

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ
MGR MICHAŁA KLEPCZARKA
"WARTOŚCI BIFURKACYJNE
FUNKCJI KLASY C^∞ "

Praca została przygotowana pod kierunkiem prof. Stanisława Spodzieji z Uniwersytetu Łódzkiego. Składa się ze wstępu i pięciu rozdziałów.

We wstępie autor daje wyczerpujący opis kontekstu naukowego swoich badań. W rozdziale Preliminaria przypomina podstawowe fakty dotyczące funkcji gładkich i semialgebraicznych oraz pojęcie punktów bifurkacyjnych.

Przedstawię teraz kontekst naukowy rozprawy. Niech $\mathbb{K}$ oznacza ciało liczb zespolonych lub ciało liczb rzeczywistych.

W latach 60-tych ubiegłego wieku R. Thom (jeden ze współtwórców teorii osobliwości) udowodnił, że dla dowolnego wielomianu $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ istnieje skończony zbiór $S \subset \mathbb{K}$ taki, że funkcja $f : f^{-1}(\mathbb{K} \setminus S) \rightarrow \mathbb{K} \setminus S$ jest rozwłóknieniem lokalnie trywialnym. To znaczy, że dla dowolnego $y \in \mathbb{K} \setminus S$ istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{K}$ i dyfeomorfizm postaci $\psi = (\psi_1, f) : f^{-1}(U) \rightarrow f^{-1}(y) \times U$. Taki dyfeomorfizm nazywamy trywializacją f nad otoczeniem U . Dla ustalonego wielomianu f najmniejszy zbiór S mający powyższą własność nazywamy zbiorem wartości bifurkacyjnych f i będziemy oznaczali go przez $B(f)$. Do zbioru $B(f)$ należą nie tylko wartości krytyczne funkcji f , ale także "wartości krytyczne w nieskończoności", oznaczane przez $B_\infty(f)$. Właśnie opis i wyznaczenie tego zbioru $B_\infty(f)$, także dla funkcji klasy C^∞ , jest głównym celem rozprawy.

W przypadku wielomianów $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ opis zbioru $B(f)$ i podzbioru $B_\infty(f)$ jest znany, a dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ istnieje prosty algorytm na jego wyznaczenie. Dla wielomianów co najmniej trzech zmiennych nie jest znana efektywna metoda wyznaczania zbiorów $B(f)$, $B_\infty(f)$ w ogólnej sytuacji. Jest to jedno z najtrudniejszych wyzwań w tej tematyce. Znane są natomiast metody wyliczania większych skończonych zbiorów (nadzbiorów jak pisze autor), które zawierają zbiory $B(f)$ i $B_\infty(f)$. Na przykład dla wielomianu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, zbiór (wprowadzony przez F. Phama i B. Malgrange)

$$K_\infty(f) = \{y \in \mathbb{K} : \exists x_\nu \in \mathbb{K}^n |x_\nu| \rightarrow \infty, |x_\nu| \|\nabla f(x_\nu)\| \rightarrow 0, f(x_\nu) \rightarrow y\}$$

jest skończony i zawiera $B_\infty(f)$. W powyższej definicji używamy metryki euklidesowej. Idea dowodu faktu, że jeśli $y \notin K_\infty(f)$ to f dopuszcza trywializację nad pewnym otoczeniem y jest naturalna. Pokazuje się, że trajektorie gradientu ∇f wyruszające z poziomu $f^{-1}(y)$ mają skończoną długość w $f^{-1}(U)$, gdzie U jest pewnym otoczeniem wartości y . Potok odpowiednio przeskalowanego pola ∇f daje poszukiwaną trywializację.

Autor proponuje uogólnienie tej metody do charakteryzacji warunków istnienia trywializacji dla funkcji klasy C^∞ na otwartych podzbiorach $\mathbb{R}^n$. W istocie, zamiast pola gradientowego ∇f bierze pole wektorowe v transwersalne do poziomicy funkcji f . Aby zagwarantować, że potok pola v istotnie

daje trywializację f nad otoczeniem wartości $y \in \mathbb{R}$ potrzeba by trajektoria pola v wychodząca z dowolnego punktu poziomicy $f^{-1}(y)$ doszła do punktu na bliskiej poziomicy. W tym celu trzeba użyć odpowiednio dobranej funkcji właściwej na dziedzinie funkcji. Autor wprowadza pojęcie funkcji v -kontrolowalnej (w nieskończoności) wzdłuż poziomicy $f^{-1}(y)$ i stowarzyszony zbiór $O_y(f)$ funkcji właściwych. Uzyskuje w ten sposób charakteryzację wartości bifurkacyjnych funkcji f . Dokładniej, zbiór $O_y(f)$ składa się z trójek (v, h, f^*) gdzie v jest polem wektorowym transversalnym do f , h funkcją właściwą a f^* jest bliska f przy poziomicy $f^{-1}(y)$, które spełniają pewien warunek porównawczy wzrostu na trajektoriach.

