma_1}\right)^2\right)$$

jest gęstością zmiennej losowej $\tilde{X}_1$ o rozkładzie

$$N\left(\left(\ln s_0 + r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)A_1^{(3)}, \left(A_1^{(3)}\sigma_1\right)^2\right).$$

Jeżeli znów $Y \sim N(0, 1)$, Y niezależna od $\tilde{X}$, to (lemat 3.3.3)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{A_1^{(3)}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{v - (\ln s_0 + r_1 - 0,5\sigma_1^2)A_1^{(3)}}{A_1^{(3)}\sigma_1}\right)^2\right) \cdot \phi(-v - \tilde{B}_1^{(3)}) dv = \\ & = P(\tilde{X}_1 + Y < -\tilde{B}_1^{(3)}). \end{aligned}$$

Oczywiście $\tilde{X}_1 + Y$ jest zmienną losową o rozkładzie $N\left(\left(\ln s_0 + r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)A_1^{(3)}, \left(A_1^{(3)}\sigma_1\right)^2 + 1\right)$, a więc

$$\frac{X_1 + Y - \left(\ln s_0 + r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)A_1^{(3)}}{\sqrt{1 + \left(A_1^{(3)}\sigma_1\right)^2}} \sim N(0, 1).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) &= s_0 \cdot \left(1 - P(X_1 + Y < -B_1^{(3)})\right) - \frac{K}{e^{r_1}e^{r_2}e^{r_3}} \cdot \left(1 - P(\tilde{X}_1 + Y < -\tilde{B}_1^{(3)})\right) = \\ &= s_0 \left(1 - \phi\left(\frac{-B_1^{(3)} - \left(\ln s_0 + r_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)A_1^{(3)}}{\sqrt{1 + \left(A_1^{(3)}\sigma_1\right)^2}}\right)\right) - \frac{K}{e^{r_1+r_2+r_3}} \left(1 - \phi\left(\frac{-\tilde{B}_1^{(3)} - \left(\ln s_0 + r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)A_1^{(3)}}{\sqrt{1 + \left(A_1^{(3)}\sigma_1\right)^2}}\right)\right) = \\ &= s_0 \phi\left(\frac{B_1^{(3)} + \left(\ln s_0 + r_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)A_1^{(3)}}{\sqrt{1 + \left(A_1^{(3)}\sigma_1\right)^2}}\right) - \frac{K}{e^{r_1+r_2+r_3}} \left(1 - \phi\left(\frac{\tilde{B}_1^{(3)} + \left(\ln s_0 + r_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)A_1^{(3)}}{\sqrt{1 + \left(A_1^{(3)}\sigma_1\right)^2}}\right)\right) = \\ &= s_0 \cdot \phi\left(A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(3)}\right) - \frac{K}{e^{r_1}e^{r_2}e^{r_3}} \cdot \phi\left(A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(3)}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Uwaga 4.2.2. Dowód twierdzenia 4.2.2 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 3.3.2 (w formułach występują jedynie różne stałe, które nie mają wpływu na tok rozumowania).

Rozdział 5

Model CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla dowolnej liczby jednostek czasu

W rozdziale 5 będzie rozważanych m długich jednostek czasu ($\tau = m$). Wówczas ewentualna realizacja opcji nastąpi w momencie $T = m \cdot n$. Założono, że w każdej długiej jednostce czasu wystąpi n chwil zmiany portfela. W poprzednim rozdziale zostały wprowadzone oznaczenia, które będą również obowiązywać w tym rozdziale.

5.1. Jednostajna zbieżność formuły CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla trzech jednostek czasu

Twierdzenie 5.1.1. Przy założeniach i oznaczeniach twierdzenia 4.2.2 zachodzi:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad \forall_{s_0 \in (0, \infty)} \quad \left| C_{0,n}^{(3)}(s_0) - \left(s_0 \phi(A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(3)}) - \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} (A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(3)}) \right) \right| \leq \varepsilon,$$

gdzie:

$$A_0^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2}}$$

$$B_0^{(3)} = A_0^{(3)} \cdot \left(-\ln K + r_3 + r_2 + r_1 + \frac{1}{2}(\sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2) \right),$$

$$\tilde{B}_0^{(3)} = A_0^{(3)} \cdot \left(-\ln K + r_3 + r_2 + r_1 - \frac{1}{2}(\sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2) \right).$$

Dowód. Należy rozważyć dwa przypadki.

I. $s_0 > \tilde{s}$, gdzie $\tilde{s} \in (0, \infty)$ będzie odpowiednio dobraną liczbą.

Dla dowolnego $s_0 \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$\begin{aligned} |C_{0,n}^{(3)}(s_0) - C_0^{(3)}(s_0)| &= \left| C_{0,n}^{(3)}(s_0) - s_0 \phi(A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(3)}) + \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} (A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(3)}) \right| = \\ &= \left| C_{0,n}^{(3)}(s_0) - s_0 + s_0 \cdot \phi(-A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 - B) + \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} - \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} \cdot \phi(-A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 - \tilde{B}_0^{(3)}) \right| \leq \\ &\leq \left| C_{0,n}^{(3)}(s_0) - s_0 + \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} \right| + \left| s_0 \cdot \phi(-A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 - B) \right| + \left| \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} \cdot \phi(-A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 - \tilde{B}_0^{(3)}) \right| \stackrel{df}{=} \\ &= \tilde{J}_1(n, s_0) + \tilde{J}_2(s_0) + \tilde{J}_3(s_0). \end{aligned} \quad (1)$$

W dowodzie twierdzenia 3.1.2 (gdy $r = r_1 + r_2 + r_3$, $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$) wykazane zostało, że

$$\lim_{s_0 \rightarrow \infty} \tilde{J}_2(s_0) = 0 \text{ oraz } \lim_{s_0 \rightarrow \infty} \tilde{J}_3(s_0) = 0.$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustaloną liczbą. Zatem istnieje $\tilde{\tilde{s}} \in (0, \infty)$ takie, że:

$$\forall_{s_0 \geq \tilde{\tilde{s}}} \tilde{J}_2(s_0) + \tilde{J}_3(s_0) \leq 0,5 \cdot \varepsilon. \quad (2)$$

Należy rozważyć $\tilde{J}_1(n, s_0)$. Wiadomo, że

$$C_{0,n}^{(3)}(s_0) = \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}), \quad (3)$$

gdzie

$$C_{1,n}^{(3)}(s_1) = \frac{1}{e^{r_2}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot C_{2,n}^{(3)}(s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l}),$$

$$C_{2,n}^{(3)}(s_2) = \frac{1}{e^{r_3}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{3,n}^{*l} \cdot q_{3,n}^{*n-l} (s_2 \cdot u_{3,n}^l \cdot d_{3,n}^{n-l} - K)^+.$$

Z twierdzenia 4.1.1 wynika, że

$$\exists_{n_1 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_1} \forall_{s_0 \in (0, \infty)} \forall_{l=0,1,\dots,n} \left| C_{1,n}^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) - C_1^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{4} e^{r_1} \quad (4)$$

gdzie

$$C_1^{(3)}(s_1) = s_1 \cdot \phi \left(\frac{\ln \frac{s_1}{K} + r_2 + r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sigma_2 + \sigma_3} \right) - \frac{K}{e^{r_2+r_3}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_1}{K} + r_2 + r_3 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sigma_2 + \sigma_3} \right).$$

Z (3) i (4) dla dowolnego $n \geq n_1$ oraz $s_0 \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \left| C_{0,n}^{(3)}(s_0) - \frac{1}{e^{r_1}} E \left(C_1^{(3)}(s_0 Y_n^{(1)}) \right) \right| &= \left| C_{0,n}^{(3)}(s_0) - \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} C_1^{(3)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot \frac{\varepsilon}{4} \cdot e^{r_1} = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned} \quad (5)$$

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 4.1.1 można otrzymać:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{e^{r_1}} E \left(C_1^{(3)}(s_0 Y_n^{(1)}) \right) - s_0 + \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} \right| &= \left| \frac{1}{e^{r_1}} E \left(s_0 Y_n^{(1)} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} + r_2 + r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sigma_2 + \sigma_3} \right) \right) - s_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{e^{r_1}} E \left(\frac{K}{e^{r_2+r_3}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} + r_2 + r_3 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sigma_2 + \sigma_3} \right) \right) + \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{e^{r_1}} E \left(s_0 Y_n^{(1)} \phi \left(-\frac{1}{\sigma_2 + \sigma_3} \ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} - \frac{1}{\sigma_2 + \sigma_3} \left(r_2 + r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2} \right) \right) \right) + \\ &\quad + \frac{K}{e^{r_1+r_2+r_3}} E \left(\phi \left(\frac{-\ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} - r_2 - r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sigma_2 + \sigma_3} \right) \right) \stackrel{df}{=} \tilde{A}_1(n, s_0) + \tilde{A}_2(n, s_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Ponadto dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $s_0 \in (0, \infty)$ zachodzi:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2(n, s_0) \leq & \frac{K}{e^{r_1+r_2+r_3}} \left\{ E \left(\phi \left(\frac{1}{\sigma_2 + \sigma_3} (-\ln s_0 - \ln Y_n^{(1)}) + \tilde{B}_2^{(1)} \right) \right) - \right. \\ & \left. - E \left(\phi \left(\frac{1}{\sigma_2 + \sigma_3} (-\ln s_0 - W) + \tilde{B}_2^{(1)} \right) \right) + E \left(\phi \left(\frac{-\ln s_0}{\sigma_2 + \sigma_3} - \frac{W}{\sigma_2 + \sigma_3} + \tilde{B}_2^{(1)} \right) \right) \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

gdzie

$$\tilde{B}_2^{(1)} = \frac{\ln K - r_2 - r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2}}{\sigma_2 + \sigma_3}.$$

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 4.1.1, korzystając z twierdzenia Skorochoda i warunku Lipschitza dla funkcji ϕ , można otrzymać:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2(n, s_0) \leq & \frac{K}{e^{r_1+r_2+r_3}} \tilde{E} \left(\frac{|\ln \tilde{Y}_n^{(1)} - \tilde{W}|}{\sqrt{2\pi}(\sigma_2 + \sigma_3)} \right) + \frac{K}{e^{r_1+r_2+r_3}} E \left(\phi \left(\frac{-\ln s_0}{\sigma_2 + \sigma_3} - \frac{W}{\sigma_2 + \sigma_3} + \tilde{B}_2^{(1)} \right) \right) = \\ & \stackrel{df}{=} \tilde{A}_2^{(1)}(n) + \tilde{A}_2^{(2)}(s_0). \end{aligned} \quad (8)$$

Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 4.1.1, (13), można wykazać, że

$$\exists_{n_2 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_2} \quad \tilde{A}_2^{(1)}(n) \leq \frac{1}{16} \varepsilon. \quad (9)$$

Z lematu 4.1.2 (gdy $Y = W - \tilde{B}_2^{(1)}(\sigma_2 + \sigma_3) \sim N(r_1 - 0,5\sigma_1^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\tilde{B}_2^{(1)}, \sigma_1^2)$) wynika, że

$$\exists_{\bar{s} > 0} \quad \forall_{s_0 \in (\bar{s}, \infty)} \quad \tilde{A}_2^{(2)}(s_0) \leq \frac{1}{16} \varepsilon. \quad (10)$$

Z (8)–(10):

$$\tilde{A}_2(n, s_0) \leq \frac{1}{8} \varepsilon.$$

Należy teraz rozważyć $\tilde{A}_1(n, s_0)$. Zachodzą następujące równości:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1(n, s_0) &= \frac{1}{e^{r_1}} E \left(s_0 \cdot Y_n^{(1)} \cdot \phi \left(-\frac{1}{\sigma_2 + \sigma_3} \ln \frac{s_0 Y_n^{(1)}}{K} - \frac{1}{\sigma_2 + \sigma_3} \left(r_2 + r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2} \right) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{e^{r_1}} E \left(s_0 \cdot Y_n^{(1)} \cdot \phi \left(-\left(\frac{\ln s_0}{\sigma_2 + \sigma_3} + \frac{\ln Y_n^{(1)}}{\sigma_2 + \sigma_3} \right) - \frac{1}{\sigma_2 + \sigma_3} \left(-\ln K + r_2 + r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\widetilde{B}_1^{(1)} \stackrel{df}{=} -\ln K + r_2 + r_3 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2}{2},$$

$$u \stackrel{df}{=} \ln s_0 + \ln Y_n^{(1)} + \widetilde{B}_1^{(1)},$$

$$\forall_{u \in \mathbb{R}} \quad v(u) \stackrel{df}{=} v_\alpha(u) \stackrel{df}{=} e^u \phi(-\alpha u), \text{ gdzie } \phi = F_{N(0,1)}, \quad \alpha = 1/(\sigma_2 + \sigma_3).$$

Zatem tak jak w dowodzie twierdzenia 4.1.1, (15), z twierdzenia Skorochoda oraz lematu 4.1.1 można wykazać, że

$$\widetilde{A}_1(n, s_0) \leq \frac{M_1 \widetilde{E} \left(\left| \ln \widetilde{Y}_n^{(1)} - \widetilde{W} \right| \right)}{e^{r_1} e^{\widetilde{B}_1^{(1)}}} + \frac{E \left(v \left(\ln s_0 + W + \widetilde{B}_1^{(1)} \right) \right)}{e^{r_1} e^{\widetilde{B}_1^{(1)}}} \stackrel{df}{=} \widetilde{A}_1^{(1)}(n) + \widetilde{A}_1^{(2)}(s_0). \quad (11)$$

Podobnie jak dla $\widetilde{A}_2^{(1)}(n)$, $\widetilde{A}_2^{(2)}(s_0)$ ((9) i (10)) można udowodnić, że

$$\exists_{n_3 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_3} \quad \widetilde{A}_1^{(1)}(n) \leq \frac{1}{16} \varepsilon. \quad (12)$$

Z lematu 4.1.2 zachodzi:

$$\exists_{\bar{s} > 0} \quad \forall_{s_0 \in (\bar{s}, \infty)} \quad \widetilde{A}_1^{(2)}(s_0) \leq \frac{1}{16} \varepsilon. \quad (13)$$

Ze wzorów (6)–(13) wynika, że

$$\forall_{n \geq \max\{n_2, n_3\}} \quad \forall_{s_0 > \max\{\bar{s}, \bar{s}\}} \quad \left| \frac{1}{e^{r_1}} E \left(C_1^{(3)}(s_0 Y_n^{(1)}) \right) - s_0 + \frac{K}{e^{r_1 + r_2 + r_3}} \right| \leq \frac{1}{4} \varepsilon, \quad (14)$$

a z (14) oraz (5) i (1):

$$\begin{aligned} \forall_{n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}} \quad \forall_{s_0 > \max\{\bar{s}, \bar{s}\}} \quad \widetilde{J}_1(n, s_0) &= \left| C_{0,n}^{(3)}(s_0) - s_0 + \frac{K}{e^{r_1 + r_2 + r_3}} \right| \leq \left| C_{0,n}^{(3)}(s_0) - \frac{EC_1^{(3)}(s_0 Y_n^{(1)})}{e^{r_1}} \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{e^{r_1}} E \left(C_1^{(3)}(s_0 Y_n^{(1)}) \right) - s_0 + \frac{K}{e^{r_1 + r_2 + r_3}} \right| \leq \frac{1}{4} \varepsilon + \frac{1}{4} \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon. \end{aligned} \quad (15)$$

Ostatecznie ze wzorów (15) oraz (1) i (2) można uzyskać:

$$\forall_{n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}} \quad \forall_{s_0 > \bar{s} = \max\{\bar{s}, \bar{s}\}} \quad \left| C_{0,n}^{(3)}(s_0) - C_0^{(3)}(s_0) \right| \leq 0,5 \cdot \varepsilon + 0,5 \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

II. $s_0 \in [0, \bar{s}]$.

Przyjęto: $C_{0,n}^{(3)}(0) = 0 = C_0^{(3)}(0)$.

Argumentujemy jak w dowodzie twierdzenia 3.1.2 (zob. część II):

(1) dla dowolnego $n \in N$ funkcja $C_{0,n}^{(3)}(\cdot)$ jest niemalejąca oraz ograniczona na przedziale $[0, \tilde{s}]$;

(2) funkcja $C_0^{(3)}(\cdot)$ jest funkcją ciągłą na $[0, \tilde{s}]$;

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) = C_0^{(3)}(s_0)$ dla dowolnego $s_0 > 0$ (z twierdzenia 4.2.2), gdzie

$$C_0^{(3)}(s_0) = s_0 \phi \left(A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(3)} \right) - \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3}} \left(A_0^{(3)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(3)} \right)$$

(stałe $A_0^{(3)}$, $B_0^{(3)}$, $\tilde{B}_0^{(3)}$ zdefiniowane są w tezie twierdzenia 4.2.2).

Stąd i z twierdzenia 2 Pólya (zob. dodatek 1) można wywnioskować, iż $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(3)}(s_0) = C_0^{(3)}(s_0)$ jednostajnie na $[0, \tilde{s}]$.

Analogicznie jak w twierdzeniu 4.1.1 z części I i II dowodu wynika teza. □

5.2. Wycena opcji, gdy parametry rynku są stałe w każdym z czterech przedziałów czasu

Należy przypomnieć, że

$$C_{1,n}^{(4)}(s_1) = \frac{1}{e^{r_2}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^* \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot C_{2,n}^{(4)}(s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l}), \quad s_1 \in (0, \infty), \quad (5.2.1)$$

gdzie:

$$C_{2,n}^{(4)}(s_2) = \frac{1}{e^{r_3}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{3,n}^* \cdot q_{3,n}^{*n-l} \cdot C_{3,n}^{(4)}(s_2 \cdot u_{3,n}^l \cdot d_{3,n}^{n-l}), \quad (5.2.2)$$

$$C_{3,n}^{(4)}(s_3) = \frac{1}{e^{r_4}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{4,n}^* \cdot q_{4,n}^{*n-l} \cdot (s_3 \cdot u_{4,n}^l \cdot d_{4,n}^{n-l} - K)^+. \quad (5.2.3)$$

Uwaga 5.2.1. Funkcja $C_{1,n}^{(4)}(\cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ określona powyżej jest nieujemną i niemalejącą na $(0, \infty)$ funkcją argumentu s_1 .

Analogicznie jak w podrozdziale 4.2 można otrzymać następujące lematy 5.2.1 i 5.2.2.

Lemat 5.2.1. Odpowiednik lematu 4.2.1. Przy powyższych oznaczeniach niech dla każdego $s_0 > 0$

$$C_{0,n}^{(4)}(s_0) := \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(4)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}), \quad (5.2.1.1)$$

gdzie $(C_{1,n}^{(4)}(\cdot))_{n \in N}$ jest pewnym ciągiem funkcji takim, że $C_{1,n}^{(4)}(s_1) \geq 0$ dla dowolnej liczby $s_1 > 0$. Jeżeli dla każdego wyrazu ciągu $(C_{1,n}^{(4)}(\cdot))_{n \in N}$ zachodzi oszacowanie z dołu przez funkcję przedziałami stałą (niezależną od n), przyjmującą skończoną liczbę wartości:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'')} (s_1) \leq C_{1,n}^{(4)}(s_1) \text{ dla dowolnego } s_1 > 0, \quad (5.2.1.2)$$

gdzie $x_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$, oraz przedziały $(s_{1,k}', s_{1,k}'']$ są wzajemnie rozłączne, to dla dowolnego $s_0 > 0$ zachodzi oszacowanie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(4)}(s_0) \geq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot I_{(\frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}', \frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}'')} (t) dt,$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu lematu 3.3.1 (zob. rozdział 3).

Lemat 5.2.2. Odpowiednik lematu 4.2.2. Niech $C_{1,n}^{(4)}(s_1) \geq 0$, $s_1 > 0$, $n = 1, 2, \dots$, będą funkcjami zdefiniowanymi wzorem (5.2.1). Niech $0 = s_{1,0}' < s_{1,0}'' = s_{1,1}' < s_{1,1}'' = \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_{1,k}' = \infty$. Jeżeli przy poprzednich oznaczeniach dla każdego $s_0 > 0$

$$C_{0,n}^{(4)}(s_0) = \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(4)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}), \quad (5.2.2.1)$$

gdzie dla ciągu funkcji $(C_{1,n}^{(4)}(\cdot))_{n \in N}$, $C_{1,n}^{(4)}(s_1) \geq 0$, $s_1 > 0$ zachodzi dla każdego wyrazu $C_{1,n}^{(4)}(\cdot)$ oszacowanie z góry przez funkcję przedziałami stałą (niezależną od n):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot I_{(s_{1,k}', s_{1,k}'')} (s_1) \geq C_{1,n}^{(4)}(s_1) \text{ dla dowolnego } s_1 > 0, \quad (5.2.2.2)$$

gdzie $\tilde{x}_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$,

to dla dowolnego $s_0 > 0$ zachodzi oszacowanie:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(4)}(s_0) \leq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}_k \cdot I_{\left(\frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}', \frac{1}{\sigma_1} \ln s_{1,k}''\right]}(t) dt,$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. I etap dowodu dotyczący skończonej sumy przedziałów jest analogiczny do dowodu lematu 3.3.2 (zamiast funkcji $C_{1,n}(s_1)$ należy teraz rozważyć funkcję $C_{1,n}^{(4)}(s_1)$, zdefiniowaną wzorem (5.2.1)). Postać funkcji $C_{1,n}(s_1)$ nie była istotna w dowodzie lematu 3.3.2.

Rozważyć należy teraz II etap dowodu lematu 3.3.2. W pierwszej nierówności dowodu warunku (1) zamiast z jednostajnej zbieżności z twierdzenia 3.1.2 należy skorzystać z twierdzenia 5.1.1 i wówczas można uzyskać oszacowanie:

dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można otrzymać dla n większych od pewnego n_ε (gdzie n_ε nie zależy od ν):

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(4)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\ & \leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot [C_{1,n}^{(4)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) + 0,5\varepsilon] \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}), \quad (1) \end{aligned}$$

gdzie:

$$C_1^{(4)}(s_1) := s_1 \cdot \phi(A_1^{(4)} \cdot \ln s_1 + B_1^{(4)}) - \frac{K}{e^{r_2} \cdot e^{r_3} \cdot e^{r_4}} \cdot \phi(A_1^{(4)} \cdot \ln s_1 + \tilde{B}_1^{(4)}),$$

$$A_1^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}},$$

$$B_1^{(4)} = A_1^{(4)} \cdot \left(-\ln K + r_2 + r_3 + r_4 + \frac{1}{2}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \right),$$

$$\tilde{B}_1^{(4)} = A_1^{(4)} \cdot \left(-\ln K + r_2 + r_3 + r_4 - \frac{1}{2}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) \right).$$

Ponadto $0 \leq C_1^{(4)}(s_1) \leq s_1$, zatem z (1) dla $0 < \varepsilon \leq 1$ zachodzi:

$$\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(4)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \cdot I_{(\nu, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot \left[C_{1,n}^{(4)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) + 0,5\varepsilon \right] \cdot I_{(v, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\
&\leq \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot \left[s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l} + 0,5\varepsilon \right] \cdot I_{(v, \infty)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\
&\leq E\left[(S(1, n) + \varepsilon) \cdot I_{(v, \infty)}(S(1, n))\right] \leq E\left[S(1, n) \cdot I_{(v, \infty)}(S(1, n))\right] + 0,5\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dalsze rozumowanie w dowodzie lematu 3.3.2 pozostaje bez zmian. □

Wniosek 5.2.1. Odpowiednik wniosku 4.2.1. Jeżeli przy ustalonym $K > 0$ za $C_{1,n}^{(4)}(\cdot)$ w lemacie 5.2.1 zostanie podstawiona funkcja określona wzorem (5.2.1), to zachodzi następujące oszacowanie z dołu:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} C_{1,n}^{(4)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \geq \\
&\geq \sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt,
\end{aligned}$$

gdzie przy ustalonym $\varepsilon > 0$, $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ jest zbiorem funkcji określonych na R przedziałami stałych przyjmujących skończoną liczbę wartości, ograniczających od dołu funkcję $(\hat{c}_1^{(4)}(t) - \varepsilon)^+$, $t \in R$, gdzie:

$$\begin{aligned}
\hat{c}_1^{(4)}(t) &:= e^{\sigma_1 t} \phi \left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + r_4 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}} \right) - \\
&- \frac{K}{e^{r_2 + r_3 + r_4}} \phi \left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + r_4 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}} \right),
\end{aligned}$$

$t \in R$, $\phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Funkcja $(\hat{c}_1^{(4)}(t) - \varepsilon)^+$ jest ciągła (jako złożenie funkcji ciągłych) i nieujemna. Zatem z lematu o przybliżaniu z dołu funkcjami schodkowymi (zob. dodatek 1) można wnioskować, że zbiór $\Phi_\varepsilon(\cdot)$ jest niepusty. Niech

$\varphi(\cdot) : R \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją przyjmującą skończoną liczbę wartości, stałą na rozłącznych przedziałach postaci $(t', t'']$ i ograniczającą od dołu funkcję

$$\left(\hat{c}_1^{(4)}(t) - \varepsilon\right)^+, \text{ tj. } \varphi(t) \leq \left(\hat{c}_1^{(4)}(t) - \varepsilon\right)^+ \text{ dla dowolnego } t \in R. \text{ Niech } t := \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1.$$

Wówczas z twierdzenia 5.1.1 wynika, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n_0 \leq n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{s_1 > 0} \quad \left| C_1^{(4)}(s_1) - C_{1,n}^{(4)}(s_1) \right| \leq \varepsilon,$$

gdzie:

$$C_1^{(4)}(s_1) := s_1 \cdot \phi\left(A_1^{(4)} \cdot \ln s_1 + B_1^{(4)}\right) - \frac{K}{e^{r_2} \cdot e^{r_3} \cdot e^{r_4}} \cdot \phi\left(A_1^{(4)} \cdot \ln s_1 + \tilde{B}_1^{(4)}\right),$$

$$C_{1,n}^{(4)}(s_0) = \frac{1}{e^{r_2}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot C_{2,n}^{(4)}(s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l}).$$

$$\text{Dla } t := \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1, \quad t \in R, \quad s_1 = e^{\sigma_1 t}, \quad \hat{c}_1^{(4)}(t) = C_1^{(4)}(s_1), \quad \hat{C}_{1,n}^{(4)}(t) = C_{1,n}^{(4)}(s_1),$$

a więc

$$\forall_{n_0 \leq n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{t \in R} \quad \left| \hat{c}_1^{(4)}(t) - \hat{C}_{1,n}^{(4)}(t) \right| \leq \varepsilon,$$

a stąd dla $n \geq n_0$ i dowolnego $t \in R$:

$$\left[\hat{c}_1^{(4)}(t) - \varepsilon \right]^+ \leq \hat{C}_{1,n}^{(4)}(t) \leq \hat{c}_1^{(4)}(t) + \varepsilon.$$

Zatem

$$\forall_{\varphi \in \Phi_\varepsilon} \quad \forall_{t \in R} \quad \varphi(t) \leq \hat{C}_{1,n}^{(4)}(t).$$

Wówczas również

$$\forall_{\varphi \in \Phi_\varepsilon} \quad \forall_{s_1 = e^{\sigma_1 t} > 0} \quad \tilde{\varphi}(e^{\sigma_1 t}) = \tilde{\varphi}(s_1) \leq C_{1,n}^{(4)}(s_1), \text{ gdzie } \tilde{\varphi}(s_1) \stackrel{df}{=} \varphi\left(\frac{\ln s_1}{\sigma_1}\right) = \varphi(t).$$

Z lematu 5.2.1 wynika, że

$$\forall_{\varphi \in \Phi_\varepsilon} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(4)}(s_0) \geq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt,$$

a w konsekwencji

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(4)}(s_0) \geq \sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \varphi(t) dt.$$



Wniosek 5.2.2. Odpowiednik wniosku 4.2.2. Jeżeli przy ustalonym $K > 0$ za $C_{1,n}^{(4)}(\cdot)$ w lemacie 5.2.2 zostanie podstawiona funkcja określona wzorem (5.2.1), to zachodzi następujące oszacowanie z góry:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} C_{1,n}^{(4)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) \leq \\ & \leq \inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2}\sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt, \end{aligned}$$

gdzie przy ustalonym $\varepsilon > 0$, $\Psi_\varepsilon(\cdot)$ jest zbiorem funkcji określonych na R , ograniczających od góry funkcję $\hat{c}_1^{(4)}(t) + \varepsilon$, stałych na przedziałach rozłącznych postaci $(t'_{1,k}, t''_{1,k}]$ spełniających założenia lematu 3.3.2, z tym że $t'_{1,0} = -\infty$, gdzie:

$$\begin{aligned} \hat{c}_1^{(4)}(t) := & e^{\sigma_1 t} \phi \left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + r_4 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}} \right) - \\ & - \frac{K}{e^{r_2 + r_3 + r_4}} \phi \left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + r_4 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}} \right), \end{aligned}$$

$t \in R$, $\phi(\cdot)$ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego $N(0, 1)$, f jest gęstością $N(0, 1)$.

