

UNIwersytet Łódzki
Wydział Matematyki i Informatyki

Katedra Funkcji Analitycznych
i Równań Różniczkowych

Michał Klepczarek

Wartości bifurkacyjne funkcji klasy C^∞

ROZPRAWA DOKTORSKA

Promotor

Prof. dr hab. Stanisław Spodzieja

Łódź 2019

"Mądra krytyka oświeca, głupia gasi"

A. Fredro

*Panu prof. dr. hab. Stanisławowi Spodziei
za poświęcony czas, cierpliwość i wszechstronne wsparcie.*

Spis treści

Summary of the doctoral dissertation	5
Wstęp	11
1 Preliminaria	17
1.1 Oznaczenia	17
1.2 Funkcje gładkie, tensor metryczny	18
1.3 Układy równań różniczkowych	21
1.4 Funkcja Lapunowa	25
1.5 Punkty niewłaściwości odwzorowania	27
1.6 Punkty bifurkacyjne	27
1.7 Zbiory i odwzorowania algebraiczne oraz semialgebraiczne . . .	29
1.8 Odwzorowania liniowe	32
2 Warunki równoważne trywializacji funkcji	40
2.1 Pola transwersalne do poziomic funkcji	40
2.2 Funkcje v -kontrolowalne	45
2.3 Rodzina funkcji $[f, y]_v^D$. Funkcje o własności właściwości	54
2.4 Wartości typowe funkcji f w języku zbiorów $\overline{O}_y(f)$ i $O_y(f)$. . .	58
2.5 Uwagi do twierdzenia 2.4.5	67
2.6 Wartości typowe w nieskończoności funkcji f w języku zbiorów $\overline{O}_y^\infty(f)$ i $O_y^\infty(f)$	73

2.7	Wartości typowe funkcji f a zbiór Milnora	75
3	Znane warunki implikujące trywializację	86
3.1	Lemat Ehresmann’a	86
3.2	Warunek Fedoryuk’a	87
3.3	Warunek Malgrange’a oraz warunek pre-Malgrange’a	88
3.4	Warunek ρ_a -regularności	90
3.5	Warunek porównawczy	95
3.6	Wykładnik Kurdyki-Łojasiewicza. Ulepszony warunek pre-Malgrange’a	96
4	Trywializacja wzdłuż foliacji	99
4.1	Warunek $(\mathbb{G}, \pi)$ -pre-Malgrange’a	99
4.2	Warunek pre-Malgrange’a na poziomicach submersji	102
5	Metody efektywne	110
5.1	Łuki wymierne	110
5.2	Wyznaczanie zbioru $K_\infty^{v,h}(f)$ dla wielomianów	113
5.3	Szacowanie zbioru $S^h(f)$ dla wielomianów	120
	Bibliografia	126
	Skorowidz	129
	Wykaz oznaczeń	131

Summary of the doctoral dissertation

Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ be a smooth function, i.e. a function of class C^∞ . The smallest set $B \subset \mathbb{R}$, relative to the inclusion relation, such that the function

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(B)} : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(B) \rightarrow \mathbb{R} \setminus B$$

is a locally trivial smooth fibration is called *the bifurcation set of f* and denoted by $B(f)$. In 1969 R. Thom proved that $B(f)$ is finite for polynomial functions f . In general, it is well known that $B(f) = K_0(f) \cup B_\infty(f)$, where $K_0(f)$ is *the set of critical values* of f and $B_\infty(f)$ is *the set of bifurcation values of f at infinity*, i.e. the set of points at which f is not locally trivial smooth fibration outside a large ball. The computation of $B_\infty(f)$ is an open problem that was the subject of research of, among others, S.A. Broughton, L.R.G. Dias, H.V.Há, Z. Jelonek, K. Kurdyka, T. Krasinski, T.D. Lê, A. Némethi, A. Parusiński, D. Siersma, M. Tibăr, A. Zaharia.

In order to estimate the set $B_\infty(f)$ some conditions on the function f in neighborhoods of fibers $f^{-1}(y)$ are introduced, which implies that the points y are *typical values* of f (i.e. $y \in \mathbb{R} \setminus B(f)$). Frequently used examples of such conditions are Malgrange's condition and ρ_a -regularity.

We say that f satisfies *Malgrange's condition* at a point $y \in \mathbb{R}$ if there exist a neighborhood $U \subset \mathbb{R}$ of the point y and constants $R, \delta > 0$ such that

$$|\nabla f(x)| |x| \geq \delta \text{ for } x \in f^{-1}(U), |x| > R.$$

By $K_\infty(f)$ we denote the set of *asymptotic critical values of f* , i.e. the set of points where f doesn't satisfy Malgrange's condition:

$$K_\infty(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| |\nabla f(x_k)| = 0\}.$$

It is well known that $B_\infty(f) \subset K_\infty(f)$ and that the set $K_\infty(f)$ is finite, provided f is a polynomial.

Let $a \in \mathbb{R}^n$ and let $M(f, \rho_a)$ be the set of critical points of (f, ρ_a) , where $\rho_a(x) = |x - a|^2$. We say that f is ρ_a -regular at $y \in \mathbb{R}$ if there exists a neighborhood $U \subset \mathbb{R}$ of y such that $M(f, \rho_a) \cap f^{-1}(U)$ is bounded. By $S_a(f)$ we denote the set of points at which f is not ρ_a -regular, i.e.

$$S_a(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, \rho_a)} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\}.$$

Let $S_\infty(f) := \bigcap_{a \in \mathbb{R}^n} S_a(f)$. L.R.G. Dias and M. Tibăr (2015) proved that $B_\infty(f) \subset S_\infty(f)$.

In this paper we study the problem of determining the set $B_\infty(f)$, where $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function. In this case, the set $B_\infty(f)$ might be infinite.

Chapter 1 has an auxiliary character, where we recall some notions and theorems in differential geometry, algebraic and semialgebraic geometry and differential equations. In particular, we present a result due to T. Bártá, R. Chill, E. Fašangová (2012), which says that every ordinary differential equation with a strict Lyapunov function is a gradient system.

In Chapter 2 we define a set $\mathfrak{h}(f, D)$ of smooth vector fields $v : D_v \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset D_v \subset \mathbb{R}^n$, such that

$$\partial_{v(x)} f(x) \neq 0 \quad \text{for } x \in D.$$

Next, we introduce the set $[f, y]_v^D$ consisting of functions f^* which, roughly speaking, measures how far the points $x \in D$ are from the level set $f^{-1}(y)$. In order to control how far the points $x \in D$ are from infinity, we introduce the set of functions h satisfying the condition

$$(*) \quad \forall_{(x_k)_{k=1}^\infty \subset D} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |h(x_k)| = +\infty.$$

Using the above notions we define the sets $\overline{O}_y(f), O_y(f)$ consisting of triples (v, h, f^*) such that: for some neighborhood U of y , we have $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$, h satisfies the condition (*) with $D = f^{-1}(U)$, and $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ for some compact set $K \subset \mathbb{R}^n$. Moreover, we assume that the function

$$H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

is bounded on solutions of the equation $x' = v(x)$ in $f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y))$ for elements of the set $\overline{O}_y(f)$. We assume that the function H is bounded on the set $f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y))$ for elements of $O_y(f)$.

The main result of the doctoral thesis is Theorem 2.4.7. In this theorem we give a description of typical values of f in terms of the sets $O_y(f)$. More precisely, we have the following

Theorem 2.4.7. *A point y is a typical value of f if and only if $O_y(f) \neq \emptyset$.*

The above theorem follows directly from Theorems 2.4.3 and 2.4.6.

In Theorem 2.4.3 we prove that if $\overline{O}_y(f) \neq \emptyset$ then y is a typical value of f . This result allows the construction of new conditions characterizing certain supersets of $B_\infty(f)$ (see i.e. Chapter 3).

In Theorem 2.4.6 we show that for every typical value y of a function f there exist a neighborhood U of y , a vector field $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ and a smooth function h satisfying condition (*) with $D = f^{-1}(U)$ such that $H = \partial_v h / \partial_v f = 0$. In particular, $O_y(f) \neq \emptyset$. As a corollary we get

Corollary 2.4.8. *For every typical value y of f there exists a metric tensor g defined in a neighborhood of $f^{-1}(y)$ such that we can trivialize function f near $f^{-1}(y)$ by integrating the gradient of f (with respect to the metric tensor g).*

Next we give some special conditions implying that y is a typical value of f . Let h satisfy the condition (*) with $D = f^{-1}(U_0) \setminus K_0$, where U_0 is a neighborhood of y and $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ is a compact set and let $M(f, h, D')$ be the set of critical values of $(f, h) : D' \rightarrow \mathbb{R}^2, D' \subset f^{-1}(U_0) \setminus K_0$. We have

Theorem 2.7.2. *Under the above assumptions:*

- a) *if there exists a neighborhood $U \subset U_0$ of y such that the set $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ is bounded then y is a typical value of f ,*
- b) *if there exists a neighborhood $U \subset U_0$ of y such that the set $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ is unbounded but the function $|\nabla h|/|\nabla f|$ is bounded on $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ then y is a typical value of f ,*
- c) *if for every neighborhood $U \subset U_0$ of y and every compact set $K \supset K_0$ the set $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ is unbounded and the function $|\nabla h|/|\nabla f|$ is unbounded on $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ then for every $v \in \mathfrak{H}(f, f^{-1}(U))$ we have $(v, h, f) \notin O_y(f)$.*

We define a set $S^h(f)$ by

$$S^h(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists (x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, h, \mathbb{R}^n \setminus K_0) \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\}.$$

Under the assumptions of Theorem 2.7.2, we get

Corollary 2.7.5. $B(f) \subset S^h(f) \cup K_0(f)$.

In Chapter 3 we show how one can use the above theorems to get well known conditions for trivializing a function: Ehresmann's fibration theorem, Fedoryuk's condition, Malgrange's condition, ρ_a -regularity and others. We also introduce some new conditions similar to Malgrange's condition. For example, we say that f satisfies *improved pre-Malgrange's condition* at y if there exists a neighborhood U of y such that $\nabla f(x) \neq 0$ for $x \in f^{-1}(U)$ and there exist constants $R, C > 0$ and $\theta < 1$ such that

$$|f(x) - y|^\theta |\langle \nabla f(x), x \rangle| \leq C|x|^2 |\nabla f(x)|^2, \text{ for } x \in f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(y), |x| > R.$$

We prove

Theorem 3.6.2. *Let y be a regular value of $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. If f satisfies improved pre-Malgrange's condition at y then y is a typical value of f .*

In Chapter 4 we show how one can use the sets $\overline{O}_y(f)$ for more precise study of the set $B(f)$. More precisely, given a foliation $\mathbb{G} = \{G_s \subset \mathbb{R}^n : s \in S\}$

of $D \subset \mathbb{R}^n$ we consider a set $\mathfrak{h}^{\mathbb{G}}(f, D)$ of a vector fields $v \in \mathfrak{h}(f, D)$ tangent to the leaves of the foliation $\mathbb{G}$. By $O_y^{\mathbb{G}}(f)$ we denote a set of triples (v, h, f^*) such that for some neighborhood U of y , we have $v \in \mathfrak{h}^{\mathbb{G}}(f, f^{-1}(U))$, h satisfies the condition $(*)$ with $D = f^{-1}(U)$, and $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ for some compact set $K \subset \mathbb{R}^n$. Moreover, we assume that the function $H = \partial_v h / \partial_v f^*$ is bounded on $G_s \cap f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y))$ for $s \in S$. We prove that if $O_y^{\mathbb{G}}(f) \neq \emptyset$ then y is a typical value of f (see Corollary 4.1.2). In particular, for a given submersion $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}^r$ we introduce g -pre-Malgrange's condition at y as follows. For $x \in D_g$ by $\nabla^g f(x)$ we denote the gradient of $f|_{g^{-1}(g(x))}$. We say that f satisfies *g -pre-Malgrange's condition* at y if there exist a neighborhood U of y and a compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ such that:

$$(1M_g) \quad f^{-1}(U) \setminus K \subset D_g,$$

$$(2M_g) \quad \nabla^g f(x) \neq 0 \text{ for } x \in f^{-1}(U) \setminus K,$$

$$(3M_g) \quad \forall_{s \in S} \exists_{C_s > 0} |\langle x, \nabla^g f(x) \rangle| \leq C_s |x|^2 |\nabla^g f(x)|^2 \text{ for } x \in f^{-1}(U) \setminus K \cap g^{-1}(s).$$

We have the following

Theorem 4.2.4. *Let y be a regular value of $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. If f satisfies g -pre-Malgrange's condition at y then y is a typical value of f .*

In Chapter 5 we give two algorithms for computing some supersets of $B(f)$ when f is a polynomial. The first algorithm is based on the result due to Z. Jelonek and K. Kurdyka (2014) and uses a finite dimensional space of rational arcs. More precisely, let h satisfy the condition $(*)$ with $D = \mathbb{R}^n \setminus K$ for some compact set $K \subset \mathbb{R}^n$. Let v be a smooth vector field on $\mathbb{R}^n$ and suppose that the function $\partial_{v(x)} h(x) / \partial_{v(x)} f(x)$ is rational and let $\Sigma_v = \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_v f(x) = 0\}$. We define a set $K_\infty^{v,h}(f)$ such that $B_\infty(f) \subset K_\infty^{v,h}(f)$ (see Corollary 5.2.3). Moreover, $K_\infty^{v,h}(f)$ can be described in terms of the set of points at which $f|_{\Sigma_v}$ is not proper and the set of limits of f on some rational arcs (see Theorem 5.2.4). Under the above assumptions, we provide an algorithm that allows to decide whether the set $K_\infty^{v,h}(f)$ is finite and compute $K_\infty^{v,h}(f)$ in this case (see Paragraph 5.2).

The second algorithm is based on the result due to L.R.G. Dias, M. Tibăr (2014). This algorithm computes the sets $b_0(AV_i), i \in I = \{k \in \{1, \dots, n\} : \frac{\partial f}{\partial x_k} \neq 0\}$ of limits at infinity of f on some rational arcs, such that $B(f) \setminus K_0(f) \subset S^h(f) \setminus K_0(f) \subset \bigcup_{i \in I} b_0(AV_i)$ (see Corollary 2.7.5 Theorem 5.3.1).

Wstęp

Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie wielomianem. W 1969 roku René Thom w [Th] udowodnił, że istnieje skończony zbiór $B \subset \mathbb{R}$ taki, że funkcja

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(B)} : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(B) \rightarrow \mathbb{R} \setminus B$$

jest lokalnie trywialną wiązką klasy C^∞ , to znaczy dla dowolnego $y \in \mathbb{R} \setminus B$ zbiór $f^{-1}(y)$ jest rozmaitością klasy C^∞ i istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R} \setminus B$ punktu y oraz odwzorowanie $\Psi_1 : f^{-1}(U) \rightarrow f^{-1}(y)$ takie, że odwzorowanie¹

$$\Psi = (\Psi_1, f) : f^{-1}(U) \ni x \mapsto (\Psi_1(x), f(x)) \in f^{-1}(y) \times U$$

jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ . Najmniejszy (względem relacji inklucji) zbiór B taki, że funkcja $f|_{\mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(B)} : \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(B) \rightarrow \mathbb{R} \setminus B$ jest lokalnie trywialną wiązką klasy C^∞ nazywamy zbiorem wartości bifurkacyjnych funkcji f i oznaczamy przez $B(f)$ (por. def. s. 28). Wiadomo, że $B(f) = K_0(f) \cup B_\infty(f)$, gdzie $K_0(f)$ jest zbiorem wartości krytycznych funkcji f , a $B_\infty(f)$ jest zbiorem wartości bifurkacyjnych w nieskończoności funkcji f (patrz s. 29). W przypadku $n = 2$, M. Coste i M.J. de la Puente w pracy [CP] podali efektywny algorytm pozwalający na wyznaczenie zbioru $B(f)$ (w przypadku zespolonym zrobili to H.V. Hà i D.T. Lê [HL] oraz M. Suzuki [Su]). W ogólnej sytuacji efektywne wyznaczenie zbioru $B(f)$ jest wciąż zagadnieniem otwartym.

W wielu pracach pojawiają się różne warunki pozwalające na oszacowanie zbioru wartości bifurkacyjnych. Jednym z nich jest warunek Malgrange’a. Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek Malgrange’a w punkcie y* (por. s. 88), jeżeli istnieją otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y oraz stałe $R, \delta > 0$ takie, że

$$(M) \quad |\nabla f(x)| |x| \geq \delta \quad \text{dla } x \in f^{-1}(U), \quad |x| > R.$$

¹Odwzorowanie Ψ nazywamy trywializacją funkcji f .

Zbiór punktów, w których nie jest spełniony warunek Malgrange’a, oznaczamy $K_\infty(f)$ i nazywamy zbiorem asymptotycznych wartości krytycznych. Łatwo sprawdzamy, że

$$K_\infty(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists (x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| |\nabla f(x_k)| = 0\}.$$

Wiadomo, że zachodzi inkluzja $B_\infty(f) \subset K_\infty(f)$. Dowód tego faktu można znaleźć w pracach A. Parusińskiego [Pa] oraz P. Rabiera [Ra]. Ponadto, dla funkcji wielomianowej f zbiór $K_\infty(f)$ jest skończony, co udowodnili między innymi K. Kurdyka, A. Parusiński i T. Mostowski [KMP], K. Kurdyka, P. Orro i S. Simon [KOS], Z. Jelonek i K. Kurdyka [JK1] (patrz również pracę J. Gwoździewicza i S. Spodziei [GS] oraz S. Spodziei [Sp]). Z. Jelonek i K. Kurdyka w [JK1] i [JK2] podali też efektywne metody wyznaczania zbioru $K_\infty(f)$.

Innym warunkiem kontrolującym zachowanie się funkcji f w nieskończoności jest warunek ρ_a -regularności. Ustalmy $a \in \mathbb{R}^n$ i niech $M(f, \rho_a)$ będzie zbiorem punktów krytycznych odwzorowania (f, ρ_a) , gdzie $\rho_a(x) = |x - a|^2$. Powiemy, że funkcja f nie spełnia warunku ρ_a -regularności w punkcie y , lub że punkt y jest wartością ρ_a -nieregularną funkcji gładkiej f , jeżeli istnieje ciąg $(x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, \rho_a)$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$ oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y$ (por. s. 90). Zbiór wszystkich wartości ρ_a -nieregularnych funkcji f będziemy oznaczać przez $S_a(f)$. Oczywiście zachodzi

$$S_a(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists (x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, \rho_a) \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\}.$$

Oznaczmy $S_\infty(f) := \bigcap_{a \in \mathbb{R}^n} S_a(f)$. L.R.G. Dias i M. Tibăr w [DT] udowodnili, że $B_\infty(f) \subset S_\infty(f)$ (por. pracę M. Tibăra [Ti2] oraz A. Némethiego i A. Zaharii [NZ]). W przypadku gdy f jest wielomianem zachodzi również $S_0(f) \subset K_\infty(f)$ (patrz pracę G. Skalskiego [Sk] oraz pracę Y. Chena, L.R.G. Diasa, K. Takeuchiego, M. Tibăra [CDTT]). W pracy [DT] można znaleźć efektywny opis pewnego nadzbioru zbioru $S_\infty(f)$ zawartego w zbiorze $K_\infty(f)$.

W wielu pracach autorzy przytaczają również inne podobne warunki kontrolujące zachowanie funkcji f w nieskończoności takie, jak warunek Fedoryuk’a [Fe] rozważany między innymi przez S.A. Broughtona [Br1], [Br2] (patrz też strona 87), warunek t -regularności rozważany przez D. Siersmę i M. Tibăra

[ST] oraz M. Tibřara [Ti2], czy teŹ warunki o charakterze topologicznym jak stałość charakterystyki Eulera poziomic funkcji² uŹywana przez A. Parusińskiego [Pa] oraz przez H.V. Hà i D.T. Lê [HL] lub inne warunki o charakterze topologicznym (patrz np. pracę M. Tibřara i A. Zaharii [TZ]).

W pracy zajmujemy się zagadnieniem wyznaczania zbioru $B(f)$ w przypadku, gdy funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka (to znaczy jest klasy C^∞). W tym przypadku, w odróżnieniu od sytuacji wielomianowej, zbiór $B(f)$ może okazać się nieskończony. Co więcej, rozważając na przykład funkcję $f(x, y) := \frac{1}{2\pi}(\sin y(x \sin y - 1) + 2y)$ zauważamy, Źe $B_\infty(f) = \mathbb{Z}$, a więc zbiór $B_\infty(f)$ nie musi być skończony również w przypadku funkcji analitycznej f (patrz przykład 1.6.2).

Rozdział 1 ma charakter pomocniczy. Przedstawiamy w nim pojęcia i twierdzenia z zakresu geometrii różniczkowej, geometrii algebraicznej i semialgebraicznej oraz równań różniczkowych wykorzystywane dalej w pracy. W szczególności przytaczamy w nim twierdzenie 1.4.1 pochodzące z pracy T. Břarta, R. Chilli, E. Fařangová, [BCF, Theorem 1] mówiące, Źe kaŹdy normalny układ równań różniczkowych zwyczajnych z funkcją Lapunowa (patrz def. s. 25) jest układem gradientowym dla pewnego tensora metrycznego g .

Rozdział 2 rozpoczynamy od przedstawienia narzędzi wykorzystywanych do konstrukcji trywializacji funkcji. Trywializacje Ψ funkcji f będziemy budować całkując³ pewne gładkie pole wektorowe v . Naturalnym warunkiem, jaki naleŹy nałóŹyć na pole wektorowe v , aby uzyskane w ten sposób odwzorowanie Ψ było dyfeomorfizmem, jest transversalność rozwiązań układu równań różniczkowych $x' = v(x)$ do poziomic funkcji f . W tym celu wyróżniamy zbiór $\pitchfork(f, D)$ gładkich pól wektorowych $v : D_v \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset D_v$ spełniających warunek

$$\partial_{v(x)}f(x) \neq 0 \text{ dla } x \in D,$$

(patrz s. 40). Dalej wprowadzamy pojęcie funkcji v -kontrolowalnej w punkcie y i konstruujemy trywializację takiej funkcji f w otoczeniu poziomic $f^{-1}(y)$ (patrz lemat 2.2.1 oraz lemat 2.2.2 dla trywializacji w nieskończoności).

²Przez poziomicę funkcji f (zamiennie włókno funkcji f) rozumiemy zbiory postaci $f^{-1}(y)$ dla $y \in \mathbb{R}$.

³Dokładniej, będziemy uŹywali rozwiązania ogólnego układu równań z parametrem związanego z polem wektorowym v .

Aby konstrukcja trywializacji funkcji f w otoczeniu $f^{-1}(U)$ poziomic $f^{-1}(y)$ była poprawna, trajektorie pola

$$\frac{y - f(x_0)}{\partial_{v(x)} f(x)} v(x)$$

wychodzące z punktów $x_0 \in f^{-1}(U)$ powinny przeciąć zbiór $f^{-1}(y)$. W celu możliwości sprawdzenia tego warunku wprowadzamy rodzinę funkcji $[f, y]_v^D$ (patrz s. 54). Elementy f^* tej rodziny w pewnym sensie mierzą odległości punktów $x \in D$ od poziomic $f^{-1}(y)$. Za odpowiednie mierzenie "odległości punktów ze zbioru $D \subset \mathbb{R}^n$ od nieskończoności" są odpowiedzialne funkcje mające własność właściwości na zbiorze D , to jest funkcje h spełniające następujący warunek

$$\forall (x_k)_{k=1}^\infty \subset D \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |h(x_k)| = +\infty.$$

Pojęcia te wykorzystujemy do zdefiniowania zbiorów $\overline{O}_y(f), O_y(f)$ składających się z trójek (v, h, f^*) , gdzie v jest gładkim polem wektorowym transwersalnym do poziomic funkcji f w otoczeniu $f^{-1}(U)$ włókna $f^{-1}(y)$ (tj. $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$), h jest funkcją mającą własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U)$, a funkcja $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ dla pewnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$ (patrz def. s. 58). Dodatkowo, w przypadku elementów zbioru $\overline{O}_y(f)$, wymagamy aby funkcja

$$H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

była ograniczona na rozwiązaniach równania $x' = v(x)$ przebiegających w $f^{-1}(U) \setminus K$. Funkcja H (w pewnym sensie) porównuje prędkość uciekania do nieskończoności trajektorii z prędkością zbliżania się do poziomic $f^{-1}(y)$, zatem jej ograniczoność implikuje osiągnięcie przez trajektorie zbioru $f^{-1}(y)$. W przypadku elementów zbioru $O_y(f)$ żądamy, aby funkcja H była funkcją ograniczoną.

Głównym twierdzeniem pracy jest twierdzenie 2.4.7 (patrz s. 65) opisujące wartości bifurkacyjne y funkcji gładkiej f w terminach zbioru $O_y(f)$. Mówi ono, że jeżeli y jest wartością regularną funkcji f , to $y \in B(f)$ wtedy i tylko wtedy gdy $O_y(f) = \emptyset$. Powyższa równoważność wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.4.3 oraz twierdzenia 2.4.6.

Twierdzenie 2.4.3 (patrz s. 60) pokazuje, że jeżeli $\overline{O}_y(f) \neq \emptyset$, to punkt y jest wartością typową⁴ funkcji f . Twierdzenie 2.4.5 jest wnioskiem z powyższego twierdzenia, w którym zbiór $\overline{O}_y(f)$ został zastąpiony zbiorem $O_y(f)$ (patrz s. 62). Twierdzenie to pozwala na konstrukcję nowych warunków charakteryzujących pewne nadzbiory zbioru $B_\infty(f)$ zależnych od wyboru pola transwersalnego do poziomicy funkcji f , funkcji z rodziny $[f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ oraz funkcji o własności właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$.

Twierdzenie 2.4.6 (patrz s. 62) mówi, że dla dowolnej wartości typowej y funkcji f istnieje otoczenie U punktu y , pole $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ oraz funkcja gładka h spełniająca warunek właściwości na zbiorze $f^{-1}(U)$ takie, że $H(x) = 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$. W szczególności zachodzi wtedy $O_y(f) \neq \emptyset$. Z powyższego twierdzenia wynika, że dla dowolnej wartości typowej y funkcji f istnieje tensor metryczny g określony w otoczeniu poziomicy $f^{-1}(y)$ taki, że całkowanie gradientu (względem tensora metrycznego g) funkcji f prowadzi do trywializacji funkcji f (patrz wniosek 2.4.8).

