

*Anna Szymańska\**

## WPLYW PARAMETRÓW ROZKŁADU WIELKOŚCI SZKÓD NA WYSOKOŚĆ SKŁADKI NETTO W UBEZPIECZENIACH KOMUNKACYJNYCH OC

### 1. TEORETYCZNE ZASADY KALKULACJI SKŁADKI

Podstawowym warunkiem funkcjonowania towarzystwa ubezpieczeniowego w warunkach rynkowych jest odpowiednie dopasowanie wysokości składek do poziomu ryzyka, jakie reprezentują ubezpieczeni. Dotyczy to zarówno pojedynczego ubezpieczonego, jak i całego portfela.

Zbyt niska składka wynikająca z niedoszacowania ryzyka może być przyczyną nieodwracalnych strat, a nawet bankructwa firmy ubezpieczeniowej. Natomiast zbyt wysoka składka powoduje utratę klientów.

Kalkulacja składki jest dlatego zagadnieniem trudnym i uzależnionym od działu i grupy ubezpieczeń. Inaczej kalkuluje się składkę w ubezpieczeniach majątkowych, inaczej w ubezpieczeniach na życie.

Podstawą obliczenia składki jest oszacowanie na podstawie przewidywanej liczby i wielkości roszczeń składki netto, czyli składki przeznaczonej tylko na pokrycie roszczeń.

W dalszej części pracy przedstawiono podstawowe metody szacowania składki netto w ubezpieczeniach majątkowych.

Niech  $\Pi(X)$  oznacza wysokość składki netto za ochronę przed stratą o wielkości  $X$ . Niech  $X$  będzie zmienną losową o dystrybuancie  $F_X$ . Składka netto powinna posiadać następujące własności<sup>1</sup>:

- 1)  $\Pi(X) \geq EX$  (nieujemna nadwyżki),
- 2)  $\Pi(X) \leq \min\{x : F_X(x) = 1\}$  (składka nie wyższa niż maksymalna strata),
- 3)  $\Pi(X + a) = \Pi(X) + a$ , dla każdego  $a \in R$  i  $a \geq 0$  (translatywność składki),

---

\* Dr, Katedra Metod Statystycznych UŁ.

<sup>1</sup> Por. R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston 2001.

- 4)  $\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$ , dla niezależnych zmiennych  $X$  i  $Y$  (addytywność składki),  
 5)  $\Pi(X) = \Pi(\Pi(X|Y))$ , dla wszystkich  $X, Y$  (interaktywność składki),  
 6)  $\Pi(aX) = a\Pi(X)$  dla każdego  $a \in R$  i  $a \geq 0$  (proporcjonalność składki),  
 7)  $\Pi(X + Y) \leq \Pi(X) + \Pi(Y)$ , dla dowolnych zmiennych  $X$  i  $Y$  (subaddytywność składki).

W pracach dotyczących teorii ryzyka ubezpieczeniowego można znaleźć jeszcze inne własności funkcjonału składki. Jednak w praktyce większość funkcjonałów składki nie posiada wszystkich wymienionych własności<sup>2</sup>.

Wybrane zasady wyznaczania funkcjonału składki:

- 1) Zasada czystej składki (równoważności składki netto)

$$\Pi(X) = EX \quad (1)$$

- 2) Zasada wartości oczekiwanej

$$\Pi(X) = (1 + \alpha)EX \quad (2)$$

gdzie  $\alpha \geq 0$  nazywa się współczynnikiem bezpieczeństwa.