Dowód. Funkcja $\hat{c}_1^{(4)}(t) + \varepsilon$ jest ciągła (jako złożenie funkcji ciągłych). Zatem z lematu o przybliżaniu z góry funkcjami schodkowym (zob. dodatek 1) dla funkcji $C_1^{(4)}(\cdot) + \varepsilon$, gdzie $C_1^{(4)}(s) \stackrel{df}{=} \hat{c}_1^{(4)}\left(\frac{\ln s}{\sigma_1}\right)$, $s > 0$, wynika, że zbiór $\Psi_\varepsilon(\cdot)$

jest niepusty. Niech $\psi(\cdot) : R \rightarrow [0, \infty)$ będzie funkcją z klasy $\Psi_\varepsilon(\cdot)$. Wówczas

$$\psi(t) \geq \hat{c}_1^{(4)}(t) + \varepsilon \text{ dla dowolnego } t \in R. \text{ Niech } t := \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1.$$

Wówczas z twierdzenia 5.1.1 zachodzi:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n_0 \leq n \in \mathbb{N}} \quad \forall_{s_1 > 0} \quad \left| C_1^{(4)}(s_1) - C_{1,n}^{(4)}(s_1) \right| \leq \varepsilon,$$

gdzie:

$$C_1^{(4)}(s_1) := s_1 \cdot \phi\left(A_1^{(4)} \cdot \ln s_1 + B_1^{(4)}\right) - \frac{K}{e^{r_2} \cdot e^{r_3} \cdot e^{r_3}} \cdot \phi\left(A_1^{(4)} \cdot \ln s_1 + \tilde{B}_1^{(4)}\right),$$

$$C_{1,n}^{(4)}(s_1) = \frac{1}{e^{r_2}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{2,n}^{*l} \cdot q_{2,n}^{*n-l} \cdot C_{2,n}^{(4)}(s_1 \cdot u_{2,n}^l \cdot d_{2,n}^{n-l}).$$

$$\text{Dla } t := \frac{1}{\sigma_1} \ln s_1, \quad t \in R, \quad s_1 = e^{\sigma_1 t}, \quad \hat{C}_1^{(4)}(t) = C_1^{(4)}(s_1), \quad \hat{C}_{1,n}^{(4)}(t) = C_{1,n}^{(4)}(s_1),$$

a więc

$$\forall_{n_0 \leq n \in N} \quad \forall_{t \in R} \quad \left| \hat{C}_1^{(4)}(t) - \hat{C}_{1,n}^{(4)}(t) \right| \leq \varepsilon,$$

a stąd dla $n \geq n_0$ i dowolnego $t \in R$:

$$\hat{C}_1^{(4)}(t) - \varepsilon \leq \hat{C}_{1,n}^{(4)}(t) \leq \hat{C}_1^{(4)}(t) + \varepsilon.$$

Zatem

$$\forall_{\psi \in \Psi_\varepsilon} \quad \forall_{t \in R} \quad \psi(t) \geq \hat{C}_{1,n}^{(4)}(t).$$

Wówczas również

$$\forall_{\psi \in \Psi_\varepsilon} \quad \forall_{s_1 = e^{\sigma_1 t} > 0} \quad \tilde{\psi}(e^{\sigma_1 t}) = \tilde{\psi}(s_1) \geq C_{1,n}^{(4)}(s_1), \text{ gdzie } \tilde{\psi}(s_1) \stackrel{df}{=} \psi\left(\frac{\ln s_1}{\sigma_1}\right) = \psi(t).$$

Z lematu 5.2.2 wynika, że

$$\forall_{\psi \in \Psi_\varepsilon} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(4)}(s_0) \leq \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt,$$

a w konsekwencji

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(4)}(s_0) \leq \inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1\right) \cdot \psi(t) dt. \quad \square$$

Twierdzenie 5.2.1. Odpowiednik twierdzenie 4.2.1. Przy poprzednich oznaczeniach $p_{i,n}^*$, $q_{i,n}^*$, $u_{i,n}$, $d_{i,n}$, r_i , σ_i , $i = 1, 2, 3$, ustalonym $K > 0$ oraz $C_{1,n}^{(4)}(s_1)$, $C_{2,n}^{(4)}(s_2)$ i $C_{3,n}^{(4)}(s_3)$ określonych odpowiednio wzorami (5.2.1)–(5.2.3) zachodzi następująca zbieżność (dla dowolnego $s_0 > 0$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(4)}(s_0) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{r_1}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(4)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}) =$$

$$= \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \left[e^{\sigma_1 t} \phi \left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + r_4 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{K}{e^{r_2 + r_3 + r_4}} \cdot \phi \left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + r_4 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}} \right) \right] dt,$$

gdzie jak poprzednio:

$f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego,

$\phi(\cdot)$ jest dystrybucją standaryzowanego rozkładu normalnego.

Dowód. Z wniosków 5.2.1 i 5.2.2 wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(4)}(s_0) \geq \sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \cdot \varphi(t) dt, \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(4)}(s_0) \leq \inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \frac{1}{e^{r_1}} \int_{-\infty}^{\infty} f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{1}{2} \sigma_1 \right) \cdot \psi(t) dt. \quad (2)$$

Wystarczy pokazać równości:

$$\sup_{\varepsilon > 0, \varphi \in \Phi_\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2} \right) \cdot \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2} \right) \cdot \hat{c}_1^{(4)}(t) dt \quad (3)$$

oraz

$$\inf_{\varepsilon > 0, \psi \in \Psi_\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2} \right) \cdot \psi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f \left(t - \frac{\ln s_0}{\sigma_1} - \frac{r_1}{\sigma_1} + \frac{\sigma_1}{2} \right) \cdot \hat{c}_1^{(4)}(t) dt, \quad (4)$$

gdzie $\hat{c}_1^{(4)}$ jest funkcją określoną wzorem:

$$\hat{c}_1^{(4)}(t) := e^{\sigma_1 t} \phi \left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + r_4 + \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}} \right) - \\ - \frac{K}{e^{r_2 + r_3 + r_4}} \phi \left(\frac{\sigma_1 t - \ln K + r_2 + r_3 + r_4 - \frac{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}{2}}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2}} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dowód powyższych równości jest analogiczny do dowodu twierdzenia 4.2.1.

Twierdzenie 5.2.2. Odpowiednik twierdzenia 4.2.2. Graniczna początkowa cena opcji dla czterech jednostek czasowych (tj. z czasem realizacji $T = 4n$, przy $n \rightarrow \infty$) ma postać:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(4)}(s_0) = s_0 \phi \left(A_0^{(4)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(4)} \right) - \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3} e^{r_4}} \left(A_0^{(4)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(4)} \right),$$

gdzie:

$$A_0^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_4^2 + \sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2}},$$

$$B_0^{(4)} = A_0^{(4)} \cdot \left(-\ln K + r_4 + r_3 + r_2 + r_1 + \frac{1}{2}(\sigma_4^2 + \sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2) \right),$$

$$\tilde{B}_0^{(4)} = A_0^{(4)} \cdot \left(-\ln K + r_4 + r_3 + r_2 + r_1 - \frac{1}{2}(\sigma_4^2 + \sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2) \right).$$

Dowód. Dowód jest analogiczny do dowodu twierdzenia 4.2.2 (wystarczy skorzystać z twierdzenia 5.2.1).

5.3. Jednostajna zbieżność formuły CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla czterech jednostek czasu

Twierdzenie 5.3.1. Przy założeniach i oznaczeniach twierdzenia 5.2.2 zachodzi:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad \forall_{s_0 \in (0, \infty)} \quad \left| C_{0,n}^{(4)}(s_0) - \left(s_0 \phi \left(A_0^{(4)} \ln s_0 + B_0^{(4)} \right) - \frac{K}{e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3} e^{r_4}} \left(A_0^{(4)} \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(4)} \right) \right) \right| \leq \varepsilon,$$

gdzie:

$$A_0^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_4^2 + \sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2}},$$

$$B_0^{(4)} = A_0^{(4)} \cdot \left(-\ln K + r_4 + r_3 + r_2 + r_1 + \frac{1}{2}(\sigma_4^2 + \sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2) \right),$$

$$\tilde{B}_0^{(4)} = A_0^{(4)} \cdot \left(-\ln K + r_4 + r_3 + r_2 + r_1 - \frac{1}{2}(\sigma_4^2 + \sigma_3^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2) \right).$$

Dowód. Dowód powyższego twierdzenia jest analogiczny do dowodu twierdzenia 5.1.1 (analogiczne oszacowania).

5.4. Wycena opcji oraz jednostajna zbieżność formuły CRR, gdy parametry rynku są stałe w każdym z dowolnej liczby m przedziałów czasu

Rozważono teraz dowolną liczbę m jednostek czasu. Poniżej przypomniano oznaczenia wprowadzone na początku rozdziału 4:

$$\begin{aligned} C_{0,n}^{(m)}(s_0) &:= \frac{1}{e^{r_1}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{1,n}^{*l} \cdot q_{1,n}^{*n-l} \cdot C_{1,n}^{(m)}(s_0 \cdot u_{1,n}^l \cdot d_{1,n}^{n-l}), \quad m \geq 2, \\ C_{j,n}^{(m)}(s_j) &:= \frac{1}{e^{r_{j+1}}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{j+1,n}^{*l} \cdot q_{j+1,n}^{*n-l} \cdot C_{j+1,n}^{(m)}(s_j \cdot u_{j+1,n}^l \cdot d_{j+1,n}^{n-l}), \quad 0 \leq j \leq m-2, \\ C_{m-1,n}^{(m)}(s_{m-1}) &:= \frac{1}{e^{r_m}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{m,n}^{*l} \cdot q_{m,n}^{*n-l} \cdot (s_{m-1} \cdot u_{m,n}^l \cdot d_{m,n}^{n-l} - K)^+. \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia 5.3.1 i postępując jak w dowodzie twierdzenia 4.2.2, można sformułować analogiczne twierdzenie do twierdzenia 5.2.2 dla dowolnej liczby m jednostek czasu:

Twierdzenie 5.4.1. Niech $m \in N$, $m \geq 2$, będzie dowolnie ustaloną liczbą. Graniczna początkowa cena opcji dla m dużych jednostek czasowych (tj. z czasem realizacji $T = mn$, przy $n \rightarrow \infty$) ma postać:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{0,n}^{(m)}(s_0) = s_0 \phi(A_0^{(m)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(m)}) - \frac{K}{e^{\sum_{i=1}^m r_i}} \phi(A_0^{(m)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(m)}) \stackrel{df}{=} C_0^{(m)}(s_0), \quad (5.4.1)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} A_0^{(m)} &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}}, \\ B_0^{(m)} &= A_0^{(m)} \cdot \left(-\ln K + \sum_{i=1}^m r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right), \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_0^{(m)} = A_0^{(m)} \cdot \left(-\ln K + \sum_{i=1}^m r_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right).$$

Ponadto zachodzi następująca jednostajna zbieżność uogólnionej formuły CRR do analogu formuły Blacka-Scholesa dla m dużych jednostek czasowych:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \quad \forall_{n \geq n_0} \quad \forall_{s_0 \in (0, \infty)} \quad \left| C_{0,n}^{(m)}(s_0) - C_0^{(m)}(s_0) \right| \leq \varepsilon. \quad (5.4.2)$$

Poniżej przedstawiony zostanie jedynie tok rozumowania w dowodzie twierdzenia 5.4.1. Formalny zapis dowodu nie zostaje podany ze względu na dość skomplikowane oznaczenia.

Dowód twierdzenia 5.4.1. Indukcja ze względu na $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$.

I. Dla $m = 2$.

Wzór (5.4.1) został wyprowadzony i udowodniony w rozdziale 3. Cały rozdział 3 poświęcony jest wycenie opcji dla uogólnionego modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie dla dwóch jednostek czasu. Podsumowaniem rozdziału 3 jest twierdzenie 3.3.2, w którego dowodzie korzystano z jednostajnej zbieżności klasycznego modelu CRR do modelu Blacka-Scholesa dla jednej jednostki czasu (zob. twierdzenie 3.1.2).

Wzór (5.4.2) został udowodniony w twierdzeniu 4.1.1 (w dowodzie korzysta się z twierdzenia 3.3.2 oraz twierdzenia 3.1.2).

II. Krok indukcyjny, przejście z m do $m+1$ jednostek.

Należy założyć, że wzory (5.4.1) i (5.4.2) są prawdziwe dla pewnego $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Wówczas dowód wzoru (5.4.1), dla $m+1$ jednostek, jest analogiczny do przedstawionego w podrozdziale 4.2 dowodu dla trzech jednostek czasu (zob. twierdzenie 4.2.2) oraz do przedstawionego w podrozdziale 5.2 dowodu dla czterech jednostek czasu (zob. twierdzenie 5.2.2). Należy skorzystać ze wzoru (5.4.1) dla m jednostek oraz wzoru (5.4.2) dla m jednostek.

Dowód wzoru (5.4.2) dla $m+1$ jednostek jest analogiczny do dowodu twierdzenia 5.1.1. Należy skorzystać z udowodnionego powyżej wzoru (5.4.1) dla $m+1$ jednostek oraz założenia indukcyjnego wzoru (5.4.2) dla m jednostek.



Uwaga 5.4.1. Dla procesu cen opisanego wzorami (3.2.6)–(3.2.7) w podrozdziale 3.2.1 (będącego rozwiązaniem równania stochastycznego (3.28)) prawdopodobnie można, stosując zaawansowane metody analizy stochastycznej, wykraczające poza ramy niniejszej monografii, wyprowadzić wzór typu Blacka-Scholesa (5.4.1) na wycenę opcji.

Analizując dowody twierdzeń i lematów zamieszczonych w rozdziałach 3–5, można wysnuć następujący wniosek.

Wniosek 5.4.1. Niech $[0, T_1]$, $[T_1, T_2]$, ..., $[T_{m-1}, T_m]$ będą kolejnymi długimi przedziałami czasu, w których parametry rynku, tj. stopy procentowe i współczynniki *volatility*, będą różne. Ponadto każdy przedział zostaje podzielony na $n_1, n_2, \dots, n_m$ chwil handlowania akcjami (chwil zmian składu portfela). Wówczas granica wielokrotna dla formuły CRR $C_{0,n_1,n_2,\dots,n_m}^m(s_0)$ brana dla $n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty, \dots, n_m \rightarrow \infty$ będzie równa formule $C_{0,n}^m(s_0)$ z twierdzenia 5.4.1. Zatem założenie $n_1 = n_2 = \dots = n_m = n$ nie jest potrzebne.

5.5. Współczynniki wrażliwości ceny opcji

Analiza wrażliwości europejskich opcji kupna zostanie przedstawiona na podstawie wzoru na graniczną cenę opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie (zob. twierdzenie 5.4.1). Zostaną określone zmiany ceny opcji na podstawie obliczonych pochodnych cząstkowych funkcji wyceniającej opcję względem poszczególnych zmiennych dla dowolnej jednostki czasu. Rozważanych będzie m jednostek czasu. Formuła (5.4.1) zależy od ceny instrumentu podstawowego (np. ceny akcji) s_0 , ceny wykonania K , stóp wolnych od ryzyka dla każdej jednostki czasu $r_i, i = 1, 2, 3, \dots, m$, oraz zmienności cen instrumentu podstawowego (*volatility*) dla każdej jednostki czasu $\sigma_i, i = 1, 2, 3, \dots, m$. Cena wykonania ustalana jest w chwili zawarcia kontraktu opcyjnego i nie ulega zmianie. Zatem nie wpływa ona na zmianę ceny opcji i nie jest brana pod uwagę przy analizie wrażliwości ceny opcji.

Wprowadzono oznaczenia:

$$\tilde{d}_1^{(m)} = A_0^{(m)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(m)},$$

$$\tilde{d}_2^{(m)} = A_0^{(m)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(m)},$$

gdzie:

$$A_0^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}},$$

$$B_0^{(m)} = A_0^{(m)} \cdot \left(-\ln K + \sum_{i=1}^m r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right),$$

$$\tilde{B}_0^{(m)} = A_0^{(m)} \cdot \left(-\ln K + \sum_{i=1}^m r_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right).$$

Lemat 5.5.1. Dla powyższych oznaczeń zachodzi:

$$\tilde{d}_2^{(m)} = \tilde{d}_1^{(m)} - A_0^{(m)} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2.$$

Lemat 5.5.2. Dla powyższych oznaczeń zachodzi:

$$\frac{\partial \phi(\tilde{d}_2^{(m)})}{\partial \tilde{d}_2^{(m)}} = \frac{s_0}{K} e^{\sum_{i=1}^m r_i} \frac{\partial \phi(\tilde{d}_1^{(m)})}{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}.$$

Dowód. Zachodzi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\tilde{d}_2^{(m)})}{\partial \tilde{d}_2^{(m)}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5 \left(\tilde{d}_1^{(m)} - A_0^{(m)} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5 (\tilde{d}_1^{(m)})^2} \cdot e^{\tilde{d}_1^{(m)} A_0^{(m)} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \cdot e^{-0,5 \left(A_0^{(m)} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right)^2} = \\ &= f(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot e^{\frac{\ln s_0}{K} + \sum_{i=1}^m r_i + 0,5 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \cdot e^{-0,5 \sum_{i=1}^m \sigma_i^2} = \frac{s_0}{K} \cdot e^{\sum_{i=1}^m r_i} \cdot \frac{\partial \phi(\tilde{d}_1^{(m)})}{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}, \end{aligned}$$

gdzie $f(\cdot)$ jest gęstością standaryzowanego rozkładu normalnego. □

Twierdzenie 5.5.1. Współczynnik *delta* dla granicznej ceny opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie wynosi

$$\Delta_{call}^{(m)} := \frac{\partial C_0^{(m)}}{\partial s_0} = \phi(\tilde{d}_1^{(m)}).$$

Dowód. Z lematu 5.5.1 oraz lematu 5.5.2 można otrzymać:

$$\begin{aligned}\Delta_{call}^{(m)} &= \frac{\partial C_0^{(m)}}{\partial s_0} = \phi(\tilde{d}_1^{(m)}) + s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}{\partial s_0} - Ke^{-\sum_{i=1}^m r_i} \cdot \phi'(\tilde{d}_2^{(m)}) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_2^{(m)}}{\partial s_0} = \\ &= \phi(\tilde{d}_1^{(m)}) + s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{A_0^{(m)}}{s_0} - Ke^{-\sum_{i=1}^m r_i} \cdot \frac{s_0}{K} \cdot e^{\sum_{i=1}^m r_i} \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{A_0^{(m)}}{s_0} = \phi(\tilde{d}_1^{(m)}).\end{aligned}$$



Interpretacja

Współczynnik *delta* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się cena opcji, gdy cena instrumentu podstawowego wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (stopy wolne od ryzyka dla każdej jednostki czasu r_i , $i = 1, 2, \dots, m$, oraz zmienności cen instrumentu podstawowego dla każdej jednostki czasu σ_i , $i = 1, 2, \dots, m$) nie ulegną zmianie.

Wniosek 5.5.1. Współczynnik *delta* dla granicznej ceny opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie $\Delta_{call}^{(m)} \in (0, 1)$.

Twierdzenie 5.5.2. Współczynnik *gamma* dla granicznej ceny opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie wynosi

$$\Gamma_{call}^{(m)} := \frac{\partial^2 C_0^{(m)}}{\partial s_0^2} = \frac{\partial \Delta_{call}^{(m)}}{\partial s_0} = \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{s_0 \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} = \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot A_0^{(m)}}{s_0}.$$

Dowód. Z twierdzenie 5.5.1 wynika, że

$$\Gamma_{call}^{(m)} = \frac{\partial^2 C_0^{(m)}}{\partial s_0^2} = \frac{\partial \Delta_{call}^{(m)}}{\partial s_0} = \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}{\partial s_0} = \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{s_0 \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} = \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot A_0^{(m)}}{s_0}.$$



Interpretacja

Współczynnik *gamma* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się wartość współczynnika *delta*, gdy cena instrumentu podstawowego wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (stopy wolne od ryzyka dla każdej jednostki czasu r_i , $i = 1, 2, \dots, m$, oraz zmienności cen

instrumentu podstawowego dla każdej jednostki czasu σ_i , $i = 1, 2, \dots, m$) nie ulegną zmianie.

Wniosek 5.5.2. Współczynnik *gamma* dla granicznej ceny opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie przyjmuje wartości dodatnie, tj. $\Gamma_{call}^{(m)} > 0$.

Twierdzenie 5.5.3. Współczynnik *vega* dla granicznej ceny opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie wynosi

$$v_{call,j}^{(m)} := \frac{\partial C_0^{(m)}}{\partial \sigma_j} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \frac{\sigma_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \sigma_j \cdot A_0^{(m)},$$

gdzie σ_j jest zmiennością cen instrumentu podstawowego (akcji) dla j -tej jednostki czasu, $j = 1, 2, \dots, m$.

Dowód. Korzystając z lematu 5.5.1 oraz lematu 5.5.2, można otrzymać:

$$\begin{aligned} v_{call,j}^{(m)} &= \frac{\partial C_0^{(m)}}{\partial \sigma_j} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}{\partial \sigma_j} - Ke^{-\sum_{i=1}^m r_i} \cdot \phi'(\tilde{d}_2^{(m)}) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_2^{(m)}}{\partial \sigma_j} = \\ &= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}{\partial \sigma_j} - Ke^{-\sum_{i=1}^m r_i} \cdot \frac{s_0}{K} \cdot e^{\sum_{i=1}^m r_i} \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}{\partial \sigma_j} - \frac{\sigma_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \right) = \\ &= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \frac{\sigma_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} = s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \sigma_j \cdot A_0^{(m)}. \end{aligned} \quad \square$$

Interpretacja

Współczynnik *vega* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się cena opcji, gdy zmienność instrumentu podstawowego (*volatility*) dla j -tej jednostki czasu wzrośnie o jednostkę, przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (cena instrumentu podstawowego, stopy wolne od ryzyka dla każdej jednostki czasu r_i , $i = 1, 2, \dots, m$, oraz pozostałe zmienności cen instrumentu

podstawowego σ_i dla każdej jednostki czasu z wyłączeniem j -tej jednostki czasu, $i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j$) nie ulegną zmianie.

Wniosek 5.5.3. Współczynnik *vega* dla granicznej ceny opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie przyjmuje wartości dodatnie, tj. $v_{call,j}^{(m)} > 0$.

Twierdzenie 5.5.4. Współczynnik *rho* dla granicznej ceny opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie wynosi

$$\rho_{call,j}^{(m)} := \frac{\partial C_0^{(m)}}{\partial r_j} = K e^{-\sum_{i=1}^m r_i} \phi(\tilde{d}_2^{(m)}),$$

gdzie r_j jest stopą procentową wolną od ryzyka dla j -tej jednostki czasu, $j = 1, 2, \dots, m$.

Dowód. Z lematu 5.5.1 oraz lematu 5.5.2 wynika, że

$$\rho_{call,j}^{(m)} = \frac{\partial C_0^{(m)}}{\partial r_j} = s_0 \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \frac{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}{\partial r_j} - \frac{K}{e^{\sum_{i=1}^m r_i}} \phi'(\tilde{d}_2^{(m)}) \frac{\partial \tilde{d}_2^{(m)}}{\partial r_j} + \frac{K}{e^{\sum_{i=1}^m r_i}} \phi'(\tilde{d}_2^{(m)}) = \frac{K}{e^{\sum_{i=1}^m r_i}} \phi(\tilde{d}_2^{(m)}).$$



Interpretacja

Współczynnik *rho* określa, o ile w przybliżeniu zmieni się cena opcji, gdy stopa wolna od ryzyka dla j -tej jednostki czasu wzrośnie o jednostkę (z reguły o jeden punkt procentowy), przy założeniu, że pozostałe czynniki wpływające na cenę opcji (cena instrumentu podstawowego, zmienności cen instrumentu podstawowego σ_i dla każdej jednostki czasu $i = 1, 2, \dots, m$ oraz pozostałe stopy wolne od ryzyka dla każdej jednostki czasu z wyłączeniem j -tej jednostki czasu, $i, j = 1, 2, \dots, m, i \neq j$) nie ulegną zmianie.

Wniosek 5.5.5. Współczynnik *rho* dla granicznej ceny opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie przyjmuje wartości dodatnie, tj. $\rho_{call,j}^{(m)} > 0$.

Na zmianę ceny opcji europejskiej na akcję największy wpływ mają zmiana ceny instrumentu podstawowego (ceny akcji) oraz zmiany współczynników

zmienności cen akcji dla każdej jednostki czasu. Stąd warto dokonać analizy dodatkowych współczynników wrażliwości ceny opcji, którymi są pierwsze pochodne $\Delta_{call}^{(m)}$, $\Gamma_{call}^{(m)}$, $v_{call,j}^{(m)}$ względem s_0 i względem σ_j dla każdej jednostki czasu $j = 1, 2, \dots, m$.