W paragrafie 2.7, w twierdzeniu 2.7.2 (patrz s. 76) oraz twierdzeniu 2.7.4 (patrz s. 78), podajemy pewne szczególne warunki, związaną ze zbiorami $O_y(f)$, gwarantujące typowość wartości y funkcji f . Dokładniej, ustalmy funkcję h mającą własność właściwości w otoczeniu nieskończoności i niech $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ będzie zbiorem punktów krytycznych odwzorowania $(f, h) : f^{-1}(U) \setminus K \rightarrow \mathbb{R}^2$, gdzie $K \subset \mathbb{R}^n$ jest pewnym zbiorem zwartym, a $U \subset \mathbb{R}$ jest otoczeniem punktu y . W części a) twierdzenia 2.7.2 pokazujemy, że jeśli zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ jest ograniczony to y jest wartością typową funkcji f . W szczególności wynika z tego (patrz wniosek 2.7.5), że $B(f) \subset S^h(f) \cup K_0(f)$, gdzie $S^h(f)$ jest zbiorem postaci

$$S^h(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists (x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, h, \mathbb{R}^n \setminus K) \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\}.$$

W części b) twierdzenia 2.7.2 dowodzimy, że jeżeli zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ jest nieograniczony i funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest funkcją ograniczoną na $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ to y jest wartością typową funkcji f . Część c) twierdzenia 2.7.2 pokazuje, że części a) i b) twierdzenia 2.7.2 są w pewnym sensie optymalnym zastosowaniem twierdzenia 2.4.5 przy ustalonej funkcji h . Warto

⁴Punkty $y \in \mathbb{R}$ nie będące wartościami bifurkacyjnymi funkcji f nazywamy wartościami typowymi funkcji f (por. def. s. 28).

zauważyć, że w przypadku funkcji wielomianowej f założenia podpunktu b) nie są spełnione (por. uwaga 2.7.8).

W rozdziale 3 pokazujemy, w jaki sposób stosować twierdzenia 2.4.5 i 2.7.2, aby uzyskać znane warunki na trywializację funkcji takie jak: warunek Ehresmann’a, warunek Fedoryuk’a, warunek Malgrange’a, warunek ρ_a -regularności i inne. Większość dowodów w tym rozdziale polega na odgadnięciu trójki (v, h, f^*) odpowiedniej do danego warunku i zastosowaniu twierdzenia 2.4.5. W ten sposób odkrywamy również pewne nowe warunki (patrz warunek pre-Malgrange’a na s. 88 oraz ulepszony warunek pre-Malgrange’a na s. 96) zbliżone do oryginalnego warunku Malgrange’a.

W rozdziale 4 przedstawiamy, w jaki sposób można zastosować zbiory $\overline{O}_y(f)$ i twierdzenie 2.4.3 do badania zbioru $B(f)$. Na przykładzie warunku Malgrange’a pokazujemy, jak wykorzystać foliację (patrz s. 99) otoczenia $f^{-1}(U)$ poziomicy $f^{-1}(y)$ do formułowania nowych warunków typu Malgrange’a na poszczególnych foliach (patrz twierdzenie 4.1.5 i twierdzenie 4.2.4).

Rozdział 5 poświęcony jest efektywnym algorytmom, które pozwalają wyznaczać pewne nadzbiory zbioru $B(f)$ w przypadku, gdy funkcja f jest wielomianem. Używamy tutaj metody zaczerpniętej od Z. Jelonka i K. Kurdyki [JK2] wykorzystującej pojęcie łuków wymiernych (patrz def. s. 110). Dokładniej, niech h będzie funkcją o własności właściwości na pewnym otoczeniu nieskończoności (tj. na dopełnieniu pewnego zbioru zwartego w $\mathbb{R}^n$) i niech v będzie gładkim polem wektorowym. Załóżmy, że funkcja $\partial_{v(x)}h(x)/\partial_{v(x)}f(x)$ jest funkcją wymierną. W paragrafie 5.2 określamy zbiór $K_\infty^{v,h}(f)$ zawierający zbiór $B_\infty(f)$ (patrz def. s. 115 oraz wniosek 5.2.3). Przy powyższych założeniach, podajemy algorytm pozwalający w sposób efektywny rozstrzygnąć, czy zbiór $K_\infty^{v,h}(f)$ jest skończony i wyznaczyć zbiór $K_\infty^{v,h}(f)$ w tym przypadku (porównaj uwagę 5.2.1, twierdzenie 5.2.4 oraz algorytm ze str. 116). W szczególności, jeśli przyjmiemy $v = \nabla f$ oraz $h(x) = \ln|x|$ dla $x \neq 0$ to otrzymamy zbiór $K_\infty^{v,h}(f)$ zawierający się w zbiorze $K_\infty(f)$. Warto odnotować, że zbiór łuków wymiernych rozważamy w przestrzeni wyżej wymiarowej niż w pracy [JK2] (por. uwagę 5.2.5). W paragrafie 5.3 podajemy algorytm pozwalający oszacować zbiór $S^h(f)$ (patrz twierdzenie 5.3.1 i algorytm na s. 123) przy pewnych założeniach narzuconych na funkcje h (patrz s. 120). Paragraf ten był inspirowany pracą [DT].

Rozdział 1

Preliminaria

W tym rozdziale wprowadzimy podstawowe oznaczenia i przypomnimy elementarne fakty z zakresu funkcji gładkich, funkcji semialgebraicznych, równań różniczkowych i punktów bifurkacyjnych funkcji, przydatne w dalszym ciągu pracy.

1.1 Oznaczenia

Symbolami $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ będziemy oznaczać odpowiednio ciało liczb rzeczywistych i ciało liczb zespolonych. Przez $\mathbb{R}_+$ będziemy oznaczali zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, przez $\mathbb{R}_+^0$ zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, a przez $\mathbb{R}^*$ zbiór liczb rzeczywistych różnych od 0. Przez $\mathbb{N}$ będziemy oznaczali zbiór liczb naturalnych. Zakładamy, że $0 \notin \mathbb{N}$. Przyjmijmy $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję

$$(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

spełniającą następujące warunki:

- i) $(ax + by|z) = a(x|z) + b(y|z)$ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,
- ii) $(x|y) = (y|x)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^n$,
- iii) $(x|x) \geq 0$ oraz $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$.

Normą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ wyznaczoną przez iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ określoną następującym wzorem

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Przy ustalonym iloczynie skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ powiemy, że wektory $v, w \in \mathbb{R}^n$ są prostopadłe, jeżeli $(v, w) = 0$. Jeżeli wektory $v, w \in \mathbb{R}^n$ są prostopadłe to piszemy pisać $v \perp w$.

Standardowym iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad \text{dla } x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Przez *normę Euklidesową* w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozumiemy funkcję $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}_+^0$ określoną wzorem

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Przez $\text{lin } A$ oznaczamy podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$ rozpiętą na zbiorze A , to znaczy określoną w następujący sposób

$$\text{lin } A := \{a_1 x_1 + \dots + a_k x_k : a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}, \quad x_1, \dots, x_k \in A\}.$$

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Przez $A^\perp$ będziemy oznaczać dopełnienie liniowe zbioru A określone wzorem

$$A^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0 \text{ dla } y \in A\}.$$

1.2 Funkcje gładkie, tensor metryczny

Niech M będzie gładką rozmaitością różniczkową. Dla dowolnego punktu $x \in M$ przez $T_x M$ będziemy oznaczać przestrzeń styczną do M w punkcie x .

Niech M, N będą rozmaitościami różniczkowymi. Przez $C^k(M, N)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich odwzorowań $f : M \rightarrow N$ klasy C^k . W szczególności, zbiór wszystkich odwzorowań gładkich (to jest klasy C^∞) z rozmaitości M o wartościach w rozmaitości N będziemy oznaczać symbolem $C^\infty(M, N)$. Dla skrócenia zapisu, zamiast $C^k(D, \mathbb{R})$ będziemy pisać $C^k(D)$.

Jeżeli $f \in C^1(M, N)$, $x \in M$, to przez $df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ będziemy oznaczać różniczkę funkcji f w punkcie x .

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Elementy zbioru $C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ będziemy nazywać gładkimi polami wektorowymi na zbiorze D . Weźmy dowolne $f \in C^\infty(D_f)$ oraz $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, gdzie $D_f, D_v \subset \mathbb{R}^n$ są zbiorami otwartymi. Ustalmy $x \in D_f \cap D_v$. Przez $\partial_{v(x)} f(x)$ będziemy oznaczali pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x w kierunku pola v , to znaczy

$$\partial_{v(x)} f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv(x)) - f(x)}{t}$$

lub równoważnie

$$\partial_{v(x)} f(x) := \left(\frac{d}{dt} f(x + tv(x)) \right) \Big|_{t=0}.$$

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Załóżmy, że dla dowolnego punktu $x \in D$ określony jest iloczyn skalarny g_x w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jeżeli ponadto dla dowolnych $v, w \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ odwzorowanie

$$g : D \ni x \mapsto g_x(v(x), w(x)) \in \mathbb{R}$$

jest gładkie, to odwzorowanie $x \mapsto g_x$ nazywamy *tensoriem metrycznym* na zbiorze D .

Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Symbolem $M_{m \times n}$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach o współczynnikach z ciała $\mathbb{R}$. Przez $I \in M_{n \times n}$ będziemy oznaczać macierz jednostkową, tj. $I = [\delta_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$, gdzie $\delta_{i,j} = 1$, gdy $i = j$ oraz $\delta_{i,j} = 0$, gdy $i \neq j$. Niech g będzie tensoriem metrycznym na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}^n$. Gładkie pole macierzowe

$$(1.1) \quad D \ni x \rightarrow [g_{ij}(x)]_{1 \leq i,j \leq n} \in M_{n \times n}$$

określone wzorami

$$(1.2) \quad g_{ij}(x) = g_x(e_i(x), e_j(x)) \text{ dla } x \in D$$

będziemy nazywać polem macierzy współrzędnych tensora metrycznego g w bazie standardowej $(e_1, \dots, e_n)$, gdzie e_i są gładkimi polami wektorowymi w $\mathbb{R}^n$ określonymi wzorem

$$(1.3) \quad (e_i(x))_j = \delta_{i,j} \text{ dla } x \in D, i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Wiadomo, że dla $x \in D$ macierz $[g_{ij}(x)]_{1 \leq i, j \leq n}$ jest symetryczna i dodatnio określona.

Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i $f \in C^\infty(D)$. Załóżmy, że w zbiorze D określony jest tensor metryczny g . Przez $\nabla_g f$ będziemy oznaczać jedyne gładkie pole wektorowe na D takie, że

$$(1.4) \quad g_x(\nabla_g f(x), v(x)) = \partial_{v(x)} f(x) \text{ dla } x \in D, v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n).$$

Pole $\nabla_g f$ nazywamy *gradientem funkcji f względem tensora metrycznego g* . Pole $\nabla_g f$ można wyznaczyć w następujący sposób

$$(1.5) \quad \nabla_g f(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g^{ij}(x) \partial_{e_i(x)} f(x) e_j(x) \text{ dla } x \in D,$$

gdzie dla ustalonego $x \in U$ macierz $[g^{ij}(x)]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}$ jest macierzą odwrotną do macierzy $[g_{ij}(x)]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n \times n}$ określonej równaniami (1.2). W przypadku, gdy tensor metryczny pochodzi od standardowego iloczynu skalarnego, to jest

$$g_x(v(x), w(x)) = \langle v(x), w(x) \rangle \quad x \in D, v, w \in C^\infty(D),$$

to pole wektorowe $\nabla_g f$ oznaczamy przez ∇f . Wówczas, na mocy wzoru (1.5), zachodzi

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \quad x \in D.$$

Powiemy, że punkt $y \in \mathbb{R}$ jest *wartością regularną funkcji f* jeżeli

$$\nabla_g f(x) \neq 0 \text{ dla } x \in f^{-1}(y).$$

Wiadomo, że pojęcie wartości regularnej nie zależy od wyboru tensora metrycznego w D . Ponadto, zachodzi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.1. *Jeżeli punkt $y \in \mathbb{R}$ jest wartością regularną funkcji f , to $f^{-1}(y)$ jest hiperpowierzchnią w D oraz pole $\nabla^g f$ jest prostopadłe do hiperpowierzchni $f^{-1}(y)$, dokładniej zachodzi*

$$g_x(\nabla_g f(x), v) = 0 \quad \text{dla } x \in f^{-1}(y), v \in T_x f^{-1}(y).$$

1.3 Układy równań różniczkowych

W tym paragrafie przedstawimy podstawowe pojęcia i własności dotyczące układów równań różniczkowych. Podane bez dowodów twierdzenia można znaleźć na przykład w [Ha] lub [Ka].

W celu skrócenia zapisu punkty $(t, x_1, \dots, x_n)$ przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$ będziemy zapisywali jako (t, x) .

Niech dany będzie obszar $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i odwzorowanie ciągłe

$$F = (f_1, \dots, f_n) : G \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Układem normalnym pierwszego rzędu nazywamy układ

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

lub krócej

$$(1.6) \quad x' = F(t, x).$$

Rozwiązaniem układu (1.6) nazywamy każde odwzorowanie

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

określone na przedziale $I \subset \mathbb{R}$, różniczkowalne na I i takie, że dla każdego $t \in I$, $(t, \gamma(t)) \in G$ i $\gamma'(t) = F(t, \gamma(t))$. Mówimy, że rozwiązanie $\gamma^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ równania (1) jest *przedłużeniem rozwiązania* $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli $I \subset I^*$ i $\gamma_I^* = \gamma$. Jeśli $I \neq I^*$, to przedłużenie nazywamy właściwym. Rozwiązanie, które nie ma żadnego przedłużenia właściwego, nazywamy *rozwiązaniem integralnym (globalnym)*.

Jeżeli $G = \mathbb{R} \times W$ oraz $F(t, x) = v(x)$ dla pewnego ciągłego odwzorowania $v : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, a $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow W$ jest integralnym rozwiązaniem układu

$$(1.7) \quad x' = v(x),$$

to mówimy, że γ jest *trajektorią pola* v .

Niech $T \subset G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Mówimy, że odwzorowanie F *spełnia warunek Lipschitza na T ze względu na x* , gdy istnieje stała $L > 0$ taka, że dla dowolnych $(t, x), (t, x^*) \in T, t \in \mathbb{R}, x, x^* \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$|F(t, x) - F(t, x^*)| \leq L|x - x^*|.$$

Mówimy, że odwzorowanie F *spełnia lokalnie warunek Lipschitza ze względu na x* , gdy dla każdego $(\tau, \eta) \in G$ istnieje otoczenie $U \subset G$ tego punktu, takie że odwzorowanie F spełnia warunek Lipschitza na U ze względu na x .

Przypomnijmy teraz twierdzenie Picarda-Lindelöfa o istnieniu i jednoznaczności dla układów równań różniczkowych (patrz [Ka, Twierdzenie I 5.1, Lemat I 5.2], [Ha, Theorem II.1.1, Theorem II.3.1]).

Twierdzenie 1.3.1. (O istnieniu i jednoznaczności) *Jeżeli odwzorowanie $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest ciągłe i spełnia lokalnie warunek Lipschitza ze względu na x , to przez każdy punkt $(\tau, \eta) \in G$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie integralne układu równań (1.6). Rozwiązanie to jest określone w przedziale otwartym.*

Mówimy, że dla układu (1.6) zachodzi globalna jednoznaczność rozwiązań, gdy przez każdy punkt $(\tau, \eta) \in G$ przechodzi dokładnie jedno rozwiązanie integralne układu (1.6). Rozwiązanie to oznaczamy $\gamma(\tau, \eta) : I(\tau, \eta) \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie $I(\tau, \eta) \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem otwartym. Spełnia ono warunek początkowy

$$\gamma(\tau, \eta)(\tau) = \eta.$$

Kluczowym pojęciem pozwalającym wyznaczyć trywializację funkcji f będzie pojęcie rozwiązania ogólnego. Założmy, że dla układu (1.6) zachodzi globalna jednoznaczność rozwiązań. Określmy zbiór V i odwzorowanie $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ w następujący sposób

$$V = \{(\tau, \eta, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : (\tau, \eta) \in G, t \in I(\tau, \eta)\}$$

$$\Phi(\tau, \eta, t) = \gamma(\tau, \eta)(t), \quad (\tau, \eta, t) \in V.$$

Odwzorowanie Φ nazywamy *rozwiązaniem ogólnym układu równań (1.6)*.

Rozwiązanie ogólne układu (1.6) jest tej samej klasy co występujące w nim odwzorowanie F . Dokładniej, zachodzi następujące twierdzenie (porównaj [Ha, Corollary 4.1] oraz [Sk, Twierdzenie 1.2.10]).

Twierdzenie 1.3.2. (O klasie rozwiązania ogólnego) *Niech $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem klasy C^m , wtedy rozwiązanie ogólne $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ układu (1.6) jest odwzorowaniem klasy C^m .*

Poniżej przedstawimy wykorzystywane w pracy twierdzenie wiążące obrazy rozwiązań integralnych pochodzących od pól wektorowych v i av odpowiednio.

Twierdzenie 1.3.3. *Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym. Niech $v : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie gładkim polem wektorowym spełniającym warunek $v(x) \neq 0$ dla $x \in W$. Niech $a : W \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką. W zbiorze $G = \mathbb{R} \times W$ rozważmy następujące układy równań różniczkowych*

$$(1.8) \quad x' = v(x),$$

$$(1.9) \quad x' = a(x)v(x).$$

Oznaczmy przez $\varphi_1 : I_1 \rightarrow G, \varphi_2 : I_2 \rightarrow G$ rozwiązania integralne odpowiednio układów (1.8) i (1.9). Załóżmy, że rozwiązania φ_1, φ_2 przechodzą przez punkt $x_0 \in W$, dokładniej

$$(1.10) \quad \varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) = x_0 \text{ dla pewnych } t_1 \in I_1, \quad t_2 \in I_2.$$

Zachodzi wtedy

$$\varphi_2(I_2) \subset \varphi_1(I_1).$$

Dowód. Określmy zbiór

$$I := \{t \in I_2 : \varphi_2(t) \in \varphi_1(I_1)\}.$$

Pokażemy, że zbiór I jest zbiorem domkniętym w I_2 . Rozważmy dowolny ciąg $t_k^2 \in I, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k^2 = t_0^2 \in I_2$. Z określenia zbioru I istnieje ciąg $t_k^1 \in I_1$ taki, że $\varphi_1(t_k^1) = \varphi_2(t_k^2)$. Przechodząc ewentualnie do podciągów, możemy założyć, że ciąg $(t_k^1)_{k=1}^\infty$ jest monotoniczny. Ponieważ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(t_k^1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_2(t_k^2) = \varphi_2(t_0^2) =: x_0 \in W$$

i $v(x_0) \neq 0$ dla $x \in W$, to ciąg $(t_k^1)_{k=1}^\infty$ jest ograniczony i wobec monotoniczności ciągu $(t_k^1)_{k=1}^\infty$, mamy $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k^1 =: t_0^1 \in \mathbb{R}$. Z twierdzenia o przedłużaniu rozwiązań

wynika, że $t_0^1 \in I_1$. Zatem, wobec ciągłości φ_1, φ_2 , dostajemy $\varphi_2(t_0^2) = \varphi_1(t_0^1)$, co daje $t_0^2 \in I$ i kończy dowód domkniętości zbioru I w zbiorze I_2 .

Pokażemy teraz, że zbiór I jest zbiorem otwartym. Weźmy dowolny punkt $t_2 \in I$. Z określenia zbioru I istnieje $t_1 \in I_1$ takie, że $\varphi_2(t_2) = \varphi_1(t_1)$. Niech $l : J \rightarrow I_1$ będzie rozwiązaniem integralnym równania

$$z' = a(\varphi_1(z)),$$

spełniającym warunek początkowy $l(t_2) = t_1$. Określmy $\Phi : J \rightarrow W$ następującym wzorem

$$\Phi(t) = \varphi_1(l(t)) \text{ dla } t \in J.$$

Wtedy dla $t \in J$ zachodzi

$$\Phi'(t) = a(\varphi_1(l(t)))\varphi_1'(l(t)) = a(\varphi_1(l(t)))v(\varphi_1(l(t))) = a(\Phi(t))v(\Phi(t))$$

oraz

$$\Phi(t_2) = \varphi_1(l(t_2)) = \varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2).$$

Zatem Φ jest rozwiązaniem układu (1.9) spełniającym warunek $\Phi(t_2) = \varphi_2(t_2)$. Na mocy twierdzenia 1.3.1 otrzymujemy $\Phi|_J = \varphi_2|_J$. W szczególności dla $t \in J$ zachodzi

$$\varphi_2(t) = \Phi(t) = \varphi_1(l(t)) \subset \varphi_1(I_1),$$

co dowodzi, że przedział J jest otwartym otoczeniem t_2 i $J \subset I$. Zatem I jest zbiorem otwartym. Reasumując, I jest zbiorem otwartym i domkniętym w zbiorze spójnym I_2 . Z założenia, że rozwiązania φ_1, φ_2 przechodzą przez punkt $x_0 \in W$, dostajemy $I \neq \emptyset$. To daje $I = I_2$ i kończy dowód. $\square$

Bezpośrednio z twierdzenia 1.3.3 dostajemy

Własność 1.3.4. *Przy założeniach i oznaczeniach jak w twierdzeniu 1.3.3, jeżeli $a(x) \neq 0$ dla $x \in W$ to*

$$\varphi_2(I_2) = \varphi_1(I_1).$$

Dowód. Z twierdzenia 1.3.3 dostajemy $\varphi_2(I_2) \subset \varphi_1(I_1)$. Rozważając układy równań różniczkowych $x' = w(x)$ oraz $x' = a(x)w(x)$, gdzie $w(x) = \frac{1}{a(x)}v(x)$ dla $x \in W$ otrzymujemy inkluzję odwrotną. To daje tezę. $\square$

1.4 Funkcja Lapunowa

Rozważmy układ równań różniczkowych postaci (1.7) (tj. $x' = v(x)$, $x \in W$). Powiemy, że funkcja $E \in C^1(W)$ jest *funkcją Lapunowa* dla układu (1.7), jeżeli

$$(1.11) \quad dE(x)(v(x)) = \partial_{v(x)}E(x) > 0 \text{ dla } x \in W, v(x) \neq 0.$$

Łatwo zauważyć, że funkcja Lapunowa po złożeniu z dowolnym rozwiązaniem układu (1.7) jest niemalejąca.

Układ równań różniczkowych postaci

$$(1.12) \quad x' = \nabla_g F(x),$$

gdzie $F \in C^1(W)$, a g jest tensorem metrycznym na zbiorze W , będziemy nazywać *układem gradientowym* na W . W tym przypadku funkcja F jest funkcją Lapunowa dla układu (1.12). W pracy [BCF, Theorem 1] autorzy udowodnili twierdzenie odwrotne do powyższej obserwacji.

Twierdzenie 1.4.1. *Niech M będzie rozmaitością różniczkową, niech $v \in C^0(M, \mathbb{R}^n)$ i niech $E \in C^1(M)$ będzie funkcją Lapunowa dla układu równań różniczkowych $x' = v(x)$. Istnieje wtedy tensor metryczny g , określony na zbiorze $\tilde{M} := \{x \in M : v(x) \neq 0\}$ taki, że*

$$\nabla_g E(x) = v(x) \text{ dla } x \in \tilde{M}.$$

W szczególności układ $x' = v(x)$ jest układem gradientowym na $\tilde{M}$.

Dla pełności pracy, przedstawimy wersję powyższego twierdzenia wraz z dowodem wykorzystywaną w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 1.4.2. *Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, niech $v \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$, $v(x) \neq 0$ dla $x \in W$ i niech $E \in C^\infty(W)$ będzie funkcją Lapunowa dla układu równań różniczkowych $x' = v(x)$. Istnieje wtedy tensor metryczny g określony na zbiorze W taki, że*

$$(1.13) \quad \nabla_g E(x) = v(x) \text{ dla } x \in W.$$

Dowód. Dla dowolnego pola $w \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$ rozważmy pola $w_0, w_1 \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$ określone wzorami

$$w_0(x) := w(x) - \frac{dE(x)(w(x))}{dE(x)(v(x))}v(x), \quad w_1(x) := \frac{dE(x)(w(x))}{dE(x)(v(x))}v(x), \quad x \in W.$$

Na mocy (1.11) pola w_0, w_1 są poprawnie określone. Ponadto dla $w, u \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$ i dowolnego $x \in W$ zachodzą równości

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x),$$

$$(w + u)_0(x) = w_0(x) + u_0(x), \quad (w + u)_1(x) = w_1(x) + u_1(x),$$

$$dE(x)(w(x)) = dE(x)(w_1(x)).$$

Niech $\tilde{g}$ oznacza dowolny tensor metryczny na zbiorze W . Dla dowolnych pól $w, u \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$ i dla $x \in W$ określamy wartość tensora metrycznego g jako

$$g_x(w(x), u(x)) := \tilde{g}_x(w_0(x), u_0(x)) + \frac{(dE(x)(w(x)))(dE(x)(u(x)))}{dE(x)(v(x))}.$$

Oczywiście $g_x(\cdot, \cdot)$ jest gładką formą dwuliniową i symetryczną. Pokażemy, że $g_x(\cdot, \cdot)$ jest dodatnio określona. Weźmy dolne pole $w \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$. Dla $x \in W$ mamy

$$g_x(w(x), w(x)) = \tilde{g}_x(w_0(x), w_0(x)) + \frac{(dE(x)(w(x)))^2}{dE(x)(v(x))} \geq 0,$$

wobec (1.11). Ponadto dla $x \in W$

$$g_x(w(x), w(x)) = 0 \Leftrightarrow \tilde{g}_x(w_0(x), w_0(x)) = 0 \wedge (dE(x)(w(x))) = 0 \Leftrightarrow$$

$$w_0(x) = 0 \wedge w_1(x) = 0 \Leftrightarrow w(x) = 0,$$

co kończy dowód dodatniej określoności formy $g_x(\cdot, \cdot)$. Pozostaje udowodnić równość (1.13). Dla dowolnego pola $w \in C^\infty(W, \mathbb{R}^n)$ i $x \in W$, mamy

$$\begin{aligned} g_x(v(x), w(x)) &= \tilde{g}_x(v_0(x), w_0(x)) + (dE(x)(w(x))) \\ &= 0 + g_x(\nabla_g E(x), w(x)) = g_x(\nabla_g E(x), w(x)), \end{aligned}$$

co dowodzi równania (1.13) i kończy dowód. $\square$

1.5 Punkty niewłaściwości odwzorowania

Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi.

Odwzorowanie ciągłe $F : X \rightarrow Y$ będziemy nazywać *odwzorowaniem właściwym*, jeżeli dla każdego zbioru zwartego $K \subset Y$ zbiór $F^{-1}(K)$ jest zwarty.

