

Dr hab. Jacek M. Jędrzejewski
Emeryt Akademii Pomorskiej w Słupsku
miejsce zamieszkania: 93 342 Łódź,
ul. Szczanieckiej 5 m. 8. tel. +48 604 17 27 93

Łódź, 13 listopada 2021 r.

RECENZJA

Pracy doktorskiej mgr Justyny Poprawy
pt. **Lokalne aspekty entropii i chaosu dyskretnych układów
dynamicznych**

napisanej pod kierunkiem Profesora Ryszarda Jerzego Pawlaka
promotor pomocniczy: dr Ewa Korczak-Kubiak

Przedstawiona mi do recenzji (całkiem obszerna) praca doktorska Pani Justyny Poprawy została napisana na 101 stronach. Zawiera ona wstęp, 4 właściwe rozdziały, spis oznaczeń i bibliografię.

Wstęp, jak można się domyślać, omawia w dość enigmatyczny sposób rys historyczny teorii chaosu i entropii układów funkcji. Rozdział pierwszy przypomina całą serię pojęć i twierdzeń, na których opiera się reszta pracy. Istotne treści matematyczne są zawarte w rozdziałach 2, 3 i 4.

I tak: w rozdziale 2 zatytułowanym *Punkty skupiające entropię* rozważane są układy dynamiczne w l wymiarowej kostce jednostkowej. Badane są lokalne własności układów dynamicznych i ich związki.

Według mnie najciekwsze twierdzenia to:

- Twierdzenie 38. mówiące, że dla każdego układu dynamicznego w I^l istnieje punkt skupiający entropię tego układu.
- Twierdzenie 42. podające warunek konieczny i dostateczny na to, kiedy wędrujący punkt jest punktem ogniskującym entropię funkcji f .

Trzeci rozdział pracy (zatytułowany *Relacje między punktami skupiającymi entropię i chaos*) zajmuje się zagadnieniami funkcji jednej zmiennej i zawiera jedno twierdzenie umieszczone pod numerem 55. Faktycznie jest to zestaw czterech twierdzeń. Dla jasności zaczniemy od pewnych oznaczeń. Niech U_I oznacza przestrzeń

metryczną układów dynamicznych złożonych z ciągłych funkcji w przedziale I , zaś U_I^p oznacza podprzestrzeń układów okresowych o dowolnym okresie (oczywiście funkcji określonych w I i okres nie dotyczy funkcji, lecz układów). Podstawowe twierdzenie tego rozdziału określa 4 podzbiory przestrzeni U_I^p , z których każdy jest gęsty w tej przestrzeni.

Twierdzenia te wskazują, że wymienione tam zbiory scharakteryzowane przez lokalne własności skupiające chaos lub skupiające entropię nie stanowią rzadkości wśród układów ze zbioru U_I^p .

Dowody tych twierdzeń są długie, niektóre z nowymi dowodami, inne oparte na modyfikacji konstrukcji odpowiednich funkcji.

W rozdziale czwartym (*Semigrupy, zakłócenia*) Autorka pracy ponownie zajmuje się przypadkiem wielowymiarowym. Tu jednak rozpatruje półgrupy generowane przez nieskończone zbiory funkcji przekształcające I^l w siebie. Podstawowe twierdzenie tego rozdziału, to T.62. Mówiąc nieprecyzyjnie: dla skończonej rodziny $\mathcal{A}$ funkcji z I^l w I^l i punktu stałego x_0 tej rodziny istnieje ε zaburzenie $\mathcal{A}_d$ rodziny $\mathcal{A}$, dla której x_0 jest punktem silnie skupiającym chaos $\mathcal{A}_d$.

Ponadto, rodzina $\mathcal{A}_d$ ma nieskończoną entropię.

Twierdzenie to jest modyfikacją twierdzenia z pracy łódzkich matematyków: Ewy Korczak-Kubiak, Anny Loranty i Ryszarda J. Pawłaka. W tej pracy autorzy zajmowali się problemem entropii, a w obecnie prezentowanej pracy Autorka stwierdza coś podobnego dla punktów chaosu rodziny $\mathcal{A}$ przy nieco innych założeniach o rodzinie $\mathcal{A}$.

Spis symboli umieszczony pod koniec pracy pozwala na szybkie śledzenie tekstu, gdyż liczba używanych symboli jest bardzo duża. Bibliografia, dość liczna, kończy całość pracy.

, Moja merytoryczna ocena pracy jest bardzo pozytywna, jednak należy też coś dodać o stronie redakcyjnej. Z tym problemem jest nieco gorzej, gdyż praca napisana jest typowym dla matematyków żargonem.

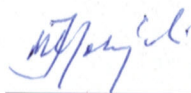
Polska norma przewiduje pisanie wzorów matematycznych w trybie wystawionym. W wierszu mogą znaleźć się jedynie pojedyncze symbole matematyczne, a jeśli już

ma tak być napisana relacja, powinna mieć taką formę, aby można ją było przeczytać poprawnie gramatycznie. Niestety, w pracy znalazłem dużą ilość sformułowań niezgodnych z ustaleniami polskiej normy drukarskiej.

Innym z takich błędów jest np. zapowiedź istnienia zbioru, gdzie zamiast zbioru występuje pewna relacja – patrz np. relacja (4.2).

Podsumowując, recenzowana praca jest długa, zawiera kilkanaście nowych twierdzeń. Niektóre z nich mają skomplikowane dowody, np. twierdzeń 43, 55 i 62. Dowodzi to, że Autorka potrafi przeprowadzić długie i skomplikowane rozumowania. Umie też skorzystać z wcześniejszych prac innych autorów i zmodyfikować dowody w celu otrzymania zapowiadanych własności. Dobrze posługuje się teoriami topologicznymi, wykorzystując klasyczne metody teorii funkcji rzeczywistych, zarówno w wersji funkcji jednej zmiennej, jak i funkcji wielu zmiennych (w tym funkcji przekształcających kostkę I^k w siebie). Włącza też pewne zagadnienia algebraiczne.

Istotnych błędów nie znalazłem. Mogę więc stwierdzić, iż Autorka pracy posiada dobrą wiedzę matematyczną, potrafi ją z pożytkiem wykorzystać. Recenzowana praca zawiera nowe i trudne do udowodnienia twierdzenia, zatem spełnia wszystkie warunki, aby można było dopuścić Panią mgr Justynę Poprawę do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Jacek Jędrzejewski