Twierdzenie 5.5.5. Dla granicznej ceny europejskiej opcji kupna w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie zachodzi:

$$\begin{aligned}
 vanna^{(m)} &:= \frac{\partial^2 C_0^{(m)}}{\partial s_0 \partial \sigma_j} = \frac{\partial \Delta_{call}^{(m)}}{\partial \sigma_j} = \frac{\partial v_{call}^{(m)}}{\partial s_0} = -\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \tilde{d}_2^{(m)} \cdot \frac{\sigma_j}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} = -\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \tilde{d}_2^{(m)} \cdot \sigma_j \cdot (A_0^{(m)})^2, \\
 volga^{(m)} &= \frac{\partial^2 C_0^{(m)}}{\partial \sigma_j^2} = \frac{\partial v_{call}^{(m)}}{\partial \sigma_j} = \frac{s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \left[\frac{(\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1) \sigma_j^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} + 1 \right] = \\
 &= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot A_0^{(m)} \cdot \left[(A_0^{(m)})^2 \cdot (\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1) \cdot \sigma_j^2 + 1 \right], \\
 \frac{\partial \Gamma_{call}^{(m)}}{\partial s_0} &= -\frac{1}{s_0^2} \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \left[1 + \tilde{d}_1^{(m)} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \right] = -\frac{1}{s_0^2} \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot A_0^{(m)} \cdot \left[1 + \tilde{d}_1^{(m)} \cdot A_0^{(m)} \right], \\
 \frac{\partial \Gamma_{call}^{(m)}}{\partial \sigma_j} &= \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \sigma_j}{s_0 \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot (\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1) = \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \sigma_j \cdot (A_0^{(m)})^3}{s_0} \cdot (\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1).
 \end{aligned}$$

Dowód. Można zauważyć, że

$$\begin{aligned}
 vanna^{(m)} &= \frac{\partial \Delta_{call}^{(m)}}{\partial \sigma_j} = \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}{\partial \sigma_j} = \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \left[\frac{-\sigma_j \cdot \left(\ln \frac{s_0}{K} + \sum_{i=1}^m r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right)}{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \right)^3} + \frac{\sigma_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \right] = \\
 &= -\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \tilde{d}_2^{(m)} \cdot \frac{\sigma_j}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} = -\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \tilde{d}_2^{(m)} \cdot \sigma_j \cdot (A_0^{(m)})^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
volga^{(m)} &= \frac{\partial v_{call}^{(m)}}{\partial \sigma_j} = \frac{-s_0 \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \tilde{d}_1^{(m)} \sigma_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \frac{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}{\partial \sigma_j} + s_0 \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} - \frac{\sigma_j^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \right) = \\
&= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \left[\frac{\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \sigma_j^2 \cdot \left(\ln \frac{s_0}{K} + \sum_{i=1}^m r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right)}{\left(\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right)^2} - \frac{\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \sigma_j^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} + \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} - \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \right] = \\
&= \frac{s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \left[\frac{\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} \cdot \sigma_j^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} + 1 - \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \right] = \frac{s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \left[\frac{(\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1) \sigma_j^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} + 1 \right] = \\
&= s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot A_0^{(m)} \cdot \left[(A_0^{(m)})^2 \cdot (\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1) \cdot \sigma_j^2 + 1 \right], \\
\\
\frac{\partial \Gamma_{call}^{(m)}}{\partial s_0} &= -\frac{1}{s_0^2} \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} - \frac{1}{s_0^2} \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \tilde{d}_1^{(m)} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} = \\
&= -\frac{1}{s_0^2} \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \left[1 + \tilde{d}_1^{(m)} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \right] = -\frac{1}{s_0^2} \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot A_0^{(m)} \cdot [1 + \tilde{d}_1^{(m)} \cdot A_0^{(m)}], \\
\\
\frac{\partial \Gamma_{call}^{(m)}}{\partial \sigma_j} &= -\frac{1}{s_0} \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \tilde{d}_1^{(m)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \frac{\partial \tilde{d}_1^{(m)}}{\partial \sigma_j} - \frac{1}{s_0} \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{\sigma_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2} = \\
&= \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{s_0} \cdot \left[-\frac{\tilde{d}_1^{(m)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \left(\frac{-\sigma_j \cdot \left(\ln \frac{s_0}{K} + \sum_{i=1}^m r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2} + \frac{\sigma_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \right) - \frac{\sigma_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \right] = \\
&= \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \sigma_j}{s_0 \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \left((\tilde{d}_1^{(m)})^2 - \tilde{d}_1^{(m)} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} - 1 \right) = \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \sigma_j}{s_0 \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot (\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1) = \\
&= \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \sigma_j \cdot (A_0^{(m)})^3}{s_0} \cdot (\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1). \quad \square
\end{aligned}$$

W celu oszacowania zmiany granicznej ceny opcji kupna w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie z uwzględnieniem zmian wszystkich czynników wpływających na cenę opcji (tj. ceny akcji s_0 , stóp wolnych od ryzyka dla każdej jednostki czasu r_i , $i = 1, 2, \dots, m$, oraz zmienności cen instrumentu podstawowego (*volatility*) dla każdej jednostki czasu σ_i , $i = 1, 2, \dots, m$) należy zastosować wzór Taylora (dla funkcji wielu zmiennych). Z twierdzeń 5.5.1–5.5.5 można uzyskać następującą formułę na zmianę granicznej ceny opcji w rozważanym modelu.

Twierdzenie 5.5.6. W wyniku zmiany ceny początkowej akcji o wielkość Δs_0 , zmian stóp procentowych w poszczególnych jednostkach czasu o wielkości $\Delta r_1, \Delta r_2, \dots, \Delta r_m$, zmian *volatility* w poszczególnych jednostkach czasu o wielkości $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_m$ graniczna cena opcji kupna w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie ulegnie zmianie o wielkość:

$$\begin{aligned} \Delta C_0 \approx & \phi(\tilde{d}_1^{(m)}) \Delta s_0 + \frac{1}{2} \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{s_0 \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} (\Delta s_0)^2 - \sum_{j=1}^m \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \tilde{d}_2^{(m)} \cdot \frac{\sigma_j}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \Delta s_0 \Delta \sigma_j + \\ & + \sum_{j=1}^m s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \frac{\sigma_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \Delta \sigma_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \left[\frac{(\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1) \cdot \sigma_j^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} + 1 \right] (\Delta \sigma_j)^2 + \\ & + \sum_{j=1}^m K e^{-\sum_{i=1}^m r_i} \phi(\tilde{d}_2^{(m)}) \Delta r_j - \frac{1}{6} \frac{1}{s_0^2} \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \left[1 + \tilde{d}_1^{(m)} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \right] (\Delta s_0)^3 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \sigma_j}{s_0 \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot (\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1) (\Delta s_0)^2 \Delta \sigma_j = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \phi(\tilde{d}_1^{(m)}) \Delta s_0 + \frac{1}{2} \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{s_0 \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} (\Delta s_0)^2 - \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \tilde{d}_2^{(m)} \Delta s_0}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \sum_{j=1}^m \sigma_j \Delta \sigma_j + \frac{s_0 \phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \sum_{j=1}^m \sigma_j \Delta \sigma_j + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{s_0 \phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \sum_{j=1}^m \left[\frac{(\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1) \cdot \sigma_j^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} + 1 \right] (\Delta \sigma_j)^2 + Ke^{-\sum_{i=1}^m r_i} \phi(\tilde{d}_2^{(m)}) \sum_{j=1}^m \Delta r_j - \\
&- \frac{1}{6} \frac{1}{s_0^2} \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \left[1 + \tilde{d}_1^{(m)} \frac{1}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \right] (\Delta s_0)^3 + \frac{1}{2} \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot (\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1)}{s_0 \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} (\Delta s_0)^2 \sum_{j=1}^m \sigma_j \Delta \sigma_j = \\
&= \phi(\tilde{d}_1^{(m)}) \Delta s_0 + \frac{1}{2} \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{s_0 \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} (\Delta s_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \sum_{j=1}^m \left[\frac{(\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1) \cdot \sigma_j^2}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} + 1 \right] (\Delta \sigma_j)^2 + \\
&+ Ke^{-\sum_{i=1}^m r_i} \phi(\tilde{d}_2^{(m)}) \sum_{j=1}^m \Delta r_j - \frac{1}{6} \frac{1}{s_0^2} \phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot \left[1 + \tilde{d}_1^{(m)} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \right] (\Delta s_0)^3 + \\
&+ \left(\frac{1}{2} \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot (\tilde{d}_1^{(m)} \cdot \tilde{d}_2^{(m)} - 1)}{s_0 \cdot \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} \cdot (\Delta s_0)^2 + \frac{s_0 \cdot \phi'(\tilde{d}_1^{(m)})}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2}} - \frac{\phi'(\tilde{d}_1^{(m)}) \cdot \tilde{d}_2^{(m)} \cdot \Delta s_0}{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2} \right) \cdot \sum_{j=1}^m \sigma_j \Delta \sigma_j.
\end{aligned}$$

Wniosek 5.5.6. W modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie:

- funkcja $C_0^{(m)}$ jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej s_0 ;
- cena europejskiej opcji kupna rośnie wraz ze wzrostem początkowej ceny akcji;
- funkcja $C_0^{(m)}$ jest funkcją malejącą jako funkcja zmiennej K ;
- cena europejskiej opcji kupna maleje wraz ze wzrostem ceny wykonania;
- funkcja $C_0^{(m)}$ jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej σ_i , $i = 1, 2, \dots, m$;
- cena europejskiej opcji kupna rośnie wraz ze wzrostem współczynnika zmienności cen akcji (*volatility*) σ_i w i -tej jednostce czasu;
- funkcja $C_0^{(m)}$ jest funkcją rosnącą jako funkcja zmiennej r_i , $i = 1, 2, \dots, m$;
- cena europejskiej opcji kupna rośnie wraz ze wzrostem stopy procentowej wolnej od ryzyka r_i w i -tej jednostce czasu.

Rozdział 6

Badania empiryczne

W rozdziale 6 przedstawiono wyniki badań empirycznych dla opcji kupna na indeks WIG20 notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych (GPW) w Warszawie w 2020 roku. Przeprowadzono analizę wyników porównania rzeczywistych cen opcji z wartościami opcji uzyskanymi na podstawie formuły Blacka-Scholesa oraz granicznych formuł na wycenę opcji w uogólnionym modelu CRR oraz modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie. Przy wyborze najlepszej metody wyceny opcji wykorzystano analizę korelacji dla 140 obserwacji.

Badanie przeprowadzono dla okresu od 27 sierpnia 2019 r. do 20 marca 2020 r. dla opcji kupna na indeks WIG20 o cenach wykonania 1700 punktów, 1800 punktów, 1900 punktów, 2000 punktów, 2100 punktów, 2200 punktów, 2300 punktów z terminem wygaśnięcia 20 marca 2020 r. Są to opcje: OW20C201700, OW20C201800, OW20C201900, OW20C202000, OW20C202100, OW20C202200, OW20C202300. Dane dotyczące notowań z GPW w Warszawie uzyskano za pośrednictwem stron: www.gpw.com.pl oraz www.stooq.pl. Przyjęto ceny zamknięcia.

Za cenę początkową w formułach na wycenę opcji przyjęto notowanie WIG20 (wyrażone w punktach) z danego dnia wyceny. Ceny wykonania opcji i wartości opcji również zostały wyrażone w punktach. Wartość stopy procentowej wolnej od ryzyka została oszacowana poprzez interpolację liniową stóp WIBOR dla dwóch (najbliższych długości okresów do wygaśnięcia opcji) okresów, dla których określony jest WIBOR. Dla przykładu stopę procentową dla terminu 122 dni pozostałych do wygaśnięcia opcji wyznaczono poprzez interpolację liniową stóp WIBOR 3-miesięczny oraz WIBOR 6-miesięczny według wzoru:

$$r_s = \frac{(r_k - r_p) \cdot (t_s - t_p)}{t_k - t_p} + r_p ,$$

gdzie:

r_s – szukana stopa procentowa,

t_s – czas do wygaśnięcia opcji (termin dla szukanej stopy procentowej: 122 dni),

t_p – termin wcześniejszy od t_s , $t_s > t_p$ (90 dni),

t_k – termin późniejszy od t_s , $t_s < t_k$ (180 dni),

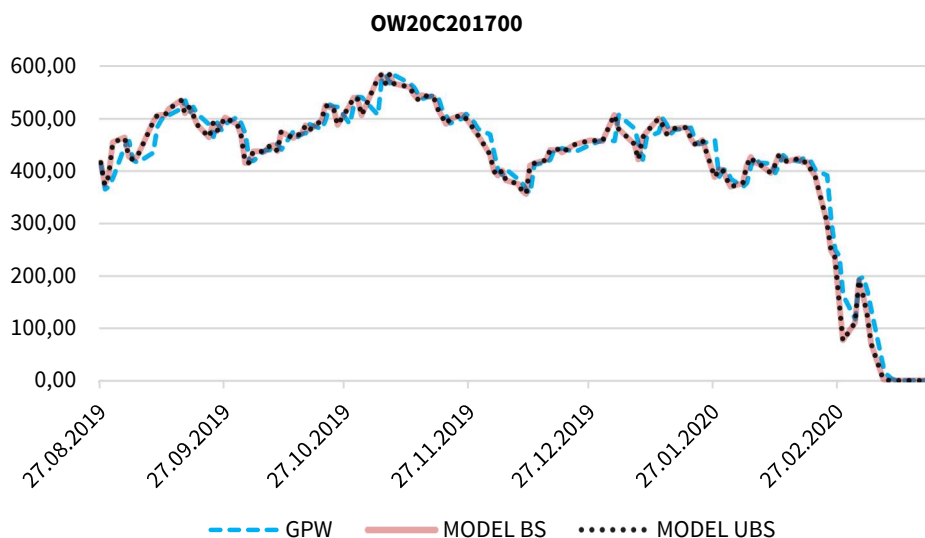
r_p – stopa procentowa dla terminu t_p ,

r_k – stopa procentowa dla terminu t_k .

W badaniu przyjęto odchylenie standardowe jako miarę zmienności indeksu WIG20. W modelu Blacka-Scholesa oraz uogólnionym modelu Blacka-Scholesa wyznaczono je na podstawie historycznych stóp zwrotu indeksu WIG20 z ostatnich 230 dni sesji poprzedzających chwilę zawarcia umowy opcyjnej. W modelu Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie parametr σ został obliczony na podstawie historycznych i rzeczywistych stóp zwrotu indeksu WIG20. Dla przykładu w wycenie opcji w dniu 17.03.2020 r. okres do rozliczenia opcji (w dniu 20.03.2020 r.) został podzielony na trzy jednostki czasu (dni). Dla pierwszej jednostki czasu (dzień 17.03.2020 r.) odchylenie standardowe stopy zwrotu indeksu WIG20 policzono na podstawie danych historycznych z okresu od 10.04.2019 r. do 16.03.2020 r. Dla drugiej jednostki czasu (dzień 18.03.2020 r.) parametr σ wyznaczony został z okresu od 11.04.2019 r. do 17.03.2020 r., w którym 229 stóp zwrotu indeksu WIG20 jest danymi historycznymi i jedna stopa zwrotu indeksu WIG20 w dniu 17.03.2019 r. jest daną nieobserwowalną (przyszłą), gdyż nie znamy jej w chwili wyceny opcji (w monografii przyjęto jej wartość rzeczywistą, w praktyce należy ją oszacować). Dla trzeciej jednostki czasu (dzień 19.03.2020 r.) zmienność indeksu WIG20 obliczono, uwzględniając jego stopy zwrotu z okresu od 12.04.2019 r. do 18.03.2020 r., w którym 228 stóp zwrotu jest danymi historycznymi i dwie stopy zwrotu w dniach 17.03.2019 r. i 18.03.2019 r. są danymi nieobserwowalnymi (w monografii przyjęto ich wartości rzeczywiste, w praktyce należy je oszacować). W uogólnionym modelu Blacka-Scholesa średnią stóp zwrotu dla indeksu WIG20 (parametr ρ) policzono również na podstawie danych historycznych z ostatnich 230 dni sesji poprzedzających chwilę zawarcia umowy opcyjnej. Przyjęto, iż liczba dni sesji w roku wynosi 250. Dane źródłowe oraz otrzymane wyniki na podstawie analizowanych modeli zamieszczone zostały w dodatku 2.

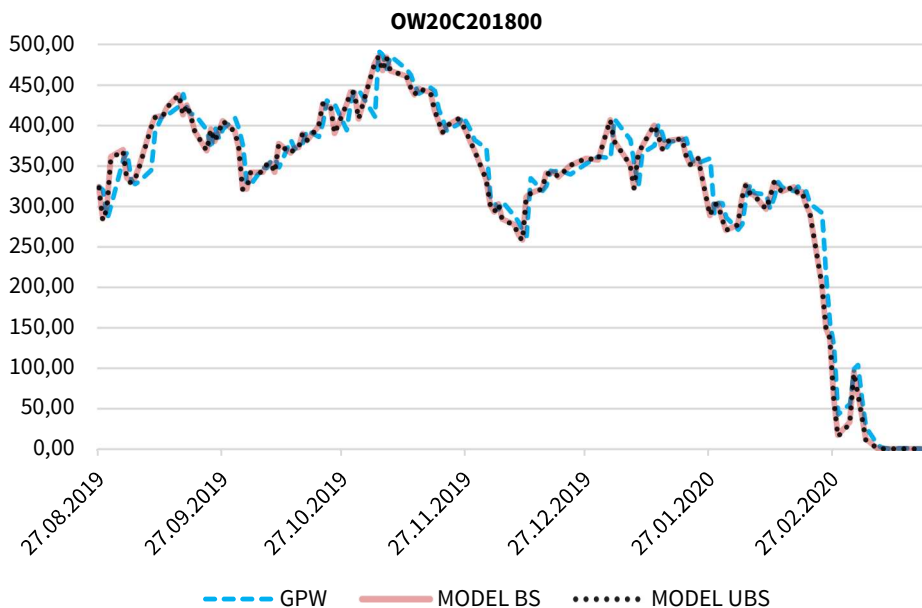
6.1. Wycena opcji notowanych na GPW w Warszawie na podstawie modelu Blacka-Scholesa oraz uogólnionego modelu Blacka-Scholesa

Na wykresach zamieszczonych poniżej przedstawiono porównania kształtowania się wyceny rynkowej i wycen na podstawie modelu Blacka-Scholesa (model BS) oraz uogólnionego modelu Blacka-Scholesa (model UBS, twierdzenie 2.2.1) opcji o różnych cenach wykonania i terminie wygaśnięcia 20 marca 2020 r.



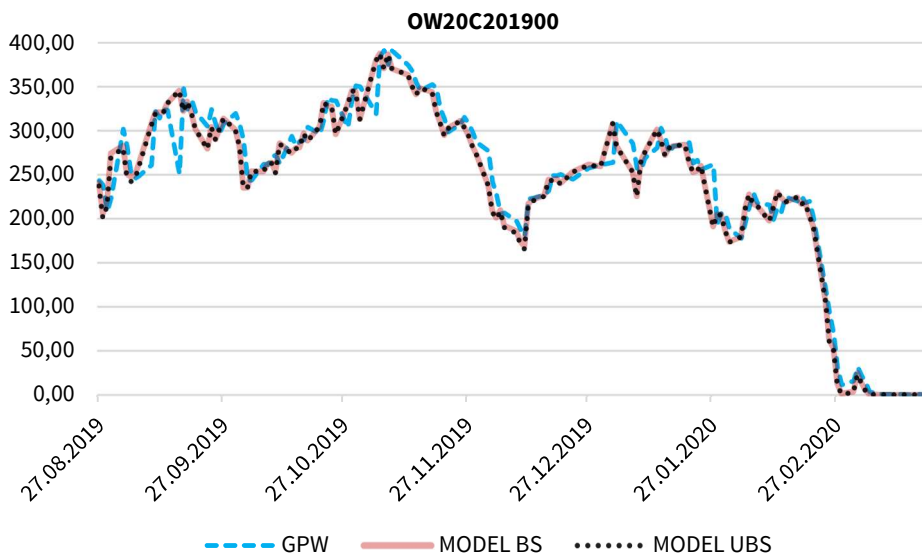
Wykres 6.1.1. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1700 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



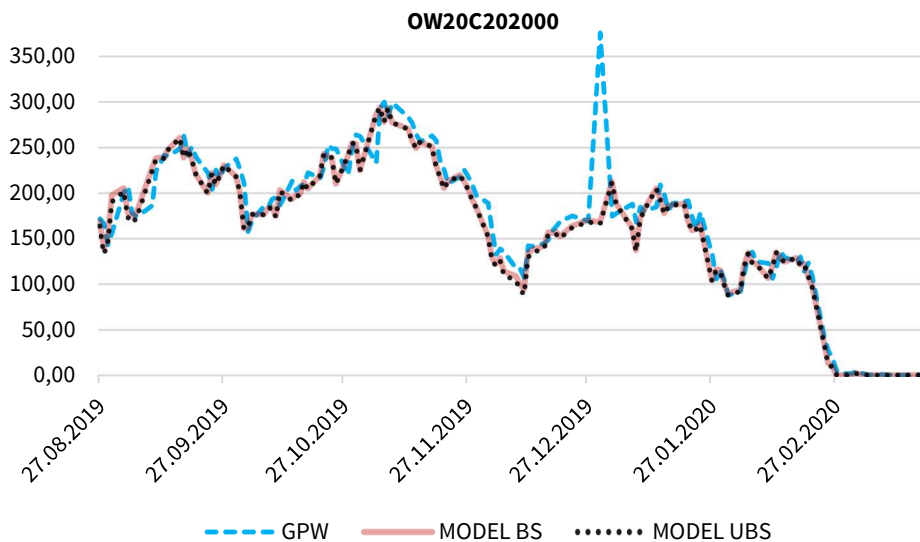
Wykres 6.1.2. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1800 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



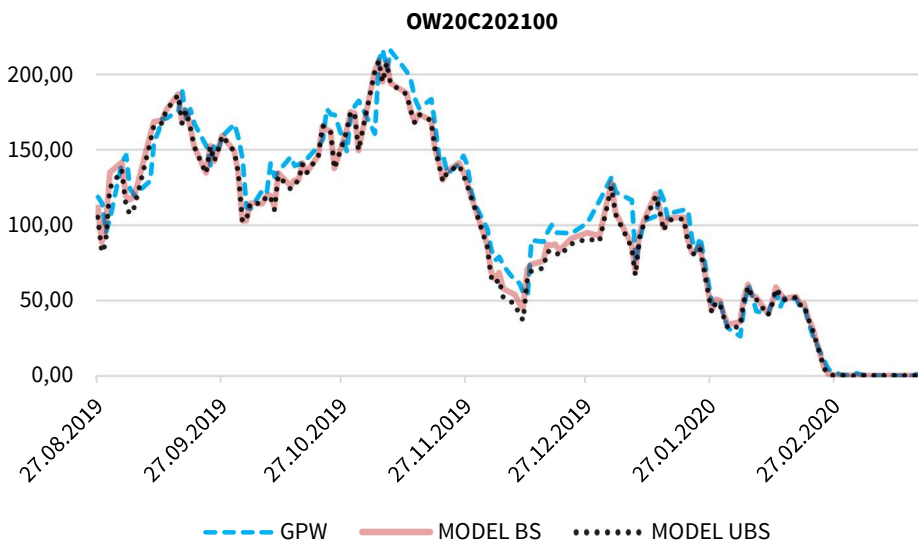
Wykres 6.1.3. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1900 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



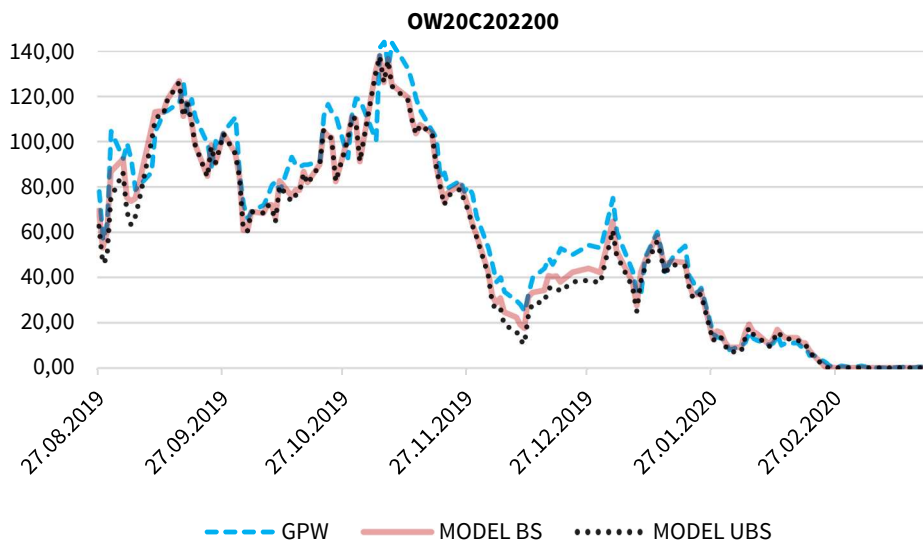
Wykres 6.1.4. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2000 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



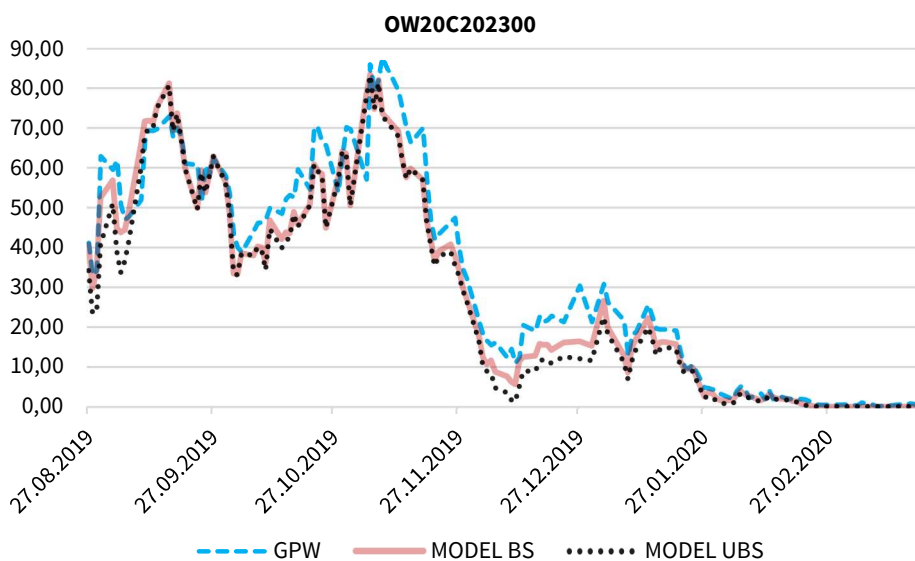
Wykres 6.1.5. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na WIG20 o cenie wykonania 2100 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



Wykres 6.1.6. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2200 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



Wykres 6.1.7. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2300 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.