Powiemy, że odwzorowanie ciągłe $F : X \rightarrow Y$ jest *właściwe w punkcie* $y \in Y$, jeżeli istnieje otoczenie $U \subset Y$ punktu y takie, że obcięcie $F|_{F^{-1}(U)} : F^{-1}(U) \rightarrow U$ jest odwzorowaniem właściwym. W przeciwnym razie mówimy, że odwzorowanie $F : X \rightarrow Y$ jest *niewłaściwe w punkcie* $y \in Y$. Punkty $y \in Y$, w których odwzorowanie F jest niewłaściwe nazywamy *punktami niewłaściwości odwzorowania* F (patrz np. [Je]). Jeżeli $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$, to zbiór wszystkich punktów niewłaściwości odwzorowania F zawiera w sobie podzbiór

$$S_F := \{y \in Y \mid \exists (x_k)_{k=1}^\infty \subset X \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = \infty \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = y\}.$$

Elementy zbioru S_F będziemy nazywali *punktami niewłaściwości odwzorowania* F w nieskończoności.

Oczywiście odwzorowanie F może posiadać punkty niewłaściwości, które nie są punktami niewłaściwości F w nieskończoności. Świadczy o tym następujący prosty przykład.

Przykład 1.5.1. Weźmy dowolny punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Rozważmy odwzorowanie $F : \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ określone wzorem

$$F(x) = x.$$

Oczywiście zachodzi $S_F = \emptyset$. Ponadto, punkt x_0 jest punktem niewłaściwości odwzorowania F . Istotnie dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$ takiego, że $x_0 \in K$ zbiór $F^{-1}(K)$ nie jest zbiorem zwartym.

1.6 Punkty bifurkacyjne

Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym.

Mówimy, że funkcja $f \in C^\infty(W, U)$, gdzie $U \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym, jest *trywialną wiązką klasy* C^∞ *nad* U lub krótko *trywialną wiązką nad* U , gdy

istnieje punkt $y \in U$ taki, że zbiór $f^{-1}(y)$ jest rozmaitością klasy C^∞ i istnieje odwzorowanie $\Psi_1 : W \rightarrow f^{-1}(y)$ takie, że odwzorowanie

$$\Psi = (\Psi_1, f) : W \ni x \mapsto (\Psi_1(x), f(x)) \in f^{-1}(y) \times U$$

jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ . Odwzorowanie Ψ nazywamy *trywializacją klasy C^∞ funkcji f nad U* lub *trywializacją funkcji f nad U* .

Mówimy, że punkt $y \in \mathbb{R}$ jest *wartością typową* funkcji $f \in C^\infty(W)$, jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y takie, że funkcja $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ jest trywialną wiązką klasy C^∞ nad U . Przyjmujemy, że każdy punkt $y \notin \overline{f(W)}$ jest wartością typową funkcji f . Punkt $y \in \mathbb{R}$, który nie jest wartością typową funkcji f , nazywamy *wartością bifurkacyjną* funkcji f . Przez $B(f)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich wartości bifurkacyjnych funkcji f .

Uwaga 1.6.1. Bezpośrednio z definicji wiązki trywialnej otrzymujemy, że wszystkie poziomice wiązki trywialnej $f \in C^\infty(W, U)$ są topologicznie równoważne¹ oraz $K_0(f) = \emptyset$. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa, co zilustrujemy na poniższym przykładzie.

Przykład 1.6.2. Rozważmy funkcję analityczną $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x, y) := \frac{1}{2\pi}(\sin y(x \sin y - 1) + 2y).$$

Pokażemy, że $B(f) = \mathbb{Z}$. Istotnie, weźmy dowolną liczbę $k \in \mathbb{Z}$ i przypuśćmy, że k jest wartością typową funkcji f . Niech U będzie otoczeniem punktu k takim, że $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ jest wiązką trywialną. Zmniejszając ewentualnie zbiór U możemy założyć, że $U = (k - \varepsilon, k + \varepsilon)$, gdzie $0 < \varepsilon < 1$. Określmy zbiór $W = \mathbb{R} \times (k\pi - \pi, k\pi + \pi)$. Niech zbiór A będzie sumą wszystkich składowych zbioru $f^{-1}(U)$ zawartych w zbiorze W . Ponieważ $W \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ oraz $f(x, k\pi + \pi) = k + 1$, $f(x, k\pi - \pi) = k - 1$ dla $x \in \mathbb{R}$, to zbiór A jest niepusty. Z definicji wiązki trywialnej wynika, że funkcja $f|_A : A \rightarrow f(A)$ jest również wiązką trywialną. Z drugiej strony, oznaczając

$$A_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{2\pi t - 2y}{\sin^2 y} + \frac{1}{\sin y}, \frac{y}{\pi} \notin \mathbb{Z}\},$$

¹Dokładniej, dla dowolnych $y_1, y_2 \in U$ istnieje homeomorfizm $\varphi : f^{-1}(y_1) \rightarrow f^{-1}(y_2)$.

mamy

$$f|_A^{-1}(t) = \begin{cases} A_t \cap A & \text{dla } t \neq k \\ (A_t \cap A) \cup (\mathbb{R} \times \{k\pi\}) & \text{dla } t = k \end{cases}.$$

Zatem zbiory $f|_A^{-1}(k\pi)$ i $f|_A^{-1}(t)$ dla $t \neq k\pi$ posiadają różną ilość składowych spójności, co przeczy trywialności funkcji $f|_A$. To daje $\mathbb{Z} \subset B(f)$. Z drugiej strony, ponieważ $f^{-1}(t) = A_t$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, to łatwo dowodzimy, że $B(f) \subset \mathbb{Z}$. Reasumując, zachodzi $B(f) = \mathbb{Z}$. Ponadto, wszystkie poziomicę funkcji f są homeomorficzne z przeliczalną ilością prostych oraz $K_0(f) = \emptyset$.

Mówimy, że funkcja $f \in C^\infty(W, U)$, gdzie $U \subset \mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym, jest *trywialną wiązką klasy C^∞ nad U w nieskończoności* lub krótko *trywialną wiązką nad U w nieskończoności*, gdy istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że funkcja $f|_{W \setminus K} : W \setminus K \rightarrow U$ jest trywialną wiązką klasy C^∞ nad U .

Mówimy, że punkt $y \in \mathbb{R}$ jest *wartością typową funkcji $f \in C^\infty(W)$ w nieskończoności*, jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y takie, że funkcja $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ jest trywialną wiązką klasy C^∞ nad U w nieskończoności. Punkt $y \in \mathbb{R}$, który nie jest wartością typową funkcji f w nieskończoności, nazywamy *wartością bifurkacyjną funkcji f w nieskończoności*. Przez $B_\infty(f)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich wartości bifurkacyjnych funkcji f w nieskończoności.

1.7 Zbiory i odwzorowania algebraiczne oraz semialgebraiczne

Niech $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ będzie pierścieniem wielomianów n zmiennych o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) i niech $B \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ będzie dowolnym niepustym zbiorem wielomianów. Oznaczmy

$$V(B) := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall f \in B f(x) = 0\}.$$

Zbiór $V \subset \mathbb{K}^n$ nazywamy *zbiorem algebraicznym*, jeśli $V = V(B)$ dla pewnego zbioru wielomianów $B \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Zbiór $X \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *zbiorem semialgebraicznym*, jeśli

$$X = \bigcup_{j=1}^s \bigcap_{k=1}^{r_j} \{x \in \mathbb{R}^n : f_{j,k} *_{j,k} 0\},$$

gdzie $f_{j,k} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ oraz $*_{j,k} \in \{<, =\}$, dla $j = 1, \dots, s$, $k = 1, \dots, r_j$.

Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga (patrz [BCR, Theorem 2.2.1]) mówi, że rodzina zbiorów semialgebraicznych jest zamknięta ze względu na rzutowania. Dokładniej, zachodzi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.7.1 (Tarski-Seidenberg). *Niech $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ będzie zbiorem semialgebraicznym i niech $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie rzutowaniem na n pierwszych współrzędnych. Wtedy $\pi(X)$ jest zbiorem semialgebraicznym w $\mathbb{R}^n$.*

Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ i $Y \subset \mathbb{R}^m$ będą zbiorami semialgebraicznymi. Odwzorowanie $F: X \rightarrow Y$ nazywamy *odwzorowaniem semialgebraicznym*, jeśli wykres odwzorowania F jest zbiorem semialgebraicznym w przestrzeni $\mathbb{R}^{n+m}$. Odwzorowanie semialgebraiczne $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *funkcją semialgebraiczną*.

Poniżej przytoczymy dobrze znaną wersję lematu o wyborze krzywej (patrz np. [BCR, Theorem 2.5.5]).

Twierdzenie 1.7.2 (Lemat o wyborze krzywej). *Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem semialgebraicznym i niech punkt $x \in \mathbb{R}^n$ będzie taki, że $x \in \overline{X}$. Wtedy istnieje ciągle odwzorowanie semialgebraiczne (i analityczne) $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ takie, że $\varphi(0) = x$ i $\varphi((0, 1]) \subset X$.*

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy

Twierdzenie 1.7.3 (Lemat o wyborze krzywej w nieskończoności). *Niech $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ będzie zbiorem semialgebraicznym. Załóżmy, że istnieje ciąg $((x_k, y_k))_{k=1}^\infty \subset X$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$ i $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y_0$. Wtedy istnieje ciągle odwzorowanie semialgebraiczne $\varphi = (\varphi_x, \varphi_y): [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ takie, że $\varphi([1, +\infty)) \subset X$ oraz $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_x(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_y(t) = y_0$.*

Dowód. Rozważmy odwzorowanie semialgebraiczne $\Psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow B(0, 1) \times \mathbb{R}$, gdzie $B(0, 1) := \{z \in \mathbb{R}^n : |z| < 1\}$, postaci

$$\Psi(x, y) := \left(\frac{x}{1 + |x|}, y \right) \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}.$$

Odwzorowanie Ψ jest homeomorfizmem semialgebraicznym o odwzorowaniu odwrotnym $\Psi^{-1} : B(0, 1) \times \mathbb{R}$ postaci

$$\Psi^{-1}(z, y) := \left(\frac{z}{1 - |z|}, y \right) \quad z \in B(0, 1), y \in \mathbb{R}.$$

Zbiór $\Psi(x)$ jest zbiorem semialgebraicznym.

Z założenia $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$ wynika, że po ewentualnym wybraniu podciągu, istnieje punkt $a \in S(0, 1) := \{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$ taki, że

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{1 + |x_k|} = a.$$

Zatem zachodzi $(a, y_0) \in \overline{\Psi(X)}$. Na mocy lematu 1.7.2 istnieje ciągle odwzorowanie semialgebraiczne $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_x, \tilde{\varphi}_y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ takie, że $\tilde{\varphi}_x(0) = a$, $\tilde{\varphi}_y(0) = y_0$ i $\tilde{\varphi}((0, 1]) \subset X$. Oznaczmy

$$\varphi(t) := (\varphi_x(t), \varphi_y(t)) := \Psi^{-1}(\tilde{\varphi}(\frac{1}{t})) \quad \text{dla } t \geq 1.$$

Oczywiście φ jest ciągłym odwzorowaniem semialgebraicznym takim, że $\varphi([1, +\infty)) \subset X$. Ponadto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\varphi}_x(t)}{1 - |\tilde{\varphi}_x(t)|} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_y(t) = y_0,$$

co daje tezę. □

Kompleksyfikacją zbioru semialgebraicznego $X \subset \mathbb{R}^n$ będziemy nazywać najmniejszy zespolony zbiór algebraiczny zawierający zbiór X . Przez stopień krzywej semialgebraicznej $C \subset \mathbb{R}^n$ będziemy rozumieli stopień kompleksyfikacji krzywej C , to jest ilość punktów przecięcia z generyczną hiperpłaszczyzną.

Przez $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ oznaczamy n -wymiarową rzeczywistą przestrzeń rzutową. Utożsamiamy punkty $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ z punktami $(1 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

W dalszym ciągu pracy będziemy wykorzystywali poniższe lematy (patrz [JK2, Lemma 3.2] oraz [JK2, Lemma 3.3]).

Lemat 1.7.4. *Niech $C \subset \mathbb{R}^n$ będzie semialgebraiczną krzywą stopnia d . Niech $\overline{C} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ będzie domknięciem krzywej C w topologii Zarayskiego w $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.*

Założmy, że $a \in (\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}^n) \cap \overline{C}$ jest punktem w nieskończoności krzywej C . Oznaczmy przez Γ składową nierozkładalną kietka $\overline{C}_a$. Wtedy istnieje liczba całkowita $s \leq d$ i stała $R > 0$ taka, że Γ posiada analityczną parametryzację postaci

$$x(t) = \sum_{-\infty < k \leq s} a_k t^k, \quad |t| > R,$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}^n$ oraz $\sum_{k>0} |a_k| > 0$.

Lemat 1.7.5. Niech $x(t)$ będzie krzywą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o parametryzacji postaci

$$x(t) = \sum_{-\infty < k \leq s} a_k t^k, \quad t \in \mathbb{R}^*,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{R}^n$, $\sum_{k>0} |a_k| > 0$ i $s \in \mathbb{N}$. Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia d . Połóżmy

$$\tilde{x}(t) = \sum_{-(d-1)s \leq k \leq s} a_k t^k, \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

Jeżeli $\lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = b \in \mathbb{R}$ to zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\tilde{x}(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(x(t)) = b.$$

1.8 Odwzorowania liniowe

Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy, że symbolem $M_{m \times n}$ oznaczamy zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach o współczynnikach z ciała $\mathbb{R}$. Dla $A \in M_{m \times n}$ przez A^T będziemy oznaczać transpozycję macierzy A . Przez $I \in M_{n \times n}$ będziemy oznaczać macierz jednostkową.²

W dalszym ciągu pracy będziemy utożsamiać przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z przestrzenią $M_{n \times 1}$, to znaczy, wektory w $\mathbb{R}^n$ traktujemy jako macierze o n wierszach i 1 kolumnie. Jak łatwo sprawdzić, zachodzi wtedy $\langle v, w \rangle = v^T w$ dla $v, w \in \mathbb{R}^n$.

Własność 1.8.1. Niech $w \in \mathbb{R}^n$ będzie wektorem takim, że $|w| = 1$. Rozważmy macierz $P \in M_{n \times n}$ postaci

$$P := I - 2ww^T.$$

²tj. $I = [\delta_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$, gdzie $\delta_{i,j} = 1$, gdy $i = j$ oraz $\delta_{i,j} = 0$, gdy $i \neq j$.

Zachodzą wtedy następujące warunki:

- (i) P jest macierzą ortogonalną i symetryczną,
- (ii) $Pw = -w$ oraz $Pv = v$ dla $v \perp w$,
- (iii) jeżeli $w := \frac{v_1 + v_2}{|v_1 + v_2|}$ gdzie $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $v_1 + v_2 \neq 0$, $|v_1| = |v_2|$, to zachodzi

$$Pv_1 = -v_2.$$

Dowód. (i) Macierz P jest symetryczna, gdyż z definicji P mamy

$$P^T = I^T - 2(ww^T)^T = I - 2ww^T = P.$$

Macierz P jest ortogonalna. Istotnie, z powyższej równości mamy

$$PP^T = P^T P = P^2,$$

więc

$$\begin{aligned} PP^T &= P^T P = P^2 = (I - 2ww^T)(I - 2ww^T) \\ &= I - 4ww^T + 4(ww^T)(ww^T) = I - 4ww^T + 4w(w^T w)w^T \\ &= I - 4ww^T + 4w\langle w, w \rangle w^T = I. \end{aligned}$$

- (ii) Równość $Pw = -w$ wynika wprost z definicji macierzy P . Istotnie

$$Pw = w - 2(ww^T)w = w - 2w\langle w, w \rangle = -w.$$

Założmy teraz, że $v \perp w$ (to znaczy $\langle w, v \rangle = 0$) dla pewnego $v \in \mathbb{R}^n$. Wówczas zachodzi

$$Pv = v - 2w(w^T v) = v - 2w\langle w, v \rangle = v,$$

co daje drugą część (ii).

- (iii) Ustalmy dowolne wektory $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ spełniające założenia (iii). Położmy

$$(1.14) \quad v_1^w := \langle v_1, w \rangle w, \quad v_1^\perp := v_1 - v_1^w,$$

$$(1.15) \quad v_2^w := \langle v_2, w \rangle w, \quad v_2^\perp := v_2 - v_2^w.$$

Wtedy³ $v_1^w, v_2^w \in \text{lin}\{w\}$, $v_1^\perp \perp w$, $v_2^\perp \perp w$ oraz zachodzi

$$(1.16) \quad v_1 = v_1^w + v_1^\perp, \quad v_2 = v_2^w + v_2^\perp.$$

Pokażemy najpierw, że zachodzą równości

$$(1.17) \quad v_1^w = v_2^w, \quad v_1^\perp = -v_2^\perp.$$

Istotnie, wobec równości (1.14), (1.8), (1.16) mamy

$$\begin{aligned} v_1^w &= \langle v_1, w \rangle w = \frac{1}{|v_1 + v_2|} \langle v_1, v_1 + v_2 \rangle w \\ &= \frac{1}{|v_1 + v_2|} (|v_1|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle) w = \frac{1}{|v_1 + v_2|} (|v_2|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle) w \\ &= \frac{1}{|v_1 + v_2|} \langle v_1 + v_2, v_2 \rangle w = \langle w, v_2 \rangle w = v_2^w, \end{aligned}$$

co daje pierwszą równość. Z postaci wektora w otrzymujemy

$$v_1^\perp + v_2^\perp = (v_1 + v_2) - (v_1^w + v_2^w) = |v_1 + v_2|w - (v_1^w + v_2^w) \in \text{lin}\{w\}.$$

Z drugiej strony, $v_1^\perp + v_2^\perp \perp w$. Zatem⁴

$$v_1^\perp + v_2^\perp \in \text{lin}\{w\} \cap \text{lin}\{w\}^\perp = \{0\},$$

co daje drugą nierówność $v_1^\perp = -v_2^\perp$.

Uwzględniając (1.16), powyższe równości oraz część (ii) otrzymujemy

$$Pv_1 = Pv_1^w + Pv_1^\perp = -v_1^w + v_1^\perp = -v_2^w - v_2^\perp = -v_2.$$

To kończy dowód. □

Własność 1.8.2. Niech $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ przy czym $|v_1| = |v_2| \neq 0$ oraz $\langle v_1, v_2 \rangle > 0$.

Wówczas:

- (i) $|v_1 + v_2| \neq 0$,
- (ii) jeżeli określimy wektor $z \in \mathbb{R}^n$ wzorem

$$(1.18) \quad z := \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} (v_1 + v_2),$$

³Przypomnijmy, że $\text{lin}\{w\} = \{v \in \mathbb{R}^n : \exists a \in \mathbb{R} v = aw\}$.

⁴ $\text{lin}\{w\}^\perp := \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0\}$.

to $|z| = |v_1|$ oraz zachodzi wzór

$$(1.19) \quad |v_1 + z| = |v_2 + z| = \sqrt{2|v_1| \left(|v_1| + \frac{1}{2}|v_1 + v_2| \right)} \neq 0$$

(iii) przyjmując $w_1 := \frac{v_1 + z}{|v_1 + z|}$, $w_2 := \frac{z + v_2}{|z + v_2|}$, gdzie z jest wektorem określonym wzorem (1.18) to $|w_1| = |w_2| = 1$ oraz

$$(1.20) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \langle w_1, w_2 \rangle \leq 1.$$

Dowód. (i) Z założenia $\langle v_1, v_2 \rangle > 0$, dostajemy

$$|v_1 + v_2|^2 = |v_1|^2 + 2\langle v_1, v_2 \rangle + |v_2|^2 > 0,$$

co daje (i).

(ii) Z części (i) dostajemy, że wektor z jest poprawnie określony. Wprost z definicji wektora z otrzymujemy $|z| = |v_1|$. Z określenia wektora z mamy

$$\begin{aligned} |v_1 + z|^2 &= \left| \left(1 + \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} \right) v_1 + \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} v_2 \right|^2 \\ &= \left(1 + \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} \right)^2 |v_1|^2 + 2 \left(1 + \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} \right) \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} \langle v_1, v_2 \rangle \\ &\quad + \frac{|v_1|^2}{|v_1 + v_2|^2} |v_2|^2 \\ &= \left(1 + \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} \right)^2 |v_2|^2 + 2 \left(1 + \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} \right) \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} \langle v_2, v_1 \rangle \\ &\quad + \frac{|v_1|^2}{|v_1 + v_2|^2} |v_1|^2 \\ &= \left| \left(1 + \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} \right) v_2 + \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} v_1 \right|^2 = |v_2 + z|^2, \end{aligned}$$

co daje pierwszą część (1.19).

Ponieważ

$$v_1 + z = \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} \left[\left(1 + \frac{|v_1 + v_2|}{|v_1|} \right) v_1 + v_2 \right],$$

wiec korzystając z równości

$$(1.21) \quad |v_1 + v_2|^2 = 2|v_1|^2 + 2\langle v_1, v_2 \rangle,$$

dostajemy

$$\begin{aligned}
|v_1 + z|^2 &= \frac{|v_1|^2}{|v_1 + v_2|^2} \left[\left(1 + 2 \frac{|v_1 + v_2|}{|v_1|} + \frac{|v_1 + v_2|^2}{|v_1|^2} \right) |v_1|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(1 + \frac{|v_1 + v_2|}{|v_1|} \right) \langle v_1, v_2 \rangle + |v_2|^2 \right] \\
&= \frac{|v_1|^2}{|v_1 + v_2|^2} \left[2|v_1|^2 + 2|v_1 + v_2||v_1| + |v_1 + v_2|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(1 + \frac{|v_1 + v_2|}{|v_1|} \right) \langle v_1, v_2 \rangle \right] \\
&= \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|^2} (4|v_1|^3 + 2|v_1 + v_2||v_1|^2 + 4|v_1|\langle v_1, v_2 \rangle \\
&\quad + 2|v_1 + v_2|\langle v_1, v_2 \rangle) \\
&= \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|^2} (2|v_1| + |v_1 + v_2|) (2|v_1|^2 + 2\langle v_1, v_2 \rangle) \\
&= 2||v_1| \left(|v_1| + \frac{1}{2}|v_1 + v_2| \right) > 0.
\end{aligned}$$

To daje drugą część wzoru (1.19) i w konsekwencji (ii).

(iii) Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza oraz równości $|w_1| = |w_2| = 1$, otrzymujemy

$$(1.22) \quad \langle w_1, w_2 \rangle \leq |\langle w_1, w_2 \rangle| \leq |w_1||w_2| = 1.$$

Ponadto, z określenia wektorów w_1, w_2, z , wzoru (1.19) w części (ii) oraz (1.21), mamy

$$\begin{aligned}
\langle w_1, w_2 \rangle &= \frac{1}{|v_1 + z|^2} \langle v_1 + z, z + v_2 \rangle \\
&= \frac{1}{|v_1 + z|^2} \left(\langle v_1, z \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle + |z|^2 + \langle z, v_2 \rangle \right) \\
&= \frac{1}{|v_1 + z|^2} \left(2 \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|} (|v_1|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle) + |v_1|^2 + \langle v_1, v_2 \rangle \right) \\
&= \frac{1}{|v_1 + z|^2} \left(|v_1||v_1 + v_2| + \frac{1}{2}|v_1 + v_2|^2 \right) \\
&= \frac{|v_1 + v_2|}{|v_1 + z|^2} \left(|v_1| + \frac{1}{2}|v_1 + v_2| \right) \\
&= \frac{|v_1 + v_2|}{2|v_1|} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1|^2}} > \frac{\sqrt{2}}{2},
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z założenia $\langle v_1, v_2 \rangle > 0$. To wraz z nierównością (1.22) daje nierówność (1.20) i kończy dowód. $\square$

Lemat 1.8.3. *Niech $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ będą takimi wektorami, że $|v_1| = |v_2| \neq 0$ oraz $\langle v_1, v_2 \rangle > 0$. Oznaczmy wektory*

$$z := \frac{|v_1|}{|v_1 + v_2|}(v_1 + v_2), \quad w_1 := \frac{v_1 + z}{|v_1 + z|}, \quad w_2 := \frac{v_2 + z}{|v_2 + z|}$$

oraz macierze

$$P_1 := I - 2w_1w_1^T, \quad P_2 := I - 2w_2w_2^T, \quad P_{21} := P_2P_1.$$

Wówczas:

- (i) P_{21} jest macierzą ortogonalną,
- (ii) P_{21} jest macierzą dodatnio określoną⁵,
- (iii) $P_{21}v_1 = v_2$.

Dowód. Część (i) wynika bezpośrednio z części (i) własności 1.8.1.