Używając tego subtelного narzędzia jakim jest zbiór $O_y(f)$ autor dowodzi w rozdziale drugim szeregu twierdzeń charakteryzujących punkty zbioru $B(f)$. Głównym wynikiem jest Twierdzenie 4.4.7, które mówi, że jeżeli y jest wartością regularną funkcji gładkiej f to $y \in B(f)$ wtedy i tylko wtedy gdy $O_y(f) = \emptyset$. Bardzo ciekawe i nietrywialne jest spostrzeżenie (por. Wniosek 2.4.8), że trywializacja nad wartością typową (tzn. nie bifurkacyjną) może być zawsze zrealizowana przez potok gradientu f ze względu na odpowiednią metrykę riemannowską (inaczej tensor metryczny). W ostatniej części tego rozdziału autor pokazuje jak jego podejście pozwala interpretować inną metodę trywializacji (wprowadzoną przez Nemethiego, Zaharię i Tibara) opartą na pojęciu zbioru Milnora tzn. zbioru punktów krytycznych odwzorowania (f, h) .

W rozdziale trzecim autor przedstawia zastosowanie swojej metody do dowodu znanych warunków opisujących zbiór $B(f)$, między innymi za pomocą warunku ρ_a -regularności Tibara i Diasa, i warunku porównawczego Rabiera. Dla mnie najciekawsze w tym rozdziale jest osłabiona wersja warunku Malgrange'a (por. definicja zbioru $K_\infty(f)$), którą autor nazywa (chyba niezbyt trafnie) warunkiem *pre-Malgrange'a* oraz ulepszoną wersję warunku D'Acunto i Grandjeana. Myślę, że warto zbadać na ile warunek typu "pre" jest bardziej efektywny z punktu widzenia wyznaczania wartości bifurkacyjnych.

Konkluzją z tego rozdziału jest stwierdzenie, że wszystkie znane (i ulepszone) metody trywializacji można otrzymać z teorii rozwiniętej przez autora w rozdziale drugim.

W rozdziale czwartym rozwija teorię trywializacji przy dodatkowych danych, którymi jest pewna foliacja dziedziny funkcji. Pokazuje, że warunek typu Malgrange'a, ze stałymi zależnymi od płatów foliacji daje trywializację zgodną z zadaną foliacją.

W rozdziale piątym autor przedstawia efektywne metody znajdowania zbiorów zawierających $B(f)$ dla wielomianu rzeczywistego f . We wspólnej pracy z Z. Jeloniem (2014) podaliśmy pewien algorytm liczenia zbioru $K_\infty(f)$. Używamy w nim przestrzeni luków wymiernych ograniczonego stopnia. Jak pokazuje autor tego typu podejście pozwala także obliczać punkty krytyczne asymptotyczne otrzymane dla wymiennego pola wektorowego v i funkcji h także wymiernej. Sądzę, że ten kierunek wart jest dalszego badania.

Podsumowanie recenzji

Dysertacja zawiera nowe oryginalne podejście do problemu trywializacji funkcji klasy C^∞ . Uzyskane wyniki są bardzo wartościowe i otwierają obiecujące perspektywy dalszych badań a w szczególności charakteryzacji wartości bifurkacyjnych wielomianów lub ogólniej funkcji wymiernych a nawet semi-algebraicznych.

Redakcja tekstu jest wyjątkowo staranna, praca zawiera wiele ciekawych i nietrywialnych przykładów. Autor wykazał się dogłębną znajomością stanu wiedzy na tematy rozprawy.

Stwierdzam, że przedstawiona rozprawa Michała Klepczarka spełnia wymagania stawiane pracom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ze względu na wysoki poziom i oryginalność wprowadzanych metod, uważam że przedstawiona dysertacja zasługuje na wyróżnienie.

Profesor Krzysztof Kurdyka

UNIVERSITÉ SAVOIE MONT BLANC, LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES (LAMA),
UMR 5127 CNRS, 73-376 LE BOURGET-DU-LAC CEDEX FRANCE

U. Kurdyka

24 września 2019