W celu sprawdzenia zgodności ceny rynkowej opcji (oznaczenie C_0^{GPW}) z wyceną opcji uzyskaną na podstawie formuły Blacka-Scholesa (oznaczenie C_0^{BS}), a następnie z wyceną uzyskaną na podstawie uogólnionej formuły Blacka-Scholesa (oznaczenie C_0^{UBS} , twierdzenie 2.2.1) policzono współczynniki korelacji oraz przeprowadzono testy istotności tych współczynników za pomocą testu t -Studenta dla poziomu istotności $\alpha = 0,01$. W pierwszym przypadku weryfikowano hipotezę zerową $H_0: \rho(C_0^{BS}, C_0^{GPW}) = 0$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1: \rho(C_0^{BS}, C_0^{GPW}) \neq 0$ ($\rho(C_0^{BS}, C_0^{GPW})$ jest współczynnikiem korelacji liniowej między C_0^{BS} i C_0^{GPW}). W drugim przypadku badano hipotezę zerową $H_0: \rho(C_0^{UBS}, C_0^{GPW}) = 0$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1: \rho(C_0^{UBS}, C_0^{GPW}) \neq 0$ ($\rho(C_0^{UBS}, C_0^{GPW})$ jest współczynnikiem korelacji liniowej między C_0^{UBS} i C_0^{GPW}). Wartość empiryczną statystyki t wyznaczono ze wzoru:

$$t = \frac{r(C_0^{BS}, C_0^{GPW})}{\sqrt{1 - (r(C_0^{BS}, C_0^{GPW}))^2}} \cdot \sqrt{n-2} \quad \text{lub w drugim przypadku ze wzoru}$$

$$t = \frac{r(C_0^{UBS}, C_0^{GPW})}{\sqrt{1 - (r(C_0^{UBS}, C_0^{GPW}))^2}} \cdot \sqrt{n-2}, \text{ gdzie } r(C_0^{BS}, C_0^{GPW}) \text{ i } r(C_0^{UBS}, C_0^{GPW})$$

są empirycznymi współczynnikami korelacji liniowej z n -elementowej próby, n oznacza liczbę obserwacji ($n=140$). Wartość krytyczną wyznaczono z rozkładu t -Studenta dla $k=n-2$ stopni swobody i $\alpha = 0,01$. Ponadto policzono błędy standardowe modeli oraz współczynniki zmienności resztowej modeli.

Wyniki testowania odpowiednich hipotez oraz ww. charakterystyki przedstawiono w tabelach zamieszczonych poniżej.

Tabela 6.1.1. Istotność współczynników korelacji dla modelu BS

	OW20C201700	OW20C201800	OW20C201900	OW20C202000	OW20C202100	OW20C202200	OW20C202300
Wartość współczynnika korelacji	0,98451	0,98316	0,98060	0,95933	0,98073	0,98268	0,97885
Wartość empiryczna statystyki <i>t</i> -Studenta	65,9722	63,1947	58,7647	39,9241	58,9697	62,2891	56,2114
Wartość krytyczna statystyki <i>t</i> -Studenta, $\alpha = 0,01$	2,61573	2,61573	2,61573	2,6157	2,61573	2,61573	2,61573
Błąd standardowy modelu	24,0064	21,8921	19,6831	22,9428	11,7833	7,91613	5,44370
Współczynnik zmienności resztowej modelu	5,770%	6,718%	8,167%	13,797%	11,449%	13,337%	16,680%

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.

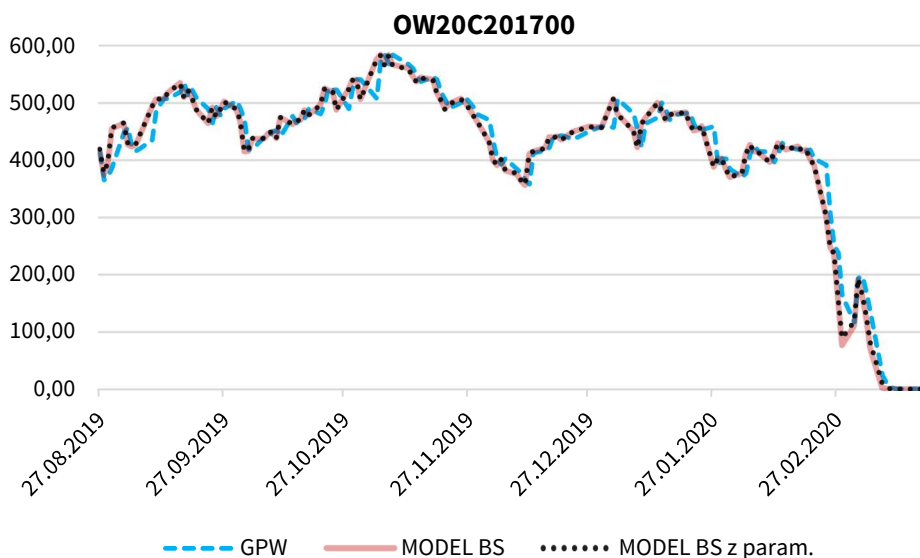
Tabela 6.1.2. Istotność współczynników korelacji dla modelu UBS

	OW20C201700	OW20C201800	OW20C201900	OW20C202000	OW20C202100	OW20C202200	OW20C202300
Wartość współczynnika korelacji	0,98455	0,98323	0,98070	0,95937	0,98039	0,97900	0,97334
Wartość empiryczna statystyki <i>t</i> -Studenta	66,0525	63,3319	58,9193	39,9431	58,4457	56,4099	49,8508
Wartość krytyczna statystyki <i>t</i> -Studenta, $\alpha = 0,01$	2,61573	2,61573	2,61573	2,61573	2,61573	2,61573	2,61573
Błąd standardowy modelu	6,22040	21,8462	19,6334	22,9327	11,8848	8,70844	6,10372
Współczynnik zmienności resztowej modelu	5,764%	6,704%	8,147%	13,791%	11,548%	14,672%	18,703%

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.

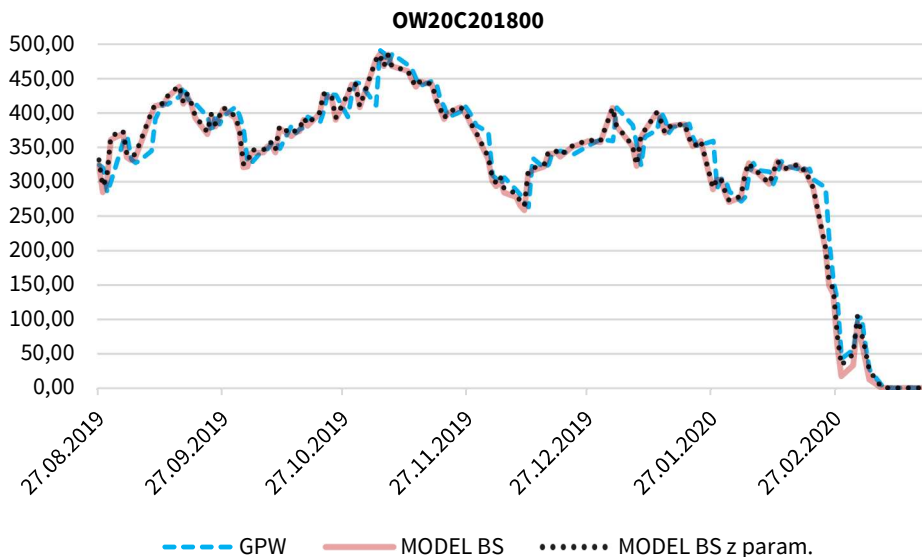
6.2. Wycena opcji notowanych na GPW w Warszawie na podstawie modelu Blacka-Scholesa oraz modelu Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie

Na wykresach zamieszczonych poniżej przedstawiono porównania kształtowania się wyceny rynkowej i wycen na podstawie modelu Blacka-Scholesa (model BS) oraz granicznej formuły na wycenę opcji w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie (model BS z parametrami zmieniającymi się w czasie, twierdzenie 5.4.1). Przedstawiono wyceny dla opcji o różnych cenach wykonania i terminie wygaśnięcia 20 marca 2020 r.



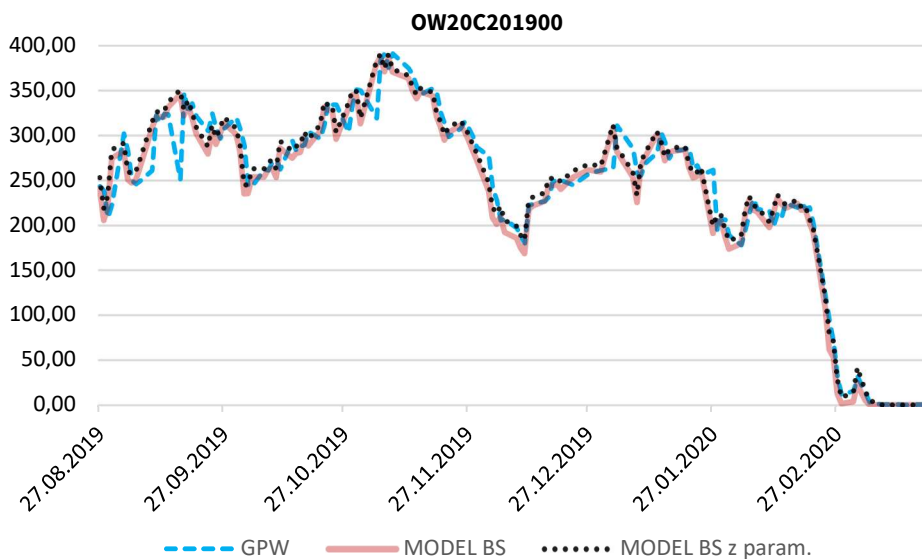
Wykres 6.2.1. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1700 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



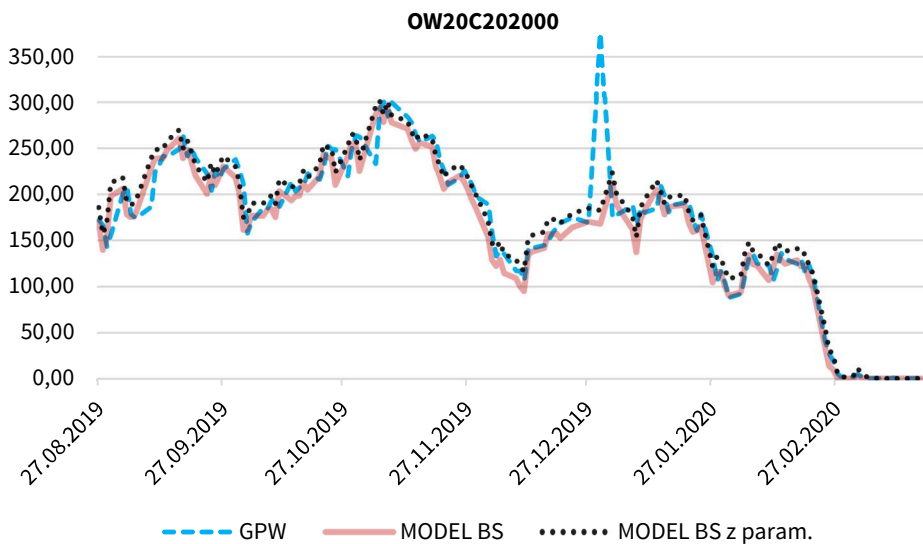
Wykres 6.2.2. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1800 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



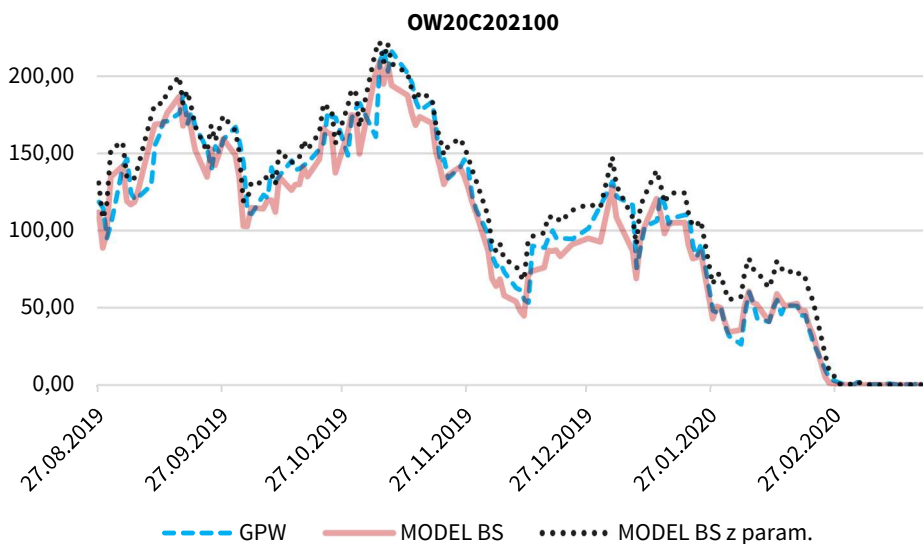
Wykres 6.2.3. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1900 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



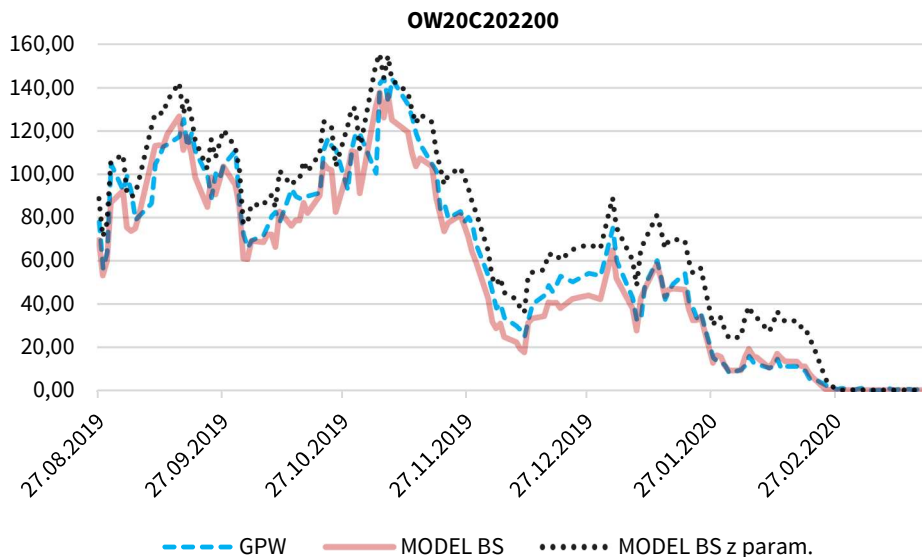
Wykres 6.2.4. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2000 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



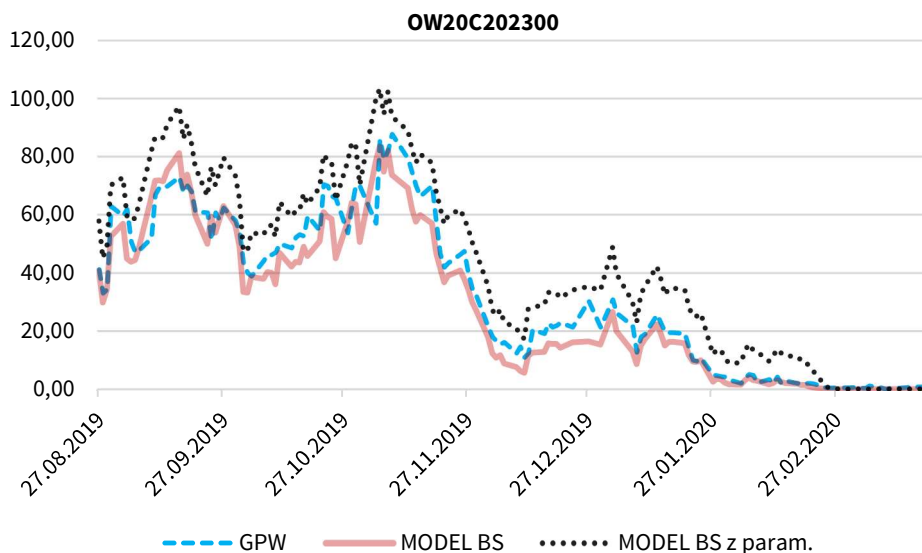
Wykres 6.2.5. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2100 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



Wykres 6.2.6. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2200 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.



Wykres 6.2.7. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2300 punktów

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.

W celu sprawdzenia zgodności ceny rynkowej opcji z wyceną opcji uzyskaną na podstawie formuły Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie, podobnie jak w poprzednim podrozdziale, policzono współczynniki korelacji oraz przeprowadzono testy istotności tych współczynników za pomocą testu *t*-Studenta dla poziomu istotności $\alpha = 0,01$. Badanie przeprowadzono również dla tej samej próby, 140 obserwacji. Ponadto policzono błędy standardowe oraz współczynniki zmienności resztowej dla modelu Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie.

Wyniki testowania odpowiednich hipotez oraz ww. charakterystyki przedstawiono w tabeli zamieszczonej poniżej.

Tabela 6.2.1. Istotność współczynników korelacji dla modelu BS z parametrami zmieniającymi się w czasie

	OW20C201700	OW20C201800	OW20C201900	OW20C202000	OW20C202100	OW20C202200	OW20C202300
Wartość współczynnika korelacji	0,9849	0,98378	0,98165	0,96073	0,97790	0,97767	0,97956
Wartość empiryczna statystyki <i>t</i> -Studenta	66,9321	64,4318	60,4690	40,6726	54,9469	54,6488	57,2102
Wartość krytyczna statystyki <i>t</i> -Student, $\alpha = 0,01$	2,61573	2,61573	2,61573	2,61573	2,61573	2,61573	2,61573
Błąd standardowy modelu	23,6725	21,4854	19,1488	22,5534	12,60949	8,97687	5,35255
Współczynnik zmienności resztowej modelu	5,690%	6,594%	7,946%	13,563%	12,252%	15,124%	16,401%

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych umieszczonych w dodatku 2.

6.3. Podsumowanie

Wyceny dla wszystkich typów opcji uzyskane z modelu UBS w porównaniu z wycenami z modelu BS są niższe. Niemniej różnice w ww. wycenach są stosunkowo nieduże. We wszystkich przypadkach korelacja między ceną rynkową a wyceną modelu BS oraz korelacja między ceną rynkową a wyceną modelu UBS okazały się istotne (poziom istotności 0,01) i bardzo wysokie. Zatem cena rynkowa reaguje w podobny sposób na zmianę parametrów otoczenia jak model Blacka-Scholesa oraz uogólniony model Blacka-Scholesa. Współczynniki korelacji między ceną rynkową a wyceną modelu UBS są wyższe niż współczynniki korelacji między ceną rynkową a wyceną modelu BS dla opcji OW20C201700, OW20C201800, OW20C201900, OW20C202000. Średnie błędy obu modeli stanowią 5,76%–18,70% średniej ceny rynkowej opcji.

Wyceny uzyskane z modelu BS z parametrami zmieniającymi się w czasie w porównaniu z wycenami z modelu BS są wyższe dla opcji OW20C201900, OW20C202000, OW20C202100, OW20C202200, OW20C202300 oraz opcji OW20C201800 (z wyjątkiem wycen w dniach 5.11.2019 r. i 7.11.2019 r.). Dla poszczególnych opcji różnice w ww. wycenach są nieduże. Najniższe wyceny opcji uzyskano dla uogólnionego modelu Blacka-Scholesa. We wszystkich przypadkach korelacja między ceną rynkową a wyceną modelu BS z parametrami zmieniającymi się w czasie okazała się istotna (poziom istotności 0,01) i bardzo wysoka. Zatem cena rynkowa reaguje w podobny sposób na zmianę parametrów otoczenia jak model Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie. Współczynniki korelacji między ceną rynkową a wyceną modelu BS z parametrami zmieniającymi się w czasie są wyższe niż współczynniki korelacji między ceną rynkową a wyceną modelu BS dla opcji OW20C201700, OW20C201800, OW20C201900, OW20C202000, OW20C202300. Współczynniki korelacji między ceną rynkową a wyceną modelu BS z parametrami zmieniającymi się w czasie są wyższe niż współczynniki korelacji między ceną rynkową a wyceną modelu UBS dla opcji OW20C201700, OW20C201800, OW20C201900, OW20C202000, OW20C202300. Zatem w większości przypadków wycena opcji modelu BS z parametrami zmieniającymi się w czasie w największym stopniu wyjaśnia kształtowanie się cen rynkowych opcji. Współczynniki zmienności resztowej modelu BS z parametrami zmieniającymi się w czasie wynoszą 5,69%–16,40%.

Zakończenie

W monografii przedstawiono wyceny europejskich opcji kupna w modelach rynku z czasem dyskretnym (w uogólnionym modelu CRR oraz w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie). W teoretycznej części pracy wyprowadzono graniczne formuły (przy nieskończonej liczbie chwil handlowania akcjami) na wyceny opcji w wyżej wymienionych modelach i uzyskano formuły typu Blacka-Scholesa. Dowody twierdzeń okazały się zawile oraz wymagały użycia szeregu oszacowań i twierdzeń z analizy matematycznej oraz rachunku prawdopodobieństwa. Nie wymagały jednak zaawansowanych metod analizy stochastycznej. W rozdziałach 3–5 zamieszczono dowody twierdzeń dla dwóch jednostek czasu, a następnie analogiczne dowody bądź ich fragmenty dla kolejnych jednostek czasu. Tak przeprowadzone pracochłonne rozumowanie pozwala na dostrzeżenie faktu, iż w kolejnych długich przedziałach czasu, dla których parametry rynku są różne, można rozważać niejednakową liczbę chwil handlowania akcjami (w monografii założono, że w każdej jednostce czasu liczba chwil zmiany portfela jest stała) i wówczas w przejściu granicznym można uzyskać te same formuły na wycenę opcji, które przedstawiono w monografii. Dla otrzymanych formuł typu Blacka-Scholesa obliczono współczynniki wrażliwości oraz podano ich dolne i górne oszacowania.

W empirycznej części monografii podjęto próbę zweryfikowania następującej hipotezy badawczej: wycena opcji kupna na indeks WIG20 w oparciu o uzyskane graniczne formuły na wycenę opcji w uogólnionym modelu CRR oraz w modelu CRR z parametrami zmieniającymi się w czasie umożliwia trafniejsze oszacowanie ceny rynkowej opcji niż słynna formuła Blacka-Scholesa. Na podstawie analizy w rozdziale 6 stwierdzono, że dla wszystkich trzech modeli (BS, UBS, BS z parametrami zmieniającymi się w czasie) wycena opcji na podstawie modelu jest istotnie skorelowana z ceną rynkową opcji (dla poziomu istotności 0,01). Uzyskano małe lub umiarkowane błędy standardowe modeli. Dla pięciu z siedmiu opcji o różnych cenach wykonania wycena na podstawie modelu BS z parametrami zmieniającymi się w czasie w większym stopniu

wyjaśnia kształtowanie się cen rynkowych opcji niż wycena w oparciu o model BS. W przypadku uogólnionego modelu BS wycena dla czterech z siedmiu opcji bardziej odzwierciedla cenę rynkową opcji niż model BS.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że zaprezentowane uogólnienia modelu Blacka-Scholesa mogą stanowić użyteczne narzędzia wyceny opcji, również na polskim rynku kapitałowym. W większości rozważonych przypadków wycena opcji w oparciu o model BS z parametrami zmieniającymi się w czasie w największym stopniu wyjaśnia kształtowanie się cen rynkowych opcji. Ponadto model ten umożliwia uchylenie jednego z najczęściej krytykowanych założeń modelu Blacka-Scholesa – założenia o stałości w czasie współczynnika zmienności instrumentu bazowego. Parametr σ oszacowano na podstawie stóp zwrotu indeksu WIG20 z ostatnich 230 dni sesji, uwzględniając w modelu Blacka-Scholesa oraz uogólnionym modelu Blacka-Scholesa dane historyczne, natomiast w modelu Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie – dane historyczne i dane rzeczywiste (zamiast oszacowań przyszłych stóp zwrotu). Przyjęcie wspomnianych danych rzeczywistych jest podejściem jedynie teoretycznym w wycenie opcji. Jednakże zakładając, iż uda się uzyskać bardzo dobre oszacowanie przyszłych stóp zwrotu i wykorzystując ten sam algorytm oszacowania parametrów σ dla wszystkich trzech omawianych modeli, można spodziewać się, że wycena opcji w modelu Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie najlepiej odzwierciedli rynkowe ceny opcji. Badania empiryczne dotyczyły jedynie okresu od 27 sierpnia 2019 r. do 20 marca 2020 r. dla opcji kupna na indeks WIG20 o cenach wykonania 1700 punktów, 1800 punktów, 1900 punktów, 2000 punktów, 2100 punktów, 2200 punktów, 2300 punktów z terminem wygaśnięcia 20 marca 2020 r. Niewątpliwie należałoby przeprowadzić analogiczne analizy dla odmiennych okresów czasu oraz innych opcji. Ponadto w praktyce, oprócz zastosowanej w monografii zmienności historycznej, stosuje się wiele metod prognozowania parametru σ , m.in.: modele wykorzystujące oczekiwania rynku (zmienność implikowana), stochastyczne modele szeregów czasowych, sieci neuronowe. Zatem w analizie porównawczej zaprezentowanych w monografii modeli warto byłoby również uwzględnić ww. metody. Prognozowanie przyszłej zmienności stóp zwrotu indeksu WIG20 jest zadaniem bardzo trudnym, niemniej jednak jakość tego oszacowania ma bardzo istotny wpływ na wycenę opcji.

Podsumowując, przedstawione w monografii dyskretne modele wyceny opcji wraz z ich przejściami granicznymi wydają się ciekawym kierunkiem dalszych badań.

Dodatek 1

Twierdzenie Lapunowa (Jakubowski, Sztencel, 2000: 211–213). Rozważono tablicę zmiennych losowych postaci $(X_{n,k})$, $k = 1, 2, \dots, n$; $n = 1, 2, \dots$. Założono, że zmienne losowe w każdym wierszu, czyli $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ są niezależne. Jeśli dla wszystkich n, k naturalnych i dla pewnego $\delta > 0$ zachodzi $E|X_{n,k}|^{2+\delta} < \infty$, oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E|X_{n,k} - EX_{n,k}|^{2+\delta} = 0, \quad \text{gdzie} \quad s_n^2 = \sum_{k=1}^n D^2(X_{n,k}) \neq 0 \quad \text{dla}$$

dowolnego $n \in N$,

to

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad P\left(\frac{\sum_{k=1}^n X_{n,k} - E\left(\sum_{k=1}^n X_{n,k}\right)}{s_n} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du = \phi(x)$$

($\phi(\cdot)$ – dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego).

Lemat. Warunek Lapunowa dla rozkładu dwupunktowego. Niech dla dowolnego $n \in N$, $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie dwupunktowym: $P(X_{n,j} = 1) = p_n$, $P(X_{n,j} = 0) = 1 - p_n$, $j = 1, 2, \dots, n$. Założono, że $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \in (0, 1)$.

Wówczas dla pewnego $\delta > 0$ zachodzi $E|X_{n,j}|^{2+\delta} < \infty$ oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{j=1}^n E|X_{n,j} - EX_{n,j}|^{2+\delta} = 0.$$

Dowód. Dla $\delta = 1$. Zachodzi:

$$E|X_{n,j}|^{2+1} = 0 \cdot (1 - p_n) + 1 \cdot p_n = p_n < \infty,$$

$$E|X_{n,j} - EX_{n,j}|^{2+1} = p_n^3 \cdot (1 - p_n) + (1 - p_n)^3 \cdot p_n = -2p_n^4 + 4p_n^3 - 3p_n^2 + p_n,$$

$$s_n^{2+1} = (s_n^2)^{\frac{3}{2}} = [np_n \cdot (1 - p_n)]^{\frac{3}{2}}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^3} \sum_{j=1}^n E|X_{n,j} - EX_{n,j}|^3 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-2p_n^4 + 4p_n^3 - 3p_n^2 + p_n)}{[np_n \cdot (1 - p_n)]^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2p_n^3 + 4p_n^2 - 3p_n + 1}{\sqrt{p_n} \cdot (1 - p_n) \cdot \sqrt{1 - p_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \end{aligned}$$

bo $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \in (0, 1)$. □

Poniższe dwa twierdzenia są zmodyfikowaną wersją twierdzenia Pólya (Chow, Teicher, 1988).