- 3) Zasada wariancji

$$\Pi(X) = EX + \alpha VarX, \alpha \geq 0 \quad (3)$$

- 4) Zasada odchylenia standardowego

$$\Pi(X) = EX + \alpha \sqrt{VarX}, \alpha \geq 0 \quad (4)$$

- 5) Zasada odchylenia absolutnego

$$\Pi(X) = EX + \alpha E|X - Me_s|, \alpha \geq 0 \quad (5)$$

- 6) Zasada percentylu (kwantyla rzędu  $\varepsilon$ )

$$\Pi(X) = \min\{x : F(x) \geq 1 - \varepsilon\} = F_x^{-1}(1 - \varepsilon) \quad (6)$$

- 7) Zasada maksymalnej straty

$$\Pi(X) = pEX + (1 - p) \max(X), p \geq 0 \quad \text{i} \quad \max(X) < \infty \quad (7)$$

8) Zasada zerowej użyteczności obejmuje grupę metod wyznaczania składki uwzględniającą preferencje ubezpieczyciela, posiadającego majątek  $w$ , wyrażone przy pomocy funkcji użyteczności:

<sup>2</sup> *Ibidem.*

$$u(w) = Eu(w + \Pi(X) - X), w \in (-\infty, +\infty)$$

Dla  $w = 0$  mamy:

$$u(0) = Eu(\Pi(X) - X)$$

Najczęściej stosowaną w ubezpieczeniach funkcją użyteczności jest funkcja wykładnicza postaci:

$$u(w) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha w}), \alpha > 0$$

Zasada zerowej użyteczności z wykładniczą funkcją użyteczności jest nazywana zasadą wykładniczą<sup>3</sup>.

Zasada wykładnicza:

$$\Pi(X) = \frac{1}{\alpha} \log(Ee^{\alpha X}), \alpha > 0, Ee^{\alpha X} < \infty \quad (8)$$

9) Zasada wiarygodności – na początku XX w. składkę netto zaczęto liczyć jako średnią ważoną składki kolektywnej  $\mu$  i indywidualnej składki  $\bar{x}_i$  oszacowanej na podstawie historii roszczeń w przeszłości, czyli jako

$$\Pi(X_i) = Z_i \bar{x}_i + (1 - Z_i) \mu \quad (9)$$

gdzie  $Z_i \in (0,1)$ .

Tak zdefiniowaną składkę nazywa się *składką zaufania* dla  $i$ -tego kontraktu, natomiast  $Z_i$  współczynnikiem zaufania.

W pracy przedstawiono zasady szacowania składki netto najczęściej omawiane w literaturze przedmiotu.

W warunkach idealnych, to znaczy przy nieskończonej liczbie potencjalnych ubezpieczanych oraz doskonałej informacji o ryzyku, powinna być stosowana zasada równoważności składki. Zasady 2–5 nazywa się zasadami nadwyżki.

Analityczne wyznaczenie współczynnika bezpieczeństwa  $\alpha$ , występującego w formułach 2, 3, 4, 5 i 7, jest trudne. Najczęściej wyznaczając składkę netto dla całego portfela stosuje się dwa podejścia. W pierwszym składkę dla portfela ryzyk ustala się tak, by prawdopodobieństwo poniesienia straty na tym portfelu w kolejnym okresie nie przekroczyło ustalonej z góry wartości – kwantyla rzędu  $\varepsilon$  zmiennej losowej łącznej sumy szkód w portfelu. Druga metoda opiera się na teorii ruiny. Według tej metody dobrze oszacowana składka powinna gwarantować, że prawdopodobieństwo ruiny nie przekroczy zadanej wartości  $\varepsilon$ . W prak-

<sup>3</sup> Por. C. D. Daykin, T. Pentikäinen, M. Pesonen, *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London 1994.

tyce współczynnik bezpieczeństwa jest informacją poufną i towarzystwa ubezpieczeniowe nie chcą ujawniać jego wielkości. Jednak współczynnik 100% uznaje się za jego górną granicę.

Zasadę wykładniczą wprowadził Gerber<sup>4</sup>, natomiast zasada maksymalnej straty jest czysto teoretyczna i na ogół służy do wyznaczania górnego ograniczenia składki.

Przedstawione funkcjonały składek ubezpieczeniowych mogą być stosowane dla portfeli jednorodnych lub dla jednakowych klas jednego portfela. W praktyce ubezpieczeniowej w celu równomiernego rozłożenia ryzyka w portfelu stosuje się zasadę wiarygodności.

