INSTYTUT MATEMATYCZNY
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa
tel.: 48-22-522-81-00, fax: 48-22-629-39-97, e-mail: im@impan.pl, www.impan.pl

Dr hab. Karol Palka, prof. IM PAN
palka@impan.pl

7 maja 2022

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR. KACPRA GRZELAKOWSKIEGO „CALABI-YAU THREEFOLDS WITH TRIPLE POINTS AND TYPE III CONTRACTIONS"

Praca doktorska mgr. Grzelakowskiego leży w obszarze zespolonej geometrii algebraicznej i dotyczy własności trójwymiarowych rozmaitości Calabiego-Yau (CY3). Istnieje bogata literatura matematyczna na temat tych rozmaitości. Leżą one również w zakresie zainteresowania fizyków konstruujących modele oddziaływania cząstek elementarnych na bazie oddziaływań obiektów jednowymiarowych - (super)strun, gdzie przestrzeń jest lokalnie iloczynem kartezjańskim $\mathbb{R}^4$ i rozmaitości zwartej, która ze względu na naturalne złożenia teorii okazuje się być rozmaitością CY3 [CHSW85], i której własności geometryczne określają własności cząstek. W obecnym stanie badań klasyfikacja takich rozmaitości z dokładnością do deformacji jest zadaniem bardzo trudnym. Przypuszcza się, że liczba różnych topologicznie CY3 jest nieskończona. Przypuszcza się również, że dowolne dwie rozmaitości CY3 można połączyć ciągiem ściągnięć biwymiernych i deformacji [Rei87], [Gro97b].

Istotna część badań dotyczących CY3 polega na konstruowaniu nowych przykładów i analizowaniu ich własności homologicznych i geometrycznych. Praca doktorska pana Grzelakowskiego wpisuje się w ten nurt badań. Praca składa się z sześciu sekcji i trzech dodatków, liczy 83 strony. Część wyników z doktoratu została opublikowana w Internat. J. Math. (MCQ=0,64).

Sekcja 1-2: wstęp i sekcja przygotowawcza.

Wstęp jest napisany przystępnie. Brakuje określenia co autor uważa za najbardziej istotne wyniki własne. Sekcja z wyjaśnieniami podstawowych pojęć powinna być pełniejsza. Są też usterki:

(1) We wstępie mówi się o „non-algebraic CY", ale bez definicji.
(2) W definicjach 2.1 i 2.2 rozmaitości X i Y powinny być normalne.
(3) Definicja 2.3 jest niezdarna. „The process $T(X, Y, \widetilde{Y})$ of going" można zastąpić parą (π, δ), gdzie δ to odpowiednia deformacja.
(4) W definicji 2.4 można uniknąć podwójnej negacji oraz użyć Definicji 2.3.
(5) ”Smoothing” powinno być zdefiniowane (własności bazy, morfizmu). Podobnie brakuje definicji $Def(X)$.
(6) W wielu miejscach zakłada się, że badana rozmaitość jest właściwa/rzutowa bez napisania tego wprost. Np. w Definicji 2.5 właściwość jest pominięta, a przecież dalej używa się stożka $NE(X)$ zakładając, że jest skończenie wymiarowy i że krzywe generujące $N_1(X)$ są domknięte.
(7) Wszelkie użycia niejasnej terminologii w rodzaju „we can think of ... as of ...", „we can consider ... as ..." (np. str. 9, ostatni akapit, a w dalszej części pracy jeszcze kilkukrotnie) powinno się zastąpić wskazaniem izomorfizmu identyfikującego.

(8) Przy definicjach warto używać dla wprowadzanych pojęć LATEX-owego „emph”. Podobnie warto używać „operatorname” dla obiektów typu $Nef(X)$, $Amp(X)$, $Def(X)$.
(9) Wniosek 2.21: Nie jest jasno powiedziane, co to jest deformacja przemian (transition) geometrycznych.

Sekcje 3-4 - konstrukcje, teoria przecięć

Celem Sekcji 3 jest podanie przykładów CY3 posiadających ściągnięcie biwymierne $\pi\colon \widetilde{X} \longrightarrow Y$ typu III, tzn. takie, które jest prymitywne (ma relatywną rangę Picarda równą 1), $E := \operatorname{Exc}\pi$ jest dywizorem, a $C := \pi(E)$ jest krzywą. Rozmaitość $\widetilde{X}$ jest konstruowana jako rozwiązanie osobliwości CY3 $\bar{X}$ zawierającej stożek nad krzywą, dla którego wierzchołek O jest zwykłym punktem potrójnym $\widetilde{X}$, a ściągnięcie π jest ściągnięciem $\mathbb{P}^1$-rozwłóknionej gładkiej powierzchni, która jest transformatą właściwą stożka, na odpowiednią krzywą.