Twierdzenie 1 Pólya. Niech $(F_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem funkcji $F_n : R \rightarrow R$ niemalejących i ograniczonych. Niech $\alpha_n = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x)$, $\beta_n = \lim_{x \rightarrow \infty} F_n(x)$. Założono, że dla dowolnego $x \in R$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \tilde{\phi}(x)$, gdzie $\tilde{\phi} : R \rightarrow R$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną oraz niech $\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{\phi}(x)$, $\beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(x)$. Założono ponadto, że $\alpha_n \rightarrow \alpha$, $\beta_n \rightarrow \beta$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \tilde{\phi}(x)$ jednostajnie na R .

Dowód. Funkcja $\tilde{\phi}$ jest niemalejąca. Istotnie. Niech $x_1, x_2 \in R$ oraz $x_1 < x_2$.

Ponieważ $(F_n)_{n=1}^\infty$ jest ciągiem funkcji niemalejących, więc

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} F_n(x_1) \leq F_n(x_2).$$

Ze zbieżności punktowej ciągu $(F_n)_{n=1}^\infty$ do funkcji $\tilde{\phi}$ wynika, że $\tilde{\phi}(x_1) \leq \tilde{\phi}(x_2)$.

Zatem istnieją $\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{\phi}(x) \leq \beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(x)$ i są skończone (bo $\tilde{\phi}$ jest funkcją ograniczoną). Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustaloną liczbą. Do $\varepsilon > 0$ należy dobrać $m \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{\varepsilon}{2} > \frac{\beta - \alpha}{m}$. Ponieważ $\tilde{\phi} : R \rightarrow R$ jest funkcją ciągłą, niemalejącą i ograniczoną w R , więc $(\alpha, \beta) \subset \tilde{\phi}(R) \subset [\alpha, \beta]$. Zatem

$$\forall_{k \in \{1, 2, \dots, m-1\}} \exists_{a_k \in R} \tilde{\phi}(a_k) = \frac{k(\beta - \alpha)}{m} + \alpha.$$

Ponieważ $\tilde{\phi}$ jest niemalejąca, więc ciąg $(a_k)_{k=1}^{m-1}$ jest rosnący. Dodatkowo przyjąto, że:

$$a_0 = -\infty, a_m = \infty, [-\infty, a) = (-\infty, a), [a, \infty] = (a, \infty),$$

$$F_n(-\infty) \stackrel{df}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = \alpha_n, F_n(\infty) \stackrel{df}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} F_n(x) = \beta_n,$$

$$\phi(-\infty) \stackrel{df}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{\phi}(x) = \alpha, \tilde{\phi}(\infty) \stackrel{df}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(x) = \beta.$$

Zachodzi:

$$\tilde{\phi}(a_{k+1}) - \tilde{\phi}(a_k) \leq \frac{\beta - \alpha}{m}, k = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Ze zbieżności punktowej ciągu funkcji $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ do funkcji $\tilde{\phi}$ wynika, że

$$\forall_{k \in \{1, 2, \dots, m-1\}} \exists_{n_{a_k} \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq n_{a_k}} |F_n(a_k) - \tilde{\phi}(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Należy wziąć $n_0 = \max\{n_{a_k} : k = 1, 2, \dots, m-1\}$ i niech $n \geq n_0$. Niech $s \in R$ będzie dowolnie ustaloną liczbą. Wówczas istnieje $k_0 \in \{0, 1, 2, \dots, m-1, m\}$ takie, że $s \in [a_{k_0}, a_{k_0+1})$.

Rozważono przypadki:

I. $F_n(s) \geq \tilde{\phi}(s)$.

Z monotoniczności $F_n, \tilde{\phi}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq F_n(s) - \tilde{\phi}(s) &\leq F_n(a_{k_0+1}) - \tilde{\phi}(a_{k_0}) = F_n(a_{k_0+1}) - \tilde{\phi}(a_{k_0+1}) + \\ &+ \tilde{\phi}(a_{k_0+1}) - \tilde{\phi}(a_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta - \alpha}{m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

II. $F_n(s) < \tilde{\phi}(s)$. Wówczas

$$0 < \tilde{\phi}(s) - F_n(s) \leq \tilde{\phi}(a_{k_0+1}) - F_n(a_{k_0}) = \tilde{\phi}(a_{k_0+1}) - \tilde{\phi}(a_{k_0}) + \tilde{\phi}(a_{k_0}) - F_n(a_{k_0}) < \\ < \frac{\beta - \alpha}{m} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Zatem

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall s \in R \quad |F_n(s) - \tilde{\phi}(s)| < \varepsilon,$$

co dowodzi jednostajnej zbieżności $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ do $\tilde{\phi}$ na R . □

Twierdzenie 2 Pólya. Niech $-\infty < a < b < \infty$ i niech $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem funkcji $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ niemalejących i ograniczonych. Założono, że dla dowolnego $x \in [a, b]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \tilde{\phi}(x)$, gdzie $\tilde{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą. Wówczas $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \tilde{\phi}(x)$ jednostajnie na $[a, b]$.

Dowód. Dowód twierdzenia 2 Pólya jest niewielką modyfikacją dowodu poprzedniego twierdzenia.

Niech $\alpha = \tilde{\phi}(a)$, $\beta = \tilde{\phi}(b)$. Do dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ dobieramy

$$m \in \mathbb{N} \text{ takie, że } \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\beta - \alpha}{m}.$$

Ponieważ $\tilde{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, niemalejącą i ograniczoną na $[a, b]$, więc $\tilde{\phi}([a, b]) = [\alpha, \beta]$. Zatem

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, m-1\} \quad \exists a_k \in [a, b] \quad \tilde{\phi}(a_k) = \frac{k(\beta - \alpha)}{m} + \alpha.$$

Ponieważ $\tilde{\phi}$ jest niemalejąca, więc ciąg $(a_k)_{k=1}^{m-1}$ jest rosnący. Dodatkowo przyjęto, że: $a_0 = a$, $a_m = b$.

Ze zbieżności punktowej ciągu funkcji $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ do funkcji $\tilde{\phi}$ wynika, że

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, m\} \quad \exists n_{a_k} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_{a_k} \quad |F_n(a_k) - \tilde{\phi}(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Należy wziąć $n_0 = \max\{n_{a_k} : k = 0, 1, 2, \dots, m-1, m\}$ i niech $n \geq n_0$. Niech będzie dowolnie ustalone $s \in (a, b)$. Wówczas istnieje $k_0 \in \{0, 1, 2, \dots, m-1, m\}$ takie, że $s \in [a_{k_0}, a_{k_0+1})$.

Rozważono przypadki:

$$\text{I. } F_n(s) \geq \tilde{\phi}(s).$$

Z monotoniczności $F_n, \tilde{\phi}$ wynika, że

$$\begin{aligned} 0 \leq F_n(s) - \tilde{\phi}(s) &\leq F_n(a_{k_0+1}) - \tilde{\phi}(a_{k_0}) = F_n(a_{k_0+1}) - \tilde{\phi}(a_{k_0+1}) + \tilde{\phi}(a_{k_0+1}) - \tilde{\phi}(a_{k_0}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\beta - \alpha}{m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{II. } F_n(s) < \tilde{\phi}(s).$$

Analogicznie:

$$\begin{aligned} 0 < \tilde{\phi}(s) - F_n(s) &\leq \tilde{\phi}(a_{k_0+1}) - F_n(a_{k_0}) = \tilde{\phi}(a_{k_0+1}) - \tilde{\phi}(a_{k_0}) + \tilde{\phi}(a_{k_0}) - F_n(a_{k_0}) < \\ &< \frac{\beta - \alpha}{m} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall s \in [a, b] \quad |F_n(s) - \tilde{\phi}(s)| < \varepsilon,$$

co dowodzi jednostajnej zbieżności $(F_n)_{n=1}^\infty$ do $\tilde{\phi}$ na przedziale $[a, b]$. □

Wniosek z twierdzenia 1 Pólya. Niech spełnione będą założenia twierdzenia 1 Pólya i niech $x, x_n \in R$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) = \tilde{\phi}(x)$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ $\tilde{\phi}$ jest funkcją ciągłą, więc

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1 \quad |\tilde{\phi}(x_n) - \tilde{\phi}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

Z twierdzenia 1 Pólya ciąg funkcyjny $(F_n)_{n=1}^\infty$ jest jednostajnie zbieżny do $\tilde{\phi}$ na R , zatem

$$\exists_{n_2 \in N} \forall_{n \geq n_2} \sup_{y \in R} |F_n(y) - \tilde{\phi}(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2)$$

Biorąc $\hat{n} = \max\{n_1, n_2\}$ i szacując

$$|F_n(x_n) - \tilde{\phi}(x)| \leq |F_n(x_n) - \tilde{\phi}(x_n)| + |\tilde{\phi}(x_n) - \tilde{\phi}(x)| \leq \sup_{y \in R} |F_n(y) - \tilde{\phi}(y)| + |\tilde{\phi}(x_n) - \tilde{\phi}(x)|,$$

z (1) i (2) można otrzymać dla $n \geq \hat{n}$:

$$|F_n(x_n) - \tilde{\phi}(x)| < \varepsilon.$$

Ostatecznie:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\hat{n} \in N} \forall_{n \geq \hat{n}} |F_n(x_n) - \tilde{\phi}(x)| < \varepsilon, \text{ tj. } \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) = \tilde{\phi}(x). \quad \square$$

Lemat. Jeżeli funkcja $\tilde{\phi} : R \rightarrow R$ jest ciągła, niemalejąca i ograniczona, to jest jednostajnie ciągła.

Dowód. Niech $\alpha = \lim_{x \rightarrow -\infty} \tilde{\phi}(x)$, $\beta = \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(x)$. Należy ustalić dowolne $\varepsilon > 0$.

Do $\varepsilon > 0$ należy dobrać $m \in N$ takie, że $\frac{\varepsilon}{2} > \frac{\beta - \alpha}{m}$. Ponieważ $\tilde{\phi} : R \rightarrow R$ jest funkcją ciągłą, niemalejącą i ograniczoną w R , więc $(\alpha, \beta) \subset \tilde{\phi}(\mathfrak{R}) \subset [\alpha, \beta]$. Zatem

$$\forall_{k \in \{1, 2, \dots, m-1\}} \exists_{a_k \in R} \tilde{\phi}(a_k) = \frac{k(\beta - \alpha)}{m} + \alpha.$$

Ponieważ $\tilde{\phi}$ jest niemalejąca, więc ciąg $(a_k)_{k=1}^{m-1}$ jest rosnący. Dodatkowo przyjęto, że: $a_0 = -\infty$, $a_m = \infty$, $[-\infty, a) = (-\infty, a)$.

Zachodzi:

$$\tilde{\phi}(a_{k+1}) - \tilde{\phi}(a_k) \leq \frac{\beta - \alpha}{m} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Należy przyjąć $\delta = \min_{k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}} (a_{k+1} - a_k) > 0$ oraz ustalić dowolne

$x < y < x + \delta$. Wówczas $x \in [a_{k_0}, a_{k_0+1})$ dla pewnego

$k_0 \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. Ponieważ $x < y < x + \delta$, to

$y \in (a_{k_0}, a_{k_0+1} + \delta) \subset (a_{k_0}, a_{k_0+2})$. Stąd i z monotoniczności funkcji $\tilde{\phi}$:

Zatem pokazano, że

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\delta > 0} \quad \forall_{x, y \in R} \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |\tilde{\phi}(x) - \tilde{\phi}(y)| < \varepsilon,$$

co dowodzi jednostajnej ciągłości funkcji $\tilde{\phi}$ na R . □

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcje $f_{n,k} : R \rightarrow [0, \infty)$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{n,k}(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,k}(x) \text{ dla dowolnego } x \in R.$$

Dowód. Niech $x \in R$. Jeżeli $g_{n,k}(x) = \inf_{m \geq n} f_{m,k}(x)$, to

$$0 \leq g_{n,k}(x) \uparrow g_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \geq n} f_{m,k}(x) \text{ oraz } g_{n,k}(x) \leq f_{n,k}(x). \quad (1)$$

Wówczas z (1):

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n,k}(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}(x)$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{n,k}(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}(x).$$

Ponadto dla dowolnego $M \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^M g_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^M \lim_{n \rightarrow \infty} g_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^M \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,k}(x).$$

Z dowolności M wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_{n,k}(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n,k}(x). \quad \square$$

Twierdzenie 2 (Billingsley, 1987: 210). Niech dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ będą rzeczywistymi funkcjami mierzalnymi określonymi na przestrzeni z miarą $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Wówczas

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega) \right) d\mu(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\Omega} f_n(\omega) d\mu(\omega) \right).$$

Lemat o przybliżaniu z dołu funkcjami schodkowymi. Jeżeli funkcja $c : R \rightarrow [0, \infty)$ jest ciągła, to istnieje niemalejący ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcji przedziałami stałych przyjmujących skończoną liczbę wartości taki, że

$$\forall_{x \in R} 0 \leq \varphi_n(x) \leq c(x) \text{ oraz } \forall_{x \in R} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = c(x).$$

Dowód. Rozważane będą przedziały wzajemnie rozłączne postaci: $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$,

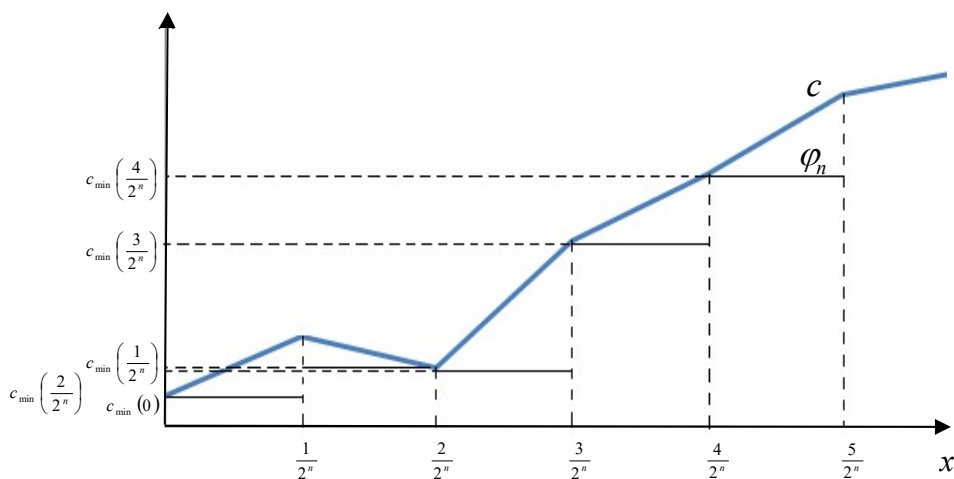
$$k \in Z, n \in N.$$

Przyjęto

$$\forall \varphi_n(x) = \sum_{k=-n \cdot 2^n}^{n \cdot 2^n - 1} c_{\min}\left(\frac{k}{2^n}\right) \cdot I_{\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}(x),$$

gdzie $\min_{x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]} c(x) =: c_{\min}\left(\frac{k}{2^n}\right)$ jest dobrze określone na każdym przedziale

(ponieważ funkcja $c : R \rightarrow [0, \infty)$ jest ciągła).



Rysunek 1. Przybliżanie z dołu funkcji ciągłej i nieujemnej funkcjami schodkowymi

Źródło: opracowanie własne.

Należy pokazać, że ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest niemalejący. Niech $t \in R$ będzie ustalone. Wówczas dla $n_o = \text{entier}(t+1)$ i dowolnego $n \geq n_o$ istnieje liczba całkowita

$$k(t, n) \in (-n \cdot 2^n, n \cdot 2^n - 1] \text{ taka, że } t \in \left(\frac{k(t, n)}{2^n}, \frac{k(t, n) + 1}{2^n} \right].$$

Biorąc teraz pod uwagę kolejny wyraz ciągu, tj. φ_{n+1} , można dostać

$$t \in \left(\frac{k(t, n+1)}{2^{n+1}}, \frac{k(t, n+1) + 1}{2^{n+1}} \right]. \quad \text{Stąd i z poprzedniego kroku}$$

$$t \in \left(\frac{2 \cdot k(t, n)}{2^{n+1}}, \frac{2 \cdot k(t, n) + 1}{2^{n+1}} \right] \quad \text{lub} \quad t \in \left(\frac{2 \cdot k(t, n) + 1}{2^{n+1}}, \frac{2 \cdot k(t, n) + 2}{2^{n+1}} \right].$$

Zatem przy każdym kolejnym kroku następuje podział każdego przedziału na pół. Wówczas minimum: $c_{\min} \left(\frac{k'}{2^{n+1}} \right)$ zostaje brane po mniejszym zbiorze.

Biorąc minimum funkcji po mniejszym zbiorze, dostajemy wartość nie mniejszą od wartości funkcji będącej minimum funkcji po większym zbiorze. Zatem rozważany ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest niemalejący.

Ponadto z definicji φ_n wynika, że

$$\bigvee_{x \in R} 0 \leq \varphi_n(x) \leq c(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Należy pokazać, że

$$\bigvee_{x \in R} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = c(x).$$

Należy ustalić dowolne $x \in R$. Wówczas dla każdego $n \geq n_o = \lceil |x| \rceil + 1 > |x|$

$$\text{istnieje } k_o \in Z, \quad -n \cdot 2^n \leq k_o \leq n \cdot 2^n - 1 \text{ takie, że } x \in \left(\frac{k_o}{2^n}, \frac{k_o + 1}{2^n} \right].$$

Niech $\varepsilon > 0$. Z ciągłości funkcji c wiadomo, że istnieje $\delta_\varepsilon > 0$ taka, że

$$\bigvee_{y \in R} (|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |c(x) - c(y)| < \varepsilon).$$

Przyjęto $n_o \leq n_1 \in N$ takie, że $\delta_\varepsilon \geq 1/2^{n_1}$. Wówczas dla dowolnego $n \geq n_1$ zachodzi $\delta_\varepsilon \geq 1/2^{n_1} \geq 1/2^n$.

Stąd

$$|\varphi_n(x) - c(x)| \leq \left| \min_{x \in \left[\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_0+1}{2^n}\right]} c(x) - c(x) \right| = |c(x^*) - c(x)|, \text{ gdzie } x^* \in \left[\frac{k_0}{2^n}, \frac{k_0+1}{2^n}\right].$$

Ponadto

$$|x^* - x| \leq \frac{k_0+1}{2^n} - \frac{k_0}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq \delta_\varepsilon.$$

Z ciągłości c wynika, że

$$|c(x^*) - c(x)| < \varepsilon.$$

Stąd

$$|\varphi_n(x) - c(x)| < \varepsilon.$$

Zatem pokazano, że dla dowolnego $x \in R$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\exists_{n_1 \in N} \quad \forall_{n \geq n_1} \quad |c(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon,$$

tj. pokazano zbieżność punktową ciągu funkcji $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ do funkcji c . □

Lemat o przybliżaniu z góry funkcjami schodkowymi. Jeżeli funkcja $c : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest ciągła i nieujemna, to istnieje nierosnący ciąg $(\Psi_n)_{n=1}^\infty$ funkcji stałych (na przedziałach rozłącznych spełniających założenia lematu 3.3.2) przyjmujących przeliczalną liczbę wartości taki, że

$$\forall_{x \in [0, \infty)} \quad 0 \leq c(x) \leq \Psi_n(x) \text{ oraz } \forall_{x \in [0, \infty)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(x) = c(x).$$

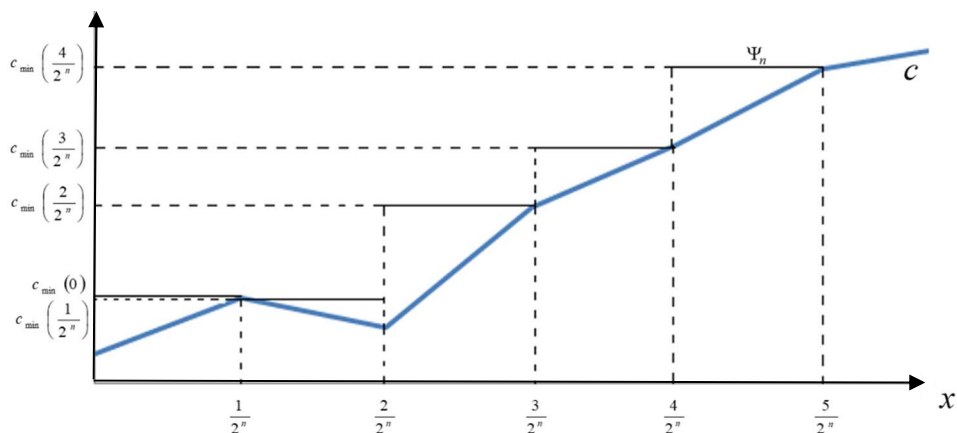
Dowód. Będą rozważane przedziały wzajemnie rozłączne postaci: $\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$,

$k \in N \cup \{0\}$, $n \in N$. Przyjęto

$$\forall_{x \in [0, \infty)} \quad \Psi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{\max}\left(\frac{k}{2^n}\right) \cdot \mathbf{I}_{\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]}(x) + c(0) \cdot \mathbf{I}_{\{0\}}(x),$$

$$\text{gdzie } c_{\max}\left(\frac{k}{2^n}\right) := \max_{x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]} c(x)$$

jest dobrze określone, ponieważ funkcja c jest ciągła na $[0, \infty)$.



Rysunek 2. Przybliżanie z góry funkcji ciągłej i nieujemnej funkcjami schodkowymi

Źródło: opracowanie własne.

Należy pokazać, że ciąg $(\Psi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest nierosnący. Niech $t \in (0, \infty)$ będzie ustalone. Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje liczba $\bar{k}(t, n) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ taka, że $t \in \left[\frac{\bar{k}(t, n)}{2^n}, \frac{\bar{k}(t, n) + 1}{2^n} \right]$.

Biorąc teraz pod uwagę kolejny wyraz ciągu, tj. Ψ_{n+1} , można otrzymać:

$$t \in \left[\frac{\bar{k}(t, n+1)}{2^{n+1}}, \frac{\bar{k}(t, n+1) + 1}{2^{n+1}} \right]. \quad \text{Stąd i z poprzedniego kroku}$$

$$t \in \left[\frac{2 \cdot \bar{k}(t, n)}{2^{n+1}}, \frac{2 \cdot \bar{k}(t, n) + 1}{2^{n+1}} \right] \quad \text{lub} \quad t \in \left[\frac{2 \cdot \bar{k}(t, n) + 1}{2^{n+1}}, \frac{2 \cdot \bar{k}(t, n) + 2}{2^{n+1}} \right].$$

Zatem przy każdym kolejnym kroku następuje podział każdego przedziału na pół. Wówczas maksimum $c_{\max} \left(\frac{k''}{2^{n+1}} \right)$ ($k'' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) jest brane po mniejszym zbiorze. Biorąc maksimum funkcji po mniejszym zbiorze, dostajemy wartość nie większą od wartości funkcji będącej maksimum funkcji po większym zbiorze. Zatem rozważany ciąg $(\Psi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest nierosnący.

Ponadto z definicji Ψ_n wynika, że

$$\bigvee_{x \in [0, \infty)} 0 \leq c(x) \leq \Psi_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Należy pokazać, że

$$\bigvee_{x \in [0, \infty)} \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi_n(x) = c(x).$$

Ustalono dowolne $x \in (0, \infty)$. Wówczas dla każdego $n \in N$ istnieje

$$\bar{k}_o \in N \cup \{0\} \text{ takie, że } x \in \left[\frac{\bar{k}_o}{2^n}, \frac{\bar{k}_o + 1}{2^n} \right].$$

Niech $\varepsilon > 0$. Z ciągłości funkcji c wiadomo, że istnieje $\delta_\varepsilon > 0$ taka, że

$$\bigvee_{y \in R} (|x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |c(x) - c(y)| < \varepsilon).$$

Przyjęto $n_1 \in N$ takie, że $\delta_\varepsilon \geq 1/2^{n_1}$. Wówczas dla dowolnego $n \geq n_1$ zachodzi $\delta_\varepsilon \geq 1/2^{n_1} \geq 1/2^n$.

Stąd

$$|\Psi_n(x) - c(x)| \leq \left| \max_{x \in \left[\frac{\bar{k}_o}{2^n}, \frac{\bar{k}_o + 1}{2^n} \right]} c(x) - c(x) \right| = |c(\hat{x}) - c(x)|,$$

$$\text{gdzie } \hat{x} \in \left[\frac{\bar{k}_o}{2^n}, \frac{\bar{k}_o + 1}{2^n} \right].$$

Ponadto

$$|\hat{x} - x| \leq \frac{\bar{k}_o + 1}{2^n} - \frac{\bar{k}_o}{2^n} = \frac{1}{2^n} \leq \delta_\varepsilon.$$

Z ciągłości c wynika, że

$$|c(\hat{x}) - c(x)| < \varepsilon.$$

Stąd

$$|\Psi_n(x) - c(x)| < \varepsilon.$$

Zatem pokazano, że dla dowolnego $x \in [0, \infty)$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\exists_{n_1 \in N} \bigvee_{n \geq n_1} |\Psi_n(x) - c(x)| < \varepsilon,$$

tj. pokazano zbieżność punktową ciągu funkcji $(\Psi_n)_{n=1}^\infty$ do funkcji c . □

Lemat Fatou (Jakubowski, Sztencel, 2000: 343). Niech (Ω, F, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Jeśli zmienne losowe $X_n : \Omega \rightarrow [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$, to

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n dP \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n dP.$$

Twierdzenie Lebesgue’a o zbieżności zmajoryzowanej (Jakubowski, Sztencel, 2000: 345). Niech (Ω, F, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Założono, że funkcje X_n , $n \in \mathbb{N}$, oraz Y są F -mieralne (czyli są zmiennymi losowymi). Jeżeli dla pewnej funkcji całkowalnej Y zachodzą nierówności $|X_n| \leq Y$, $n \in \mathbb{N}$, to wszystkie funkcje X_n są całkowalne, a jeśli ponadto $X_n \xrightarrow{p.n.} X$, to X jest całkowalne i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |X_n - X| dP = 0 \text{ oraz } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n dP = \int_{\Omega} X dP.$$

Twierdzenie Lebesgue’a o zbieżności monotonicznej (Billingsley, 1987: 208; Shiryaev, 1996: 186). Niech funkcje $f, f_n : R \rightarrow R$ będą funkcjami mierzalnymi, określonymi na przestrzeni z miarą (R, F, μ) .

Jeżeli $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest niemalejącym ciągiem funkcji nieujemnych prawie wszędzie zbieżnym do f , gdy $n \rightarrow \infty$, tj. $0 \leq f_n \uparrow f$ prawie wszędzie, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f_n d\mu = \int_R f d\mu.$$

Jeżeli $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest nierosnącym ciągiem funkcji prawie wszędzie zbieżnym do f , gdy $n \rightarrow \infty$, tj. $f_n \downarrow f$ prawie wszędzie, oraz dla pewnej funkcji mierzalnej η takiej, że $\int_R \eta d\mu < \infty$, zachodzi $f_1 \leq \eta$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_R f_n d\mu = \int_R f d\mu.$$

Uwaga (Jakubowski, Sztencel, 2000: 180). Niech $X, X_1, X_2, \dots$ będą zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P) . Zachodzi następująca równoważność:

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow Ef(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Ef(X)$$

dla każdej funkcji ciągłej i ograniczonej $f : R \rightarrow R$.