Udowodnimy część (ii) lematu. Oczywiście

$$P_{21} = I - 2w_2w_2^T - 2w_1w_1^T + 4w_2w_2^Tw_1w_1^T.$$

Weźmy dowolny wektor $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wektor u możemy zapisać jako $u = u^w + u^\perp$, gdzie $u^w = aw_1 + bw_2$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ i $u^\perp \perp w_1, u^\perp \perp w_2$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned} (u^w)^TP_{21}u^\perp &= \langle u^w, u^\perp \rangle - 2\langle u^w, w_2 \rangle \langle w_2, u^\perp \rangle - 2\langle u^w, w_1 \rangle \langle w_1, u^\perp \rangle \\ &\quad + 4\langle u^w, w_2 \rangle \langle w_2, w_1 \rangle \langle w_1, u^\perp \rangle = 0. \end{aligned}$$

Podobnie $(u^\perp)^TP_{21}u^w = 0$. Zatem zachodzi

$$u^TP_{21}u = |u^\perp|^2 + (u^w)^TP_{21}u^w.$$

⁵Przez macierz dodatnio określoną rozumiemy tutaj macierz $A \in M_{n \times n}$ (niekoniecznie symetryczną) spełniającą warunek

$$v^TAv > 0 \quad \text{dla } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Wystarczy zatem udowodnić, że

$$(1.23) \quad (u^w)^T P_{21} u^w > 0 \quad \text{dla } u^w \neq 0.$$

Założmy, że $u^w \neq 0$. Wówczas mamy

$$\begin{aligned} (u^w)^T P_{21} u^w &= |u^w|^2 - 2\langle u^w, w_2 \rangle \langle w_2, u^w \rangle - 2\langle u^w, w_1 \rangle \langle w_1, u^w \rangle \\ &\quad + 4\langle u^w, w_2 \rangle \langle w_2, w_1 \rangle \langle w_1, u^w \rangle \\ &= |u^w|^2 - 2\langle aw_1 + bw_2, w_2 \rangle \langle w_2, aw_1 + bw_2 \rangle \\ &\quad - 2\langle aw_1 + bw_2, w_1 \rangle \langle w_1, aw_1 + bw_2 \rangle \\ &\quad + 4\langle aw_1 + bw_2, w_2 \rangle \langle w_2, w_1 \rangle \langle w_1, aw_1 + bw_2 \rangle \\ &= |u^w|^2 - 2(a\langle w_1, w_2 \rangle + b)^2 - 2(a + b\langle w_1, w_2 \rangle)^2 \\ &\quad + 4(a\langle w_1, w_2 \rangle + b)\langle w_1, w_2 \rangle(a + b\langle w_1, w_2 \rangle) \\ &= a^2 + 2ab\langle w_1, w_2 \rangle + b^2 - 2\left(a^2\langle w_1, w_2 \rangle^2 + 2ab\langle w_1, w_2 \rangle + b^2\right) \\ &\quad - 2\left(a^2 + 2ab\langle w_1, w_2 \rangle + b^2\langle w_1, w_2 \rangle^2\right) \\ &\quad + 4\left(a^2\langle w_1, w_2 \rangle^2 + ab\langle w_1, w_2 \rangle^3\right) \\ &\quad + ab\langle w_1, w_2 \rangle + b^2\langle w_1, w_2 \rangle^2 \\ &= 4ab\langle w_1, w_2 \rangle^3 + 2(a^2 + b^2)\langle w_1, w_2 \rangle^2 - 2ab\langle w_1, w_2 \rangle - (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Wobec własności 1.8.2 części (iii) mamy $\langle w_1, w_2 \rangle \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. Zatem wystarczy pokazać, że $f(x) > 0$ dla $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, gdzie

$$f(x) := 4abx^3 + 2(a^2 + b^2)x^2 - 2abx - (a^2 + b^2).$$

Zauważmy, że

$$f(x) = 2ab(2x^2 - 1)x + (a^2 + b^2)(2x^2 - 1) = (2x^2 - 1)(a^2 + b^2 + 2abx).$$

Oczywiście $(2x^2 - 1) > 0$ dla $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. Ponadto, ponieważ $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, to

$$a^2 + b^2 + 2abx \geq a^2 + b^2 - 2|a||b| = (|a| - |b|)^2 \geq 0,$$

przy czym równość $a^2 + b^2 + 2abx = 0$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $x = \langle w_1, w_2 \rangle = 1$ oraz $a = -b$. Wtedy $w_1 = w_2$ i

$$u^w = aw_1 + bw_2 = 0,$$

co przeczy założeniu i daje, że $f(x) > 0$ dla $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$. Reasumując, macierz P_{21} jest dodatnio określona.

Na mocy własności 1.8.1 części (iii) mamy

$$P_{21}v_1 = P_2(P_1v_1) = P_2(-z) = v_2,$$

co daje część (iii) i kończy dowód. □

Rozdział 2

Warunki równoważne trywializacji funkcji

W tym rozdziale zaprezentujemy warunki równoważne istnieniu trywializacji funkcji f w otoczeniu poziomicy $f^{-1}(y)$. W tym celu wprowadzimy pojęcia pola transwersalnego do poziomicy funkcji, funkcji v -kontrolowalnej, rodziny $[f, y]_v^D$ oraz funkcji o własności właściwości na pewnym zbiorze. W ostatnim paragrafie tego rozdziału przedstawimy pewien szczególny warunek implikujący istnienie trywializacji funkcji f wykorzystujący pojęcie zbioru Milnora.

2.1 Pola transwersalne do poziomicy funkcji

Niech $D_f, D_v \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi. Powiemy, że pole wektorowe $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$ jest *transwersalne do poziomicy funkcji* $f \in C^\infty(D_f, \mathbb{R})$ na zbiorze otwartym $D \subset D_f \cap D_v$, jeśli spełniony jest warunek

$$(2.1) \quad \partial_{v(x)} f(x) \neq 0 \quad \text{dla } x \in D.$$

Zbiór wszystkich pól wektorowych transwersalnych do poziomicy funkcji $f \in C^\infty(D_f, \mathbb{R})$ na zbiorze otwartym $D \subset D_f$ będziemy oznaczać przez $\pitchfork(f, D)$, to jest

$$\pitchfork(f, D) := \{v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n) : D \subset D_v, \partial_{v(x)} f(x) \neq 0 \text{ dla } x \in D\}.$$

Uwaga 2.1.1. W literaturze wprowadza się pojęcia transversalności odwzorowania do podrozmaitości oraz transversalności dwóch podrozmaitości w następujący sposób. Niech A, B, M będą gładkimi rozmaitościami różniczkowymi, przy czym $B \subset M$. Mówimy, że odwzorowanie gładkie $h \in C^\infty(A, M)$ jest transversalne do podrozmaitości B , jeżeli dla dowolnego $x \in A$ takiego, że $f(x) \in B$, zachodzi

$$dh(x)(T_x A) + T_{h(x)} B = T_{h(x)} M,$$

gdzie przez $dh(x)$ oznaczyliśmy różniczkę funkcji h w punkcie x , przez $T_x A$ przestrzeń styczną do A w punkcie x , przez $T_{h(x)} B$ przestrzeń styczną do B w punkcie $h(x)$ i przez $T_{h(x)} M$ przestrzeń styczną do M w punkcie $h(x)$. W szczególności, jeżeli $A \subset M$, to kładąc $h = id|_A$ mówimy, że podrozmaitość A jest transversalna do podrozmaitości B , gdy

$$T_x A + T_x B = T_x M \text{ dla } x \in A \cap B.$$

Zachodzi następujący związek między pojęciem transversalności pola do poziomicy funkcji a powyższymi definicjami. Niech $D_f, D_v, D \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi takimi, że $D \subset D_f \cap D_v$, niech $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in D$ (lub, co na jedno wychodzi, dla dowolnego tensora metrycznego g pole wektorowe $\nabla_g f$ nigdzie nie znika w D). Pole $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$ jest transversalne do poziomicy funkcji $f \in C^\infty(D_f, \mathbb{R})$ na zbiorze D wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna trajektoria $\varphi : I \rightarrow D$ pola v jest transversalna do podrozmaitości $f^{-1}(f(x))$ dla $x \in D$ (równoważnie obraz trajektorii $\varphi(I)$ jest transversalny do podrozmaitości $f^{-1}(f(x))$ dla $x \in D$). Istotnie, wystarczy zauważyć, że dla $x = \varphi(t) \in f^{-1}(f(x'))$, $t \in I$, $x' \in D$, wobec twierdzenia 1.2.1, zachodzi

$$\partial_{v(x)} f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \partial_{\varphi'(t)} f(x) \neq 0 \Leftrightarrow \varphi'(t) \notin T_x f^{-1}(f(x')) \Leftrightarrow$$

$$T_x \varphi(I) + T_x f^{-1}(f(x')) = \mathbb{R}^n = T_x D.$$

Uwaga 2.1.2. Jeżeli $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in D$, to $\nabla f \in \mathfrak{h}(f, D)$. W szczególności zachodzi wtedy $\mathfrak{h}(f, D) \neq \emptyset$. Odwrotnie, jeżeli $\mathfrak{h}(f, D) \neq \emptyset$ to oczywiście $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in D$ i $\nabla f \in \mathfrak{h}(f, D)$.

Oznaczmy

$$\mathfrak{h}_+(f, D) := \{v \in \mathfrak{h}(f, D) : \partial_{v(x)} f(x) > 0 \text{ dla } x \in D\}.$$

Oczywiście $\mathfrak{h}_+(f, D) \subset \mathfrak{h}(f, D)$.

Uwaga 2.1.3. Bezpośrednio z definicji zbioru $\mathfrak{h}_+(f, D)$ dostajemy, że ma on strukturę stożka, to znaczy, jeżeli $v_1, v_2 \in \mathfrak{h}_+(f, D)$ oraz $a \in C^\infty(D, \mathbb{R}_+)$ (to jest a jest funkcją gładką o wartościach dodatnich na zbiorze D), to $av_1, v_1 + v_2 \in \mathfrak{h}_+(f, D)$.

Niech $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in D$. Przez $\mathfrak{h}_+^1(f, D)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich pól wektorowych $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ postaci

$$(2.2) \quad v(x) = k(x)R(x)\nabla f(x), x \in D,$$

gdzie $k \in C^\infty(D, \mathbb{R}_+)$, $R \in C^\infty(D, M_{n \times n})$ oraz macierz $R(x)$ jest macierzą ortogonalną, dodatnio określoną (niekoniecznie symetryczną) dla $x \in D$.

Własność 2.1.4. $\mathfrak{h}_+^1(f, D) = \mathfrak{h}_+(f, D)$.

Dowód. Inkluzja $\mathfrak{h}_+^1(f, D) \subset \mathfrak{h}_+(f, D)$ jest oczywista. Udowodnimy inkluzję odwrotną. Niech $v \in \mathfrak{h}_+(f, D)$. Przyjmijmy

$$k(x) := \frac{|v(x)|}{|\nabla f(x)|} \text{ dla } x \in D.$$

Wówczas $k \in C^\infty(D, \mathbb{R}_+)$ oraz

$$|v(x)| = |k(x)\nabla f(x)|, \quad \langle v(x), k(x)\nabla f(x) \rangle > 0 \text{ dla } x \in D.$$

Dla $x \in D$ przyjmując $v_1(x) = k(x)\nabla f(x)$, $v_2(x) = v(x)$, na mocy lematu 1.8.3 istnieje dodatnio określona macierz ortogonalna $R(x) = P_{21}(x) \in M_{n \times n}$ taka, że

$$k(x)R(x)\nabla f(x) = R(x)(k(x)\nabla f(x)) = v(x).$$

Ponadto, z postaci pola macierzowego $R = P_{21}$ (patrz lemat 1.8.3), wynika, że $R \in C^\infty(D, M_{n \times n})$. To kończy dowód. $\square$

Niech $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in D$. Przez $\mathfrak{h}_+^2(f, D)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich pól wektorowych $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ postaci

$$(2.3) \quad v(x) = R(x)\nabla f(x), x \in D,$$

gdzie $R \in C^\infty(D, M_{n \times n})$ oraz macierz $R(x)$ jest macierzą dodatnio określoną (niekoniecznie ortogonalną) dla $x \in D$. Zachodzi poniższa własność.

Własność 2.1.5.

$$\mathfrak{h}_+^2(f, D) = \mathfrak{h}_+^1(f, D) = \mathfrak{h}_+(f, D).$$

Dowód. Stosując własność 2.1.4 dostajemy

$$\mathfrak{h}_+(f, D) = \mathfrak{h}_+^1(f, D) \subset \mathfrak{h}_+^2(f, D) \subset \mathfrak{h}_+(f, D).$$

To daje tezę. □

Niech $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in D$. Przez $\mathfrak{h}_+^3(f, D)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich pól wektorowych $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ postaci

$$(2.4) \quad v(x) = \nabla_g f(x), \quad x \in D,$$

gdzie g jest tensorem metrycznym na zbiorze D .

Własność 2.1.6.

$$(2.5) \quad \mathfrak{h}_+(f, D) = \mathfrak{h}_+^3(f, D).$$

Dowód. Inkluzja $\mathfrak{h}_+^3(f, D) \subset \mathfrak{h}_+(f, D)$ jest oczywista. Istotnie, wystarczy zauważyć, że dla $x \in D$ mamy

$$\partial_{\nabla_g f(x)} f(x) = g_x(\nabla_g f(x), \nabla_g f(x)) > 0.$$

Odwrotnie, jeżeli $v \in \mathfrak{h}_+(f, D)$ to f jest funkcją Lapunowa na zbiorze D dla układu równań różniczkowych $x' = v(x)$. Na mocy twierdzenia 1.4.2 istnieje tensor metryczny g na zbiorze D taki, że

$$v(x) = \nabla_g f(x) \quad \text{dla } x \in D,$$

co daje $v \in \mathfrak{h}_+^3(f, D)$ i kończy dowód. □

Własność 2.1.7. Niech $v : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie gładkim polem wektorowym. Jeśli $|v(x)| < |\nabla f(x)|$ dla $x \in D$, to $(\nabla f + v) \in \mathfrak{h}_+(f, D)$.

Dowód. Dla $x \in D$ z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$\begin{aligned} \partial_{\nabla f(x)+v(x)} f(x) &= \langle \nabla f(x) + v(x), \nabla f(x) \rangle = |\nabla f(x)|^2 + \langle v(x), \nabla f(x) \rangle \geq \\ &\geq |\nabla f(x)|^2 - |v(x)| |\nabla f(x)| > 0. \end{aligned}$$

To kończy dowód. □

Analogicznie, korzystając z własności 2.1.6, pokazujemy

Własność 2.1.8. *Niech $w \in \mathfrak{h}_+(f, D)$. Wówczas istnieje tensor metryczny g określony na zbiorze D taki, że $w = \nabla_g f$ oraz dla dowolnego pola $v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ spełniającego warunek*

$$g_x(v(x), v(x)) < g_x(w(x), w(x)) \text{ dla } x \in D$$

zachodzi $(w + v) \in \mathfrak{h}_+(f, D)$.

W dalszym ciągu pracy będziemy konstruowali pola transwersalne do funkcji f na pewnym zbiorze przez "sklejenie" dwóch pól transwersalnych do f . W tym celu udowodnimy poniższą własność.

Własność 2.1.9. *Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, $K \subset \mathbb{R}^n$ zbiorem zwartym oraz $v_1 \in \mathfrak{h}_+(f, D \setminus K)$, $v_2 \in \mathfrak{h}_+(f, D)$. Istnieje wówczas $R > 0$ oraz pole wektorowe $v \in \mathfrak{h}_+(f, D)$ takie, że $v(x) = v_1(x)$ dla $x \in D, |x| > R + 1$.*

Dowód. Niech $R > 0$ będzie takie, że zachodzi $K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Z twierdzenia o rozkładzie jednościi istnieją funkcje $\lambda_1, \lambda_2 \in C^\infty(D)$ takie, że

$$(2.6) \quad \lambda_1(x) \geq 0, \lambda_2(x) \geq 0 \text{ dla } x \in D,$$

$$(2.7) \quad \lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1 \text{ dla } x \in D,$$

$$(2.8) \quad \lambda_1(x) = 1, \lambda_2(x) = 0 \text{ dla } x \in D, |x| > R + 1,$$

$$(2.9) \quad \lambda_1(x) = 0, \lambda_2(x) = 1 \text{ dla } x \in D, |x| < R.$$

Określmy pole $v \in C^\infty(D)$ następującym wzorem

$$(2.10) \quad v(x) := \lambda_1(x)\bar{v}_1(x) + \lambda_2(x)v_2(x) \text{ dla } x \in D,$$

gdzie

$$\bar{v}_1(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{dla } x \in D \setminus K \\ 0 & \text{dla } x \in D \cap K \end{cases}.$$

Z (2.6), (2.10) i założeń $v_1 \in \mathfrak{h}_+(f, D \setminus K)$, $v_2 \in \mathfrak{h}_+(f, D)$ otrzymujemy

$$\partial_{v(x)} f(x) = \lambda_1(x)\partial_{v_1(x)} f(x) + \lambda_2(x)\partial_{v_2(x)} f(x) > 0 \text{ dla } x \in D.$$

Zatem $v \in \mathfrak{h}_+(f, D)$. Ponadto, z (2.10) mamy

$$v(x) = v_1(x) \text{ dla } x \in D, |x| > R + 1,$$

co kończy dowód. □

2.2 Funkcje v -kontrolowalne

Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją gładką i niech $D \subset \mathbb{R}^n$. Weźmy gładkie pole wektorowe $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, gdzie $D_v \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym spaiłującym $D \subset D_v$. Rozważmy układ równań różniczkowych

$$(2.11) \quad x' = v(x),$$

gdzie prawą stronę równania (2.11) traktujemy jako określoną na zbiorze $\mathbb{R} \times D_v$. Weźmy dowolny punkt $y \in \mathbb{R}$. Dla dowolnego punktu $x \in D$ przez $\varphi_x : I_x \rightarrow D_v$ oznaczamy rozwiązanie integralne układu równań (2.11) spełniające warunek początkowy $\varphi_x(0) = x$. Określmy również zbiór

$$J_{x,y}^D := \{t \in I_x : \varphi_x(t) \in D \wedge \min\{f(x), y\} \leq f(\varphi_x(t)) \leq \max\{f(x), y\}\}.$$

Rozważmy rodzinę funkcji $\{C_s\}_{s \in S}$

$$C_s : G_s \rightarrow \mathbb{R}, \quad G_s \subset \mathbb{R}^n \text{ dla } s \in S$$

taką, że

$$(2.12) \quad D \subset \bigcup_{s \in S} G_s.$$

Mówimy, że rodzina funkcji $\{C_s\}_{s \in S}$ jest rodziną, która $\{f, y\}$ -ogranicza trajektorie układu równań (2.11) na zbiorze D , jeżeli dla każdego punktu $x \in D$ istnieją $s \in S$ oraz $L_s \in \mathbb{R}$ takie, że

$$(2.13) \quad \varphi_x(t) \in G_s \text{ dla } t \in J_{x,y}^D,$$

$$(2.14) \quad C_s(\varphi_x(t)) \leq L_s \text{ dla } t \in J_{x,y}^D$$

oraz

$$(2.15) \quad G_s \text{ jest zbiorem ograniczonym albo } \liminf_{x' \rightarrow \infty, x' \in G_s} C_s(x') > L_s.$$

Powiemy, że funkcja f jest *funkcją $\{v, y\}$ -kontrolowalną nad zbiorem* otwartym $U \subset \mathbb{R}$, jeśli $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ oraz istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ i rodzina

funkcji $\{C_s\}_{s \in S}$, która $\{f, y\}$ -ogranicza trajektorie układu równań (2.11) na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$.

Powiemy, że funkcja f jest *funkcją v -kontrolowalną w punkcie y* , jeśli istnieje otoczenie otwarte U punktu y takie, że funkcja f jest funkcją $\{v, y\}$ -kontrolowalną nad zbiorem U .

Powiemy, że funkcja f jest *funkcją $\{v, y\}$ -kontrolowalną w nieskończoności nad zbiorem* otwartym $U \subset \mathbb{R}$, jeśli istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U) \setminus K)$ oraz istnieje rodzina funkcji $\{C_s\}_{s \in S}$, która $\{f, y\}$ -ogranicza trajektorie układu równań (2.11) na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$.

Powiemy, że *funkcja f jest funkcją v -kontrolowalną w nieskończoności w punkcie y* , jeśli istnieje otoczenie otwarte U punktu y takie, że funkcja f jest funkcją $\{v, y\}$ -kontrolowalną w nieskończoności nad zbiorem U .

Pokażemy, że jeśli funkcja f jest v -kontrolowalną w punkcie y , to trywializację funkcji f nad otoczeniem punktu y można uzyskać przez całkowanie pola v . Dokładniej, udowodnimy poniższy lemat.

Lemat 2.2.1. *Jeżeli funkcja f jest funkcją v -kontrolowalną w punkcie y , to y jest wartością typową funkcji f .*

Dowód. Niech f będzie funkcją $\{v, y\}$ -kontrolowalną nad otoczeniem $U \subset \mathbb{R}$ punktu y . Wtedy $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ oraz istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ i rodzina funkcji $\{C_s\}_{s \in S}$, która $\{f, y\}$ -ogranicza trajektorie układu równań (2.11) na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$, to jest zachodzą warunki (2.13), (2.14), (2.15).

Rozważmy następujący układ równań różniczkowych z parametrem $\mu \in U$

$$(2.16) \quad x' = \frac{(y - \mu)}{\partial_{v(x)} f(x)} v(x)$$

o prawej stronie określonej w zbiorze $\mathbb{R} \times f^{-1}(U)$.

Oznaczmy przez $\Phi_\mu : V_\mu \rightarrow \mathbb{R} \times f^{-1}(U)$ rozwiązanie ogólne układu (2.16), gdzie

$$V_\mu := \{(\tau, \eta, t) \in \mathbb{R} \times f^{-1}(U) \times \mathbb{R} : t \in I_\mu(\tau, \eta)\},$$

a $I_\mu(\tau, \eta)$ oznacza dziedzinę rozwiązania integralnego $t \rightarrow \Phi_\mu(\tau, \eta, t)$. Na mocy definicji rozwiązania ogólnego mamy

$$(2.17) \quad \Phi_\mu(\tau, \eta, \tau) = \eta.$$

Rozważmy odwzorowanie

$$\Psi_1 : f^{-1}(U) \ni x \mapsto \Phi_{f(x)}(0, x, 1) \in f^{-1}(y).$$

Pokażemy, że odwzorowanie Ψ_1 jest poprawnie określone, to znaczy $1 \in I_{f(x)}(0, x)$ dla dowolnego $x \in f^{-1}(U)$. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje $x \in f^{-1}(U)$ taki, że $1 \notin I_{f(x)}(0, x)$. Prawy koniec β przedziału $I_{f(x)}(0, x)$ spełnia $0 < \beta \leq 1$. Niech φ_x będzie rozwiązaniem integralnym układu (2.16) z parametrem $\mu = f(x)$ spełniającym warunek początkowy $\varphi_x(0) = x$. Wówczas zachodzi

$$(2.18) \quad \varphi(t) = \Phi_{f(x)}(0, x, t) \quad \text{dla } t \in I_{f(x)}(0, x),$$

$$(2.19) \quad \varphi_x(0) = x.$$

Dla $t \in I_{f(x)}(0, x)$ z (2.16) mamy¹

$$\begin{aligned} (f \circ \varphi_x)'(t) &= (\partial_{\varphi_x(t)} f)(\varphi_x(t)) \\ &= \frac{(y - f(x))}{\partial_{v(\varphi_x(t))} f(\varphi_x(t))} (\partial_{v(\varphi_x(t))} f)(\varphi_x(t)) = y - f(x). \end{aligned}$$

Zatem z równania (2.19) otrzymujemy

$$(2.20) \quad f \circ \varphi_x(t) = (y - f(x))t + f(x), \quad t \in I_{f(x)}(0, x)$$

i $f \circ \varphi_x(t) \in J$ dla $t \in [0, \beta)$, gdzie J jest przedziałem domkniętym o końcach y i $f(x)$. Oznaczmy

$$K' := \{(t, x') \in \mathbb{R} \times f^{-1}(U) : t \in [0, 1], f(x') \in J, x' \in K\}.$$

Oczywiście K' jest zbiorem zwartym. Na mocy lematu o uciekaniu rozwiązań integralnych ze zbiorów zwartych, istnieje $\tau \in (0, \beta)$ takie, że $(t, \varphi_x(t)) \notin K'$ dla $t \in [\tau, \beta)$. Ponieważ dla $t \in [\tau, \beta)$ zachodzi $f \circ \varphi_x(t) \in J$, to $\varphi_x(t) \notin K$ dla $t \in [\tau, \beta)$. Oznaczmy

$$R := \sup\{|\varphi_x(t)| \in \mathbb{R} : t \in [\tau, \beta)\}.$$

Mamy $R < +\infty$. Istotnie, przypuśćmy przeciwnie, że istnieje ciąg $(t_i)_{i=1}^\infty \subset [\tau, \beta)$ taki, że $\lim_{i \rightarrow \infty} |\varphi_x(t_i)| = +\infty$. Na mocy twierdzenia 1.3.3 obrazy rozwiązań

¹ $f \circ \varphi_x$ oznacza złożenie funkcji φ_x z funkcją f .

integralnych równania (2.16) są zawarte w obrazach trajektorii układu równań (2.11). Na mocy (2.15) zachodzi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} C_s(\varphi_x(t_i)) > L_s,$$

co przeczy (2.14). Zatem rozwiązanie integralne układu równań (2.16) jest zawarte w zbiorze zwartym

$$K'' = \{(t, x') \in \mathbb{R} \times f^{-1}(U) : t \in [0, 1], f(x') \in J, |x'| \leq R\},$$

co jest sprzeczne z lematem o uciekaniu rozwiązań ze zbiorów zwartych.

Podsumowując, pokazaliśmy, że $1 \in I_{f(x)}(0, x)$ dla dowolnego $x \in f^{-1}(U)$. Z równania (2.20) otrzymujemy $f(\Psi_1(x)) = f(\varphi_x(1)) = y$, co daje poprawność określenie odwzorowania Ψ_1 . Podobnie jak powyżej pokazujemy, że odwzorowanie

$$\Theta : f^{-1}(y) \times U \ni (\xi, \mu) \mapsto \Phi_\mu(1, \xi, 0) \in f^{-1}(U)$$

jest poprawnie określone. Łatwo sprawdzić (por. np. [Sk]), że odwzorowanie

$$\Psi : f^{-1}(U) \ni x \mapsto (\Psi_1(x), f(x)) \in f^{-1}(y) \times U$$

jest C^∞ dyfeomorfizmem i $\Psi^{-1} = \Theta$. Zatem $f|_{f^{-1}(U)}$ jest trywialną wiązką klasy C^∞ . $\square$

Przedstawimy teraz odpowiednik lematu 2.2.1 w przypadku funkcji v -kontrolowalnej w nieskończoności w punkcie y .

Lemat 2.2.2. *Jeżeli funkcja f jest funkcją v -kontrolowalną w nieskończoności w punkcie y , to y jest wartością typową funkcji f w nieskończoności.*

Dowód. Bez straty ogólności rozważań, możemy założyć, że $y = 0$. Niech f będzie funkcją $\{v, 0\}$ -kontrolowalną w nieskończoności nad otoczeniem $U \subset \mathbb{R}$ punktu 0. Istnieje wtedy zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $v \in \mathfrak{h}(f, D)$, gdzie $D := f^{-1}(U) \setminus K$, oraz istnieje rodzina funkcji $\{C_s\}_{s \in S}$, która $\{f, 0\}$ -ogranicza trajektorie układu równań (2.11) na zbiorze D , to jest zachodzą warunki (2.13), (2.14), (2.15).

Rozważmy następujący układ równań różniczkowych

$$(2.21) \quad x' = -\frac{v(x)}{|v(x)|}$$

o prawej stronie określonej w zbiorze $\mathbb{R} \times D$.

Oznaczmy przez $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R} \times D$ rozwiązanie ogólne układu (2.21), gdzie

$$V := \{(\tau, \eta, t) \in \mathbb{R} \times D \times \mathbb{R} : t \in I(\tau, \eta)\},$$

a $I(\tau, \eta)$ oznacza dziedzinę rozwiązania integralnego $t \rightarrow \Phi(\tau, \eta, t)$. Określmy dla każdego punktu $x \in D$ funkcję φ_x wzorem

$$\varphi_x(t) = \Phi(0, x, t) \text{ dla } t \in I(0, x).$$

Dla dowolnego $x \in D$ oraz $t \in I(0, x)$ zachodzi wtedy

$$(2.22) \quad |\varphi'_x(t)| = 1.$$

Jeśli przez $\text{length}(\varphi_x|_{[0,t]})$ oznaczymy długość euklidesową krzywej $\varphi_x|_{[0,t]}$ dla $t \in I(0, x)$, $t > 0$ to z (2.22) mamy

$$(2.23) \quad \text{length}(\varphi_x|_{[0,t]}) = \int_0^t |\varphi'_x(s)| ds = t.$$

Niech $U_1 \subset \mathbb{R}$ będzie otoczeniem punktu 0 takim, że $\overline{U_1} \subset U$. Niech $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ będzie kulą domkniętą taką, że $K_1 \supset K$ oraz zachodzi

$$(2.24) \quad F := Fr(K_1) \cap \overline{f^{-1}(U_1)} \subset D,$$

gdzie przez $Fr(K_1)$ oznaczyliśmy brzeg zbioru K_1 . Oczywiście F jest zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^n$.

