prof. dr hab. Tomasz Natkaniec
Instytut Matematyki UG
ul. Wita Stwosza 57
80-952 Gdańsk

Gdańsk, 21 listopada 2021

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Justyny Poprawy
LOKALNE ASPEKTY ENTROPII I CHAOSU DYSKRETNYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Temarem rozprawy doktorskiej Pani mgr Justyny Poprawy są różne rodzaje chaosu i entropii układów dynamicznych. Pierwotnie pojęcia chaosu i entropii były definiowane globalnie. Od pewnego czasu w zespole Profesora Pawlaka z UŁ badane są lokalne odpowiedniki tych własności. Rozprawa mgr Poprawy wpisuje się w te badania.

Recenzowana rozprawa zawiera 101 stron maszynopisu. Składa się ze wstępu, trzech rozdziałów, spisu 57 oznaczeń i bibliografii zawierającej 28 pozycji.

Opis wyników. W całej pracy rozważane są nieautonomiczne układy dynamiczne okresowe, składające się z funkcji ciągłych przekształcających k-wymiarową kostkę jednostkową $\mathbb{I}^k$ w siebie, gdzie k jest dowolną liczbą naturalną. Jedynym wyjątkiem od tej reguły jest Twierdzenie 55, w którym zakłada się (wbrew zapowiedziom ze wstępu), że $k = 1$. Pierwszy rozdział zawiera podstawowe definicje i twierdzenia, które będą wykorzystywane w dalszych częściach pracy. W rozdziale drugim Autorka wprowadza pojęcie punktu *skupiającego entropię* i porównuje je z badanymi wcześniej definicjami punktu *ogniskującego entropię* i punktu *pełnej entropii.* W Twierdzeniu 41 mgr Poprawa dowodzi dla funkcji ciągłych $f\colon \mathbb{I}^k \to \mathbb{I}^k$, że każdy punkt ogniskujący entropię jest też punktem skupiającym entropię, ale pojęcia te nie są równoważne. Wynikiem reprezentatywnym dla tego rozdziału jest Twierdzenie 43 o gęstości rodziny funkcji ciągłych z $\mathbb{I}^k$ w $\mathbb{I}^k$, które posiadają punkt skupiający entropię, który nie jest punktem ogniskującym entropię, w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych z z $\mathbb{I}^k$ w $\mathbb{I}^k$ z metryką supremum.

W rozdziale trzecim Doktorantka rozpatruje pięć rodzajów punktów chaosu układów dynamicznych. Są to punkty *chaosu*, punkty *dystrybutywnego chaosu*, punkty *skupiające chaos*, punkty *skupiające dystrybutywny chaos* oraz punkty *silnie skupiające chaos.* Wprost z definicji wynikają następujące zależności:

punkt silnego chaosu ⇒ punkt skupiający (dystrybutywny) chaos ⇒ punkt (dystrybutywnego) chaosu oraz punkt skupiający entropię.

Głównym wynikiem tego rozdziału, jak również całej rozprawy, jest Twierdzenie 55, w którym mgr Poprawa dowodzi, że następujące zbiory są gęste w przestrzeni nieautonomicznych układów okresowych funkcji ciągłych na $\mathbb{I}$:

(1) zbiór A układów posiadających punkt skupiający entropię, który nie jest punktem skupiającym chaos i nie jest punktem skupiającym entropię układu;

(2) zbiór B układów posiadających punkt chaosu, który nie jest punktem skupiającym entropię;

(3) zbiór C układów posiadających punkt dystrybutywnego chaosu, który nie jest ani punktem chaosu, ani punktem skupiającym entropię;

(4) zbiór D układów posiadających punkt silnie skupiający chaos.

Dowód tego twierdzenia jest rozpisany niezwykle szczegółowo, zajmuje 40 stron rozprawy i zawiera 154 numerowane formuły.

Rozdział czwarty poświęcony jest badaniu chaosu semigrup generowanych przez skończoną rodzinę $\mathcal{A}$ funkcji ciągłych z $\mathbb{I}^k$ do $\mathbb{I}^k$. Autorka w naturalny sposób uogólnia pojęcie punktu skupiającego chaos na pojęcie punktu *silnie skupiającego chaos skończonej rodziny* $\mathcal{A}$. Głównym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 62, zawierające długą i szczegółowo opisaną konstrukcję modyfikacji funkcji z rodziny $\mathcal{A}$.