Doktorant stosuje powyższy schemat dla kwintyki $\bar{X}_5$ w $\mathbb{P}^4_{[x:y:z:t:u]}$, zupełnych przecięć $\bar{X}_{2,4}$ i $\bar{X}_{3,3}$ w $\mathbb{P}^5$, oraz sekstyki $\bar{X}_6$ w $\mathbb{P}(1:1:1:1:2)$, odpowiednio dobierając równania. Na przykład w pierwszym przypadku jest to równianie $u^2F_3+uF_4+F_5=0$, gdzie $F_i(x,y,z,t)=0$ są powierzchniami stopnia i zawierającymi wspólną krzywą gładką. W Twierdzeniach 3.1, 3.3, 3.5, 3.7 pokazano, że osobliwości $\bar{X}\setminus O$ to punkty podwójne i leżą na stożku, a w konsekwencji odpowiednie rozwiązanie osobliwości $\widetilde{X}$ jest CY3. Dowód opiera się na analizie równań, własności powiązanych systemów liniowych i twierdzeniu Bertiniego.

Niech $\bar{\pi}\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ będzie rozdmuchaniem $O \in \bar{X}$ i niech $\widetilde{\pi}\colon X \longrightarrow \widetilde{X}$ będzie małym rozwiązaniem osobliwości $\widetilde{X}$. W Sekcji 4 pokazano, że transformaty właściwe hiperpłaskiego cięcia, stożka i dywizora $\operatorname{Exc}\bar{\pi}$: H, E, D, są liniowo niezależne w grupa Picarda X, co pozwala wstępnie opisać geometrię stożka Kählerowskiego X (Twierdzenie 4.6). Dowody wykorzystują fakty z literatury, teorię przecięć na powierzchniach i trój-rozmaitościach, szczególnie formułę dołączania.

Sekcje 5-6 - liczby Hodge'a, geometria stożka Kählerowskiego

W Sekcji 5 autor wylicza liczby Hodge'a dla rezolwent X trójrozmaitości $\bar{X}$, które są (specjalnymi) zupełnymi przecięciami, a ich osobliwości to zwykłe punkty potrójne i podwójne. Obliczenia są niedużymi modyfikacjami obliczeń przeprowadzonych przez Cynka [Cyn01], [Cyn19], [Cyn21]. Wyniki w terminach liczb punktów osobliwych i tzw. defektu δ są opisane dla X_5 i X_6 we Wnioskach 5.7 i 5.8, a dla $X_{2,4}$ i $X_{3,3}$ we Wnioskach 5.15 i 5.16. Przy założeniu, że X zawiera gładką powierzchnię E, $\mathbb{P}^1$-rozwłóknioną nad gładką krzywą C genusu $g(C) \geqslant 1$, wiadomo, że obraz po ściągnięciu typu III jest wygładzalny [Gro97a]. W Stwierdzeniu 5.17, używając deformacji do ściągnięcia typu I (locus wyjątkowy składa się z krzywych) i odwołując się do wyników [Wil92], [Ros06], doktorant wylicza liczby Hodge'a dla wygładzenia w przypadku $g(C) > 1$. Dla $g(C) = 1$ sytuacja pozostaje niejasna. Zwraca uwagę niespójna (choć wyjaśniana) notacja: w Sekcjach 4 i 5.3 X jest rezolwentą, $\bar{X}$ jest gładkie, $\widetilde{X}$ jest częściową rezolwentą, a w Sekcjach 5.1-5.3 $\widetilde{X}$ to rezolwenta, a X to rozmaitość osobliwa.

W Sekcji 6 autor szczegółowo opisuje geometrię stożka Kählerowskiego X, w tym opisuje możliwe ściągnięcia typu I, II i III oraz konkretne systemy liniowe postaci dające ściągnięcia typu III, so uzupełnia rezultaty z prac [KK09], [Kap09]. Geometria stożka zależy od geometrii krzywej C (w Tabelach 2, 5, 6, 11 opisano 40 możliwości).