Dla dowolnego otoczenia $W \subset U_1$ punktu 0 połóżmy

$$(2.25) \quad K_2(W) := \{\Phi(0, x, t) : x \in F \cap f^{-1}(W), t \in I(0, x)\} \cap f^{-1}(W).$$

Pokażemy, że istnieje otoczenie $U_2 \subset \mathbb{R}$ punktu 0 takie, że zbiór $K_2(U_2)$ jest ograniczony. Istotnie, w przeciwnym razie zbiory $K_2((-1/k, 1/k))$ dla $k \in \mathbb{N}$ są nieograniczone. Zatem istnieje ciąg $(x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$ oraz $x_k \in \{\Phi(0, x, t) : x \in F \cap f^{-1}((-1/k, 1/k)), t \in I(0, x)\}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Z definicji zbioru $K_2((-1/k, 1/k))$ i zwartości zbioru F , wybierając ewentualnie podciąg, możemy założyć, że $x_k = \Phi(0, x_k^F, t_k)$ gdzie $x_k^F \in F$, $t_k \in I(0, x_k^F)$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz

$$(2.26) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^F = x^F \in F, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k^F) = f(x^F) = 0$$

dla pewnego punktu $x^F \in F$. Wówczas $t_k \neq 0$ dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$. Wybierając ewentualnie podciąg, możemy założyć, że $t_k > 0$ dla $k \in \mathbb{N}$ lub $t_k < 0$ dla $k \in \mathbb{N}$. Rozważymy przypadek gdy $t_k > 0$ dla $k \in \mathbb{N}$. Analogicznie przeprowadzamy rozumowanie gdy $t_k < 0$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Na mocy własności 2.1.6 istnieje tensor metryczny g na zbiorze D taki, że

$$v(x) = \nabla_g f(x) \text{ dla } x \in D.$$

Niech $B(x^F, r)$ będzie kulą (w metryce euklidesowej) otwartą o środku w punkcie $x^F \in D$ i promieniu $r > 0$ taką, że $B(x^F, r) \subset D$ oraz zachodzi

$$(2.27) \quad \frac{g_x(v(x), v(x))}{|v(x)|} \geq M := \frac{g_{x^F}(v(x^F), v(x^F))}{2|v(x^F)|} \text{ dla } x \in B(x^F, r).$$

Oczywiście $M > 0$ i kula $B(x^F, r)$ istnieje.

Ustalmy dowolny punkt $x \in B(x^F, r)$. Dla dowolnego $t \in I(0, x)$, $t > 0$ takiego, że $\varphi_x([0, t]) \subset B(x^F, r)$ wobec (2.21) i (2.27) zachodzi

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_x(t)) = g_{\varphi_x(t)}(\nabla_g f(\varphi_x(t)), \varphi'_x(t)) = -\frac{g_{\varphi_x(t)}(v(\varphi_x(t)), v(\varphi_x(t)))}{|v(\varphi_x(t))|} \leq -M.$$

Zatem dla $s \in I(0, x)$, $s > 0$ takiego, że $\varphi_x([0, s]) \subset B(x^F, r)$, z twierdzenia o wartości średniej mamy

$$f(\varphi_x(0)) - f(\varphi_x(s)) = \left(\frac{d}{dt} f(\varphi_x(t)) \right) (-s) \geq Ms$$

dla pewnego $t_1 \in [0, s]$. W konsekwencji z (2.23) dla $s \in I(0, x)$, $s > 0$ takiego, że $\varphi_x([0, s]) \subset B(x^F, r)$ mamy

$$(2.28) \quad \text{length}(\varphi_x|_{[0, s]}) \leq \frac{1}{M} (f(\varphi_x(0)) - f(\varphi_x(s))).$$

Na mocy (2.26) i warunku $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = 0$ istnieje indeks $N \in \mathbb{N}$ taki, że

$$(2.29) \quad |x^F - x_k^F| < \frac{r}{2} \text{ oraz } \frac{1}{M} (f(x_k^F) - f(x_k)) < \frac{r}{2} \text{ dla } k \geq N.$$

Zauważmy, że dla $k \geq N$ i $s \in I(0, x_k^F)$, $s > 0$ zachodzi

$$(2.30) \quad \varphi_{x_k^F}(s) \in B(x^F, r).$$

Istotnie, przypuśćmy przeciwnie, że istnieje $k_0 \geq N$ i $s_0 \in I(0, x_{k_0}^F)$, $s_0 > 0$ takie, że $\varphi_{x_{k_0}^F}(s_0) \notin B(x^F, r)$. Ponieważ $x_{k_0}^F \in B(x^F, r)$, to istnieje $s_1 \in I(0, x_{k_0}^F)$, $s_1 > 0$ takie, że

$$|\varphi_{x_{k_0}^F}(t) - x^F| < r \text{ dla } t \in [0, s_1) \text{ i } |\varphi_{x_{k_0}^F}(s_1) - x^F| = r.$$

Zatem z (2.29) otrzymujemy

$$(2.31) \quad \text{length}(\varphi_{x_{k_0}^F}|_{[0, s_1]}) \geq |\varphi_{x_{k_0}^F}(s_1) - \varphi_{x_{k_0}^F}(0)| \geq r - |x^F - x_{k_0}^F| > \frac{r}{2}.$$

Z drugiej strony, z (2.28) i (2.29) dla $t \in [0, s_1)$ mamy

$$\text{length}(\varphi_{x_{k_0}^F}|_{[0, t]}) < \frac{r}{2}.$$

Przechodząc w powyższej nierówności do granicy przy $t \rightarrow s_1$ dostajemy

$$\text{length}(\varphi_{x_{k_0}^F}|_{[0, s_1]}) \leq \frac{r}{2},$$

co przeczy (2.31) i daje (2.30).

Z (2.30) mamy, że $x_k = \varphi_{x_k^F}(t_k) \in B(x^F, r)$ dla $k \geq N$. To daje sprzeczność z warunkiem $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$. Reasumując, istnieje otoczenie $U_2 \subset \mathbb{R}$ punktu 0 takie, że zbiór $K_2(U_2)$ jest ograniczony. Oznaczmy $K_3 := K_1 \cup \overline{K_2(U_2)}$. Oczywiście K_3 jest zbiorem zwartym oraz $K \subset K_3$.

Rozważmy następujący układ równań różniczkowych z parametrem $\mu \in U_2$

$$(2.32) \quad x' = \frac{-\mu}{\partial_{v(x)}f(x)}v(x)$$

o prawej stronie określonej w zbiorze $\mathbb{R} \times (f^{-1}(U_2) \setminus K_3)$.

Oznaczmy przez $\Phi_\mu : V_\mu \rightarrow \mathbb{R} \times (f^{-1}(U_2) \setminus K_3)$ rozwiązanie ogólne układu (2.32), gdzie

$$V_\mu := \{(\tau, \eta, t) \in \mathbb{R} \times (f^{-1}(U_2) \setminus K_3) \times \mathbb{R} : t \in I_\mu(\tau, \eta)\},$$

a $I_\mu(\tau, \eta)$ oznacza dziedzinę rozwiązania integralnego $t \rightarrow \Phi_\mu(\tau, \eta, t)$.

Rozważmy odwzorowanie

$$\Psi_1 : f^{-1}(U_2) \setminus K_3 \ni x \mapsto \Phi_{f(x)}(0, x, 1) \in f^{-1}(0) \setminus K_3.$$

Pokażemy, że odwzorowanie Ψ_1 jest poprawnie określone, to znaczy $1 \in I_{f(x)}(0, x)$ oraz $\Phi_{f(x)}(0, x, 1) \in f^{-1}(0) \setminus K_3$ dla dowolnego $x \in f^{-1}(U_2) \setminus K_3$.

Zauważmy najpierw, że $1 \in I_{f(x)}(0, x)$ dla $x \in f^{-1}(U_2) \setminus K_3$. Istotnie, przypuśćmy przeciwnie, że istnieje $x \in f^{-1}(U_2) \setminus K_3$ taki, że $1 \notin I_{f(x)}(0, x)$. Prawy koniec β przedziału $I_{f(x)}(0, x)$ spełnia wtedy nierówności $0 < \beta \leq 1$. Niech γ_x będzie rozwiązaniem integralnym układu (2.32) z parametrem $\mu = f(x)$ spełniającym warunek początkowy $\gamma_x(0) = x$. Zatem

$$(2.33) \quad \gamma_x(t) = \Phi_{f(x)}(0, x, t) \quad \text{dla } t \in I_{f(x)}(0, x),$$

$$(2.34) \quad \gamma_x(0) = x.$$

Dla $t \in I_{f(x)}(0, x)$ z (2.32) mamy

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma_x)'(t) &= (\partial_{\gamma'_x(t)} f)(\gamma_x(t)) \\ &= \frac{-f(x)}{\partial_{v(\gamma_x(t))} f(\gamma_x(t))} (\partial_{v(\gamma_x(t))} f)(\gamma_x(t)) = -f(x). \end{aligned}$$

Zatem z równania (2.33) otrzymujemy

$$(2.35) \quad f \circ \gamma_x(t) = -f(x)t + f(x), \quad t \in I_{f(x)}(0, x)$$

i $f \circ \varphi_x(t) \in J$ dla $t \in [0, \beta)$, gdzie J jest przedziałem domkniętym o końcach 0 i $f(x)$.

Oznaczmy

$$R := \sup\{|\gamma_x(t)| \in \mathbb{R} : t \in [0, \beta)\}.$$

Mamy $R < +\infty$. Istotnie, przypuśćmy przeciwnie, że istnieje ciąg $(t_i)_{i=1}^\infty \subset [0, \beta)$ taki, że $\lim_{i \rightarrow \infty} |\gamma_x(t_i)| = +\infty$. Na mocy twierdzenia 1.3.3 obrazy rozwiązań integralnych równania (2.21) są zawarte w obrazach trajektorii układu równań (2.11). Na mocy (2.15) zachodzi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} C_s(\gamma_x(t_i)) > L_s,$$

co przeczy (2.14) i daje $R < +\infty$.

Oznaczmy

$$K_4 := \overline{B(0, R) \cap f^{-1}(J) \setminus K_3}.$$

Oczywiście K_4 jest zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^n$ oraz $K_4 \subset f^{-1}(U_2) \setminus K$. Ponadto, $\gamma_x(t) \in K_4$ dla $t \in I_{f(x)}(0, x)$. Niech x_0 będzie dowolnym punktem skupienia trajektorii γ_x przy $t \rightarrow \beta$. Ponieważ $v(x_0) \neq 0$, to zachodzi

$$(2.36) \quad \lim_{t \rightarrow \beta} \gamma_x(t) = x_0 \in K_4.$$

Z określenia i ciągłości funkcji γ_x otrzymujemy $x_0 \in Fr(K_3) \subset Fr(K_1) \cup Fr(\overline{K_2(U_2)})$. Z określenia zbioru $K_2(U_2)$ mamy $Fr(K_1) \cap f^{-1}(U_2) \subset K_2(U_2)$ oraz $Fr(\overline{K_2(U_2)}) \subset \overline{K_2(U_2)}$. Ponadto, $x_0 \in f^{-1}(J) \subset f^{-1}(U_2)$, zatem $x_0 \in \overline{K_2(U_2)}$.

Oznaczmy przez $\bar{\gamma}_x : (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \rightarrow f^{-1}(U_2) \setminus K$ rozwiązanie integralne układu równań (2.32) z parametrem $\mu = f(x)$, rozważanego w zbiorze $\mathbb{R} \times (f^{-1}(U_2) \setminus K)$, spełniającego warunek początkowy $\bar{\gamma}_x(0) = x$. Wówczas $\bar{\gamma}_x|_{[0, \beta)} = \gamma_x|_{[0, \beta)}$. Zatem, wobec (2.36), mamy $\bar{\gamma}_x(\beta) = x_0$. Weźmy dowolne liczby a, b takie, że $0 < a < \beta < b < \bar{\beta}$. Na mocy twierdzenia o zbieżności rozwiązań dla równań różniczkowych istnieje otoczenie Ω punktu $(\beta, x_0) \in \mathbb{R} \times (f^{-1}(U_2) \setminus K)$ takie, że dla dowolnego punktu $(\xi, \eta) \in \Omega$ rozwiązanie $\bar{\Phi}_{f(x)}(\xi, \eta, \cdot)$ równania (2.32) rozważanego w $\mathbb{R} \times (f^{-1}(U_2) \setminus K)$ jest określone co najmniej na przedziale $[a, b]$ oraz zachodzi

$$\lim_{(\xi, \eta) \rightarrow (\beta, x_0)} \bar{\Phi}_{f(x)}(\xi, \eta, t) = \bar{\Phi}_{f(x)}(\beta, x_0, t) = \bar{\gamma}_x(t) \text{ dla } t \in [a, b].$$

W szczególności, z określenia zbioru $K_2(U_2)$ i twierdzenia 1.3.3, wobec $x_0 \in \overline{K_2(U_2)}$ dostajemy, że

$$(2.37) \quad \gamma_x(t) = \bar{\gamma}_x(t) \in \overline{K_2(U_2)} \text{ dla } t \in [a, \beta).$$

Z drugiej strony, $\gamma_x(t) \notin K_3$ dla $t \in [0, \beta)$, co przeczy (2.37).

Podsumowując, pokazaliśmy, że $1 \in I_{f(x)}(0, x)$ dla dowolnego $x \in f^{-1}(U_2) \setminus K_3$. Z równania (2.35) otrzymujemy $f(\Psi_1(x)) = f(\varphi_x(1)) = 0$, a więc $\Phi_{f(x)}(0, x, 1) \in f^{-1}(0) \setminus K_3$, co daje poprawność określenia odwzorowania Ψ_1 .

Podobnie jak powyżej pokazujemy, że odwzorowanie

$$\Theta : (f^{-1}(0) \setminus K_3) \times U_2 \ni (\xi, \mu) \mapsto \Phi_\mu(1, \xi, 0) \in f^{-1}(U_2) \setminus K_3$$

jest poprawnie określone. Łatwo sprawdzić, że odwzorowanie

$$\Psi : f^{-1}(U_2) \setminus K_3 \ni x \mapsto (\Psi_1(x), f(x)) \in (f^{-1}(0) \setminus K_3) \times U_2$$

jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ i zachodzi $\Psi^{-1} = \Theta$. Zatem funkcja $f|_{f^{-1}(U_2) \setminus K_3} : f^{-1}(U_2) \setminus K_3 \rightarrow f^{-1}(U_2)$ jest trywialną wiązką klasy C^∞ . $\square$

2.3 Rodzina funkcji $[f, y]_v^D$. Funkcje o własności właściwości

Niech $v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ będzie gładkim polem wektorowym określonym na zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{R}^n$ i niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Określmy zbiory $\mathfrak{h}(v, D, A)$, $\mathfrak{h}(v, D)$ w następujący sposób

$$\mathfrak{h}(v, D, A) := \{f \in C^0(D_f) : D \subset D_f, f|_{D \setminus A} \in C^\infty(D \setminus A),$$

$$\partial_{v(x)}f(x) \neq 0 \text{ dla } x \in D \setminus A\},$$

$$\mathfrak{h}(v, D) := \mathfrak{h}(v, D, \emptyset).$$

Niech $v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$, $f \in \mathfrak{h}(v, D)$, $y \in \mathbb{R}$. Dla $x \in D$ oznaczmy przez $\varphi_x : I_x \rightarrow D$ rozwiązanie integralne układu równań $x' = v(x)$ spełniające warunek początkowy $\varphi_x(0) = x$ i przyjmijmy

$$J_x := \{t \in I_x : \min\{f(x), y\} \leq f(\varphi_x(t)) \leq \max\{f(x), y\}\}.$$

Przez $[f, y]_v^D$ będziemy oznaczać zbiór funkcji $f^* \in \mathfrak{h}(v, D, f^{-1}(y))$ takich, że dla dowolnego $x \in D$ funkcja

$$J_x \ni t \rightarrow f^*(\varphi_x(t)) \in \mathbb{R}$$

jest ograniczona. Łatwo zauważamy, że $f \in [f, y]_v^D$.

Własność 2.3.1. *Niech $v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$, $f \in \mathfrak{h}(v, D)$, $y \in \mathbb{R}$.*

i) *Jeżeli $f^* \in \mathfrak{h}(v, D, f^{-1}(y))$ jest funkcją ograniczoną na zbiorze D , to $f^* \in [f, y]_v^D$.*

ii) *Niech $f^* \in [f, y]_v^D$. Jeżeli $\phi \in C^0(\overline{f^*(D)})$ jest funkcją gładką na zbiorze $f^*(D \setminus f^{-1}(y))$ taką, że $\phi'(t) \neq 0$ dla $t \in f^*(D \setminus f^{-1}(y))$, to $\phi \circ f^* \in [f, y]_v^D$.*

iii) Jeżeli $f^* \in \cap (v, D, f^{-1}(y))$ oraz istnieją stałe $y_1^*, y_2^* \in \mathbb{R}$ takie, że

$$(2.38) \quad \forall_{x \in D \setminus f^{-1}(y)} \quad \langle v(x), \nabla f(x) \rangle \langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle > 0 \\ \Rightarrow (f(x) - y)(f^*(x) - y_1^*) \geq 0$$

oraz

$$(2.39) \quad \forall_{x \in D \setminus f^{-1}(y)} \quad \langle v(x), \nabla f(x) \rangle \langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle < 0 \\ \Rightarrow (f(x) - y)(f^*(x) - y_2^*) \leq 0,$$

to $f^* \in [f, y]_v^D$.

iv) Jeżeli $f^* \in \cap (v, D, f^{-1}(y))$ oraz istnieje stała $y^* \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\forall_{x \in D \setminus f^{-1}(y)} \quad \langle v(x), \nabla f(x) \rangle \langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle (f(x) - y)(f^*(x) - y^*) \geq 0,$$

to $f^* \in [f, y]_v^D$.

Dowód. Części i) oraz ii) są oczywiste. Przejdziemy do dowodu części iii). Weźmy dowolny $x \in D$ i rozważmy rozwiązanie integralne $\varphi_x : I_x \rightarrow D$ układu $x' = v(x)$ spełniające warunek $\varphi_x(0) = x$. Jeśli $x \in f^{-1}(y)$, to zbiór J_x jest jednoelementowy i funkcja $f^* \circ \varphi$ jest ograniczona na J_x . Załóżmy, że $x \in D \setminus f^{-1}(y)$. Pokażemy, że funkcja $f^* \circ \varphi$ jest ograniczona na przedziale J_x . Rozważymy przypadki ze względu na znaki wyrażeń $\langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle$, $\langle v(x), \nabla f(x) \rangle$ oraz $f(x) - y$.

a) Niech $\langle v(x), \nabla f(x) \rangle > 0$ i $f(x) < y$. Wówczas $J_x = \{t \in I_x : f(x) \leq f(\varphi_x(t)) \leq y\}$, zatem $\min(f \circ \varphi_x|_{J_x}) = f(x) = f(\varphi(0))$ oraz zachodzi

$$(2.40) \quad f(\varphi_x(t)) \leq y \text{ dla } t \in \text{Int } J_x,$$

gdzie przez $\text{Int } J_x$ oznaczyliśmy wnętrze przedziału J_x . Ponieważ $f \in \cap (v, D)$, $\langle v(x), \nabla f(x) \rangle > 0$ i J_x jest zbiorem spójnym, to funkcja $f \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest rosnąca oraz $J_x \subset [0, +\infty)$. Rozważmy przypadki:

a1) $\langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle > 0$. Wtedy $\langle v(\varphi_x(t)), \nabla f^*(\varphi_x(t)) \rangle > 0$ dla $t \in \text{Int } J_x$, a więc $f^* \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest funkcją rosnącą. Ponieważ $0 \in J_x \subset [0, +\infty)$, to $\min(f^* \circ \varphi_x|_{J_x}) = f^*(\varphi_x(0)) = f^*(x)$. Ponadto, z (2.38) i (2.40) dostajemy $f^*(\varphi_x(t)) \leq y_1^*$ dla $t \in J_x$. To daje ograniczoność funkcji $f^* \circ \varphi_x$ na przedziale J_x .

a2) $\langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle < 0$. Wtedy $\langle v(\varphi_x(t)), \nabla f^*(\varphi_x(t)) \rangle < 0$ dla $t \in \text{Int } J_x$, a więc $f^* \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest funkcją malejącą. Ponieważ $0 \in J_x \subset [0, +\infty)$, to $\max(f^* \circ \varphi_x|_{J_x}) = f^*(\varphi_x(0)) = f^*(x)$. Ponadto, z (2.39) i (2.40) dostajemy $f^*(\varphi_x(t)) \geq y_2^*$ dla $t \in J_x$. To daje ograniczoność funkcji $f^* \circ \varphi_x$ na przedziale J_x .

b) Niech $\langle v(x), \nabla f(x) \rangle > 0$ i $f(x) > y$. Wówczas $J_x = \{t \in I_x : y \leq f(\varphi_x(t)) \leq f(x)\}$, zatem $\max(f \circ \varphi_x|_{J_x}) = f(x) = f(\varphi(0))$ oraz zachodzi

$$(2.41) \quad f(\varphi_x(t)) \geq y \text{ dla } t \in \text{Int } J_x.$$

Ponieważ $f \in \mathcal{H}(v, D)$, $\langle v(x), \nabla f(x) \rangle > 0$ i J_x jest zbiorem spójnym, to funkcja $f \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest rosnąca oraz $J_x \subset (-\infty, 0]$. Rozważmy przypadki:

b1) $\langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle > 0$. Wtedy $\langle v(\varphi_x(t)), \nabla f^*(\varphi_x(t)) \rangle > 0$ dla $t \in \text{Int } J_x$, a więc $f^* \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest funkcją rosnącą. Ponieważ $0 \in J_x \subset (-\infty, 0]$, to $\max(f^* \circ \varphi_x|_{J_x}) = f^*(\varphi_x(0)) = f^*(x)$. Ponadto, z (2.38) i (2.41) dostajemy $f^*(\varphi_x(t)) \leq y_1^*$ dla $t \in J_x$. To daje ograniczoność funkcji $f^* \circ \varphi_x$ na przedziale J_x .

b2) $\langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle < 0$. Wtedy $\langle v(\varphi_x(t)), \nabla f^*(\varphi_x(t)) \rangle < 0$ dla $t \in \text{Int } J_x$, a więc $f^* \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest funkcją malejącą. Ponieważ $0 \in J_x \subset (-\infty, 0]$, to $\min(f^* \circ \varphi_x|_{J_x}) = f^*(\varphi_x(0)) = f^*(x)$. Ponadto, z (2.39) i (2.41) dostajemy $f^*(\varphi_x(t)) \geq y_2^*$ dla $t \in J_x$. To daje ograniczoność funkcji $f^* \circ \varphi_x$ na przedziale J_x .

c) Niech $\langle v(x), \nabla f(x) \rangle < 0$ i $f(x) < y$. Wówczas $J_x = \{t \in I_x : f(x) \leq f(\varphi_x(t)) \leq y\}$, zatem $\min(f \circ \varphi_x|_{J_x}) = f(x) = f(\varphi(0))$ oraz zachodzi

$$(2.42) \quad f(\varphi_x(t)) \leq y \text{ dla } t \in \text{Int } J_x.$$

Ponieważ $f \in \mathcal{H}(v, D)$, $\langle v(x), \nabla f(x) \rangle < 0$ i J_x jest zbiorem spójnym, to funkcja $f \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest malejąca oraz $J_x \subset (-\infty, 0]$. Rozważmy przypadki:

c1) $\langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle > 0$. Wtedy $\langle v(\varphi_x(t)), \nabla f^*(\varphi_x(t)) \rangle > 0$ dla $t \in \text{Int } J_x$, a więc $f^* \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest funkcją rosnącą. Ponieważ $0 \in J_x \subset (-\infty, 0]$, to $\max(f^* \circ \varphi_x|_{J_x}) = f^*(\varphi_x(0)) = f^*(x)$. Ponadto, z (2.39) i (2.42) dostajemy $f^*(\varphi_x(t)) \geq y_2^*$ dla $t \in J_x$. To daje ograniczoność funkcji $f^* \circ \varphi_x$ na przedziale J_x .

c2) $\langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle < 0$. Wtedy $\langle v(\varphi_x(t)), \nabla f^*(\varphi_x(t)) \rangle < 0$ dla $t \in \text{Int } J_x$, a więc $f^* \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest funkcją malejącą. Ponieważ $0 \in J_x \subset (-\infty, 0]$, to $\min(f^* \circ \varphi_x|_{J_x}) = f^*(\varphi_x(0)) = f^*(x)$. Ponadto, z (2.38) i (2.42) dostajemy $f^*(\varphi_x(t)) \leq y_1^*$ dla $t \in J_x$. To daje ograniczoność funkcji $f^* \circ \varphi_x$ na przedziale J_x .

d) Niech $\langle v(x), \nabla f(x) \rangle < 0$ i $f(x) > y$. Wówczas $J_x = \{t \in I_x : y \leq f(\varphi_x(t)) \leq f(x)\}$, zatem $\max(f \circ \varphi_x|_{J_x}) = f(x) = f(\varphi(0))$ oraz zachodzi

$$(2.43) \quad f(\varphi_x(t)) \geq y \text{ dla } t \in \text{Int } J_x.$$

Ponieważ $f \in \mathcal{H}(v, D)$, $\langle v(x), \nabla f(x) \rangle < 0$ i J_x jest zbiorem spójnym, to funkcja $f \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest malejąca oraz $J_x \subset [0, +\infty)$. Rozważmy przypadki:

d1) $\langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle > 0$. Wtedy $\langle v(\varphi_x(t)), \nabla f^*(\varphi_x(t)) \rangle > 0$ dla $t \in \text{Int } J_x$, a więc $f^* \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest funkcją rosnącą. Ponieważ $0 \in J_x \subset [0, +\infty)$, to $\min(f^* \circ \varphi_x|_{J_x}) = f^*(\varphi_x(0)) = f^*(x)$. Ponadto, z (2.39) i (2.43) dostajemy $f^*(\varphi_x(t)) \leq y_2^*$ dla $t \in J_x$. To daje ograniczoność funkcji $f^* \circ \varphi_x$ na przedziale J_x .

d2) $\langle v(x), \nabla f^*(x) \rangle < 0$. Wtedy $\langle v(\varphi_x(t)), \nabla f^*(\varphi_x(t)) \rangle < 0$ dla $t \in \text{Int } J_x$, a więc $f^* \circ \varphi_x|_{J_x}$ jest funkcją malejącą. Ponieważ $0 \in J_x \subset [0, +\infty)$, to $\max(f^* \circ \varphi_x|_{J_x}) = f^*(\varphi_x(0)) = f^*(x)$. Ponadto, z (2.38) i (2.43) dostajemy $f^*(\varphi_x(t)) \geq y_1^*$ dla $t \in J_x$. To daje ograniczoność funkcji $f^* \circ \varphi_x$ na przedziale J_x .