## 2. PRZYKŁADY EMPIRYCZNE

W przeprowadzonym eksperymencie rozważano szacowanie składek netto dla portfela o łącznej wielkości szkód typu Pareto. Oceniono jak zmienia się wysokość składki netto w zależności od parametrów rozkładu oraz metody szacowania składki. Wartość oczekiwana i wariancja w badanych populacjach są zbliżone do średniej i wariancji wielkości szkód w ubezpieczeniach komunikacyjnych OC publikowanych przez KNF.

Niech zmienna losowa  $X$ , oznaczająca wielkość szkód w portfelu ubezpieczeń komunikacyjnych OC, ma rozkład Pareto z parametrami  $\alpha$  i  $\beta$  o funkcji gęstości postaci

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}}, \quad x > 0, \quad (10)$$

W przeprowadzonym badaniu wygenerowano cztery warianty pseudopopulacji (dalej nazywanej populacją) o rozkładzie Pareto, o różnych parametrach i liczebności 10 000:

Wariant A:

$$\alpha = 2,3; \beta = 2,8; EX = 4,93535; DX = 5,2745; x_{0,5} = 3,7681; N = 10000$$

Wariant B:

$$\alpha = 2,23; \beta = 2,76; EX = 5,0038; DX = 5,8188; x_{0,5} = 3,7490; N = 10000$$

Wariant C:

$$\alpha = 2,18; \beta = 2,71; EX = 5,0067; DX = 6,2284; x_{0,5} = 3,7071; N = 10000$$

<sup>4</sup> Por. H. G. Gerber, *Mathematical Risk Theory*, Homewood, Philadelphia 1979.

Wariant D:

$$\alpha = 2,14; \beta = 2,66; EX = 4,9936; DX = 6,5760; x_{0,5} = 3,6600; N = 10000$$

gdzie:

$\alpha, \beta$  – parametry rozkładu Pareto,

$EX$  – wartość oczekiwana w populacji,

$DX$  – odchylenie standardowe w populacji,

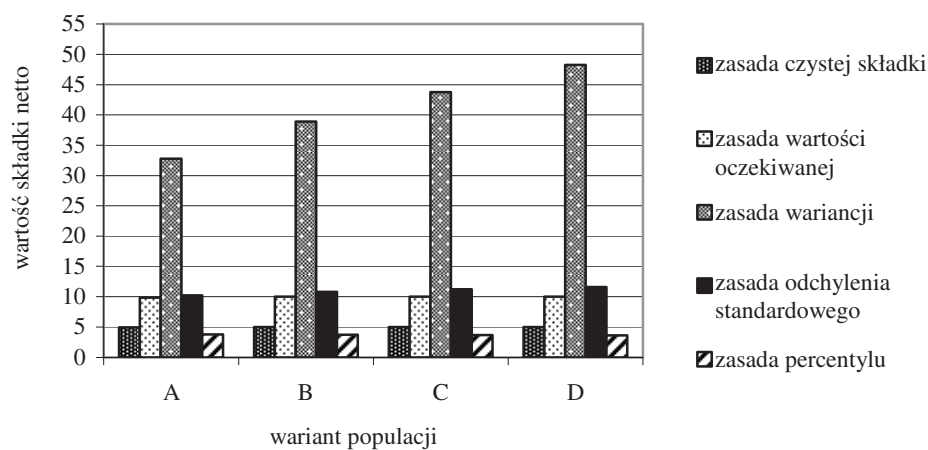
$x_{0,5}$  – kwantyl rzędu 0,5 w populacji.

