

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana magistra Michała Klepczarka
„Wartości bifurkacyjne funkcji klasy C^∞ ”

Rozprawa doktorska Pana magistra Michała Klepczarka składa się z obszernego streszczenia w języku angielskim, wstępu, pięciu rozdziałów, bibliografii, skorowidza i wykazu oznaczeń. Jest to długa, licząca 132 strony, praca poświęcona różnym aspektom teorii wartości bifurkacyjnych funkcji gładkich, tzn. funkcji klasy C^∞ . Historia problemu sięga końca lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku. Mianowicie, w roku 1969 R. Thom udowodnił, że każda funkcja wielomianowa na $\mathbf{R}^n$ ma skończony zbiór wartości bifurkacyjnych. Ogólnie, dla danej funkcji gładkiej $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ oznaczmy przez $B(f)$ zbiór wartości bifurkacyjnych f (zbiór ten może być nieskończony). Punkty należące do zbioru $\mathbf{R} \setminus B(f)$ nazywamy wartościami typowymi funkcji f . Wiadomo, że zbiór $B(f)$ może być przedstawiony jako suma mnogościowa zbiorów $K_0(f)$ i $B_\infty(f)$, gdzie $K_0(f)$ jest zbiorem wartości krytycznych funkcji f natomiast $B_\infty(f)$ jest zbiorem wartości bifurkacyjnych f w nieskończoności. Zbiór wartości krytycznych f jest obiektem, który od dawna pojawiał się w literaturze matematycznej, natomiast pojęcie zbioru wartości bifurkacyjnych w nieskończoności funkcji f jest stosunkowo nowe i kryje w sobie wiele tajemnic. Główny wyniki recenzowanej rozprawy doktorskiej (twierdzenie 2.7.2) podaje charakteryzację wartości typowych funkcji f . Kluczowa obserwacja polega na tym, że trywializacja funkcji f w otoczeniu przeciwobrazu wartości typowej może być otrzymana jako wynik całkowania pola gradientowego odpowiadającego stosownie wybranej metryce Riemanna. Tematyka związana z wartościami bifurkacyjnymi funkcji była i dalej jest intensywnie badana. Bibliografia rozprawy zawiera nazwiska wielu znanych matematyków, którzy zajmowali się tym zagadnieniem.

Rozdział 1 rozpoczyna się od ustalenia oznaczeń (głównie standardowych). Następnie Autor przypomina pojęcie gradientu skojarzonego z metryką Riemanna (tensorem metrycznym), omawia podstawowe twierdzenia z teorii równań różniczkowych zwyczajnych oraz podaje definicję funkcji Lapunowa dla układu równań różniczkowych zwyczajnych. Zawarte w tym rozdziale są również precyzyjne definicje punktu niewłaściwości odwzorowania oraz punktu bifurkacyjnego funkcji gładkiej. Autor podaje również podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące zbiorów semialgebraicznych (w tym twierdzenie Tarskiego-Seidenberga i lemat o wyborze łuku). Rozdział kończy dosyć długie omówienie pewnych własności odwzorowań liniowych.

Rozdział 2, liczący 46 stron, zajmuje centralne miejsce w rozprawie doktorskiej. Zawiera on warunki równoważne dla istnienia trywializacji funkcji w otoczeniu przeciwobrazu wartości typowej. Autor wprowadza pojęcia o kluczowym znaczeniu, w tym pojęcia pola transversalnego do poziomicy, funkcji v -kontrolowalnej oraz funkcji o własności właściwości na pewnym zbiorze. Pozwala to określić dla dowolnej funkcji gładkiej na $\mathbf{R}^n$ i dowolnego $y \in \mathbf{R}$ dwa zbiory $\tilde{O}_y(f)$ oraz $O_y(f)$ kodujące najważniejsze własności przeciwobrazu punktu y (precyzyjne definicje tych zbiorów podane są na stronie 59 i jako dosyć techniczne nie będą tutaj przytaczane). Wprost z definicji otrzymujemy, że zbiór $O_y(f)$ jest zawarty w $\tilde{O}_y(f)$. Oba te zbiory pozwalają podać charakteryzację wartości typowych. Np. zgodnie z twierdzeniem 2.4.7, punkt y jest wartością typową funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $O_y(f)$ jest niepusty. Wniosek 2.4.8 mówi, że jeśli y jest wartością typową funkcji f , to trywializację funkcji f w otoczeniu przeciwobrazu punktu y można uzyskać

całkując pole gradientowe funkcji f odpowiadające stosownie wybranej metryce Riemanna. Przykład 2.4.9 pokazuje, że całkowanie pola gradientowego funkcji f dla pewnych metryk Riemanna nie prowadzi do konstrukcji trywializacji. Paragraf 2.6 zawiera wyniki dotyczące wartości typowych w nieskończoności. Dowody są wariantami dowodów podanych we wcześniejszych paragrafach. W paragrafie 2.7 analizowany jest związek wartości typowych z pojęciem zbioru Milnora.

Rozdział 3 przekonuje nas o użyteczności metod wypracowanych w poprzednim rozdziale. Np. z twierdzenia 2.4.5 Autor natychmiast uzyskuje klasyczny lemat Ehresmanna o trywializacji (twierdzenie 3.1.1). Podobnie, twierdzenie 2.4.5 implikuje wynik Fedoryuka o trywializacji (twierdzenie 3.2.1) oraz wynik o istnieniu trywializacji przy założeniu, że spełniony jest warunek Malgrange'a lub pre-Malgrange'a (twierdzenie 3.3.3). Rozdział 3 zawiera również inne interesujące wyniki związane z takimi pojęciami jak warunek $\mathcal{Q}_a$ -regularności (paragraf 3.4), warunek porównawczy (paragraf 3.5) i wykładnik Kurdyki-Łojasiewicza (paragraf 3.6).

Rozdział 4 stanowi interesujące uogólnienie pewnych wyników z Rozdziału 2 na konstrukcje trywializacji wzdłuż foliacji. Wymaga on pokonania trudności technicznych, ale nie wprowadza istotnie nowych metod dowodowych.

Rozdział 5 poświęcony jest metodom efektywnym pozwalającym badać różne zbiory związane ze zbiorem punktów bifurkacyjnych.

Przedstawiona rozprawa doktorska jest poprawnie napisana. Nieliczne literówki nie stanowią dla czytelnika żadnego problemu. Główne wyniki pracy, zredagowane jednak w sposób bardziej zwięzły, są odpowiednie do publikacji w czasopiśmie matematycznym.

Konkluzja. Podsumowując, tematyka pracy doktorskiej Pana magistra Michała Klepczarka jest obecnie obiektem intensywnych badań prowadzonych przez ekspertów o ustalonej renomie. Uzyskane wyniki stanowią istotny wkład w aktualny stan wiedzy. Szczególnie imponujące są nowe wyniki zawarte w Rozdziale 2. Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska spełnia z należytą powagą ustawowe i zwyczajowe wymogi i dlatego wnioskuję nie tylko o jej przyjęcie, lecz również o przyznanie wyróżnienia.

Wojciech Kucharz