Reasumując, zachodzi $f^* \in [f, y]_v^D$, co kończy dowód części iii).

Część iv) wynika z części iii) po przyjęciu $y_1^* = y_2^* = y^*$. $\square$

Oczywiście funkcja $f^* = f$ spełnia założenia wszystkich podpunktów własności 2.3.1.

Zdefiniujemy teraz nową rodzinę funkcji używaną w dalszej części pracy.

Rozważmy dowolną funkcję $h \in C^1(D_h)$, $D_h \subset \mathbb{R}^n$. Powiemy, że funkcja h ma *własność właściwości na zbiorze* $D \subset D_h$, jeżeli² $S_{h|_D} = \emptyset$, tj. zachodzi

²Przypomnijmy, że przez $S_{h|_D}$ oznaczaliśmy zbiór punktów niewłaściwości funkcji $h|_D$ w nieskończoności, tj.

$$S_{h|_D} := \{y \in \mathbb{R}^n : \exists (x_k)_{k=1}^\infty \subset D \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k) = y\}.$$

warunek

$$(2.44) \quad \forall (x_k)_{k=1}^{\infty} \subset D \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |h(x_k)| = +\infty.$$

Uwaga 2.3.2. Funkcja $h \in C^1(D_h)$, $D_h \subset \mathbb{R}^n$ posiadająca własność właściwości na danym zbiorze, nie musi być funkcją właściwą (w sensie definicji ze s. 27). Oczywiście każda funkcja właściwa ma własność właściwości na dowolnym podzbiorze swojej dziedziny.

Bezpośrednio z definicji otrzymujemy:

Własność 2.3.3. *Jeśli funkcja $h \in C^1(D_h)$, $D_h \subset \mathbb{R}^n$, ma własność właściwości na zbiorze $D_1 \subset D_h$, to dla dowolnego zbioru $D_2 \subset D_1$, funkcja h ma własność właściwości na zbiorze D_2 .*

Uwaga 2.3.4. Zbiór funkcji posiadających własność właściwości na zbiorze $\mathbb{R}^n$ jest oczywiście niepusty. Istotnie, wystarczy rozważyć funkcję $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ określoną wzorem $h(x) = |x|^2$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Podobnie, korzystając z własności 2.3.3, dla dowolnego zbioru $D \subset \mathbb{R}^n$ funkcja h ma własność właściwości na zbiorze D .

W dalszym ciągu pracy, często jako funkcję posiadającą własność właściwości na zbiorze $D_{h_1} := \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ będziemy wykorzystywać funkcję $h_1 \in C^1(D_{h_1})$ określoną wzorem

$$h_1(x) := \ln(|x|^2) \text{ dla } x \in D_{h_1}.$$

2.4 Wartości typowe funkcji f w języku zbiorów

$\overline{O}_y(f)$ i $O_y(f)$

Oznaczmy przez Γ zbiór wszystkich trójek (v, h, f^*) , gdzie $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(D_h)$, $f^* \in C^0(D_{f^*})$ oraz D_v, D_h, D_{f^*} są podzbiarami otwartymi w $\mathbb{R}^n$.

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przez $\overline{O}_y(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$, dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki:

.

$(\overline{O}_y(f)\text{-i}) \ v \in \mathfrak{H}(f, f^{-1}(U)),$

$(\overline{O}_y(f)\text{-ii}) \ h$ ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K,$

$(\overline{O}_y(f)\text{-iii}) \ f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ i funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$(2.45) \quad H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

jest funkcją ograniczoną na każdym rozwiązaniu układu równań

$$(2.46) \quad x' = v(x)$$

o prawej stronie określonej w zbiorze $\mathbb{R} \times f^{-1}(U) \setminus K.$

Przez $O_y(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$, dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki:

$(O_y(f)\text{-i}) \ v \in \mathfrak{H}(f, f^{-1}(U)),$

$(O_y(f)\text{-ii}) \ h$ ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K,$

$(O_y(f)\text{-iii}) \ f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ i funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem (2.45) jest funkcją ograniczoną.

Uwaga 2.4.1. W powyższych definicjach zarówno funkcja h jak i H nie muszą być określone na całym zbiorze $f^{-1}(U).$

Warunek $(\overline{O}_y(f)\text{-iii})$ należy rozumieć następująco: dla dowolnego $x \in f^{-1}(U) \setminus K$ istnieje stała $L_x \in \mathbb{R}$ taka, że jeżeli $\varphi_x : I_x \rightarrow f^{-1}(U) \setminus K$ jest rozwiązaniem integralnym układu równań (2.46) spełniającym warunek początkowy $\varphi_x(0) = x$, to

$$|H(\varphi_x(t))| \leq L_x \text{ dla } t \in I_x \setminus \{t \in I_x : f(\varphi_x(t)) = y\}.$$

Wprost z definicji otrzymujemy następującą własność.

Własność 2.4.2. $O_y(f) \subset \overline{O}_y(f).$

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $y \in \mathbb{R}.$

Twierdzenie 2.4.3. *Jeżeli $\overline{O}_y(f) \neq \emptyset$, to punkt y jest wartością typową funkcji f . Dokładniej, istnieje wtedy otoczenie U punktu y oraz pole $v \in \mathfrak{M}(f, f^{-1}(U))$ takie, że trywializacja funkcji $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ jest wyznaczona przez całkowanie pola v .*

Dowód. Z założenia istnieje trójka $(v, h, f^*) \in \Gamma$ oraz otoczenie U punktu y i zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że spełnione są warunki $(\overline{O}_y(f)\text{-i}), (\overline{O}_y(f)\text{-ii})$ oraz $(\overline{O}_y(f)\text{-iii})$.

Pokażemy, że funkcja f jest funkcją v -kontrolowalną nad zbiorem U . Zgodnie z oznaczeniami z strony 45 przyjmijmy $D := f^{-1}(U) \setminus K, S := D$. Dla $x \in D$ połóżmy $G_x := D$ i określmy funkcję $C_x : G_x \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $C_x := |h|$. Wówczas rodzina $\{C_x\}_{x \in D}$ spełnia warunek (2.12). Pokażemy, że zachodzą warunki (2.13), (2.14), (2.15). Ustalmy punkt $x \in D$. Oznaczmy przez $\varphi_x : I_x \rightarrow f^{-1}(U) \setminus K$ rozwiązanie integralne układu równań (2.46) spełniające warunek początkowy $\varphi_x(0) = x$. Niech $J_x := \{t \in I_x : \min\{f(x), y\} \leq f(\varphi_x(t)) \leq \max\{f(x), y\}\}$. Oczywiście spełniony jest warunek (2.13). Zbiór $f \circ \varphi_x(J_x)$ jest zawarty w przedziale domkniętym o końcach $f(x)$ i y .

Pokażemy, że spełniony jest warunek (2.14). Z warunku $(\overline{O}_y\text{-iii})$ istnieje stała $L_x \in \mathbb{R}$ taka, że

$$(2.47) \quad |H(\varphi_x(t))| \leq L_x \text{ dla } t \in J_x \setminus \{t \in J_x : f(\varphi_x(t)) = y\}.$$

Na mocy $(\overline{O}_y\text{-iii})$ mamy $f^* \in \mathfrak{M}(v, f^{-1}(U) \setminus K, f^{-1}(y))$, więc funkcja

$$J_x \setminus \{t \in J_x : f(\varphi_x(t)) = y\} \ni t \rightarrow \partial_{v(\varphi_x(t))} f^*(\varphi_x(t)) \in \mathbb{R}$$

nie zmienia znaku. Stąd i z (2.47), (2.46) oraz z określenia rozwiązania φ_x , dla $t \in J_x \setminus \{t \in J_x : f(\varphi_x(t)) = y\}$ dostajemy

$$\begin{aligned}
(2.48) \quad C_x(\varphi_x(t)) &= |h(\varphi_x(t))| \leq |h(\varphi_x(t)) - h(\varphi_x(0))| + |h(\varphi_x(0))| \\
&\leq \left| \int_0^t \frac{d}{ds} h(\varphi_x(s)) ds \right| + |h(\varphi_x(0))| \\
&= \left| \int_0^t (\partial_{v(\varphi_x(s))} h)(\varphi_x(s)) ds \right| + |h(\varphi_x(0))| \\
&\leq L_x \int_0^t |(\partial_{v(\varphi_x(s))} f^*)(\varphi_x(s))| ds + |h(\varphi_x(0))| \\
&= L_x \left| \int_0^t (\partial_{v(\varphi_x(s))} f^*)(\varphi_x(s)) ds \right| + |h(\varphi_x(0))| \\
&= L_x |f^*(\varphi_x(t)) - f^*(x)| + |h(\varphi_x(0))|.
\end{aligned}$$

Z założenia $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ wynika, że istnieje stała $M_x > 0$ taka, że $|f^*(\varphi_x(t))| \leq M_x$ dla $t \in J_x$. Zatem, dla $t \in J_x$ z ciągłości funkcji $f^* \circ \varphi_x$ i nierówności (2.48) otrzymujemy

$$C_x(\varphi_x(t)) \leq L_x(M_x + |f^*(x)|) + |h(\varphi_x(0))|.$$

Funkcja C_x spełnia więc warunek (2.14) ze stałą $L_x(M_x + |f^*(x)|) + |h(\varphi_x(0))|$. Z założenia ($\overline{O}_y$ -ii) wynika, że funkcja C_x spełnia również warunek (2.15).

Reasumując, rodzina funkcji $\{C_x\}_{x \in D}$ ogranicza trajektorie układu równań (2.46), a więc funkcja f jest funkcją v -kontrolowalną nad zbiorem U . Zatem funkcja f jest funkcją v -kontrolowalną w punkcie y i mocy lematu 2.2.1 punkt y jest wartością typową funkcji f . $\square$

Uwaga 2.4.4. Analizując dowód twierdzenia 2.4.3 można zauważyć, że teza twierdzenia 2.4.3 pozostaje prawdziwa, nawet gdy w definicji zbioru $\overline{O}_y(f)$ dopuścimy możliwość doboru funkcji h i funkcji f^* do punktu $x \in f^{-1}(U) \setminus K$. Przypomnijmy najpierw, że jeżeli $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, to dla dowolnego $D \subset D_v$ i $x_0 \in D$ przez $J_{x_0, y}^D$ oznaczamy zbiór określony jako

$$J_{x_0, y}^D := \{t \in I_{x_0} : \varphi_{x_0}(t) \in D, \min\{f(x_0), y\} \leq f(\varphi_{x_0}(t)) \leq \max\{f(x_0), y\}\},$$

gdzie $\varphi_{x_0} : I_{x_0} \rightarrow D_v$ jest rozwiązaniem integralnym układu równań $x' = v(x)$ spełniającym warunek początkowy $\varphi_{x_0}(0) = x_0$. Przez $\overline{\overline{O}}_y(f)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich pól $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki:

$(\overline{\overline{O}}_y(f)\text{-i}) \quad v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U)),$

$(\overline{\overline{O}}_y(f)\text{-ii})$ dla dowolnego punktu $x_0 \in f^{-1}(U) \setminus K$ istnieje funkcja $h \in C^1(D_h)$ posiadająca własność właściwości na zbiorze $T := \varphi_{x_0}(J_{x_0, y}^{f^{-1}(U) \setminus K})$ oraz funkcja $f^* \in [f, y]_v^T$ taka, że funkcja $H : T \setminus f^{-1}(y) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$(2.49) \quad H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

jest funkcją ograniczoną.

Analogicznie jak w twierdzeniu 2.4.3 dowodzimy, że jeżeli $\overline{\overline{O}}_y(f) \neq \emptyset$, to y jest wartością typową funkcji f

Bezpośrednio z twierdzenia 2.4.3 i własności 2.4.2 otrzymujemy odpowiednik twierdzenia 2.4.3, gdzie zbiór $\overline{\overline{O}}_y(f)$ został zastąpiony zbiorem $O_y(f)$.

Twierdzenie 2.4.5. *Jeżeli $O_y(f) \neq \emptyset$, to y jest wartością typową funkcji f . Dokładniej, istnieje wtedy otoczenie U punktu y oraz pole $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ takie, że trywializacja funkcji $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ jest wyznaczona przez całkowanie pola v .*

Pokażemy, że warunek $O_y(f) \neq \emptyset$ jest równoważny faktowi, że y jest wartością typową funkcji f . W tym celu udowodnimy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.4.6. *Niech y będzie wartością typową funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Istnieje wtedy otoczenie U punktu y , pole $v \in \mathfrak{h}_+(f, f^{-1}(U))$ oraz funkcja $h \in C^\infty(f^{-1}(U))$ spełniająca warunek właściwości na zbiorze $f^{-1}(U)$ taka, że*

$$(2.50) \quad H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} = 0$$

dla $x \in f^{-1}(U)$. W szczególności zachodzi wtedy $O_y(f) \neq \emptyset$.

Dowód. Z definicji wartości typowej funkcji f istnieje otoczenie $U_1 \subset \mathbb{R}$ punktu y i odwzorowanie $\Psi_1 : f^{-1}(U_1) \rightarrow f^{-1}(y)$ takie, że odwzorowanie

$$\Psi = (\Psi_1, f) : f^{-1}(U_1) \ni x \mapsto (\Psi_1(x), f(x)) \in f^{-1}(y) \times U_1$$

jest dyfeomorfizmem klasy C^∞ . Zmniejszając ewentualnie zbiór U_1 możemy założyć, że $U_1 = (-\varepsilon + y, \varepsilon + y)$. Ponieważ $\Psi^{-1} : f^{-1}(y) \times U_1 \rightarrow f^{-1}(U_1)$ jest dyfeomorfizmem odwrotnym do Ψ , to dla punktów $(\bar{x}, t) \in f^{-1}(y) \times U_1$ zachodzi

$$(\Psi_1(\Psi^{-1}(\bar{x}, t)), f(\Psi^{-1}(\bar{x}, t))) = \Psi(\Psi^{-1}(\bar{x}, t)) = (\bar{x}, t).$$

Zatem dla punktów $(\bar{x}, t) \in f^{-1}(y) \times U_1$ mamy

$$(2.51) \quad f(\Psi^{-1}(\bar{x}, t)) = t.$$

To daje, że

$$(2.52) \quad \frac{\partial}{\partial t} f(\Psi^{-1}(\bar{x}, t)) = 1 \text{ dla } (\bar{x}, t) \in f^{-1}(y) \times U_1.$$

Określmy pole wektorowe $v \in C^\infty(f^{-1}(U_1), \mathbb{R}^n)$ następującym wzorem

$$v(x) := \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{-1}(\bar{x}, t)|_{(\bar{x}, t) = (\Psi_1(x), f(x))} \text{ dla } x \in f^{-1}(U_1).$$

Pokażemy, że $v \in \mathfrak{h}_+(f, f^{-1}(U))$. Ustalmy punkt $x \in f^{-1}(U_1)$ i połączmy

$$(2.53) \quad \varphi(t) := \Psi^{-1}(\Psi_1(x), t + f(x)) \text{ dla } t \in (-\varepsilon + y - f(x), \varepsilon + y - f(x)).$$

Z warunku $f(x) \in U_1 = (-\varepsilon + y, \varepsilon + y)$ otrzymujemy $0 \in (-\varepsilon + y - f(x), \varepsilon + y - f(x))$. Ponadto

$$(2.54) \quad \varphi(0) = \Psi^{-1}(\Psi_1(x), f(x)) = \Psi^{-1}(\Psi(x)) = x,$$

oraz

$$\varphi'(0) = \frac{d}{dt}(\Psi^{-1}(\Psi_1(x), t + f(x)))|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{-1}(\bar{x}, t)|_{(\bar{x}, t) = (\Psi_1(x), f(x))} = v(x).$$

Zatem, wobec równania (2.52) mamy

$$\partial_{v(x)} f(x) = \partial_{\varphi'(0)} f(\varphi(0)) = \frac{d}{dt} f(\varphi(t))|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt} f(\Psi^{-1}(\Psi_1(x), t + f(x)))|_{t=0} = 1$$

Reasumując, $v \in \mathfrak{h}_+(f, f^{-1}(U))$.

Określmy funkcję $h : f^{-1}(U_1) \rightarrow \mathbb{R}$ następującym wzorem

$$h(x) := |\Psi_1(x)|^2 \text{ dla } x \in f^{-1}(U_1).$$

Oczywiście $h \in C^\infty(f^{-1}(U_1))$. Określmy zbiór $U := (-\frac{\varepsilon}{2} + y, \frac{\varepsilon}{2} + y)$. Mamy $\bar{U} \subset U_1$. Pokażemy, że h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U)$. Weźmy dowolny ciąg $(x_k)_{k=1}^\infty \subset f^{-1}(U)$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$. Przypuśćmy, że $\lim_{k \rightarrow \infty} |h(x_k)| \neq +\infty$. Wybierając ewentualnie podciąg, możemy założyć, że $\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_1(x_k) = \bar{x}_0 \in f^{-1}(y)$. Wybierając ewentualnie kolejny podciąg, możemy założyć, że $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \bar{y}_0 \in \bar{U} \subset U_1$. Z ciągłości odwzorowań Ψ_1 i Ψ^{-1} otrzymujemy

$$\begin{aligned} |\Psi^{-1}(\bar{x}_0, \bar{y}_0)| &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\Psi^{-1}(\Psi_1(x_k), f(x_k))| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\Psi^{-1}(\Psi(x_k))| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \end{aligned}$$

co jest niemożliwe. Reasumując, funkcja h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U)$.

Pokażemy teraz, że

$$\partial_{v(x)} h(x) = 0 \text{ dla } x \in f^{-1}(U).$$

Istotnie, dla punktów $(\bar{x}, t) \in f^{-1}(y) \times U$ mamy

$$\Psi_1(\Psi^{-1}(\bar{x}, t)) = \bar{x}.$$

Zatem zachodzi

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi_1(\Psi^{-1}(\bar{x}, t))|^2 = 0 \text{ dla } (\bar{x}, t) \in f^{-1}(y) \times U.$$

Podobnie jak poprzednio, ustalając punkt $x \in f^{-1}(U)$ i określając krzywą φ wzorem (2.53) otrzymujemy

$$\partial_{v(x)} h(x) = \partial_{\varphi'(0)} h(\varphi(0)) = \frac{d}{dt} h(\varphi(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} |\Psi_1(\Psi^{-1}(\bar{x}, t))|^2|_{t=0} = 0.$$

Reasumując, dla dowolnego $x \in f^{-1}(U)$ dostajemy

$$H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} = 0.$$

To kończy dowód. □

Bezpośrednio z twierdzenia 2.4.6 i twierdzenia 2.4.5 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.4.7. *Punkt y jest wartością typową funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $O_y(f) \neq \emptyset$.*

Korzystając z twierdzenia 2.4.6, twierdzenia 2.4.3 oraz własności 2.1.8 dostajemy:

Wniosek 2.4.8. *Jeżeli y jest wartością typową funkcji f , to trywializację funkcji f możemy uzyskać całkując pole wektorowe $\nabla_g f$, gdzie g jest pewnym tensorem metrycznym w otoczeniu poziomiczy $f^{-1}(y)$.*

Zauważmy, że dla ustalonego tensora metrycznego g , nie jest prawdą, że całkowanie pole wektorowe $\nabla_g f$ musi prowadzić do trywializacji wiązki trywialnej f nad otoczeniem punktu y . Świadczy o tym następujący przykład

Przykład 2.4.9. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x, y) = y \text{ dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Oczywiście f jest wiązką trywialną nad $\mathbb{R}$. Określając zaś w $\mathbb{R}^2$ tensor metryczny przez macierz

$$[g_{ij}(x, y)]_{1 \leq i, j \leq 2} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{e^x} \\ -\frac{1}{e^x} & \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}} \end{bmatrix} \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

otrzymujemy wobec wzoru (1.5)

$$\nabla^g f(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^x \end{bmatrix} \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Łatwo sprawdzamy, że trajektorie pola pochodzącego od $\nabla_g f$ są postaci $\varphi_{a,b}(t) = (t + a, e^{t+a} + b)$ $t, a, b \in \mathbb{R}$ i nie prowadzą do trywializacji funkcji f w otoczeniu dowolnej poziomiczy.

Wydaje się, że dla dowolnej wartości typowej y funkcji f takiej, że włókno $f^{-1}(y)$ jest nieograniczone i dowolnego otoczenia U punktu y istnieje tensor metryczny g określony na zbiorze $f^{-1}(U)$ taki, że całkowanie pola $\nabla_g f$ nie prowadzi do trywializacji funkcji f .

Wybór odpowiedniej trójki (v, h, f^*) jest kluczowym zagadnieniem podczas wyznaczania zbioru punktów bifurkacyjnych w oparciu o twierdzenie 2.4.5. Pokażemy, że dla dowolnej funkcji semialgebraicznej gładkiej $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i dowolnej wartości regularnej $y \in \mathbb{R}$ takiej, że zbiór $f^{-1}(y)$ jest nieograniczony, istnieje otoczenie U punktu y , pole $v \in \mathfrak{h}_+(f, f^{-1}(U))$ i funkcja $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ posiadająca własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U)$ takie, że dla dowolnego otoczenia $U' \subset U$ punktu y i dowolnego zbioru zawartego $K \supset \{0\}$ funkcja $H = \frac{\partial_v h}{\partial_v f}$ jest nieograniczona na zbiorze $f^{-1}(U') \setminus K$.

Przykład 2.4.10. Niech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i $y \in \mathbb{R}$ będzie wartością regularną funkcji semialgebraicznej gładkiej f taką, że $f^{-1}(y)$ jest zbiorem nieograniczonym. Zmieniając układ współrzędnych, wobec semialgebraiczności funkcji f , możemy założyć, że istnieje $R > 0$ takie, że $\{(x_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1 > R\} \subset f^{-1}(y)$. Wtedy $[1, 0, \dots, 0] \in T_x f^{-1}(y)$ dla $x \in \{(x_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1 > R\}$. Zatem na mocy 1.2.1 dla $x \in \{(x_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1 > R\}$ mamy

$$0 = \langle \nabla f(x), [1, 0, \dots, 0] \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x).$$

Niech U będzie otoczeniem punktu y takim, że $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$. Oznaczmy zbiór $A := \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ i rozważmy pole $v_1 : f^{-1}(U) \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^n$ określone wzorem

$$v_1(x) := \frac{1}{|\nabla f(x)|^2(|x|^2 + 1)} \nabla f(x) + \frac{|x|^2}{2x_1} [1, 0, \dots, 0].$$

Dla $x \in \{(x_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1 > R\}$ zachodzi

$$(2.55) \quad \partial_{v(x)} f(x) = \frac{1}{|x|^2 + 1} > 0.$$

Wobec ciągłości funkcji $\partial_v f$ istnieje zbiór otwarty $\Omega \supset \{(x_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1 > R\}$ taki, że $v_1 \in \mathfrak{h}_+(f, \Omega)$. Sklejając pole $v_1|_\Omega$ z polem ∇f otrzymujemy pole $v \in \mathfrak{h}_+(f, f^{-1}(U))$ takie, że dla $x \in \{(x_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1 > R\}$ zachodzi wzór (2.55). Połóżmy $h(x) := \ln(|x|^2)$ dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Wtedy dla $x \in \{(x_1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1 > R\}$ mamy

$$\partial_{v(x)} h(x) = 1.$$

Z powyższego i (2.55) otrzymujemy, że funkcja $H = \frac{\partial_v h}{\partial_v f}$ jest nieograniczona na zbiorze $f^{-1}(U') \setminus K$, gdzie U' jest dowolnym otoczeniem punktu y , a K jest dowolnym zbiorem zwartym takim, że $0 \in K$.

2.5 Uwagi do twierdzenia 2.4.5

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $y \in \mathbb{R}$. Przyjmijmy założenia i oznaczenia jak w paragrafie 2.4.

Uwaga 2.5.1. Zauważmy, że jeżeli funkcja $h \in C^1(D_h)$ ma własność właściwości na zbiorze E , to funkcja $\bar{h} \in C^1(D_{\bar{h}})$ postaci

$$\bar{h}(x) := \ln h(x) \text{ dla } x \in D_{\bar{h}}$$

ma własność właściwości na zbiorze $E \cap D_{\bar{h}}$, gdzie $D_{\bar{h}} := \{x \in D_h : h(x) > 0\}$. Związana z funkcją $\bar{h}$ funkcja $H : (f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y))) \cap D_{\bar{h}} \rightarrow \mathbb{R}$ jest postaci

$$(2.56) \quad H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{h(x) \partial_{v(x)} f^*(x)}.$$

Dodatkowe (w stosunku do wzoru (2.45)) pojawienie się w mianowniku funkcji h , posiadającej własność właściwości na pewnym zbiorze, wpływa korzystnie na warunek ograniczoności funkcji H . W szczególności, ograniczoność funkcji H postaci (2.45) implikuje ograniczoność funkcji H postaci (2.56). Zatem, przy odpowiednich założeniach³, w definicjach zbioru $\bar{O}_y(f)$ i zbioru $O_y(f)$ warunki $(\bar{O}_y(f)\text{-iii})$ oraz $(O_y(f)\text{-iii})$ możemy zastąpić analogicznymi warunkami z funkcją H postaci (2.56) uzyskując twierdzenia analogiczne do twierdzeń 2.4.3 i 2.4.5.

Uwaga 2.5.2. Warto odnotować, że zastosowanie złożenia $\bar{h} = \ln \circ h$ jest w pewnym sensie optymalne. Dokładniej, jeżeli w warunkach $(\bar{O}_y(f)\text{-iii})$, $(O_y(f)\text{-iii})$ zamiast funkcji H postaci (2.45) rozważymy funkcję $H_\alpha : D_{H_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$(2.57) \quad H_\alpha(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{h(x)^\alpha \partial_{v(x)} f^*(x)}$$

z wykładnikiem $\alpha > 1$, to twierdzenia analogiczne do twierdzeń 2.4.3 i 2.4.5 przestają być prawdziwe. Pokażemy, to w przykładzie 2.5.3.