W zakresie jakości tekstu zwracają uwagę problemy z użyciem angielskich przedimków „the” oraz „a” oraz niemałe problemy z interpunkcją (dla przykładu, w pierwszym akapicie na stronie 53 brakuje sześciu przecinków).

Dodatki

W dodatkach do pracy przedstawiono kilka pytań otwartych (Sekcja 8) oraz częściowe rezultaty dotyczące górnego ograniczenia na liczbę osobliwości $\bar{X}_5$, $\bar{X}_{2,4}$, $\bar{X}_{3,3}$, $\bar{X}_6$ przy założeniu, że osobliwości te są wyłącznie zwykłymi punktami potrójnymi (Sekcja 7). Obliczenia defektu robione były przy użyciu programu Macaulay2.

Podsumowanie i konkluzja

W swojej pracy doktorskiej mgr Kacper Grzelakowski prezentuje znajomość zespolonej geometrii algebraicznej w wymiarach trzy i dwa, w tym biegłość w posługiwaniu się naturalnymi konstrukcjami i narzędziami geometrycznymi takimi jak rozdmuchania, deformacje, systemy liniowe, teoria przecięć, rozwiązywania osobliwości, obliczenia kohomologii. Naukowa jakość wyników na tym etapie jest w mojej ocenie dobra, choć nie bardzo dobra. Całość rozprawy oparta jest na badaniu serii przykładów trój-rozmaitości Calabiego-Yau zawierających stożek nad krzywą, a odpowiednia praca wykonana jest rzetelnie. Powiązana geometria jest ciekawa. Brakuje jednak trudniejszych pytań np. natury klasyfikacyjnej (chociaż doceniam opisy w Sekcji 6) lub problemów, gdzie doktorant mógłby wykazać się możliwością przeprowadzenia dłuższych rozumowań mocniej odbiegających od rozumowań znanych z literatury. Być może wynika to ze specyfiki podjętej tematyki. Pomimo tego zastrzeżenia uważam, że doktorant wykazuje się w swojej rozprawie wystarczającą na tym etapie wiedzą z geometrii algebraicznej i umiejętnością rozwiązywania problemów naukowych. Rozprawa ma poprawną strukturę, zawiera rozwiązania oryginalnych problemów naukowych i właściwie cytuje literaturę, a więc w mojej ocenie spełnia warunki ustawowe. Użycie przedimków i interpunkcja wymagają korekty.

Signature Not Verified

Dokument podpisany
przez Karol Pałka
Data: 2022.05.07
13:46:04 CEST

Literatura

[CHSW85] P. Candelas, Gary T. Horowitz, Andrew Strominger, and Edward Witten, *Vacuum configurations for superstrings*, Nuclear Phys. B **258** (1985), no. 1, 46–74. MR 800347

[Cyn01] Sławomir Cynk, *Defect of a nodal hypersurface*, Manuscripta Math. **104** (2001), no. 3, 325–331. MR 1828878

[Cyn19] ———, *Defect formula for nodal complete intersection threefolds*, Internat. J. Math. **30** (2019), no. 4, 1950020, 14. MR 3950817

[Cyn21] ———, *Hodge numbers of hypersurfaces in $\mathbb{P}^4$ with ordinary triple points*, Adv. Geom. **21** (2021), no. 2, 293–298. MR 4243953

[Gro97a] Mark Gross, *Deforming Calabi-Yau threefolds*, Math. Ann. **308** (1997), no. 2, 187–220. MR 1464900

[Gro97b] ———, *Primitive Calabi-Yau threefolds*, J. Differential Geom. **45** (1997), no. 2, 288–318. MR 1449974

[Kap09] Grzegorz Kapustka, *Primitive contractions of Calabi-Yau threefolds. II*, J. Lond. Math. Soc. (2) **79** (2009), no. 1, 259–271. MR 2472144

[KK09] Grzegorz Kapustka and Michał Kapustka, *Primitive contractions of Calabi-Yau threefolds. I*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 2, 482–502. MR 2493796

[Rei87] Miles Reid, *The moduli space of 3-folds with $K = 0$ may nevertheless be irreducible*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 329–334. MR 909231

[Ros06] Michele Rossi, *Geometric transitions*, J. Geom. Phys. **56** (2006), no. 9, 1940–1983. MR 2240431

[Wil92] P. M. H. Wilson, *The Kähler cone on Calabi-Yau threefolds*, Invent. Math. **107** (1992), no. 3, 561–583. MR 1150602