Twierdzenie Skorochoda (Jakubowski, Sztencel, 2000: 188). Jeśli $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ są rozkładami prawdopodobieństwa na $(R, B(R))$ i $\mu_n \xrightarrow{st} \mu$, to istnieją zmienne losowe $X, X_1, X_2, \dots$ o rozkładach odpowiednio $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots$ określone na $(0, 1)$ takie, że $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ dla każdego $\omega \in (0, 1)$.

Twierdzenie Riesz (Jakubowski, Sztencel, 2000: 110). Niech $X, X_1, X_2, \dots$ będą zmiennymi losowymi określonymi na przestrzeni probabilistycznej (Ω, F, P) . Jeśli zmienne losowe $X_n \xrightarrow{P} X$, to istnieje podciąg zmiennych losowych $(X_{n_k})_{k=1}^\infty$ taki, że $X_{n_k} \xrightarrow{p.n.} X$.

Lemat 2 (Jakubowski, Sztencel, 2000: 112, zad. 8). Niech $L^0 = L^0(\Omega, F, P)$ oznacza przestrzeń wszystkich zmiennych losowych na (Ω, F, P) , przy utożsamianiu zmiennych losowych równych prawie na pewno. Wówczas

$$\rho(X, Y) = E\left(\frac{|X - Y|}{1 + |X - Y|}\right)$$

jest metryką na L^0 , (L^0, ρ) jest przestrzenią metryczną zupełną i $X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n, X) = 0$.

Lemat 3 (Jakubowski, Sztencel, 2000: 113, zad. 16). Niech G będzie funkcją rosnącą nieujemną taką, że $\lim_{x \rightarrow \infty} (G(x)/x) = \infty$. Jeśli zmienne losowe $\{X_t : t \in I\}$ są całkowalne, $M = \sup_{t \in I} \{E(|G(X_t)|)\} < \infty$, to rodzina zmiennych losowych $\{X_t : t \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Lemat 4 (Jakubowski, Sztencel, 2000: 113, zad. 18). Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny w L^p , $p \geq 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy:

- (1) ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa,
- (2) $(|X_n|^p)_{n=1}^\infty$ są jednostajnie całkowalne.

Dodatek 2

Tabela 1. Rynkowa wycena indeksu WIG20, stóp procentowych i opcji kupna na indeks WIG20

Data	WIG20	Interpolacja stóp wolnych od ryzyka	Wariancja stóp zwrotu indeksu WIG20 (roczna)	Średnia stóp zwrotu indeksu WIG20 (roczna)	OW20C201700	OW20C201800	OW20C201900	OW20C202000	OW20C202100	OW20C202200	OW20C202300
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2019-08-27	2095,45	1,80%	0,027	0,027	412,90	324,30	243,30	172,10	118,65	77,95	41,14
2019-08-28	2051,44	1,80%	0,027	-0,082	365,60	320,10	238,35	166,15	114,55	56,35	33,00
2019-08-29	2069,33	1,80%	0,028	-0,104	370,20	284,35	208,50	143,45	95,35	64,00	34,31
2019-08-30	2135,25	1,80%	0,028	-0,106	387,30	301,20	223,55	156,85	104,65	104,65	62,95
2019-09-02	2144,48	1,80%	0,029	-0,076	448,15	358,35	302,00	201,00	141,90	92,45	59,55
2019-09-03	2107,16	1,80%	0,029	-0,078	456,90	366,95	282,10	207,40	146,50	99,15	61,95
2019-09-04	2102,73	1,80%	0,029	-0,102	421,10	332,65	249,90	178,30	124,35	92,00	50,65
2019-09-05	2106,89	1,80%	0,029	-0,090	416,60	327,65	245,95	174,60	119,75	78,70	47,04
2019-09-06	2122,60	1,79%	0,029	-0,088	420,45	330,70	248,95	176,55	122,05	80,65	47,81
2019-09-09	2174,41	1,79%	0,029	-0,078	435,30	344,95	260,90	186,50	129,45	86,45	52,00
2019-09-10	2187,80	1,79%	0,030	-0,060	484,45	391,65	322,20	224,30	155,60	104,75	66,85
2019-09-11	2189,21	1,79%	0,029	-0,043	497,25	403,50	314,20	231,70	161,75	108,45	69,40
2019-09-12	2189,07	1,79%	0,029	-0,037	507,75	413,85	323,95	241,45	170,65	112,80	69,30
2019-09-13	2200,95	1,79%	0,029	-0,017	507,10	412,60	323,40	240,85	170,75	113,75	69,80
2019-09-16	2217,84	1,79%	0,029	-0,025	519,20	423,65	251,05	249,15	176,10	117,40	72,90
2019-09-17	2192,71	1,79%	0,028	0,010	534,70	438,90	347,70	262,65	188,75	125,45	67,60
2019-09-18	2205,02	1,79%	0,028	0,016	509,95	421,25	324,45	241,50	169,15	112,70	70,00
2019-09-19	2191,61	1,79%	0,028	0,009	522,15	414,50	335,50	251,00	177,05	118,70	68,00

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2019-09-20	2171,75	1,79%	0,028	0,011	508,95	413,30	321,35	239,60	167,25	110,60	61,05
2019-09-23	2147,32	1,79%	0,028	-0,022	489,05	394,30	304,70	222,20	152,45	98,95	60,75
2019-09-24	2175,24	1,79%	0,028	-0,026	465,25	371,50	324,00	204,25	139,75	89,15	51,30
2019-09-25	2159,68	1,79%	0,028	-0,006	492,45	398,40	307,65	225,30	154,55	100,25	60,65
2019-09-26	2172,47	1,79%	0,028	-0,019	478,20	383,75	296,60	217,05	150,50	97,60	58,30
2019-09-27	2186,31	1,78%	0,028	-0,010	490,25	395,85	307,65	227,55	159,10	104,40	62,35
2019-09-30	2173,29	1,78%	0,027	0,019	503,55	408,90	319,70	237,60	167,10	110,90	58,00
2019-10-01	2152,50	1,78%	0,028	0,015	490,50	395,80	307,00	226,45	157,70	85,00	53,75
2019-10-02	2098,28	1,78%	0,028	0,005	470,15	376,25	288,70	210,25	143,60	72,00	43,31
2019-10-03	2099,30	1,78%	0,027	0,008	418,30	327,25	243,40	157,80	111,75	66,00	40,00
2019-10-04	2121,16	1,78%	0,027	-0,002	419,45	327,45	243,85	170,10	110,95	69,25	38,84
2019-10-07	2121,87	1,78%	0,027	-0,001	440,65	348,15	261,90	185,85	123,25	72,00	44,17
2019-10-08	2131,83	1,78%	0,027	-0,015	440,10	347,60	261,30	184,60	121,25	75,90	46,13
2019-10-09	2134,37	1,78%	0,027	-0,033	449,90	356,65	270,10	193,25	140,85	80,75	46,31
2019-10-10	2122,99	1,77%	0,026	-0,049	452,35	359,10	272,30	195,50	131,85	82,45	47,06
2019-10-11	2159,91	1,77%	0,026	-0,054	441,30	348,20	262,45	186,95	135,70	78,00	50,00
2019-10-14	2148,53	1,77%	0,026	-0,057	476,80	382,20	293,70	213,60	145,50	93,15	48,52
2019-10-15	2154,80	1,77%	0,026	-0,056	465,00	370,85	282,85	203,35	139,40	89,70	52,20
2019-10-16	2156,06	1,77%	0,026	-0,038	471,15	376,45	288,05	207,80	140,25	88,85	53,15
2019-10-17	2173,75	1,77%	0,026	-0,031	472,10	378,40	289,30	209,80	142,30	89,85	52,65
2019-10-18	2164,75	1,77%	0,026	-0,029	489,50	394,40	304,10	222,55	144,00	89,85	59,65
2019-10-21	2183,25	1,76%	0,026	-0,019	480,45	385,95	296,20	216,20	152,90	91,40	54,55
2019-10-22	2212,15	1,76%	0,026	0,009	498,20	402,95	312,00	229,45	156,85	111,35	70,40
2019-10-23	2208,54	1,76%	0,026	0,011	526,65	431,05	337,95	252,95	177,20	116,50	69,85
2019-10-24	2208,36	1,76%	0,026	0,024	522,95	426,80	334,30	248,85	173,65	112,95	66,40
2019-10-25	2175,27	1,76%	0,025	-0,006	522,65	425,95	334,10	248,50	173,20	111,15	65,60
2019-10-28	2211,80	1,76%	0,025	-0,030	489,80	394,20	303,50	220,10	148,75	92,75	53,80
2019-10-29	2227,93	1,76%	0,025	-0,007	525,40	428,90	335,80	249,45	173,05	112,05	62,90
2019-10-30	2227,38	1,75%	0,025	0,007	541,05	444,05	351,10	263,95	179,25	119,15	70,20
2019-10-31	2194,10	1,75%	0,025	0,002	540,40	443,45	350,00	262,20	182,55	118,35	69,70
2019-11-04	2264,06	1,75%	0,025	-0,034	507,35	411,05	319,30	233,25	160,85	100,45	57,10
2019-11-05	2272,45	1,75%	0,026	-0,019	576,40	491,25	383,85	293,30	209,90	142,00	86,00
2019-11-06	2255,34	1,75%	0,026	-0,009	584,15	486,90	391,20	300,10	216,65	144,35	79,00
2019-11-07	2272,17	1,75%	0,026	-0,035	567,40	470,00	375,05	284,85	203,15	133,15	82,25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2019-11-08	2255,46	1,75%	0,026	-0,034	583,60	486,15	391,00	299,40	216,05	143,90	87,70
2019-11-12	2248,81	1,74%	0,026	-0,047	567,05	469,35	374,50	283,45	201,65	132,10	79,25
2019-11-13	2235,52	1,74%	0,025	-0,022	560,25	462,65	367,50	277,25	195,55	125,95	74,35
2019-11-14	2226,15	1,74%	0,025	-0,022	547,20	449,55	354,55	264,60	183,70	118,75	69,80
2019-11-15	2233,87	1,74%	0,025	-0,008	537,45	439,70	345,50	256,65	177,70	113,65	66,30
2019-11-18	2229,92	1,74%	0,025	0,006	544,95	446,85	352,40	263,10	183,55	104,60	70,00
2019-11-19	2207,25	1,74%	0,024	-0,022	540,85	442,80	348,10	257,70	166,00	101,50	57,35
2019-11-20	2194,58	1,74%	0,024	-0,050	518,25	420,25	325,35	236,00	144,00	84,00	46,55
2019-11-21	2179,53	1,74%	0,024	-0,053	505,90	408,20	313,50	225,50	146,25	86,25	41,97
2019-11-22	2188,24	1,73%	0,024	-0,050	491,05	393,70	298,55	210,50	134,05	79,60	43,41
2019-11-25	2197,54	1,73%	0,024	-0,061	500,50	402,00	307,55	218,30	141,00	82,80	46,37
2019-11-26	2190,58	1,73%	0,023	-0,070	509,20	411,45	315,50	225,80	146,00	78,00	47,43
2019-11-27	2181,33	1,73%	0,023	-0,056	501,95	403,45	308,00	218,15	140,10	80,10	39,78
2019-11-28	2169,09	1,73%	0,023	-0,038	492,80	394,10	299,15	209,90	122,15	76,90	34,58
2019-11-29	2158,94	1,73%	0,023	-0,040	480,35	382,00	286,90	197,50	113,55	67,10	32,00
2019-12-02	2122,30	1,73%	0,023	-0,058	470,10	371,85	277,00	189,00	97,40	53,00	21,50
2019-12-03	2089,92	1,73%	0,023	-0,088	433,30	309,55	241,50	157,30	83,75	45,40	18,00
2019-12-04	2081,89	1,72%	0,022	-0,079	401,20	304,30	227,70	133,00	77,00	38,00	16,60
2019-12-05	2092,12	1,72%	0,022	-0,101	393,10	296,55	205,70	139,00	79,00	40,00	15,52
2019-12-06	2073,11	1,71%	0,022	-0,118	403,15	306,05	206,50	135,25	73,00	33,59	16,15
2019-12-09	2066,55	1,71%	0,022	-0,125	384,10	287,65	197,05	117,00	62,85	29,70	12,40
2019-12-10	2054,11	1,71%	0,022	-0,136	377,00	280,90	188,00	117,00	61,60	28,00	14,57
2019-12-11	2047,34	1,71%	0,022	-0,139	364,85	269,60	180,35	106,70	55,00	25,00	10,98
2019-12-12	2102,19	1,71%	0,022	-0,143	358,30	263,40	222,55	142,25	53,45	32,85	12,45
2019-12-13	2106,51	1,71%	0,023	-0,111	412,40	334,85	223,55	141,75	90,00	39,96	20,49
2019-12-16	2112,93	1,70%	0,022	-0,116	416,70	319,55	227,10	144,80	89,00	44,00	19,09
2019-12-17	2132,25	1,70%	0,022	-0,122	422,00	325,20	231,95	149,20	95,35	48,54	22,66
2019-12-18	2131,85	1,70%	0,023	-0,110	441,80	344,15	249,30	158,40	100,10	45,69	21,29
2019-12-19	2133,72	1,70%	0,022	-0,119	441,00	343,30	249,05	163,40	95,00	49,00	21,84
2019-12-20	2128,04	1,70%	0,022	-0,109	443,30	344,95	250,25	169,00	95,00	52,90	22,88
2019-12-23	2142,54	1,71%	0,022	-0,112	436,40	339,45	244,85	175,00	94,65	50,20	21,30
2019-12-27	2151,74	1,70%	0,022	-0,127	450,55	352,95	257,70	169,40	101,60	54,20	30,40
2019-12-30	2150,09	1,70%	0,022	-0,122	459,70	361,75	261,25	376,00	116,50	53,00	21,34
2020-01-02	2200,10	1,69%	0,022	-0,119	457,45	359,30	263,80	174,75	132,00	75,00	30,87

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020-01-03	2173,97	1,69%	0,022	-0,081	507,10	408,10	310,85	177,75	121,95	59,90	26,23
2020-01-07	2145,01	1,69%	0,023	-0,095	480,95	382,30	285,30	188,00	116,55	42,60	21,77
2020-01-08	2115,99	1,69%	0,023	-0,103	451,50	353,15	257,35	168,20	75,85	32,30	12,71
2020-01-09	2157,61	1,68%	0,023	-0,128	422,45	324,15	256,00	185,00	89,70	33,45	18,02
2020-01-10	2167,91	1,68%	0,023	-0,113	463,90	365,60	268,90	180,20	102,65	48,76	18,87
2020-01-13	2194,42	1,68%	0,023	-0,106	474,35	375,15	280,75	184,95	106,20	60,15	25,66
2020-01-14	2182,96	1,68%	0,023	-0,102	500,15	401,65	302,95	209,40	123,20	52,75	22,78
2020-01-15	2165,08	1,68%	0,023	-0,110	488,65	389,75	292,25	198,00	116,40	41,95	19,65
2020-01-16	2173,74	1,68%	0,023	-0,099	470,60	371,70	274,35	181,00	104,40	46,14	19,44
2020-01-17	2175,95	1,67%	0,023	-0,087	479,10	380,05	282,65	188,65	108,25	49,35	19,51
2020-01-20	2178,06	1,67%	0,023	-0,086	481,60	382,05	284,35	191,00	110,20	54,00	19,17
2020-01-21	2158,04	1,67%	0,023	-0,092	482,90	384,05	286,35	191,50	109,95	40,59	13,90
2020-01-22	2146,56	1,67%	0,023	-0,091	462,75	364,15	263,00	172,95	90,00	38,00	10,00
2020-01-23	2148,41	1,67%	0,023	-0,084	451,20	352,45	266,50	161,00	83,05	33,06	9,63
2020-01-24	2154,28	1,66%	0,023	-0,092	453,15	353,70	255,95	178,85	92,00	35,35	10,70
2020-01-27	2083,79	1,66%	0,023	-0,083	458,90	359,50	261,75	132,30	48,14	15,00	4,90
2020-01-28	2098,04	1,66%	0,024	-0,118	388,80	290,70	193,40	105,95	47,00	13,56	4,72
2020-01-29	2098,18	1,66%	0,024	-0,132	402,65	304,35	206,50	116,65	49,82	13,16	4,39
2020-01-30	2079,98	1,66%	0,023	-0,118	402,60	303,85	206,25	104,00	38,23	11,50	4,26
2020-01-31	2065,90	1,66%	0,023	-0,135	384,70	286,35	188,90	88,00	31,70	8,00	3,25
2020-02-03	2072,88	1,65%	0,023	-0,150	370,40	271,45	178,00	92,00	26,32	9,55	2,00
2020-02-04	2106,63	1,65%	0,023	-0,144	377,40	278,25	196,00	112,00	46,50	11,46	4,03
2020-02-05	2122,91	1,65%	0,024	-0,111	410,80	311,60	213,45	132,45	60,00	15,84	5,08
2020-02-06	2111,76	1,65%	0,024	-0,102	427,15	327,40	229,30	135,30	53,30	12,97	4,81
2020-02-07	2110,20	1,65%	0,024	-0,108	415,80	316,75	217,90	124,90	43,00	12,17	2,25
2020-02-10	2092,89	1,64%	0,024	-0,107	414,10	314,75	215,90	123,00	41,00	10,25	3,36
2020-02-11	2107,40	1,64%	0,024	-0,113	396,75	296,95	198,75	106,55	50,00	11,00	2,00
2020-02-12	2126,31	1,64%	0,024	-0,108	410,95	311,45	213,05	119,30	55,15	14,50	4,28
2020-02-13	2120,07	1,64%	0,024	-0,089	429,90	330,10	208,00	136,00	46,00	10,00	2,00
2020-02-14	2115,29	1,64%	0,024	-0,088	423,50	323,70	224,95	129,75	51,85	11,00	2,88
2020-02-17	2121,14	1,63%	0,024	-0,091	418,70	318,80	220,00	124,65	51,20	11,00	2,00
2020-02-18	2113,49	1,63%	0,024	-0,093	424,10	324,65	225,80	129,95	45,00	9,40	2,02
2020-02-19	2115,18	1,63%	0,024	-0,099	416,20	316,75	218,25	114,20	45,06	9,00	2,00
2020-02-20	2099,88	1,63%	0,024	-0,100	418,15	318,70	219,95	123,35	36,00	5,50	2,00

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2020-02-21	2088,53	1,63%	0,024	-0,121	402,55	303,20	201,65	108,95	27,30	5,60	1,90
2020-02-24	2000,90	1,61%	0,024	-0,126	391,60	291,85	120,30	41,00	10,00	2,50	0,60
2020-02-25	1945,71	1,61%	0,026	-0,176	304,50	211,40	94,00	27,00	4,37	1,00	0,50
2020-02-26	1933,51	1,61%	0,026	-0,206	250,00	154,40	70,00	19,39	3,15	1,00	0,51
2020-02-27	1850,61	1,60%	0,026	-0,216	238,50	128,00	31,37	5,49	2,00	0,51	0,55
2020-02-28	1768,91	1,60%	0,028	-0,245	162,90	43,00	11,50	1,98	0,89	0,97	0,50
2020-03-02	1807,70	1,58%	0,030	-0,291	117,55	56,00	16,00	2,00	0,06	0,10	0,61
2020-03-03	1889,67	1,58%	0,031	-0,274	194,00	99,30	31,51	5,00	1,80	0,66	0,38
2020-03-04	1860,95	1,58%	0,033	-0,221	197,85	104,00	22,22	2,62	1,00	1,00	0,44
2020-03-05	1822,85	1,57%	0,033	-0,237	170,25	60,00	13,52	1,80	0,60	0,50	0,37
2020-03-06	1764,81	1,57%	0,034	-0,258	134,45	27,00	3,50	0,50	0,42	0,01	1,12
2020-03-09	1625,99	1,56%	0,035	-0,307	25,04	4,50	0,80	0,77	0,30	0,03	0,50
2020-03-10	1599,48	1,56%	0,041	-0,410	11,00	2,10	0,80	0,91	0,49	0,01	0,03
2020-03-11	1505,64	1,56%	0,041	-0,445	4,00	1,00	0,95	0,25	0,89	0,90	0,27
2020-03-12	1305,73	1,55%	0,045	-0,502	1,30	0,25	0,60	1,00	0,51	0,10	0,03
2020-03-13	1365,97	1,56%	0,066	-0,639	0,75	0,70	1,00	0,20	0,20	0,40	0,36
2020-03-16	1341,54	1,53%	0,069	-0,594	0,50	1,27	0,21	0,21	0,39	0,52	0,67
2020-03-17	1429,28	1,44%	0,069	-0,618	1,00	0,65	0,39	0,52	0,01	0,01	0,48
2020-03-18	1401,29	0,99%	0,073	-0,560	0,61	0,53	1,00	0,88	1,14	0,56	0,81
2020-03-19	1469,43	0,93%	0,074	-0,573	0,79	0,83	0,74	0,73	0,01	0,52	0,78
2020-03-20	1488,42	1,01%	0,076	-0,518	1,00	0,51	0,01	0,56	0,64	0,62	0,21

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW, dostęp 23.03.2020.

Tabela 2. Wycena opcji kupna na indeks WIG20 na podstawie modelu Blacka-Scholesa

Model Blacka-Scholesa							
Data	OW20C201700	OW20C201800	OW20C201900	OW20C202000	OW20C202100	OW20C202200	OW20C202300
1	2	3	4	5	6	7	8
2019-08-27	416,1776	324,3051	240,5917	168,8504	111,6519	69,4489	40,6525
2019-08-28	373,8100	284,4835	205,0547	139,1632	88,6354	52,9418	29,6931
2019-08-29	390,9589	300,6389	219,5201	151,2969	98,0849	59,7500	34,2335
2019-08-30	454,6055	360,9167	273,9577	197,5113	134,6240	86,5458	52,4603
2019-09-02	463,6580	369,8586	282,5838	205,4986	141,6131	92,2641	56,8129

1	2	3	4	5	6	7	8
2019-09-03	427,2291	335,0159	250,6156	177,7603	119,0776	75,2083	44,7992
2019-09-04	422,9105	330,9734	247,0304	174,7890	116,7951	73,5878	43,7350
2019-09-05	426,7457	334,4859	250,0413	177,1671	118,5089	74,7090	44,3990
2019-09-06	441,8647	348,8204	263,0125	188,2107	127,2732	81,1652	48,8131
2019-09-09	492,2034	397,0907	307,4629	226,9419	158,8670	105,1557	65,7476
2019-09-10	505,3720	409,9655	319,7082	238,1052	168,4963	112,9462	71,6336
2019-09-11	506,6379	411,1352	320,7152	238,8906	169,0354	113,2584	71,7720
2019-09-12	506,3835	410,8376	320,3567	238,4691	168,5728	112,7953	71,3521
2019-09-13	517,9356	421,9475	330,6214	247,4339	175,8841	118,3249	75,2210
2019-09-16	534,2955	437,7685	345,3753	260,4863	186,6972	126,6476	81,1543
2019-09-17	509,2588	413,1616	321,7767	238,7414	167,7211	111,1278	69,3265
2019-09-18	521,2990	424,8256	332,6717	248,3860	175,7017	117,2492	73,6648
2019-09-19	507,9121	411,6935	320,1313	236,9172	165,8050	109,2754	67,6987
2019-09-20	488,1910	392,4617	301,9668	220,5814	152,0168	98,4553	59,8378
2019-09-23	463,7110	368,5029	279,2232	200,0137	134,5745	84,7289	49,8626
2019-09-24	491,1343	395,0609	303,9790	221,8189	152,4598	98,2716	59,2993
2019-09-25	475,6908	380,0612	289,9313	209,3642	142,1613	90,4021	53,7620
2019-09-26	488,2032	392,1708	301,2055	219,2753	150,2677	96,5176	58,0042
2019-09-27	501,7786	405,3554	313,5565	230,2294	159,3268	103,4379	62,8691
2019-09-30	488,5160	392,2054	300,7856	218,3060	148,8282	94,8473	56,3905
2019-10-01	467,8768	372,1205	281,9336	201,5710	135,0059	84,3331	49,0555
2019-10-02	414,5472	320,8189	234,7600	160,9301	102,6879	60,8018	33,4001
2019-10-03	415,3779	321,4928	235,1950	161,0944	102,6254	60,6082	33,1737
2019-10-04	436,6500	341,7733	253,5478	176,5344	114,5287	68,9594	38,5013
2019-10-07	436,9980	341,9534	253,4747	176,1842	113,9719	68,3301	37,9286
2019-10-08	446,6479	351,1432	261,7586	183,0939	119,2213	71,9345	40,1628
2019-10-09	448,9652	353,2036	263,3651	184,1049	119,6436	71,9221	39,9282
2019-10-10	437,5869	342,0789	252,8726	174,7788	111,9891	66,1956	36,0445
2019-10-11	473,9574	377,3104	285,5599	203,1525	134,6050	82,5688	46,7718
2019-10-14	462,3337	365,8296	274,5252	193,0685	126,0406	75,9190	42,0904
2019-10-15	468,4339	371,7218	279,9563	197,7257	129,6825	78,4866	43,7169
2019-10-16	469,5563	372,7310	280,7478	198,2108	129,8498	78,4150	43,5282
2019-10-17	486,9988	389,7266	296,6673	212,1911	141,1172	86,6381	48,9339
2019-10-18	477,9639	380,8546	288,2320	204,6102	134,8199	81,8774	45,6827

1	2	3	4	5	6	7	8
2019-10-21	496,0228	398,4041	304,5687	218,7878	146,0316	89,8440	50,7415
2019-10-22	524,6787	426,5478	331,3359	242,8298	165,9443	104,8013	60,8486
2019-10-23	521,0130	422,9107	327,7996	239,5331	163,0690	102,5026	59,1848
2019-10-24	520,7282	422,5743	327,3555	238,9330	162,3239	101,7003	58,4472
2019-10-25	487,6362	389,8283	295,7138	209,7897	137,4003	82,3128	44,8896
2019-10-28	523,7522	425,3750	329,6344	240,3328	162,6636	101,1419	57,4137
2019-10-29	539,7292	441,1912	344,9443	254,4820	174,8188	110,6402	64,0791
2019-10-30	539,0878	440,5352	344,2636	253,7757	174,1128	109,9890	63,5411
2019-10-31	505,9013	407,7262	312,6372	224,7916	149,5348	91,1061	50,5508
2019-11-04	575,3376	476,4231	379,0005	285,8441	201,5682	131,2957	78,3273
2019-11-05	583,6399	484,7119	387,2249	293,8393	209,0000	137,7216	83,3817
2019-11-06	566,4597	467,6150	370,4552	277,9420	194,8048	126,0664	74,7281
2019-11-07	583,1755	484,2005	386,5954	292,9903	207,8744	136,3878	82,0283
2019-11-08	566,3936	467,4953	370,2015	277,4429	193,9992	125,0241	73,6351
2019-11-12	559,3901	460,4632	363,1589	270,5051	187,4580	119,3100	69,1289
2019-11-13	546,0138	447,1021	349,9210	257,7255	175,7777	109,5095	61,7523
2019-11-14	536,5655	437,6989	340,7144	249,0643	168,1873	103,4849	57,5011
2019-11-15	544,1807	445,2213	347,9264	255,5509	173,4594	107,2453	59,8150
2019-11-18	539,9648	440,9703	343,6209	251,2265	169,2981	103,5732	56,9428
2019-11-19	517,2211	418,3124	321,3744	230,2199	150,8661	89,0258	46,8368
2019-11-20	504,4753	405,6317	308,9898	218,6779	140,9739	81,4790	41,8138
2019-11-21	489,3596	390,6322	294,4620	205,3812	129,9069	73,3585	36,6509
2019-11-22	497,9638	399,1285	302,5821	212,6138	135,6730	77,3541	39,0233
2019-11-25	506,9795	407,9919	310,9407	219,8272	141,0935	80,7687	40,7818
2019-11-26	499,9361	400,9678	304,0395	213,3336	135,4771	76,4721	37,9450
2019-11-27	490,6040	391,6659	294,9158	204,7890	128,1559	70,9535	34,3732
2019-11-28	478,2830	379,3874	282,8865	193,5702	118,6364	63,8964	29,9127
2019-11-29	468,0584	369,2355	273,0669	184,6676	111,4158	58,8471	26,9268
2019-12-02	431,2172	332,7474	238,0794	153,5710	87,0142	42,5313	17,7839
2019-12-03	398,8623	300,9939	208,4430	128,6016	68,9238	31,5871	12,3087
2019-12-04	390,7553	292,9640	200,7883	121,9446	63,9302	28,4723	10,7149
2019-12-05	400,8342	302,7147	209,5315	128,7626	68,3261	30,7564	11,6662
2019-12-06	381,7463	283,9338	191,9549	113,9971	57,7942	24,5888	8,7325
2019-12-09	374,9340	277,1675	185,5029	108,4474	53,7588	22,2064	7,6053