Przykład 2.5.3. Ustalmy dowolne $\alpha > 1$ i rozważmy funkcje $f, f^*, h, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określone wzorami

$$f^*(x) := f(x) := e^x, \quad h(x) := e^{\frac{x}{1-\alpha}}, \quad v(x) := 1.$$

³na przykład $h(x) > 0$ dla $x \in E$.

Oczywiście $v \in \mathfrak{M}_+(f, \mathbb{R})$ oraz punkt 0 jest wartością bifurkacyjną funkcji f . Ponadto, funkcja h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}((-1, 1)) = (-\infty, 0)$ oraz zachodzi równość

$$|H_\alpha(x)| = \left| \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{h(x)^\alpha \partial_{v(x)} f(x)} \right| = \frac{e^{\frac{x}{1-\alpha}}}{(\alpha-1)e^{\frac{\alpha x}{1-\alpha}} e^x} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

W szczególności, funkcja H_α jest ograniczona na zbiorze $f^{-1}((-1, 1))$, ale 0 jest wartością bifurkacyjną funkcji f .

Uwaga 2.5.4. W przypadku gdy nie zależy nam, aby funkcja H była funkcją wymierną zmiennych $\partial_v h, \partial_v f^*, h$, procedurę składania funkcji h z logarytmem naturalnym możemy iterować dowolną ilość razy. Otrzymujemy w ten sposób funkcję $H : D_H \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$(2.58) \quad H(x) := \frac{1}{\ln(h(x)) \ln(\ln(h(x))) \cdots \ln(\ln(\dots \ln(h(x)) \dots))} \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{h(x) \partial_{v(x)} f^*(x)}.$$

W pewnych sytuacjach, dla ustalonej funkcji h , rozważanie warunku $(\overline{O}_y(f)\text{-iii})$ lub $(O_y(f)\text{-iii})$ z funkcją H postaci (2.56) nie pozwala na bezpośrednie stwierdzenie, że $\overline{O}_y(f) \neq \emptyset$ lub $O_y(f) \neq \emptyset$, podczas gdy rozważanie warunku $(\overline{O}_y(f)\text{-iii})$ lub $(O_y(f)\text{-iii})$ z funkcją H postaci (2.58) prowadzi do stwierdzenia $\overline{O}_y(f) \neq \emptyset$ lub $O_y(f) \neq \emptyset$. Zilustrujemy ten efekt na przykładach 2.5.5 i 2.5.6.

Przykład 2.5.5. Niech $f, f^*, v \in C^\infty(\mathbb{R})$, $h \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ będą postaci

$$f(x) := f^*(x) := x, \quad v(x) := 1, \quad h(x) := e^{e^{|x|}}.$$

Funkcja h ma własność właściwości na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ponadto dla $x \neq 0$ funkcja

$$\left| \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{h(x) \partial_{v(x)} f^*(x)} \right| = e^{|x|}$$

jest nieograniczona, czyli $(v, h, f^*) \notin O_y(f)$. Z drugiej strony, dla $x \neq 0$ funkcja

$$\left| \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{h(x) \ln(h(x)) \partial_{v(x)} f^*(x)} \right| = 1$$

jest oczywiście ograniczona, czyli $O_y(f) \neq \emptyset$.

Przykład 2.5.6. Niech $f^* \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $v \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ będą postaci

$$f^*(x, y) := x, \quad v(x, y) := [1, \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \ln(x^2 + y^2 + 1)],$$

$$h(x, y) := x^2 + y^2 + 1.$$

Funkcja h ma własność właściwości na $\mathbb{R}^2$. Ponadto, funkcja

$$H(x, y) = \frac{\partial_{v(x,y)} h(x, y)}{h(x, y) \partial_{v(x,y)} f^*(x, y)} = \frac{2x + 2y \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \ln(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2 + 1}$$

jest nieograniczona. Istotnie, kładąc $x = 0, y = t$ otrzymujemy

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(0, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t \sqrt{(t^2 + 1)} \ln(t^2 + 1)}{t^2 + 1} = +\infty.$$

Z drugiej strony, funkcja

$$\tilde{H}(x, y) = \frac{\partial_{v(x,y)} h(x, y)}{h(x, y) \ln(h(x, y)) \partial_{v(x,y)} f^*(x, y)}$$

jest ograniczona w otoczeniu nieskończoności. Istotnie, dla $(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq e - 1\}$ z nierówności Cauchy'ego-Schwarza mamy

$$|\tilde{H}(x, y)| \leq 2 \left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + 1) \ln^2(1 + x^2 + y^2)}}{(x^2 + y^2 + 1) \ln(x^2 + y^2 + 1)} \right| < 2\sqrt{2}.$$

Reasumując, funkcja $\tilde{H}$ jest ograniczona w pewnym otoczeniu nieskończoności, a funkcja H nie jest ograniczona na dowolnym otoczeniu nieskończoności. W szczególności, dla $f = f^*$ oraz punktu 0, nie jest spełniony warunek $(O_0(f)$ -iii) z funkcją $H = \frac{\partial_v h}{h \partial_v f}$, ale spełniony jest warunek $(O_0(f)$ -iii) z funkcją $\tilde{H} = \frac{\partial_v h}{h \ln h \partial_v f}$.

W powyższych uwagach i przykładach analizowaliśmy, jak można modyfikować funkcję H przez zmianę funkcji h , aby polepszyć efektywność warunków $(\overline{O}_y(f)$ -iii) oraz $(O_y(f)$ -iii). Pokażemy teraz, jaki wpływ na te warunki ma modyfikacja funkcji $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$.

Uwaga 2.5.7. Zauważmy, że jeżeli $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ oraz

$$(2.59) \quad f(x) = y \Leftrightarrow f^*(x) = y^* \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K$$

dla pewnego punktu $y^* \in \mathbb{R}$, to na mocy części ii) własności 2.3.1 dla $\theta < 1$ mamy $f_\theta^* \in [f, y]_{v^{f^{-1}(U) \setminus K}}$, gdzie

$$(2.60) \quad f_\theta^*(x) := |f^*(x) - y^*|^{1-\theta} \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K.$$

Związana z funkcją f_θ^* funkcja $H : (f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y))) \rightarrow \mathbb{R}$ jest postaci

$$(2.61) \quad H(x) = \operatorname{sgn}(f^*(x) - y^*) \frac{|f^*(x) - y^*|^\theta}{1 - \theta} \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)},$$

gdzie $\operatorname{sgn} t$ oznacza znak liczby t . Jeżeli $\theta > 0$ to dodatkowe (w stosunku do wzoru (2.45)) pojawienie się wyrażenia $|f^*(x) - y^*|^\theta$ wpływa korzystnie na efektywność warunków $(\overline{O}_y(f)$ -iii) oraz $(O_y(f)$ -iii). Zatem, przy założeniu (2.59), warunki $(\overline{O}_y(f)$ -iii) oraz $(O_y(f)$ -iii) możemy zastąpić analogicznymi warunkami z funkcją H postaci (2.61) uzyskując twierdzenia analogiczne do twierdzeń 2.4.3 i 2.4.5. (por. paragraf 3.6).

Uwaga 2.5.8. Warto odnotować, że funkcja f_θ^* z wykładnikiem $\theta < 1$ jest w pewnym sensie optymalna. Dokładniej, jeżeli w warunkach $(\overline{O}_y(f)$ -iii), $(O_y(f)$ -iii), zamiast funkcji H postaci (2.45), rozważymy funkcję $H^\theta : D_{H^\theta} \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$(2.62) \quad H^\theta(x) := |f^*(x) - y^*|^\theta \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

z wykładnikiem $\theta \geq 1$, to twierdzenia analogiczne do twierdzeń 2.4.3 i 2.4.5 przestają być prawdziwe. Pokażemy, to w przykładzie 2.5.9.

Przykład 2.5.9. Ustalmy dowolne $\theta \geq 1$ i rozważmy funkcje $f, f^*, h, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określone wzorami

$$f(x) := f^*(x) := e^x, \quad h(x) := x, \quad v(x) := 1.$$

Oczywiście $v \in \mathfrak{M}_+(f, \mathbb{R})$ oraz punkt $y = 0$ jest wartością bifurkacyjną funkcji f . Ponadto, funkcja h ma własność właściwości na zbiorze $\mathbb{R}$ oraz zachodzi równość

$$|H^\theta(x)| = |f(x)|^\theta \left| \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} \right| = e^{(\theta-1)x}.$$

W szczególności, funkcja H^θ jest ograniczona na zbiorze $f^{-1}((-1, 1)) = (-\infty, 0)$, ale 0 jest wartością bifurkacyjną funkcji f . Zatem, jeżeli w warunkach

$(\overline{O}_y(f)$ -iii), $(O_y(f)$ -iii), zamiast funkcji H postaci (2.45) rozważymy funkcję H^θ , to twierdzenia analogiczne do twierdzeń 2.4.3 i 2.4.5 przestają być prawdziwe.

Przeanalizujemy przykład funkcji wymiernej o wartości typowej 0, dla której rozważenie trójki $(\nabla f, h_1, f)$, gdzie $h_1(x) = \ln(|x|^2)$ dla $x \neq 0$, nie prowadzi do pożądanej (w kontekście twierdzenia 2.4.5) relacji $(\nabla f, h_1, f) \in O_0(f)$ (por. paragraf 3.3). Pokażemy, jak w tej sytuacji wystarczy zamienić jeden element z trójki $(\nabla f, h_1, f)$, aby uzyskać nową trójkę (v, h, f^*) spełniającą już relację $(v, h, f^*) \in O_0(f)$.

Przykład 2.5.10. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x, y) = \frac{y}{1+x^2} \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście dla $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2xy}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Pokażemy, że $(\nabla f, h_1, f) \notin O_0(f)$. Istotnie, rozważmy ciąg $(x_n, y_n) = (n, \frac{1+n^2}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $\lim_{n \rightarrow \infty} |(x_n, y_n)| = +\infty$. Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |H(x_n, y_n)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\partial_{\nabla f(x_n, y_n)} h_1(x)}{\partial_{\nabla f(x_n, y_n)} f(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle \nabla f(x_n, y_n), (x_n, y_n) \rangle|}{|(x_n, y_n)|^2 |\nabla f(x_n, y_n)|^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\frac{-2n}{1+n^2} + \frac{1}{n}|}{(n^2 + (\frac{1+n^2}{n})^2)(\frac{4}{(1+n^2)^2} + \frac{1}{(1+n^2)^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1-n^2|(1+n^2)}{n^3(1 + (\frac{1}{n^2} + 1)^2)5} = +\infty. \end{aligned}$$

Reasumując, $(\nabla f, h_1, f) \notin O_0(f)$ (innymi słowami funkcja f nie spełnia warunku pre-Malgrange'a w punkcie 0, por. paragraf 3.3). W szczególności, na mocy własności 3.3.2, funkcja f nie spełnia warunku Malgrange'a w punkcie 0. Pokażemy, w jaki sposób, w oparciu o twierdzenie 2.4.5, można wykazać, że punkt 0 jest punktem typowym funkcji f .

Sposób 1. Pokażemy, że $(\nabla f, h, f) \in O_0(f)$ dla odpowiednio dobranej funkcji h . Niech $U := (-1, 1)$, $D_h := \mathbb{R}^n \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$. Rozważmy funkcję $h : D_h \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$h(x, y) := \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{2}\ln(x^2).$$

Kładąc $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y \in [-1, 1]\}$ otrzymujemy $f^{-1}(U) \setminus K \subset D_h$. Funkcja h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$. Istotnie, rozważmy dowolny ciąg $(x_n, y_n) \in f^{-1}(U) \setminus K, n \in \mathbb{N}$ spełniający $\lim_{n \rightarrow \infty} |(x_n, y_n)| = +\infty$. Dla takiego ciągu zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = +\infty$. Zatem z definicji funkcji h otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n, y_n) = +\infty,$$

co dowodzi własności właściwości h na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$. Pokażemy, że funkcja $H = \frac{\partial_{\nabla f} h}{\partial_{\nabla f} f}$ jest ograniczona na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$. Istotnie, dla $(x, y) \in f^{-1}(U) \setminus K$ mamy

$$\begin{aligned} \partial_{\nabla f(x, y)} h(x, y) &= \langle \nabla h(x, y), \nabla f(x, y) \rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{1+x^2}{x}, 2y \right), \left(\frac{-2xy}{(1+x^2)^2}, \frac{1}{1+x^2} \right) \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

co daje $H \equiv 0$. Zatem $(\nabla f, h, f) \in O_0(f)$ i na mocy twierdzenia 2.4.5 punkt 0 jest wartością typową funkcji f .

Sposób 2. Pokażemy, że $(v, h_1, f) \in O_0(f)$ dla odpowiednio dobranego pola wektorowego v . Niech $U := (-1, 1)$. Oznaczmy przez L zbiór zwarty postaci $L := \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1]\}$. Określmy pole wektorowe $\bar{v} \in C^\infty(f^{-1}(U) \setminus L)$ wzorem

$$\bar{v}(x, y) := \begin{bmatrix} (1+x^2)^2 & 0 \\ 0 & 2x^2(1+x^2) \end{bmatrix} \nabla f(x, y) = (-2xy, 2x^2).$$

Na mocy własności 2.1.5 mamy $\bar{v} \in \mathfrak{h}_+(f, f^{-1}(U) \setminus L)$. Sklejając pole $\bar{v}$ z polem ∇f (porównaj własność 2.1.9) dostajemy pole $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ takie, że dla odpowiedniej stałej $R > 0$ mamy

$$(2.63) \quad v(x, y) = \bar{v}(x, y) \text{ dla } |(x, y)| > R + 1, (x, y) \in f^{-1}(U).$$

Oznaczmy przez K zbiór zwarty postaci

$$K := \{(x, y) \in \overline{f^{-1}(U)} : |(x, y)| \leq R + 1\}.$$

Pokażemy, że funkcja $H = \frac{\partial_v h_1}{\partial_v f}$ jest ograniczona na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$. Istotnie, dla dowolnych punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ zachodzi

$$\partial_v h_1(x) = \frac{2|\langle \bar{v}(x, y), (x, y) \rangle|}{|(x, y)|^2} = \frac{2}{|(x, y)|^2} |-2x^2y + 2x^2y| = 0,$$

co daje $H = \frac{\partial_v h_1}{\partial_v f} \equiv 0$. Zatem $(v, h_1, f) \in O_0(f)$ i na mocy twierdzenia 2.4.5 punkt 0 jest wartością typową funkcji f .

Sposób 3. Pokażemy, że $(\nabla f, h_1, f^*) \in O_0(f)$ dla odpowiednio dobranej funkcji f^* . Niech $U := (-1, 1)$ i $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], (x, y) \in \overline{f^{-1}(U)}\}$. Oczywiście zbiór K jest zbiorem zwartym. Rozważmy funkcję $f^* \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ postaci $f^*(x, y) = y$. Wówczas

$$\langle \nabla f(x, y), \nabla f^*(x, y) \rangle = \frac{1}{1+x^2} > 0 \text{ dla } x, y \in \mathbb{R},$$

$$f(x, y)f^*(x, y) \geq 0 \text{ dla } x, y \in \mathbb{R},$$

zatem na mocy części iv) w własności 2.3.1 $f^* \in [f, y]_{\nabla f}^{f^{-1}(U)}$. Ponadto

$$H(x, y) = \frac{\partial_{\nabla f(x, y)} h_1(x, y)}{\partial_{\nabla f(x, y)} f^*(x, y)} = \frac{2y(1-x^2)}{(x^2+y^2)(1+x^2)} \text{ dla } (x, y) \in f^{-1}(U) \setminus K.$$

Łatwo sprawdzamy, że dla $(x, y) \in f^{-1}(U) \setminus K, y \neq 0$ mamy

$$|H(x, y)| = \frac{|2y|}{(x^2+y^2)} \frac{|1-x^2|}{|1+x^2|} \leq \frac{|2y|}{|2xy|} \cdot 1 \leq 1.$$

Dla $(x, y) \in f^{-1}(U) \setminus K, y = 0$ mamy $H(x, y) = 0$. Zatem $(\nabla f, h_1, f^*) \in O_0(f)$ i na mocy twierdzenia 2.4.5 punkt 0 jest wartością typową funkcji f .

2.6 Wartości typowe w nieskończoności funkcji f w języku zbiorów $\overline{O}_y^\infty(f)$ i $O_y^\infty(f)$

Podobnie jak w poprzednim podrozdziale, przez Γ będziemy oznaczać zbiór wszystkich trójek (v, h, f^*) , gdzie $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n), h \in C^1(D_h), f^* \in C^0(D_{f^*})$ oraz D_v, D_h, D_{f^*} są podzbiorami otwartymi w $\mathbb{R}^n$.

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $y \in \mathbb{R}$. Przez $\overline{O}_y^\infty(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$, dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki:

$$(\overline{O}_y^\infty(f)\text{-i}) \quad v \in \cap (f, f^{-1}(U) \setminus K),$$

$$(\overline{O}_y^\infty(f)\text{-ii}) \quad h \text{ ma własność właściwości na zbiorze } f^{-1}(U) \setminus K,$$

$(\overline{O}_y^\infty(f)$ -iii) $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ i funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$(2.64) \quad H(x) := \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)}$$

jest funkcją ograniczoną na każdym rozwiązaniu układu równań

$$(2.65) \quad x' = v(x)$$

o prawej stronie określonej w zbiorze $\mathbb{R} \times f^{-1}(U) \setminus K$.

Przez $O_y^\infty(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$, dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki

$(O_y^\infty(f)$ -i) $v \in \cap (f, f^{-1}(U) \setminus K)$,

$(O_y^\infty(f)$ -ii) h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$,

$(O_y^\infty(f)$ -iii) $f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ i funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem (2.64) jest funkcją ograniczoną.

Bezpośrednio z definicji zbiorów $O_y^\infty(f)$ i $\overline{O}_y^\infty(f)$ dostajemy następującą własność.

Własność 2.6.1. $O_y^\infty(f) \subset \overline{O}_y^\infty(f)$, $O_y(f) \subset O_y^\infty(f)$, $\overline{O}_y(f) \subset \overline{O}_y^\infty(f)$.

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $y \in \mathbb{R}$. Analogicznie jak twierdzenie 2.4.3, tym razem korzystając z lematu 2.2.2 zamiast lematu 2.2.1, dowodzimy poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 2.6.2. *Jeżeli $\overline{O}_y^\infty(f) \neq \emptyset$, to punkt y jest wartością typową funkcji f w nieskończoności. Dokładniej, istnieje wtedy otoczenie U punktu y oraz pole $v \in \cap (f, f^{-1}(U) \setminus K)$ takie, że trywializacja funkcji $f|_{f^{-1}(U) \setminus K} : f^{-1}(U) \setminus K \rightarrow U$ jest wyznaczona przez całkowanie pola v .*

Bezpośrednio z powyższego twierdzenia oraz własności 2.6.1 otrzymujemy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 2.6.3. *Jeżeli $O_y^\infty(f) \neq \emptyset$, to punkt y jest wartością typową funkcji f . Dokładniej, istnieje wtedy otoczenie U punktu y oraz pole $v \in \cap (f, f^{-1}(U) \setminus K)$ takie, że trywializacja funkcji $f|_{f^{-1}(U) \setminus K} : f^{-1}(U) \setminus K \rightarrow U$ jest wyznaczona przez całkowanie pola v .*

2.7 Wartości typowe funkcji f a zbiór Milnora

W twierdzeniu 2.4.5 podaliśmy warunek implikujący typowość włókna y funkcji f w języku zbioru $O_y(f)$. W tym paragrafie podamy inny warunek implikujący typowość włókna funkcji f wykorzystujący pojęcie zbioru Milnora. Powstaje on przez wyrugowanie z relacji $(v, h, f) \in O_y(f)$ pola v oraz zastąpienie warunku ograniczoności funkcji H na zbiorze $f^{-1}(U) \setminus K$ warunkiem ograniczoności funkcji $|\nabla h|/|\nabla f|$ na pewnym podzbiorze zbioru $f^{-1}(U) \setminus K$.

Własność 2.7.1. *Niech $h, f \in C^1(D)$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym. Następujące warunki są równoważne:*

- a) *istnieje pole wektorowe $v \in \mathfrak{M}_+(f, D)$ takie, że funkcja $H = \frac{\partial_v h}{\partial_v f}$ jest ograniczona w zbiorze D ,*
- b) *istnieje pole wektorowe $\bar{v} \in \mathfrak{M}_+(f, D)$ takie, że $\partial_{\bar{v}} f = 1$ oraz funkcja $\bar{H} := \partial_{\bar{v}} h$ jest ograniczona w zbiorze D .*

Dowód. Istotnie, inkluzja b) $\Rightarrow$ a) jest oczywista. Udowodnimy inkluzję a) $\Rightarrow$ b). Zauważmy, że jeśli $v \in \mathfrak{M}_+(f, D)$, to kładąc $\bar{v} = \frac{v}{\partial_v f}$ mamy $\partial_{\bar{v}} f = 1$. Ponadto, dla $x \in D$ zachodzi

$$H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} = \frac{\partial_{\bar{v}(x)} h(x)}{\partial_{\bar{v}(x)} f(x)} = \partial_{\bar{v}(x)} h(x) = \bar{H}(x),$$

a więc z ograniczoności funkcji H na zbiorze D wynika ograniczoność funkcji $\bar{H}$ na tym zbiorze. To kończy dowód. $\square$

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przyjmijmy oznaczenie⁴

$$\mathfrak{M}_1(f, D) := \{v \in \mathfrak{M}_+(f, D) : \partial_{\bar{v}(x)} f(x) = 1 \text{ dla } x \in D\}.$$

Niech $f_1, f_2 \in C^1(D)$ i niech $G \subset D$. Zbiorem Milnora odwzorowania $(f_1, f_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy zbiór punktów krytycznych odwzorowania $(f_1, f_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ i oznaczamy przez $M(f_1, f_2, G)$.

Przejdziemy teraz do głównego twierdzenia tego paragrafu.

⁴W przeciwieństwie do oznaczeń z paragrafu 2.1, liczbę 1 będziemy teraz zapisywać w indeksie dolnym.

Twierdzenie 2.7.2. Niech $y \in \mathbb{R}$ będzie wartością regularną funkcji f , $U_0 \subset \mathbb{R}$ otoczeniem punktu y , $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ zbiorem zwartym i $h \in C^1(D_h)$ funkcją posiadającą własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U_0) \setminus K_0$. Wtedy:

- a) jeżeli istnieje otoczenie $U \subset U_0$ punktu y takie, że zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest ograniczony, to y jest wartością typową funkcji f ,
- b) jeżeli zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony dla pewnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y i istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ taki, że funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest ograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$, to y jest wartością typową funkcji f ,
- c) jeżeli dla dowolnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony oraz dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest nieograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$, to dla dowolnego pola $v \in \mathfrak{H}_+(f, f^{-1}(U))$ zachodzi $(v, h, f) \notin O_y(f)$.

Dowód. Ad. a) Niech U będzie otoczeniem punktu y takim, że zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest ograniczony. Ponieważ y jest wartością regularną funkcji f , to, zmniejszając ewentualnie otoczenie U , możemy założyć, że $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$. Niech $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0) \subset K$, gdzie $K \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym. Dla $x \in f^{-1}(U) \setminus K$ przyjmijmy

$$v^*(x) := \nabla f(x) - \frac{\langle \nabla f(x), \nabla h(x) \rangle}{|\nabla h(x)|^2} \nabla h(x).$$

Wówczas dla $x \in f^{-1}(U) \setminus K$ mamy $x \notin M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$, więc z nierówności Cauchy'ego-Schwarza otrzymujemy

$$\langle \nabla f(x), v^*(x) \rangle = \frac{|\nabla f(x)|^2 |\nabla h(x)|^2 - \langle \nabla f(x), \nabla h(x) \rangle^2}{|\nabla h(x)|^2} \neq 0.$$

Położmy

$$(2.66) \quad v(x) := \frac{v^*(x)}{\langle \nabla f(x), v^*(x) \rangle} \quad \text{dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K.$$

Łatwo sprawdzamy, że $v \in C^\infty(f^{-1}(U) \setminus K)$ i dla $x \in f^{-1}(U) \setminus K$, zachodzi

$$(2.67) \quad \langle \nabla h(x), v(x) \rangle = 0, \quad \langle \nabla f(x), v(x) \rangle = 1.$$

Sklejając pole v z polem ∇f otrzymujemy pole $\bar{v}$ takie, że $\bar{v} \in \mathfrak{H}_+(f, f^{-1}(U))$ (patrz własność 2.1.9). Ponadto, zwiększając ewentualnie zbiór K ,

z (2.67) dla $x \in f^{-1}(U) \setminus K$ mamy

$$H(x) = \frac{\partial_{\bar{v}(x)} h(x)}{\partial_{\bar{v}(x)} f(x)} = 0.$$

Zatem wobec twierdzenia 2.4.5 punkt y jest wartością typową funkcji f .

Ad. b) Niech U będzie otoczeniem punktu y , $K \subset \mathbb{R}^n$ zbiorem zwartym takim, że $K \supset K_0$ oraz

$$(2.68) \quad \frac{|\nabla h(x)|}{|\nabla f(x)|} \leq C \text{ dla } x \in M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$$

dla pewnej stałej $C > 0$. Ponieważ y jest wartością regularną funkcji f , to, zmniejszając ewentualnie otoczenie U , możemy założyć, że $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$.

Określmy funkcję $\tilde{H} : f^{-1}(U) \setminus K \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$\tilde{H}(x, v) = \partial_v h(x).$$

Wówczas, dla dowolnego punktu $x \in M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ oraz dowolnego pola $v \in \mathfrak{H}_1(f, f^{-1}(U) \setminus K)$, mamy

$$(2.69) \quad |\tilde{H}(x, v(x))| = |\langle v(x), \nabla h(x) \rangle| = \frac{|\nabla h(x)|}{|\nabla f(x)|} |\langle v(x), \nabla f(x) \rangle| \leq C.$$

Z powyższego oraz ciągłości pola $\nabla f/|\nabla f|^2 \in \mathfrak{H}_1(f, f^{-1}(U) \setminus K)$, istnieje zbiór otwarty $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K) \subset \Lambda$ oraz

$$(2.70) \quad \left| \tilde{H}\left(x, \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2}\right) \right| \leq 2C \text{ dla } x \in \Lambda.$$

Podobnie jak w podpunkcie a) pokazujemy, że istnieje pole wektorowe $v \in \mathfrak{H}_1(f, f^{-1}(U) \setminus (K \cup M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)))$ postaci (2.66) takie, że zachodzą wzory (2.67) dla $x \in f^{-1}(U) \setminus (K \cup M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K))$, co wobec określenia funkcji $\tilde{H}$ daje

$$(2.71) \quad \tilde{H}(x, v(x)) = 0 \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus (K \cup M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)).$$

Ponieważ $v \in \mathfrak{H}_1(f, f^{-1}(U) \setminus K)$ oraz $\nabla f/|\nabla f|^2 \in \mathfrak{H}_1(f, f^{-1}(U))$, to sklejając⁵ pole v z polem $\nabla f/|\nabla f|^2$ uzyskujemy pole $\bar{v} \in \mathfrak{H}_1(f, f^{-1}(U))$, które wobec

⁵gdzie używamy rozkładu jedynek dla pokrycia $f^{-1}(U) \setminus \Lambda_1$, Λ zbioru $f^{-1}(U) \setminus K$, gdzie $\Lambda_1 \subset \Lambda$ jest zbiorem domkniętym takim, że $(f^{-1}(U) \setminus K) \cap M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K) \subset \text{Int } \Lambda_1$.