Tabela 1

Wartości składki netto szacowanej różnymi metodami dla rozkładów wielkości szkód o różnych parametrach

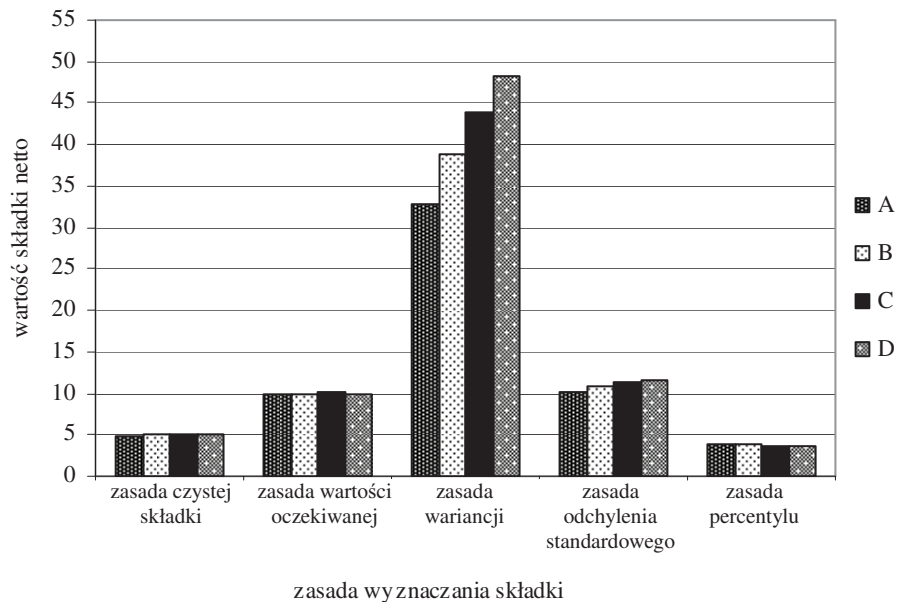
Wariant populacji	Metoda wyznaczania składki netto				
	zasada czystej składki	zasada wartości oczekiwanej	zasada wariacji	zasada odchylenia standardowego	zasada percentylu
A	4,935335	9,87067	32,75568525	10,209835	3,7681
B	5,0038	10,0076	38,86223344	10,8226	3,749
C	5,0067	10,0134	43,79966656	11,2351	3,7071
D	4,9936	9,9872	48,237376	11,5696	3,66

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 1. Wartości składki netto szacowanej różnymi metodami dla rozkładów wielkości szkód o różnych parametrach

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Wartości składki netto szacowanej różnymi metodami dla rozkładów wielkości szkód o różnych parametrach

Źródło: jak do rys. 1.

Przeprowadzone badanie wskazuje na bardzo dużą zależność wysokości składki netto od metody jej szacowania. Najwyższe składki netto uzyskano przy zastosowaniu zasady wariancji, najniższe przy zastosowaniu zasady opartej na kwantylu rzędu 0,5. Można również stwierdzić, że zasada wariancji jest najbardziej wrażliwa na zmianę parametrów rozkładu wielkości szkód w portfelu. Zasada odchylenia standardowego jest również wrażliwa na zmiany wielkości parametrów rozkładu, jednak w znacznie mniejszym stopniu. Pozostałe z badanych metod szacowania składki netto dają bardzo zbliżone wartości składki netto w przypadku zmian parametrów rozkładu wielkości szkód. Należy jednak podkreślić, że parametry badanych rozkładów nie różniły się bardzo znacząco ze względu na konieczność odniesienia się do rzeczywistych parametrów w portfelach ubezpieczeń komunikacyjnych OC.

W praktyce towarzystwa ubezpieczeniowe najczęściej stosują zasadę wariancji. Można stwierdzić, że zabezpieczają się w ten sposób przed ryzykiem straty. Ubezpieczyciele powinni jednak pamiętać o bardzo dużym wpływie parametrów rozkładu wielkości szkód na wysokość składki netto szacowanej metodą wariancji.

*Anna Szymańska*

**THE INFLUENCE OF THE DAMAGE SIZE DISTRIBUTION  
ON THE NET PREMIUM SIZE IN CAR LIABILITY INSURANCE CR**

The rules most often used to estimate net premiums in car liability insurance are the rules based on classical statistical measures. In the case of asymmetric distributions, estimating net premiums by means of location measures seems reasonable. In the paper the influence of the parameter of the distribution of the size of damages and net premium estimating method on the size of net premium have been examined. The research was done for the Pareto type distribution with different parameters.

**Key words:** net premium, civil responsibility (CR) insurance, Pareto distribution.