1	2	3	4	5	6	7	8
2019-12-10	362,4583	264,9812	174,3542	99,5037	47,8130	19,0272	6,2467
2019-12-11	355,6320	258,3211	168,2906	94,6915	44,6687	17,3845	5,5640
2019-12-12	410,1791	311,5678	216,9495	133,6474	70,4787	31,1152	11,3915
2019-12-13	414,4191	315,8129	221,1453	137,5356	73,6116	33,1847	12,4834
2019-12-16	420,5565	321,7591	226,4503	141,5365	75,9640	34,1918	12,7674
2019-12-17	439,7613	340,7216	244,3676	156,7855	86,9329	40,5900	15,7477
2019-12-18	439,2756	340,2233	243,8433	156,2397	86,4240	40,2020	15,5157
2019-12-19	441,0557	341,9571	245,4036	157,4120	87,0761	40,4275	15,5320
2019-12-20	435,2934	336,2147	239,8133	152,3534	83,1032	37,8659	14,2131
2019-12-23	449,5600	350,3085	253,1291	163,6003	90,9939	42,2449	16,0982
2019-12-27	458,4060	359,0136	261,2060	170,0217	94,8867	43,8279	16,4142
2019-12-30	456,4985	357,0671	259,1393	167,7561	92,6012	41,9756	15,2864
2020-01-02	506,3305	406,7544	307,7927	212,3291	127,9594	64,6155	26,5440
2020-01-03	480,1187	380,5873	282,0396	188,3938	108,4753	51,7097	19,8844
2020-01-07	450,8246	351,3280	253,2449	161,7273	87,0272	37,8334	12,9694
2020-01-08	421,7292	322,3571	225,1892	136,9767	68,8643	27,5010	8,5534
2020-01-09	463,2539	363,6987	265,2427	172,3608	94,8775	42,3165	14,8832
2020-01-10	473,4691	373,8870	275,2354	181,5218	102,0819	46,8056	17,0059
2020-01-13	499,7262	400,0771	300,9356	205,0879	120,5500	58,1813	22,2648
2020-01-14	488,1833	388,5389	289,5036	194,2658	111,5078	52,0835	19,1336
2020-01-15	470,2210	370,5924	271,7767	177,6924	98,0569	43,4230	14,9425
2020-01-16	478,7972	379,1428	280,1260	185,1740	103,5812	46,4806	16,1495
2020-01-17	480,9240	381,2580	282,1715	186,9349	104,7431	46,9782	16,2524
2020-01-20	482,7858	383,0934	283,8759	188,1386	105,0151	46,4947	15,6705
2020-01-21	462,6839	363,0020	263,9897	169,5026	90,0356	37,2175	11,5180
2020-01-22	451,1219	351,4453	252,5664	158,8855	81,6976	32,2636	9,4255
2020-01-23	452,8895	353,1994	254,2304	160,1944	82,3581	32,3757	9,3538
2020-01-24	458,6772	358,9710	259,8644	165,1703	85,8248	34,0686	9,8999
2020-01-27	387,9462	288,3651	190,8783	104,1255	42,9135	12,5436	2,5323
2020-01-28	402,1137	302,4933	204,5976	115,9521	50,7327	16,0944	3,5958
2020-01-29	402,1713	302,5237	204,4596	115,3901	49,8648	15,4276	3,3118
2020-01-30	383,8916	284,2900	186,8031	100,3734	40,2395	11,2675	2,1450
2020-01-31	369,8144	270,2876	173,5047	89,7259	34,1022	8,9550	1,5891
2020-02-03	376,5477	276,9186	179,4291	93,6006	35,5136	9,1214	1,5425

1	2	3	4	5	6	7	8
2020-02-04	410,2142	310,4786	211,7604	120,3859	51,5605	15,2944	3,0127
2020-02-05	426,4130	326,6488	227,5584	134,1227	60,5131	19,1004	4,0133
2020-02-06	415,1826	315,4215	216,4820	124,1175	53,4924	15,8232	3,0646
2020-02-07	413,5422	313,7736	214,8048	122,4209	52,0716	15,0440	2,8126
2020-02-10	395,9917	296,2144	197,4154	106,6269	41,1638	10,2560	1,5734
2020-02-11	410,4215	310,6210	211,4655	118,5360	48,2444	12,7636	2,0745
2020-02-12	429,2516	329,4343	229,9828	134,8884	58,7855	16,8933	2,9888
2020-02-13	422,9319	323,1104	223,6844	128,9705	54,4057	14,8402	2,4439
2020-02-14	418,0724	318,2461	218,8285	124,3645	50,9663	13,2451	2,0363
2020-02-17	423,6844	323,8384	224,2440	128,5698	52,5716	13,1930	1,8662
2020-02-18	415,9554	316,1050	216,5353	121,3278	47,3924	11,0357	1,4076
2020-02-19	417,5664	317,7102	218,0900	122,4949	47,7252	10,9316	1,3444
2020-02-20	402,1876	302,3285	202,8032	108,5199	38,6005	7,7004	0,7923
2020-02-21	390,7554	290,8926	191,4425	98,2482	32,2192	5,6612	0,4922
2020-02-24	302,8815	203,1163	106,9345	34,5958	5,3455	0,3488	0,0096
2020-02-25	247,6229	148,6551	61,7027	13,4211	1,2648	0,0492	0,0008
2020-02-26	235,3505	136,7605	52,9096	10,2511	0,8323	0,0274	0,0004
2020-02-27	152,8314	63,1540	12,6398	0,9548	0,0256	0,0003	0,0000
2020-02-28	76,7644	17,1221	1,3864	0,0370	0,0003	0,0000	0,0000
2020-03-02	110,6287	32,7703	3,5667	0,1155	0,0011	0,0000	0,0000
2020-03-03	190,9902	94,2453	24,5644	2,3282	0,0685	0,0006	0,0000
2020-03-04	162,3363	69,4049	13,7130	0,8976	0,0177	0,0001	0,0000
2020-03-05	124,7001	40,5839	4,7829	0,1537	0,0013	0,0000	0,0000
2020-03-06	70,5758	12,1824	0,5278	0,0050	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-09	2,1796	0,0140	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-10	0,8278	0,0038	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-11	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW, dostęp 23.03.2020.

Tabela 3. Wycena opcji kupna na indeks WIG20 na podstawie uogólnionego modelu Blacka-Scholesa

Uogólniony model Blacka-Scholesa							
Data	OW20C201700	OW20C201800	OW20C201900	OW20C202000	OW20C202100	OW20C202200	OW20C202300
1	2	3	4	5	6	7	8
2019-08-27	415,3542	322,3896	237,0861	163,6269	105,1329	62,4712	34,1185
2019-08-28	372,6651	282,0097	200,8367	133,2912	81,7708	46,0431	23,6145
2019-08-29	389,4930	297,3125	213,5594	142,5722	87,3585	48,4123	23,7272
2019-08-30	453,7192	358,6470	269,4025	190,0945	124,5423	74,8281	40,5791
2019-09-02	463,1262	368,5562	280,0677	201,5331	136,3695	86,3101	50,8923
2019-09-03	426,5075	333,3455	247,5599	173,1915	113,3366	69,0034	38,9177
2019-09-04	421,7933	328,3480	242,1492	167,3648	107,2988	63,1349	33,6399
2019-09-05	425,8632	332,4082	246,1811	171,3133	111,0582	66,5616	36,5932
2019-09-06	441,1269	347,0350	259,6120	182,9363	120,4201	73,5283	41,3682
2019-09-09	491,8141	396,0630	305,3440	223,4079	153,9588	99,3399	59,7475
2019-09-10	505,1338	409,3441	318,4385	236,0013	165,5872	109,5077	68,0891
2019-09-11	506,5084	410,8015	320,0424	237,7916	167,5383	111,5162	70,0046
2019-09-12	506,2870	410,5895	319,8584	237,6589	167,4752	111,5260	70,0732
2019-09-13	517,9145	421,8926	330,5104	247,2528	175,6387	118,0417	74,9370
2019-09-16	534,2624	437,6772	345,1812	260,1554	186,2312	126,0915	80,5799
2019-09-17	509,2508	413,1409	321,7356	238,6761	167,6352	111,0324	69,2347
2019-09-18	521,2797	424,7746	332,5683	248,2186	175,4786	116,9982	73,4210
2019-09-19	507,9059	411,6773	320,0987	236,8649	165,7360	109,1985	67,6250
2019-09-20	488,1811	392,4364	301,9176	220,5048	151,9191	98,3499	59,7397
2019-09-23	463,6715	368,4000	279,0189	199,6929	134,1627	84,2850	49,4516
2019-09-24	491,0933	394,9472	303,7399	221,4223	151,9238	97,6651	58,7115
2019-09-25	475,6876	380,0530	289,9149	209,3384	142,1280	90,3661	53,7287
2019-09-26	488,1814	392,1112	301,0817	219,0725	149,9971	96,2154	57,7151
2019-09-27	501,7725	405,3385	313,5208	230,1699	159,2462	103,3467	62,7808
2019-09-30	488,4899	392,1349	300,6424	218,0782	148,5347	94,5321	56,1017
2019-10-01	467,8600	372,0765	281,8468	201,4370	134,8383	84,1583	48,8999
2019-10-02	414,5443	320,8122	234,7478	160,9130	102,6683	60,7829	33,3846

1	2	3	4	5	6	7	8
2019-10-03	415,3706	321,4752	235,1633	161,0495	102,5738	60,5587	33,1332
2019-10-04	436,6496	341,7722	253,5455	176,5311	114,5246	68,9553	38,4978
2019-10-07	436,9979	341,9532	253,4744	176,1838	113,9714	68,3296	37,9282
2019-10-08	446,6323	351,1002	261,6711	182,9562	119,0477	71,7539	40,0038
2019-10-09	448,9042	353,0266	262,9885	183,4897	118,8435	71,0680	39,1607
2019-10-10	437,4550	341,6914	252,0402	173,4123	110,2096	64,2995	34,3479
2019-10-11	473,8546	376,9785	284,7814	201,7646	132,6520	80,3305	44,6261
2019-10-14	462,2159	365,4474	273,6307	191,4860	123,8413	73,4392	39,7601
2019-10-15	468,3290	371,3744	279,1288	196,2396	127,5903	76,1018	41,4549
2019-10-16	469,5047	372,5613	280,3474	197,5010	128,8661	77,3135	42,5040
2019-10-17	486,9708	389,6305	296,4324	211,7612	140,5041	85,9339	48,2640
2019-10-18	477,9374	380,7654	288,0179	204,2258	134,2824	81,2721	45,1183
2019-10-21	496,0136	398,3713	304,4859	218,6329	145,8075	89,5849	50,4949
2019-10-22	524,6770	426,5415	331,3194	242,7978	165,8965	104,7447	60,7935
2019-10-23	521,0103	422,9008	327,7736	239,4831	162,9950	102,4156	59,1011
2019-10-24	520,7154	422,5264	327,2310	238,6955	161,9769	101,2981	58,0660
2019-10-25	487,6355	389,8256	295,7067	209,7763	137,3812	82,2913	44,8699
2019-10-28	523,7413	425,3278	329,4936	240,0316	162,1788	100,5326	56,7963
2019-10-29	539,7287	441,1890	344,9376	254,4676	174,7955	110,6108	64,0492
2019-10-30	539,0872	440,5325	344,2557	253,7591	174,0865	109,9564	63,5085
2019-10-31	505,9012	407,7258	312,6362	224,7897	149,5320	91,1029	50,5477
2019-11-04	575,3320	476,3935	378,8955	285,5814	201,0825	130,6046	77,5449
2019-11-05	583,6381	484,7026	387,1930	293,7610	208,8574	137,5204	83,1548
2019-11-06	566,4592	467,6124	370,4468	277,9222	194,7704	126,0200	74,6781
2019-11-07	583,1706	484,1735	386,4976	292,7406	207,4037	135,7062	81,2439
2019-11-08	566,3878	467,4651	370,0958	277,1825	193,5256	124,3623	72,9002
2019-11-12	559,3812	460,4137	362,9796	270,0532	186,6243	118,1371	67,8264
2019-11-13	546,0114	447,0890	349,8748	257,6128	175,5789	109,2436	61,4734
2019-11-14	536,5628	437,6843	340,6639	248,9435	167,9780	103,2108	57,2195
2019-11-15	544,1804	445,2196	347,9204	255,5364	173,4340	107,2118	59,7806
2019-11-18	539,9646	440,9692	343,6172	251,2174	169,2824	103,5530	56,9226
2019-11-19	517,2187	418,2989	321,3253	230,1008	150,6617	88,7663	46,5833
2019-11-20	504,4642	405,5654	308,7447	218,0753	139,9310	80,1481	40,5114
2019-11-21	489,3449	390,5475	294,1594	204,6630	128,7076	71,8825	35,2581

1	2	3	4	5	6	7	8
2019-11-22	497,9526	399,0614	302,3337	212,0060	134,6321	76,0454	37,7665
2019-11-25	506,9684	407,9175	310,6398	219,0358	139,6568	78,8782	38,9022
2019-11-26	499,9221	400,8729	303,6526	212,3138	133,6303	74,0573	35,5678
2019-11-27	490,5934	391,5951	294,6344	204,0699	126,9005	69,3779	32,8903
2019-11-28	478,2770	379,3478	282,7340	193,1965	118,0154	63,1597	29,2609
2019-11-29	468,0509	369,1876	272,8868	184,2371	110,7193	58,0434	26,2361
2019-12-02	431,1963	332,6219	237,6393	152,5988	85,5710	41,0130	16,5999
2019-12-03	398,7961	300,6275	207,2542	126,1593	65,5385	28,2490	9,8610
2019-12-04	390,6973	292,6449	199,7707	119,9094	61,2067	25,8980	8,9164
2019-12-05	400,7702	302,3202	208,1439	125,7419	63,9766	26,3775	8,4368
2019-12-06	381,6502	283,3464	189,9296	109,7187	51,8666	18,8890	4,7431
2019-12-09	374,8316	276,5289	183,2855	103,7815	47,3806	16,2044	3,5235
2019-12-10	362,3248	264,1657	171,5913	93,8504	40,3193	12,2055	1,7678
2019-12-11	355,4833	257,4251	165,3047	88,6984	36,8947	10,4730	1,1398
2019-12-12	410,1250	311,1403	215,1176	128,9985	62,9682	22,9106	5,0160
2019-12-13	414,3786	315,5159	219,9494	134,6515	69,1392	28,4534	8,8951
2019-12-16	420,5245	321,5003	225,3259	138,6652	71,3253	29,1518	8,8898
2019-12-17	439,7397	340,5242	243,4107	154,0897	82,1773	34,9981	11,1288
2019-12-18	439,2572	340,0571	243,0459	154,0246	82,5820	35,7711	11,9336
2019-12-19	441,0378	341,7864	244,5508	154,9654	82,7249	35,3139	11,3422
2019-12-20	435,2768	336,0579	239,0452	150,2062	79,4018	33,6690	10,9083
2019-12-23	449,5497	350,1958	252,5074	161,6866	87,4318	37,9569	12,5665
2019-12-27	458,3996	358,9270	260,6405	168,0457	90,8567	38,6742	12,0249
2019-12-30	456,4935	356,9953	258,6504	166,0109	89,0335	37,4764	11,5609
2020-01-02	506,3294	406,7316	307,5829	211,3489	125,4056	60,6050	22,4931
2020-01-03	480,1173	380,5645	281,8693	187,7375	107,0490	49,8230	18,2646
2020-01-07	450,8221	351,2883	252,9621	160,7162	85,0292	35,4710	11,1831
2020-01-08	421,7238	322,2837	224,7347	135,5580	66,4094	24,9519	6,8560
2020-01-09	463,2516	363,6563	264,8948	170,9476	91,7487	38,2220	11,4936
2020-01-10	473,4676	373,8582	274,9921	180,5067	99,7745	43,7081	14,3771
2020-01-13	499,7257	400,0653	300,8106	204,4591	118,8826	55,6443	19,8858
2020-01-14	488,1828	388,5256	289,3694	193,6262	109,9073	49,7925	17,1177
2020-01-15	470,2202	370,5722	271,5860	176,8443	96,0859	40,8124	12,8236
2020-01-16	478,7967	379,1302	279,9957	184,5508	102,0542	44,3854	14,4142

1	2	3	4	5	6	7	8
2020-01-17	480,9237	381,2492	282,0761	186,4696	103,5939	45,4045	14,9634
2020-01-20	482,7856	383,0872	283,8011	187,7425	103,9895	45,0658	14,5099
2020-01-21	462,6835	362,9920	263,8782	168,9615	88,7614	35,6133	10,3471
2020-01-22	451,1215	351,4338	252,4423	158,3129	80,4270	30,7685	8,4125
2020-01-23	452,8892	353,1907	254,1314	159,7220	81,2919	31,1178	8,5099
2020-01-24	458,6769	358,9634	259,7683	164,6737	84,6327	32,5956	8,8788
2020-01-27	387,9452	288,3397	190,6663	103,4179	41,8364	11,7123	2,1767
2020-01-28	402,1124	302,4588	204,2853	114,7907	48,7261	14,3086	2,7030
2020-01-29	402,1702	302,4889	204,1125	114,0139	47,4003	13,2095	2,2142
2020-01-30	383,8901	284,2499	186,4428	99,1105	38,2696	9,7421	1,5023
2020-01-31	369,8116	270,2203	172,9526	87,9480	31,5396	7,1119	0,8645
2020-02-03	376,5461	276,8687	178,9305	91,7625	32,6396	6,9818	0,7068
2020-02-04	410,2138	310,4608	211,5144	119,1750	49,1119	13,0013	1,9133
2020-02-05	426,4129	326,6417	227,4453	133,4998	59,1336	17,7121	3,3096
2020-02-06	415,1825	315,4140	216,3691	123,5416	52,3269	14,7631	2,5835
2020-02-07	413,5420	313,7660	214,6861	121,7995	50,8056	13,9044	2,3084
2020-02-10	395,9916	296,2065	197,2887	105,9991	40,0259	9,3924	1,2659
2020-02-11	410,4215	310,6162	211,3700	117,9707	47,0570	11,7462	1,6748
2020-02-12	429,2516	329,4322	229,9290	134,4944	57,7951	15,9072	2,5500
2020-02-13	422,9319	323,1088	223,6438	128,6843	53,7314	14,2238	2,1965
2020-02-14	418,0724	318,2446	218,7888	124,0858	50,3284	12,6922	1,8303
2020-02-17	423,6844	323,8377	224,2184	128,3432	51,9841	12,6659	1,6783
2020-02-18	415,9554	316,1043	216,5072	121,0848	46,7971	10,5459	1,2515
2020-02-19	417,5664	317,7096	218,0638	122,2463	47,0848	10,3971	1,1769
2020-02-20	402,1876	302,3276	202,7685	108,2276	37,9536	7,2499	0,6774
2020-02-21	390,7554	290,8912	191,3875	97,8044	31,3188	5,1082	0,3720
2020-02-24	302,8814	203,0981	106,6517	33,8080	4,8439	0,2594	0,0043
2020-02-25	247,6191	148,4978	60,7055	12,1558	0,8609	0,0100	-0,0005
2020-02-26	235,3435	136,5084	51,5303	8,7484	0,4222	-0,0066	-0,0006
2020-02-27	152,7174	62,0521	11,0360	0,4889	-0,0085	-0,0005	0,0000
2020-02-28	75,8761	15,2243	0,7011	-0,0177	-0,0009	0,0000	0,0000
2020-03-02	110,2807	30,9501	2,3559	-0,0240	-0,0025	0,0000	0,0000
2020-03-03	190,9734	93,7370	22,9251	1,5436	-0,0048	-0,0010	0,0000
2020-03-04	162,3015	68,8812	12,8292	0,6660	0,0053	-0,0001	0,0000

1	2	3	4	5	6	7	8
2020-03-05	124,5916	39,7659	4,1475	0,0822	-0,0002	0,0000	0,0000
2020-03-06	70,1263	11,2489	0,3387	-0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-09	1,7227	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-10	0,4541	-0,0031	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-11	-0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW, dostęp 23.03.2020.

Tabela 4. Wycena opcji kupna na indeks WIG20 na podstawie modelu Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie

			Model Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie						
Data	Suma dziennych stóp wolnych od ryzyka	Suma dziennych wariacji stóp zwrotu indeksu WIG20	OW20C201700	OW20C201800	OW20C201900	OW20C202000	OW20C202100	OW20C202200	OW20C202300
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2019-08-27	0,85%	0,0222	418,7732	331,3134	252,7361	185,4499	130,7542	88,5947	57,7488
2019-08-28	0,84%	0,0221	377,7408	293,2282	218,8414	156,7081	107,6048	70,8940	44,8820
2019-08-29	0,84%	0,0220	394,0797	308,2153	231,9750	167,6405	116,2274	77,3388	49,4558
2019-08-30	0,84%	0,0219	455,9511	366,0346	283,8845	212,1099	152,4449	105,3541	70,0591
2019-09-02	0,83%	0,0216	464,4731	373,9683	290,9640	218,1210	157,2822	109,0395	72,7197
2019-09-03	0,82%	0,0215	428,8430	340,2956	260,2905	191,3929	135,1064	91,5526	59,6090
2019-09-04	0,82%	0,0214	424,4986	336,1485	256,4657	188,0139	132,2628	89,2790	57,8821
2019-09-05	0,81%	0,0213	428,2619	339,5983	259,4792	190,5050	134,2051	90,7069	58,8734
2019-09-06	0,81%	0,0212	442,9962	353,3773	271,8464	201,0799	142,7844	97,3029	63,6840
2019-09-09	0,80%	0,0208	492,2500	399,9518	314,2759	238,0190	173,3641	121,3258	81,5974
2019-09-10	0,79%	0,0207	505,0796	412,1809	325,5385	247,9544	181,7111	127,9855	86,6421

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2019-09-11	0,79%	0,0206	506,3137	413,3019	326,4959	248,7111	182,2564	128,3371	86,8380
2019-09-12	0,78%	0,0205	506,0445	412,9799	326,1105	248,2676	181,7775	127,8574	86,3927
2019-09-13	0,78%	0,0204	517,4630	423,8993	336,2091	257,2182	189,3330	133,9123	90,9965
2019-09-16	0,76%	0,0200	533,5633	439,2602	350,3592	269,6836	199,7664	142,1813	97,1982
2019-09-17	0,76%	0,0199	508,9271	415,4373	327,9732	249,4371	182,2697	127,7964	85,9655
2019-09-18	0,76%	0,0198	520,7961	426,8126	338,5194	258,8047	190,1879	134,1430	90,7847
2019-09-19	0,75%	0,0197	507,6015	414,0403	326,5035	247,9260	180,7807	126,4086	84,7495
2019-09-20	0,75%	0,0196	488,1772	395,3306	309,0356	232,2737	167,4164	115,5800	76,4336
2019-09-23	0,73%	0,0192	464,1428	372,1763	287,4289	212,9423	150,9570	102,2992	66,2913
2019-09-24	0,73%	0,0191	491,0413	397,8200	310,9953	233,6120	168,1438	115,8031	76,3131
2019-09-25	0,72%	0,0190	475,8166	383,1770	297,3667	221,4638	157,8505	107,5470	70,0520
2019-09-26	0,72%	0,0189	488,0912	394,8628	308,0797	230,8249	165,5943	113,5917	74,5027
2019-09-27	0,72%	0,0188	501,4430	407,6278	319,8530	241,1913	174,2451	120,4086	79,5716
2019-09-30	0,70%	0,0185	488,3929	394,8955	307,7565	230,1275	164,5946	112,4293	73,3350
2019-10-01	0,70%	0,0183	468,0807	375,3810	289,6408	214,0556	151,0751	101,6927	65,2947
2019-10-02	0,70%	0,0182	415,8098	325,7896	244,4594	174,9437	119,1246	77,1376	47,5408
2019-10-03	0,69%	0,0181	416,6314	326,4813	244,9803	175,2803	119,2963	77,1870	47,5171
2019-10-04	0,69%	0,0180	437,4239	346,0144	262,5180	190,1731	131,1833	86,0846	53,7671
2019-10-07	0,67%	0,0177	437,6852	346,0373	262,2462	189,6188	130,4313	85,2594	52,9869
2019-10-08	0,67%	0,0176	447,1517	354,9471	270,2587	196,4268	135,8594	89,3097	55,8168
2019-10-09	0,66%	0,0175	449,4704	357,0802	272,1096	197,9224	136,9756	90,0761	56,3000
2019-10-10	0,66%	0,0174	438,3452	346,4397	262,3184	189,3583	129,9148	84,6120	52,3342
2019-10-11	0,66%	0,0173	473,9980	380,3746	293,3265	216,2360	151,8393	101,3785	64,3502
2019-10-14	0,64%	0,0169	462,5471	369,2109	282,7602	206,6570	143,6123	94,7300	59,3093
2019-10-15	0,64%	0,0168	468,5234	374,8663	287,8768	211,0269	147,1062	97,3359	61,1220
2019-10-16	0,63%	0,0167	469,6273	375,8591	288,7008	211,6420	147,5075	97,5537	61,2079
2019-10-17	0,63%	0,0166	486,7813	392,2848	303,8285	224,8689	158,3860	105,9295	67,2384
2019-10-18	0,63%	0,0165	477,8646	383,6409	295,7158	217,5952	152,2215	101,0225	63,5789
2019-10-21	0,61%	0,0162	495,6273	400,5830	311,2105	230,9970	163,0795	109,2227	69,3464
2019-10-22	0,61%	0,0161	523,9400	427,9835	336,8560	253,8925	182,3681	124,4582	80,6016
2019-10-23	0,60%	0,0160	520,2763	424,3692	333,3661	250,6394	179,4791	122,0376	78,6987
2019-10-24	0,60%	0,0159	519,9927	424,0417	332,9762	250,1838	178,9786	121,5329	78,2351
2019-10-25	0,59%	0,0158	487,3445	392,3472	303,1781	223,4341	156,3094	103,5249	64,8650
2019-10-28	0,58%	0,0155	522,9690	426,7392	335,2077	251,7910	179,9088	121,8660	78,1466