Ocena strony merytorycznej. Wyniki zawarte w rozprawie Pani mgr Justyny Poprawy oceniam wysoko. Odpowiadają one na naturalne pytania i dobrze wpisują się w nurt badań nad lokalnymi własnościami układów dynamicznych prowadzonych w zespole Profesora Pawlaka. Dowody twierdzeń bazują na klasycznych wynikach z teorii chaosu, odniosłem wrażenie, że Doktorantka dobrze orientuje się w literaturze przedmiotu. Z badań mgr Poprawy można wnioskować, że wiele globalnych własności chaosu ma swoje lokalne odpowiedniki. O ile się orientuję, wyniki zamieszczone w rozprawie nie są na razie opublikowane.

Ocena strony redakcyjnej. Rozprawa doktorska Pani mgr Poprawy jest niezwykle starannie zredagowana. Dowody głównych twierdzeń są rozpisane bardzo drobiazgowo, na mój gust są nawet miejscami zbyt rozwlekłe.

W gąszczu szczegółów (vide 154(!) formuły numerowane w dowodzie Twierdzenia 55) łatwo zagubić ideę dowodu. Trzeba jednak przyznać, że Autorka sprawnie porusza się w tych setkach formuł i oznaczeń. Dobrym pomysłem było zamieszczenie na końcu rozprawy spisu oznaczeń, zwłaszcza, że część z nich jest w moim odczuciu mało intuicyjna. Wydaje mi się, że przydałby się również spis definiowanych pojęć.

Uwagi szczegółowe. Podczas czytania dostrzegłem niewielką ilość drobnych przekłamań lub nieścisłości, które z łatwością można poprawić, i które nie mają wpływu na ostateczną ocenę całości. I tak na przykład,

(1) Str. 6. Symbol $\mathcal{L}(a,b)$ jest niejednoznaczny gdy $k > 1$, gdyż w przestrzeni $\mathbb{I}^k$ jest wiele łuków o końcach a, b.

(2) Str. 9. Oznaczenie $x_0 \in \overline{\mathrm{Fix}}(\mathcal{A})$ relację $\mathcal{A}$ jest rodziną nigdzie stałą w x_0 i $x_0 \in \mathrm{Fix}(\mathcal{A})$ jest mylące (a na dodatek nie ma go na liście symboli na końcu rozprawy).

(3) Str. 10. Definicja układu dynamicznego sformułowana jest dla funkcji z $\mathbb{I}^k$ w $\mathbb{I}^k$, ale w Defincji 15 na str. 12 występują układy dynamiczne funkcji określonych na przestrzeniach metrycznych.

(4) Str. 28. Definicja 44 jest niepoprawnie sformułowana.

(5) Linia 35^{10}. Powinno być: $\xi_j(x) = \xi_q(x)$ (bez dodatku o x i q).

(6) Linia 53^4. Powinno być: "Korzystając", jest "Korzystają".

(7) Str. 56. Warunek (3.100) jest powtórzony dwa razy. (Praca zawiera więcej podobnych powtórzeń.)

(8) Linia 62^3. Powinno być: "$\ldots p_1''' < y_0$".

(9) Str. 73. W założeniach Twierdzeniu 62 zabrakło ciągłości funkcji z rodziny $\mathcal{A}$.

(10) Str. 82. W warunku (4.65) nie ma potrzeby wprowadzania dodatkowego oznaczenia L_{m_s}. Nie widzę też potrzeby wyróżniania warunku (4.67), który wynika natychmiast z warunku (4.66). Ta sama uwaga dotyczy warunków (4.84) i (4.86) na str. 83.

(11) Linia 86^{10}. Powinno być: *istnieje podciąg ciągu* $(x_{k_y})\ldots$ Dowód ciągłości funkcji φ_1 w punkcie $x^{(n_1)}$ jest chyba zbyt skomplikowany. Ta sama uwaga dotyczy dowodu ciągłości funkcji φ_i na str. 87.

Konkluzja. Reasumując, mocną stroną recenzowanej rozprawy są nowe, nietrywialne wyniki wraz z ich poprawnymi dowodami. Słabszych stron upatrywałbym w zbyt rozwlekłym i przeformalizowanym zapisie rozumowań. Biorąc pod rozwagę wszystkie powyższe argumenty, stwierdzam, że rozprawa mgr Justyny Poprawy spełnia wszelkie ustawowe wymagania stawiane pracom doktorskim, wnoszę więc o jej przyjęcie i o dopuszczenie Autorki do dalszych etapów przewodu doktorskiego.