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2019-10-29	0,58%	0,0154	538,8016	442,1360	349,7202	264,8550	191,0043	130,6884	84,6916
2019-10-30	0,57%	0,0153	538,1566	441,4598	349,0018	264,0991	190,2392	129,9611	84,0510
2019-10-31	0,57%	0,0153	505,3038	409,4590	318,7638	236,7899	166,9559	111,3719	70,2034
2019-11-04	0,56%	0,0149	574,1321	476,5630	382,2691	294,2579	216,0531	150,6393	99,4875
2019-11-05	0,55%	0,0148	582,3755	484,6384	389,9750	301,3123	222,1634	155,5983	103,2388
2019-11-06	0,55%	0,0147	565,2908	467,7940	373,7107	286,1481	208,6995	144,3365	94,4219
2019-11-07	0,54%	0,0146	581,9168	484,1135	389,3364	300,5237	221,2305	154,5811	102,2336
2019-11-08	0,54%	0,0145	565,2256	467,6507	373,4320	285,6883	208,0581	143,5708	93,6279
2019-11-12	0,52%	0,0141	558,2533	460,6381	366,4180	278,8082	201,5616	137,7687	88,7864
2019-11-13	0,52%	0,0140	544,9675	447,5489	353,8119	267,1235	191,2950	129,3160	82,3087
2019-11-14	0,51%	0,0139	535,5794	438,3004	344,9098	258,8839	184,0744	123,3946	77,7948
2019-11-15	0,51%	0,0138	543,1444	445,6763	351,8734	265,1374	189,3351	127,4986	80,7500
2019-11-18	0,49%	0,0135	538,9454	441,4308	347,5933	260,9044	185,3187	123,9166	77,7882
2019-11-19	0,49%	0,0134	516,3679	419,2683	326,4201	241,5577	168,6817	110,6063	67,9407
2019-11-20	0,49%	0,0133	503,7260	406,8732	314,6105	230,8190	159,5136	103,3407	62,6265
2019-11-21	0,48%	0,0132	488,7444	392,2274	300,7378	218,3217	148,9793	95,1221	56,7220
2019-11-22	0,48%	0,0131	497,2597	400,4687	308,4019	225,0359	154,4338	99,1933	59,5045
2019-11-25	0,46%	0,0128	506,1819	409,0329	316,2374	231,7145	159,6436	102,8724	61,8450
2019-11-26	0,46%	0,0127	499,1906	402,1559	309,6535	225,6958	154,4841	98,7787	58,8593
2019-11-27	0,46%	0,0126	489,9348	393,0776	301,0118	217,8677	147,8563	93,5987	55,1449
2019-11-28	0,45%	0,0125	477,7312	381,1465	289,7261	207,7468	139,4034	87,1008	50,5721
2019-11-29	0,45%	0,0124	467,6172	371,2714	280,4118	199,4349	132,5106	81,8506	46,9175
2019-12-02	0,43%	0,0122	431,2176	335,9425	247,4776	170,5811	109,1670	64,5927	35,3022
2019-12-03	0,43%	0,0121	399,3940	305,4624	219,7389	147,1270	91,0358	51,8813	27,2323
2019-12-04	0,43%	0,0120	391,4432	297,8426	212,8055	141,2745	86,5286	48,7406	25,2548
2019-12-05	0,42%	0,0119	401,3040	307,1267	221,0101	147,9277	91,4086	51,9598	27,1661
2019-12-06	0,42%	0,0118	382,6510	289,3694	205,0368	134,6626	81,3986	45,1461	22,9847
2019-12-09	0,40%	0,0115	375,9006	282,7618	198,8451	129,2634	77,1136	42,0880	21,0280
2019-12-10	0,40%	0,0114	363,7043	271,2181	188,5796	120,8927	70,9531	38,0232	18,6228
2019-12-11	0,40%	0,0114	357,0228	264,8805	182,9306	116,2785	67,5561	35,7849	17,3025
2019-12-12	0,39%	0,0113	410,3721	315,2816	227,6109	152,5459	94,0875	53,1629	27,4986
2019-12-13	0,39%	0,0112	414,5066	319,1740	231,0347	155,2858	96,0478	54,4072	28,1992
2019-12-16	0,37%	0,0109	420,5003	324,7241	235,7567	158,8553	98,3857	55,7086	28,8008
2019-12-17	0,37%	0,0108	439,4582	342,9588	252,4005	172,8882	109,0968	63,0319	33,2751

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2019-12-18	0,37%	0,0107	438,9621	342,4180	251,7962	172,2349	108,4524	62,4714	32,8497
2019-12-19	0,36%	0,0106	440,7154	344,0567	253,2066	173,3101	109,1549	62,8529	33,0137
2019-12-20	0,36%	0,0106	435,0267	338,4869	247,9555	168,6723	105,4103	60,1319	31,2459
2019-12-23	0,35%	0,0103	449,1001	351,9715	260,1416	178,7467	112,8587	64,9986	34,0479
2019-12-27	0,33%	0,0099	457,9340	360,3727	267,5892	184,6694	116,9552	67,4087	35,2297
2019-12-30	0,33%	0,0097	456,0978	358,4315	265,4779	182,4140	114,7321	65,4737	33,7691
2020-01-02	0,32%	0,0095	505,7060	407,0867	311,4684	223,0713	147,4211	88,9341	48,6750
2020-01-03	0,31%	0,0094	479,5943	381,3259	286,7984	200,7806	128,9630	75,2225	39,6365
2020-01-07	0,30%	0,0090	450,4402	352,5449	259,2454	175,9679	108,5875	60,3042	30,0045
2020-01-08	0,29%	0,0090	421,5349	324,3065	232,8674	153,2096	90,9946	48,3442	22,9029
2020-01-09	0,29%	0,0089	462,8091	364,5712	270,3600	185,3756	115,6550	64,9302	32,6261
2020-01-10	0,28%	0,0088	472,9886	374,5336	279,7002	193,4705	121,9337	69,2001	35,1516
2020-01-13	0,27%	0,0085	499,1807	400,2649	304,0315	214,8441	138,7883	80,8585	42,1532
2020-01-14	0,27%	0,0084	487,6785	388,8605	292,9977	204,7384	130,3276	74,5617	38,0516
2020-01-15	0,27%	0,0083	469,7852	371,1683	276,0142	189,4263	117,8165	65,5412	32,3897
2020-01-16	0,26%	0,0082	478,3539	379,5794	283,9365	196,3145	123,1456	69,1221	34,4588
2020-01-17	0,26%	0,0081	480,4893	381,6509	285,8253	197,8480	124,1971	69,7032	34,7027
2020-01-20	0,25%	0,0078	482,3609	383,3934	287,2229	198,6331	124,2691	69,2565	34,0874
2020-01-21	0,24%	0,0078	462,3100	363,5532	268,1737	181,5185	110,4429	59,5070	28,1752
2020-01-22	0,24%	0,0077	450,7826	352,1524	257,2530	171,7660	102,6508	54,1011	24,9653
2020-01-23	0,23%	0,0076	452,5473	353,8462	258,7493	172,8995	103,3342	54,3990	25,0351
2020-01-24	0,23%	0,0075	458,3269	359,5025	264,0150	177,3461	106,5948	56,4195	26,0822
2020-01-27	0,22%	0,0072	387,8959	290,3623	199,1960	121,8848	65,0796	29,9379	11,8213
2020-01-28	0,21%	0,0071	401,9871	304,0026	211,5317	131,7725	71,8186	33,7622	13,6216
2020-01-29	0,21%	0,0070	402,0396	303,9874	211,3693	131,4283	71,3735	33,3587	13,3485
2020-01-30	0,21%	0,0069	383,8674	286,2309	194,9727	117,8499	61,7405	27,6536	10,5480
2020-01-31	0,21%	0,0069	369,8882	272,6999	182,7632	108,1300	55,2015	24,0148	8,8786
2020-02-03	0,19%	0,0066	376,5404	278,8932	187,8346	111,4904	56,8708	24,5740	8,9604
2020-02-04	0,19%	0,0066	410,0468	311,5193	217,6272	135,5694	73,2812	33,7652	13,1670
2020-02-05	0,19%	0,0065	426,2015	327,3493	232,3145	147,7570	81,8668	38,7455	15,5242
2020-02-06	0,18%	0,0064	415,0013	316,2761	221,7872	138,6223	75,0236	34,4833	13,3505
2020-02-07	0,18%	0,0063	413,3661	314,6157	220,0953	136,9794	73,6241	33,5016	12,7984
2020-02-10	0,17%	0,0060	395,8607	297,2557	203,4975	122,5190	62,8417	26,9078	9,5459
2020-02-11	0,16%	0,0059	410,2536	311,3459	216,4696	133,0254	69,8932	30,7016	11,1684

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2020-02-12	0,16%	0,0058	429,0543	329,8571	233,7977	147,4956	80,0157	36,4096	13,7307
2020-02-13	0,15%	0,0057	422,7473	323,5799	227,7179	142,0607	75,8269	33,7677	12,3995
2020-02-14	0,15%	0,0056	417,8983	318,7451	223,0121	137,8235	72,5436	31,6974	11,3641
2020-02-17	0,14%	0,0053	423,5115	324,1751	227,7629	141,1446	74,1252	32,0445	11,2453
2020-02-18	0,13%	0,0052	415,7954	316,4968	220,3410	134,5774	69,1999	29,0898	9,8633
2020-02-19	0,13%	0,0051	417,4093	318,0550	221,6839	135,4635	69,5491	29,0957	9,7773
2020-02-20	0,12%	0,0050	402,0511	302,8191	207,1413	122,9881	60,6682	24,1283	7,6393
2020-02-21	0,12%	0,0049	390,6408	291,5063	196,3854	113,8722	54,3304	20,7060	6,2314
2020-02-24	0,11%	0,0047	303,0747	206,1018	119,6860	55,9792	20,2346	5,5558	1,1610
2020-02-25	0,10%	0,0046	248,4814	155,1529	79,0863	31,0600	9,1054	1,9805	0,3232
2020-02-26	0,10%	0,0045	236,4049	144,0882	70,6897	26,3217	7,2176	1,4521	0,2172
2020-02-27	0,10%	0,0044	157,5546	78,6633	29,1654	7,6970	1,4342	0,1914	0,0187
2020-02-28	0,09%	0,0043	88,8052	33,1436	8,4848	1,4672	0,1739	0,0145	0,0009
2020-03-02	0,07%	0,0038	117,8247	49,0137	13,8334	2,5508	0,3084	0,0251	0,0014
2020-03-03	0,07%	0,0037	192,6030	104,0745	41,4805	11,3306	2,0622	0,2517	0,0211
2020-03-04	0,07%	0,0036	164,9921	81,4760	28,3431	6,4901	0,9606	0,0933	0,0061
2020-03-05	0,06%	0,0034	129,6503	55,3355	15,6153	2,7585	0,3041	0,0215	0,0010
2020-03-06	0,06%	0,0033	80,9219	25,9640	5,0275	0,5729	0,0392	0,0017	0,0000
2020-03-09	0,05%	0,0029	10,3686	1,0610	0,0531	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-10	0,04%	0,0028	5,3224	0,3831	0,0128	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-11	0,04%	0,0026	0,2344	0,0048	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-12	0,03%	0,0024	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-13	0,03%	0,0022	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-16	0,02%	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-17	0,01%	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-18	0,01%	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2020-03-19	0,01%	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW, dostęp 23.03.2020.

Wykaz oznaczeń (dla rozdziałów 1–5)

- T – termin wygaśnięcia europejskiej opcji kupna, ustalona chwila czasu
- τ – liczba jednostek czasu do rozliczenia opcji europejskiej, np. liczba miesięcy
- n – liczba chwil zmiany portfela (liczba chwil handlowania) w jednostce czasu
- K – cena wykonania europejskiej opcji kupna
- s_0 – cena początkowa akcji
- s_{i-1} – cena akcji na początku i -tej jednostki czasu, np. na początku i -tego miesiąca
- $S(t)$ – cena akcji w chwili t (czas ciągły)
- $C_0(s_0)$ – wycena europejskiej opcji kupna z czasem realizacji T
- $C_{0,n}(s_0)$ – wycena europejskiej opcji kupna w n -tej chwili zmiany portfela (w każdej jednostce czasu wystąpi n chwil zmiany portfela)
- r – stopa procentowa wolna od ryzyka za ustaloną chwilę czasu T
- r_i – stopa procentowa wolna od ryzyka za i -tą jednostkę czasu, np. za i -ty miesiąc
- $\hat{r}_n$ – oprocentowanie jednookresowe lokaty bankowej (kredytu, obligacji)
- $\hat{r}_{i,n} = e^{r_i \cdot \frac{1}{n}}$ – oprocentowanie rachunku bankowego w i -tej jednostce czasu, np. w i -tym miesiącu
- σ – odchylenie standardowe zmiennej losowej $\ln S(n)/s_0$; współczynnik zmienności cen akcji za ustaloną chwilę czasu T
- σ_i – współczynnik zmienności cen akcji w i -tej jednostce czasu, np. w i -tym miesiącu
- u – możliwa górna zmiana ceny akcji za ustaloną chwilę czasu T
- u_n – możliwa górna zmiana ceny akcji między chwilami handlowania w ustalonej chwili czasu T

$u_{i,n}$ – możliwa górna zmiana ceny akcji w i -tym miesiącu między chwilami handlowania

d – możliwa dolna zmiana ceny akcji za ustaloną chwilę czasu T

d_n – możliwa dolna zmiana ceny akcji między chwilami handlowania w ustalonej chwili czasu T

$d_{i,n}$ – możliwa dolna zmiana ceny akcji w i -tym miesiącu między chwilami handlowania

p^* – prawdopodobieństwo martyngałowe wzrostu ceny akcji w ustalonej chwili czasu T

p_n^* – prawdopodobieństwo martyngałowe wzrostu ceny akcji między chwilami handlowania w ustalonej chwili czasu T

$p_{i,n}^*$ – prawdopodobieństwo martyngałowe wzrostu ceny akcji między chwilami handlowania w i -tej jednostce czasu, np. w i -tym miesiącu

q^* – prawdopodobieństwo martyngałowe spadku ceny akcji w ustalonej chwili czasu T

q_n^* – prawdopodobieństwo martyngałowe spadku ceny akcji między chwilami handlowania w ustalonej chwili czasu T

$q_{i,n}^*$ – prawdopodobieństwo martyngałowe spadku ceny akcji między chwilami handlowania w i -tym miesiącu

S_n – liczba sukcesów w n -tym schemacie Bernoulliego

ρ – średnia zmiana logarytmu ceny akcji po n chwilach; współczynnik określający tendencje zmian ceny akcji na rynku finansowym

$\phi(\cdot)$ – dystrybuenta standaryzowanego rozkładu normalnego

$o(n^\alpha)$ – symbol oznaczający dowolny ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniający:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / n^\alpha) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$C_{i-1,n}^{(i)}(s_{i-1}) := \frac{1}{e^{r_i}} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{i,n}^{*l} \cdot q_{i,n}^{*n-l} \cdot (s_{i-1} \cdot u_{i,n}^l \cdot d_{i,n}^{n-l} - K)^+$$

$$C_{j,n}^{(i+1)}(s_j) := \frac{1}{e^{r_{j+1}}} \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \cdot p_{j+1,n}^{*l} \cdot q_{j+1,n}^{*n-l} \cdot C_{j+1,n}^{(i+1)}(s_j \cdot u_{j+1,n}^l \cdot d_{j+1,n}^{n-l}), \quad 0 \leq j \leq i-1$$

$$C_0^{(i+1)}(s_0) := s_0 \cdot \phi(A_0^{(i+1)} \cdot \ln s_0 + B_0^{(i+1)}) - \frac{K}{e^{r_1} \cdot e^{r_2} \cdot \dots \cdot e^{r_{i+1}}} \cdot \phi(A_0^{(i+1)} \cdot \ln s_0 + \tilde{B}_0^{(i+1)})$$

$$C_j^{(i+1)}(s_j) := s_j \cdot \phi(A_j^{(i+1)} \cdot \ln s_j + B_j^{(i+1)}) - \frac{K}{e^{r_{j+1}} \cdot e^{r_{j+2}} \cdot \dots \cdot e^{r_{i+1}}} \cdot \phi(A_j^{(i+1)} \cdot \ln s_j + \tilde{B}_j^{(i+1)}), \quad 0 \leq j \leq i-1$$

$$A_0^{(i+1)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2}}$$

$$B_0^{(i+1)} = A_0^{(i+1)} \cdot \left(-\ln K + r_1 + r_2 + \dots + r_{i+1} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2) \right)$$

$$\tilde{B}_0^{(i+1)} = A_0^{(i+1)} \cdot \left(-\ln K + r_1 + r_2 + \dots + r_{i+1} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2) \right)$$

$$A_j^{(i+1)} = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{j+1}^2 + \sigma_{j+2}^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2}}, \quad 0 \leq j \leq i-1$$

$$B_j^{(i+1)} = A_j^{(i+1)} \cdot \left(-\ln K + r_{j+1} + r_{j+2} + \dots + r_{i+1} + \frac{1}{2}(\sigma_{j+1}^2 + \sigma_{j+2}^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2) \right), \quad 0 \leq j \leq i$$

$$\tilde{B}_j^{(i+1)} = A_j^{(i+1)} \cdot \left(-\ln K + r_{j+1} + r_{j+2} + \dots + r_{i+1} - \frac{1}{2}(\sigma_{j+1}^2 + \sigma_{j+2}^2 + \dots + \sigma_{i+1}^2) \right), \quad 0 \leq j \leq i-1$$

gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, m$; $j = 0, 1, 2, 3, \dots, m$.

Bibliografia

- Billingsley P. (1987), *Prawdopodobieństwa i miara*, tłum. K. Kizeweter, J. E. Roguski, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Black F., Scholes M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, „Journal of Political Economy”, vol. 81, s. 637–654.
- Chang L.-B., Palmer K. (2007), *Smooth convergence in the binomial model*, „Finance and Stochastics”, vol. 11, no. 1, s. 91–105.
- Chojnowska-Michalik A., Fraszka-Sobczyk E. (2016), *On the uniform convergence of Cox-Ross-Rubinstein formulas*, „Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź”, vol. 66, no. 1, s. 29–38.
- Chow Y.S., Teicher H. (1988), *Probability Theory. Independence, Interchangeability, Martingales*, Springer-Verlag, Berlin.
- Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. (1979), *Option Pricing. A Simplified Approach*, „Journal of Financial Economics”, vol. 7, no. 3, s. 229–263.
- Cox J.C., Rubinstein M. (1985), *Options Markets*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Dana R.A., Jeanblanc M. (2007), *Financial Markets in Continuous Time*, Springer-Verlag, Berlin.
- Diener F., Diener M. (2004), *Asymptotics of the price oscillations of a European call option*, „Journal of Mathematical Finance”, vol. 14, no. 2, s. 271–293.
- Elliot R.J., Kopp P.E. (2005), *Mathematics of Financial Markets*, Springer-Verlag, New York.
- Fichtenholz G.M. (1976), *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. 2, tłum. A. Goetz, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Fraszka-Sobczyk E. (2014), *On some generalization of the Cox-Ross-Rubinstein model and its asymptotics of Black-Scholes type*, „Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź”, vol. 64, no. 1, s. 25–34.

- Fraszka-Sobczyk E. (2017), *Uogólnione modele Coxa-Rossa-Rubinsteina wyceny opcji z parametrami zmieniającymi się w czasie i ich formuły graniczne*, rozprawa doktorska, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Fraszka-Sobczyk E., Chojnowska-Michalik A. (2019), *Option pricing in CRR model with time dependent parameters for two periods of time-part I*, „Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź”, vol. 69, no. 1, s. 83–90.
- Fraszka-Sobczyk E., Chojnowska-Michalik A. (2019), *Option pricing in CRR model with time dependent parameters for two periods of time-part II*, „Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź”, vol. 69, no. 1, s. 91–108.
- He H. (1990), *Convergence from discrete to continuous time contingent claims prices*, „The Review of Financial Studies”, vol. 3, no. 4, s. 523–546.
- Heston S., Zhou G. (2000), *On the rate of convergence of discrete-time contingent claims*, „Journal of Mathematical Finance”, vol. 10, no. 1, s. 53–75.
- Hull J. (1998), *Kontrakty terminowe i opcje*, tłum. P. Dąbrowski, J. Sobkowiak, Wydawnictwo WIG-Press, Warszawa.
- Jabbour G., Kramin M., Young S. (2001), *Two-state option pricing. Binomial model revisited*, „Journal of Futures Markets”, vol. 21, no. 11, s. 987–1001.
- Jajuga K., Jajuga T. (2006), *Inwestycje. Instrumenty finansowe, aktywa niefinansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Jakubowski J. (2006), *Modelowanie rynków finansowych*, Wydawnictwo SCRIPT, Warszawa.
- Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. (2006), *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Jakubowski J., Sztencel R. (2000), *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Wydawnictwo SCRIPT, Warszawa.
- Jarrow R., Rudd A. (1983), *Option Pricing*, Irwin, Homewood, Illinois.
- Joshi M. (2010), *Achieving higher order convergence for the process of European options in binomial trees*, „Mathematical Finance”, vol. 20, no. 1, s. 89–103.
- Kan N. (2005), *Generalized Multinomial CRR Option Pricing Model and its Black-Scholes Type Limit*, Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultätender Georg-August-Universität zu Göttingen.
- Karandikar R.L., Rachev S.T. (1995), *A generalized binomial model and option pricing formulae for subordinated stock-price processes*, „Probability and Mathematical Statistics”, vol. 15, s. 427–447.

- Leisen D, Reimer M. (2006), *Binomial models for option valuation – examining and improving convergence*, „Applied Mathematical Finance”, vol. 3, no. 4, s. 319–346.
- Motoczyński M., Stettner Ł. (1998), *On option pricing in the multidimensional Cox-Ross-Rubinstein model*, „Applicationes Mathematicae”, vol. 251, no. 1, s. 55–72.
- Musiela M., Rutkowski M. (2008), *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, Berlin.
- Nguyen V.H., Nguyen T.T. (2001), *On a generalized Cox-Ross-Rubinstein option market model*, „Acta Mathematica Vietnamica”, vol. 26, no. 2, s. 187–204.
- Paszkiewicz A. (2012), *Wycena w dyskretnych modelach rynku*, Uniwersytet Łódzki, Łódź [wykład].
- Rachev S.T., Ruschendorff L. (1994), *Models for option process*, „Theory of Probability Applications”, vol. 39, no. 1, s. 120–152.
- Ratibenyakool Y., Neammanee K. (2019), *Rate of convergence of binomial formula for option pricing*, „Communications in Statistics – Theory and Methods”, vol. 3, no. 4, s. 3537–3556.
- Rendleman R., Bartter B. (1979), *Two-State option pricing*, „The Journal of Finance”, vol. 34, no. 4, s. 1092–1110.
- Rubinstein M. (2000), *On the relation between binomial and trinomial option pricing models*, „The Journal of Derivatives”, vol. 8, no. 2, s. 47–50.
- Shiryayev A.N. (1996), *Probability*, Springer-Verlag, New York.
- Shreve S.E. (2004), *Stochastic Calculus for Finance I. The Binomial Asset Pricing Model*, Springer-Verlag, New York.
- Stettner Ł. (1997), *Option pricing in the CRR model with proportional transaction costs. A cone transformation approach*, „Applicationes Mathematicae”, vol. 24, no. 4, s. 475–514.
- Van der Hoek J., Elliott R.J. (2006), *Binomial Models in Finance*, Springer, New York.
- Walsh J.B. (2003), *The rate of convergence of the binomial tree scheme*, „The Journal of Finance and Stochastics”, vol. 7, no. 3, s. 337–361.
- Weron A., Weron R. (1998), *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Xiao X. (2010), *Improving speed of convergence for the prices of European options in binomial trees with even numbers of steps*, „Applied Mathematics and Computation”, vol. 216, no. 1, s. 2659–2670.

Spis rysunków, tabel i wykresów

Rysunek 1.1.1. Zmiany cen akcji według modelu dwumianowego	14
Rysunek 2.4.1. Zmiany cen akcji w ciągu czterech minut według uogólnionego modelu CRR	55
Rysunek 2.4.2. Zmiany cen akcji w ciągu trzech miesięcy według uogólnionego modelu CRR	56
Rysunek 2.4.3. Ceny europejskiej opcji kupna według uogólnionego modelu CRR	57
Rysunek 1. Przybliżanie z dołu funkcji ciągłej i nieujemnej funkcjami schodkowymi	178
Rysunek 2. Przybliżanie z góry funkcji ciągłej i nieujemnej funkcjami schodkowymi	181
Tabela 2.4.1. Zmiany cen akcji	58
Tabela 2.4.2. Graniczna cena opcji w uogólnionym modelu CRR dla $\sigma = 0,2$	58
Tabela 2.4.3. Graniczna cena opcji w uogólnionym modelu CRR dla $\sigma = 0,3$	58
Tabela 2.4.4. Graniczna cena opcji w uogólnionym modelu CRR dla $\sigma = 0,4$	58
Tabela 2.4.5. Graniczna cena opcji w uogólnionym modelu CRR dla $\sigma = 0,5$	59
Tabela 6.1.1. Istotność współczynników korelacji dla modelu BS	162
Tabela 6.1.2. Istotność współczynników korelacji dla modelu UBS	162
Tabela 6.2.1. Istotność współczynników korelacji dla modelu BS z parametrami zmieniającymi się w czasie	167
Tabela 1. Rynkowa wycena indeksu WIG20, stóp procentowych i opcji kupna na indeks WIG20	187
Tabela 2. Wycena opcji kupna na indeks WIG20 na podstawie modelu Blacka-Scholesa	191
Tabela 3. Wycena opcji kupna na indeks WIG20 na podstawie uogólnionego modelu Blacka-Scholesa	196

Tabela 4. Wycena opcji kupna na indeks WIG20 na podstawie modelu Blacka-Scholesa z parametrami zmieniającymi się w czasie	200
Wykres 2.4.1. Zależność granicznej ceny opcji w uogólnionym modelu CRR od współczynnika ρ	59
Wykres 6.1.1. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1700 punktów	157
Wykres 6.1.2. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1800 punktów	158
Wykres 6.1.3. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1900 punktów	158
Wykres 6.1.4. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2000 punktów	159
Wykres 6.1.5. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2100 punktów	159
Wykres 6.1.6. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2200 punktów	160
Wykres 6.1.7. Wyceny (GPW, modele BS i UBS) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2300 punktów	160
Wykres 6.2.1. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1700 punktów	163
Wykres 6.2.2. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1800 punktów	164
Wykres 6.2.3. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 1900 punktów	164
Wykres 6.2.4. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2000 punktów	165
Wykres 6.2.5. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2100 punktów	165
Wykres 6.2.6. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2200 punktów	166
Wykres 6.2.7. Wyceny (GPW, BS, BS z parametrami) opcji kupna na indeks WIG20 o cenie wykonania 2300 punktów	166