(2.70) i (2.71) spełnia warunek

$$(2.72) \quad \left| \frac{\partial_{\bar{v}(x)} h(x)}{\partial_{\bar{v}(x)} f(x)} \right| = |\tilde{H}(x, \bar{v}(x))| \leq 2C \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K.$$

Zatem wobec twierdzenia 2.4.5 punkt y jest wartością typową funkcji f .

Ad c) Niech $U \subset U_0$ będzie dowolnym otoczeniem punktu y i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem zwartym takim, że $K \supset K_0$. Niech $v \in \mathfrak{h}_1(f, f^{-1}(U) \setminus K)$. Przyjmując oznaczenia jak w części b), dla $x \in M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ mamy

$$|\bar{H}(x)| = |\partial_{v(x)} h(x)| = |\tilde{H}(x, v(x))| = \frac{|\nabla h(x)|}{|\nabla f(x)|} \langle v(x), \nabla f(x) \rangle = \frac{|\nabla h(x)|}{|\nabla f(x)|}.$$

Stąd i z założenia, że funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest nieograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K$ otrzymujemy, że funkcja $\bar{H}$ jest nieograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K$. Zatem, z dowolności pola $v \in \mathfrak{h}_1(f, f^{-1}(U) \setminus K)$ oraz własności 2.7.1 otrzymujemy, że dla dowolnego pola $v \in \mathfrak{h}_+(f, f^{-1}(U))$ zachodzi $(v, h, f) \notin O_y(f)$, co daje tezę. $\square$

Uwaga 2.7.3. W odróżnieniu od twierdzenia 2.4.5 twierdzenie 2.7.2 jest formułowane z ustaloną funkcją h i nie daje warunków równoważnych typowości włókien funkcji (por. twierdzenie 2.4.7).

Założmy, że funkcja $h \in C^1(D_h)$ przyjmuje tylko wartości dodatnie. Podobnie jak w paragrafie 2.4 (por. uwagę 2.5.1), rozważając złożenie $\ln \circ h$ dostajemy, że $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K) = M(f, \ln \circ h, f^{-1}(U) \setminus K)$ i w twierdzeniu 2.7.2 funkcję $|\nabla h|/|\nabla f|$ można zastąpić funkcją $|\nabla h|/(h|\nabla f|)$. Dokładniej, z twierdzenia 2.7.2 dostajemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.7.4. Niech $y \in \mathbb{R}$ będzie wartością regularną funkcji f , $U_0 \subset \mathbb{R}$ otoczeniem punktu y , $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ zbiorem zwartym i $h \in C^1(D_h)$ funkcją posiadającą własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U_0) \setminus K_0$ spełniającą dodatkowo nierówność $h(x) > 0$ dla $x \in f^{-1}(U_0) \setminus K_0$. Wtedy:

- a) jeżeli istnieje otoczenie $U \subset U_0$ punktu y takie, że zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest ograniczony, to y jest wartością typową funkcji f ,
- b) jeżeli zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony dla pewnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y i istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ taki, że funkcja

$|\nabla h|/(h|\nabla f|)$ jest ograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K$, to y jest wartością typową funkcji f ,

c) jeżeli dla dowolnego otoczenia $U \subset U_0$ punktu y zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K_0)$ jest nieograniczony oraz dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ funkcja $|\nabla h|/(h|\nabla f|)$ jest nieograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$, to dla dowolnego pola $v \in \mathfrak{H}_+(f, f^{-1}(U))$ zachodzi $(v, \ln h, f) \notin O_y(f)$.

Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $h \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ będzie funkcją mającą własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$. Oznaczmy

$$S^h(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists (x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, h, \mathbb{R}^n \setminus K) \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\}.$$

Przy tak przyjętych założeniach i oznaczeniach bezpośrednio z części a) twierdzenia 2.7.2 dostajemy następujący znany wniosek szacujący zbiór punktów bifurkacyjnych $B(f)$ (por. [Ti1, Proposition 1.2]).

Wniosek 2.7.5. $B(f) \subset S^h(f) \cup K_0(f)$.

Uwaga 2.7.6. W przypadku gdy dla dowolnego otoczenia U wartości regularnej y funkcji f zbiór $M(f, h, f^{-1}(U))$ zawiera krzywą $\varphi : [R, +\infty) \rightarrow M(f, h, f^{-1}(U))$, $\varphi \in C^1([R, +\infty), \mathbb{R}^n)$ taką, że $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = +\infty$ oraz

$$(2.73) \quad \nabla h(\varphi(t)) \neq 0 \quad \text{ i } \quad \langle \nabla f(\varphi(s)), \varphi'(s) \rangle \neq 0 \quad \text{ dla } t \geq R,$$

podpunkt b) w twierdzeniu 2.7.2 nie występuje, to znaczy nie są spełnione założenia podpunktu b). Dokładniej, dla dowolnego otoczenia U punktu y i dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$ funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ nieograniczona.

Istotnie, przypuśćmy przeciwnie, że istnieje otoczenie U punktu y , zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ i stała $C > 0$ takie, że

$$(2.74) \quad \frac{|\nabla h(x)|}{|\nabla f(x)|} < C \quad \text{ dla } x \in M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K).$$

Możemy założyć, że otoczenie U jest zbiorem ograniczonym i $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$. Z definicji zbioru $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$, dla ustalonej krzywej φ jak wyżej, możemy założyć, że istnieje funkcja ciągła $c : [R, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$\nabla h(\varphi(t)) = c(t) \nabla f(\varphi(t)) \quad \text{ dla } t \geq R.$$

Z ciągłości funkcji c i (2.73) otrzymujemy, że funkcja c jest stałego znaku. Rozważmy przypadek $c > 0$ (w przypadku $c < 0$ rozumujemy analogicznie). Z nierówności (2.74) mamy

$$(2.75) \quad c(t) = \frac{|\nabla h(\varphi(t))|}{|\nabla f(\varphi(t))|} < C \text{ dla } t \geq R.$$

Dla $t \geq R$ z twierdzenia o wartości średniej dla całek mamy

$$\begin{aligned} h(\varphi(t)) - h(\varphi(R)) &= \int_R^t \frac{d}{ds} h(\varphi(s)) ds = \int_R^t \langle \nabla h(\varphi(s)), \varphi'(s) \rangle ds \\ &= \int_R^t c(s) \langle \nabla f(\varphi(s)), \varphi'(s) \rangle ds = c(s(t)) \int_R^t \langle \nabla f(\varphi(s)), \varphi'(s) \rangle ds \\ &= c(s(t))(f(\varphi(t)) - f(\varphi(R))), \end{aligned}$$

gdzie $s(t) \in [R, t]$. Przechodząc w powyższej równości do granicy przy $t \rightarrow \infty$, wykorzystując własność właściwości h , $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = +\infty$ i (2.75) otrzymujemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(\varphi(t))| = +\infty,$$

co daje sprzeczność z ograniczonością zbioru U . Zatem funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K$ nieograniczona, co należało udowodnić.

Uwaga 2.7.7. Jeżeli przyjmiemy założenia takie, jak w uwadze 2.7.6 i założymy dodatkowo, że $h(x) > 0$ dla $x \in f^{-1}(U_0) \setminus K_0$, gdzie U_0 jest pewnym otoczeniem punktu y , a $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ zbiorem zwartym, to dla dowolnego otoczenia U punktu y i dowolnego zbioru zwanego $K \subset \mathbb{R}^n$ funkcja $|\nabla h|/h(|\nabla f|)$ jest na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ nieograniczona. W szczególności założenia podpunktu b) w twierdzeniu 2.7.4 nie są spełnione.

Istotnie, przypuśćmy przeciwnie, że istnieje otoczenie $U \subset U_0$ punktu y , zbiór zwarty $K \supset K_0$ i stała $C > 0$ takie, że

$$(2.76) \quad \frac{|\nabla h(x)|}{h(x)|\nabla f(x)|} < C \text{ dla } x \in M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K).$$

Zmniejszając ewentualnie otoczenie U , możemy założyć, że U jest zbiorem ograniczonym. Z definicji zbioru $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$, zmniejszając ewentualnie zbiór U , możemy założyć, że istnieje funkcja ciągła $c : [R, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że

$$\nabla h(\varphi(t)) = c(t)h(\varphi(t))(\nabla f(\varphi(t))) \text{ dla } t \geq R.$$

Z ciągłości funkcji c i (2.73) otrzymujemy, że funkcja c jest stałego znaku. Rozważmy przypadek $c > 0$ (w przypadku $c < 0$ rozumiemy analogicznie). Z nierówności (2.76) mamy

$$(2.77) \quad c(t) = \frac{|\nabla h(\varphi(t))|}{h(\varphi(t))|\nabla f(\varphi(t))|} < C \text{ dla } t \geq R.$$

Dla $t \geq R$ z twierdzenia o wartości średniej dla całek mamy

$$\begin{aligned} \ln h(\varphi(t)) - \ln h(\varphi(R)) &= \int_R^t \frac{d}{ds} \ln h(\varphi(s)) ds = \int_R^t \left\langle \frac{\nabla h(\varphi(s))}{h(\varphi(s))}, \varphi'(s) \right\rangle ds \\ &= \int_R^t c(s) \langle \nabla f(\varphi(s)), \varphi'(s) \rangle ds = c(s(t)) \int_R^t \langle \nabla f(\varphi(s)), \varphi'(s) \rangle ds \\ &= c(s(t))(f(\varphi(t)) - f(\varphi(R))), \end{aligned}$$

gdzie $s(t) \in [R, t]$. Przechodząc w powyższej równości do granicy przy $t \rightarrow \infty$, wykorzystując własność właściwości h , $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = +\infty$ i (2.75) otrzymujemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(\varphi(t))| = +\infty,$$

co daje sprzeczność z ograniczonością zbioru U . Zatem funkcja $|\nabla h|/h|\nabla f|$ jest na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K$ nieograniczona, co należało udowodnić.

Uwaga 2.7.8. Podobnie jak w uwadze 2.7.6, jeżeli $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest funkcją semialgebraiczną, a $\nabla h \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus K_0, \mathbb{R}^n)$ jest odwzorowaniem semialgebraicznym, gdzie $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem zwartym, to założenia podpunktu b) w twierdzeniu 2.7.2 (analogicznie w twierdzeniu 2.7.4) nie są spełnione. Istotnie, ustalmy dowolne otoczenie U wartości regularnej y funkcji f , zbiór semialgebraiczny zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$, $K \supset K_0$ i niech $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ będzie zbiorem nieograniczonym. Ponieważ, h ma własność właściwości na $f^{-1}(U)$, to zbiór $\{x \in M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K) : \nabla h(x) \neq 0\}$ jest nieograniczonym zbiorem semialgebraicznym. Na mocy lematu o wyborze krzywej, istnieje krzywa semialgebraiczna $\varphi : [R, +\infty) \rightarrow M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$, $\varphi \in C^1([R, +\infty), \mathbb{R}^n)$ taka, że $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = +\infty$ oraz $\nabla h(\varphi(t)) \neq 0$ dla $t \geq R$. Funkcja $(f \circ \varphi)' : (R, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją semialgebraiczną. Zatem, zwiększając ewentualnie liczbę R , możemy założyć, że $(f \circ \varphi)'$ jest stałego znaku lub $(f \circ \varphi)' \equiv 0$. Z definicji zbioru $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ i warunku $\nabla h(\varphi(t)) \neq 0$ dla $t \geq R$ otrzymujemy

$(f \circ \varphi)' \not\equiv 0$. Zatem $(f \circ \varphi)'(t) = \langle \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle \neq 0$ dla $t > R$, co zgodnie z uwagą 2.7.6 implikuje nieograniczoność funkcji $|\nabla h|/|\nabla f|$ na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K$. Wobec semialgebraiczności zbioru $M(f, h, f^{-1}(u) \setminus K)$ krzywą φ mogliśmy wybrać tak, aby zachodziła równość $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\varphi(t)) = y$. Wtedy, podobnie jak w uwadze 2.7.6, dowodzimy, że

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|\nabla h(\varphi(t))|}{|\nabla f(\varphi(t))|} = +\infty.$$

W szczególności, jeżeli założymy dodatkowo, że funkcja h ma własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$ i $y \in S^h(f)$, to dla dowolnego, dostatecznie małego, otoczenia U punktu y i dowolnego zbioru zwartego $K' \supset K$ oraz dowolnej gałęzi w nieskończoności⁶ A zbioru $M(f, h, f^{-1}(U))$, funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest na zbiorze A nieograniczona. Dokładniej zachodzi

$$\lim_{x \in A, |x| \rightarrow \infty} \frac{|\nabla h(x)|}{|\nabla f(x)|} = +\infty.$$

To oznacza, że założenia części b) w twierdzeniu 2.7.2 nie są spełnione.

Podobnie, jeżeli założymy dodatkowo, że $h(x) > 0$ dla $x \in f^{-1}(U_0) \setminus K_0$, gdzie U_0 jest pewnym otoczeniem punktu y , a $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ zbiorem zwartym, to funkcja $|\nabla h|/h|\nabla f|$ jest na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K')$ nieograniczona (por. uwagę 2.7.7).

Poniżej przedstawimy przykład zastosowania twierdzenia 2.7.2 w celu wyznaczenia zbioru wartości bifurkacyjnych $B(f)$ dla pewnego wielomianu $f \in \mathbb{R}[x, y]$. Wielomian ten znajdował się w wielu pracach (patrz [TZ, Example 3.4] oraz [DG, Example 5.2]). Jest on szczególnie interesujący, gdyż funkcja f jest wiązką trywialną, ale trywializacji funkcji f nie da się uzyskać całkując pole ∇f (patrz [DG, Example 5.2]). Co więcej, wielomian f nie spełnia warunku ρ_0 -regularności w punkcie 0 (por. paragraf 3.4). Pokażemy, jak korzystając z twierdzenia 2.7.2 udowodnić, że funkcja f jest wiązką trywialną.

Przykład 2.7.9. Rozważmy funkcję $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ postaci

$$f(x, y) := y(2x^2y^2 - 9xy + 12).$$

⁶tj, składową spójności zbioru $M(f, h, f^{-1}(U)) \setminus K'$.

Niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Pokażemy, że λ jest wartością typową funkcji f .

Niech $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ będzie funkcją określoną wzorem

$$g(t) := 2t^2 - 9t + 12.$$

Z własności funkcji kwadratowej mamy

$$(2.78) \quad g(t) \geq g(9/4) = 15/8 > 1 \text{ dla } t \in \mathbb{R}.$$

Niech $U := (\lambda - 1, \lambda + 1)$. Dla $(x, y) \in f^{-1}(U)$ z (2.78) i określenia funkcji f mamy

$$(2.79) \quad |y| = \frac{1}{g(xy)} |f(x, y)| \leq \frac{1}{g(xy)} (|f(x, y) - \lambda| + |\lambda|) < 1 + |\lambda|.$$

Niech $h(x, y) = \frac{x^2}{g(xy)}$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pokażemy, że h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U)$. Istotnie, w przeciwnym przypadku istnieje ciąg $((x_k, y_k))_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ taki, że $|f(x_k, y_k) - \lambda| < 1$ dla $k \in \mathbb{N}$, $(x_k, y_k) \rightarrow +\infty$ oraz $(h(x_k, y_k))_{k=1}^\infty$ jest ciągiem ograniczonym. Z nierówności (2.79) wynika, że $|x_k| \rightarrow \infty$. Zatem możemy założyć, że $x_k \neq 0$ dla $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ ciąg

$$h(x_k, y_k) = \frac{1}{2y_k^2 - \frac{9y_k}{x_k} + \frac{12}{x_k^2}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

jest ograniczony i $|x_k| \rightarrow \infty$ to ciąg $(y_k)_{k=1}^\infty$ nie jest zbieżny do 0. Zatem, wybierając ewentualnie podciąg, możemy założyć, że istnieje $\delta > 0$ taka, że $|y_k| > \delta$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wtedy $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k y_k| = +\infty$ i zachodzi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_k, y_k)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |y_k g(x_k y_k)| = +\infty,$$

co przeczy założeniu, że $|f(x_k, y_k) - \lambda| < 1$ dla $k \in \mathbb{N}$. Reasumując, h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U)$.

Pokażemy, że $M(f, h, f^{-1}(U)) = \emptyset$. Istotnie, dla $(x, y) \in M(f, h, f^{-1}(U))$ zachodzi $\det[\nabla f(x, y), \nabla h(x, y)] = 0$, a więc

$$(2.80) \quad -y^2 x^2 (4xy - 9)^2 = (-9xy + 24)(6x^2 y^2 - 18xy + 12).$$

Po podstawieniu $t := xy$, wymnożeniu i redukcji wyrażeń w równaniu (2.80) otrzymujemy równanie równoważne postaci

$$(2.81) \quad 0 = -16t^4 + 126t^3 - 387t^2 + 540 - 288 = -(2t^2 - 9t + 12)(8t^2 - 27t + 24).$$

Łatwo sprawdzamy, że równanie (2.81) nie posiada rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych. Reasumując, $M(f, h, f^{-1}(U)) = \emptyset$. Stąd, na mocy części a) twierdzenia 2.7.2, otrzymujemy, że λ jest wartością typową funkcji f .

Uwaga 2.7.10. Warto zauważyć, że w przykładzie 2.7.9 użycie niestandardowej funkcji h było konieczne do skutecznego zastosowania twierdzenia 2.7.2. Pokażemy, że przyjęcie $h(x) = x^2 + y^2$ prowadzi do podpunktu c) w twierdzeniu 2.7.4 (równoważnie $h(x) = \ln(x^2 + y^2)$ prowadzi do podpunktu c) w twierdzeniu 2.7.2).

Przyjmijmy $h(x, y) := x^2 + y^2$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Niech U będzie dowolnym otoczeniem punktu 0 i $K \subset \mathbb{R}^2$ dowolnym zbiorem zwartym. Łatwo sprawdzamy, że

$$(2.82) \quad M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K) = \{(x, y) \in f^{-1}(U) \setminus K : x(6x^2y^2 - 18xy + 12) = y^3(4xy - 9)\}.$$

Rozważmy ciąg $((x_k, y_k))_{k=2}^\infty$ określony wzorami

$$(2.83) \quad x_k = \sqrt[3]{\frac{k(1 + 1/k)^3(4/k - 5)}{6(1/k - 1)}}, \quad y_k = \frac{1 + 1/k}{x_k} \quad k = 2, 3, \dots$$

Z określenia ciągu $((x_k, y_k))_{k=2}^\infty$ mamy

$$(2.84) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k y_k = 1.$$

W szczególności $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ dla odpowiednio dużych indeksów $k \in \mathbb{N}$.

Ponieważ $f(x, y) = yg(xy)$, to z (2.84) mamy

$$(2.85) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = 0,$$

więc $(x_k, y_k) \in f^{-1}(U) \setminus K$ dla odpowiednio dużych indeksów $k \in \mathbb{N}$. Zatem, z (2.83) oraz (2.82) otrzymujemy $(x_k, y_k) \in M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ dla odpowiednio dużych indeksów $k \in \mathbb{N}$. W szczególności, zbiór $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$ jest nieograniczony.

Na mocy uwagi 2.7.8 funkcja $|\nabla h|/|\nabla f|$ jest nieograniczona na zbiorze $M(f, h, f^{-1}(U) \setminus K)$. Na mocy twierdzenia 2.7.4 dla dowolnego pola $v \in \mathfrak{H}_+$

$(f, f^{-1}(U))$ zachodzi $(v, \ln h, f) \notin O_y(f)$. Reasumując, standardowa funkcja h nie prowadzi w tym przykładzie do optymalnego oszacowania zbioru punktów bifurkacyjnych funkcji f . Przykład ten pokazuje, że nawet w klasie wielomianów rzeczywistych dwóch zmiennych, w celu optymalnego oszacowania zbioru $B(f)$ w oparciu o twierdzenie 2.7.4, konieczne jest rozważanie funkcji h różnych od standardowej normy euklidesowej.

Rozdział 3

Znane warunki implikujące trywializację

W tym rozdziale podamy dowody pewnych znanych twierdzeń zawierających warunki implikujące trywializację funkcji w otoczeniu poziomicy. Przytoczone dowody będą polegały na zastosowaniu twierdzenia 2.4.5 (lub twierdzenia 2.7.2 w przypadku warunku ρ_a -regularności) dla odpowiednio dobranej trójki (v, h, f^*) zależnej od danego warunku. Dalej zakładamy, że $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3.1 Lemat Ehresmann’a

Rozpocniemy nasze rozważania od najprostszego warunku umożliwiającego trywializację funkcji zwanego lematem Ehresmanna (patrz [Eh]).

Twierdzenie 3.1.1. *Jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y takie, że $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$ oraz zbiór $f^{-1}(U)$ jest ograniczony, to punkt y jest wartością typową funkcji f .*

Dowód. Z założenia funkcja f spełnia warunek właściwości na zbiorze $f^{-1}(U)$. Przyjmując $(v, h, f^*) = (\nabla f, f, f)$, zgodnie z oznaczeniami jak przed twierdzeniem 2.4.3, otrzymujemy

$$H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)} = \frac{\partial_{\nabla f(x)} f(x)}{\partial_{\nabla f(x)} f(x)} = 1 \text{ dla } x \in f^{-1}(U).$$

Zatem $(\nabla f, f, f) \in O_y(f)$ i wobec twierdzenia 2.4.5 otrzymujemy tezę. $\square$

3.2 Warunek Fedoryuk’a

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek Fedoryuk’a nad zbiorem otwartym* $U \subset \mathbb{R}$, jeżeli istnieją stałe $R, \delta > 0$ takie, że

$$(F) \quad |\nabla f(x)| \geq \delta \quad \text{dla } x \in f^{-1}(U), \quad |x| > R.$$

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek Fedoryuk’a w punkcie* y , jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y takie, że funkcja f spełnia warunek Fedoryuk’a nad zbiorem U .

Pokażemy, że przyjęcie funkcji $h(x) = |x|$ w twierdzeniu 2.4.5, daje trywializację funkcji spełniającej warunek warunek Fedoryuk’a. Dokładniej zachodzi

Twierdzenie 3.2.1. *Niech y będzie wartością regularną funkcji f . Jeżeli funkcja f spełnia warunek Fedoryuk’a w punkcie y , to punkt y jest wartością typową funkcji f .*

Dowód. Z definicji warunku Fedoryuk’a w punkcie y istnieje otoczenie U punktu y oraz stałe $R, \delta > 0$ takie, że zachodzi nierówność (F). Zmniejszając ewentualnie otoczenie U punktu y możemy założyć, że $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$. Przyjmijmy $(v, h, f^*) = (\nabla f, h, f)$, gdzie

$$h(x) = |x| \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Oczywiście h ma własność właściwości na zbiorze $f^{-1}(U)$. Ponadto, z nierówności Cauchy’ego-Schwarza i (F) dla $x \in f^{-1}(U)$, $|x| > R$ mamy

$$|H(x)| = \left| \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)} \right| = \frac{|\langle \nabla f(x), \nabla h(x) \rangle|}{|\nabla f(x)|^2} \leq \frac{|\nabla h(x)|}{|\nabla f(x)|} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Zatem $(\nabla f, h, f) \in O_y(f)$ i wobec twierdzenia 2.4.5 otrzymujemy tezę. $\square$

Uwaga 3.2.2. Bez dodatkowych założeń o funkcji f zbiór punktów, dla których nie jest spełniony warunek Fedoryuk’a, może być duży. W pracy [KOS, Example 2.1] autorzy pokazali, że dla wielomianu f postaci

$$f(x, y, z) := x + x^2 y + x^4 y z$$

zbiór ten jest równy całej przestrzeni $\mathbb{R}$.

3.3 Warunek Malgrange’a oraz warunek pre-Malgrange’a

Kolejnym często występującym w literaturze (patrz np. [DG], [DT], [KOS], [Ti1], [Ti2], [JK2], [JK1]) warunkiem gwarantującym typowość wartości y jest warunek Malgrange’a. Dla wygody czytelnika przypomnimy definicję tego warunku.

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek Malgrange’a nad zbiorem otwartym* $U \subset \mathbb{R}$, jeżeli istnieją stałe $R, \delta > 0$ takie, że

$$(M) \quad |\nabla f(x)| |x| \geq \delta \quad \text{dla } x \in f^{-1}(U), |x| > R.$$

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek Malgrange’a w punkcie y* , jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y takie, że funkcja f spełnia warunek Malgrange’a nad zbiorem U . Punkty $y \in \mathbb{R}$, w których funkcja f nie spełnia warunku Malgrange’a, będziemy nazywać asymptotycznymi wartościami krytycznymi funkcji f . Zbiór wszystkich asymptotycznych wartości krytycznych f będziemy oznaczać symbolem $K_\infty(f)$.

Przedstawimy poniżej pewną modyfikację tego warunku (por. własność 3.3.2) i pokażemy, że również ona umożliwia trywializację funkcji.

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek pre-Malgrange’a nad zbiorem otwartym* $U \subset \mathbb{R}$, jeżeli $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$ oraz istnieją stałe $R, C > 0$ takie, że

$$(\text{pre-M}) \quad |\langle \nabla f(x), x \rangle| \leq C|x|^2 |\nabla f(x)|^2 \quad \text{dla } x \in f^{-1}(U), |x| > R.$$

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek pre-Malgrange’a w punkcie y* , jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y takie, że funkcja f spełnia warunek pre-Malgrange’a nad zbiorem U .

Uwaga 3.3.1. Nierówność (pre-M) nie implikuje, $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$, $|x| > R$. Dlatego, w przeciwieństwie do klasycznej nierówności Malgrange’a, zakładamy dodatkowo $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$.

Własność 3.3.2. Niech y będzie wartością regularną funkcji f . Jeżeli funkcja f spełnia warunek Malgrange’a w punkcie y , to f spełnia warunek pre-Malgrange’a w punkcie y .

Dowód. Z definicji warunku Malgrange’a w punkcie y istnieje otoczenie U punktu y oraz stałe $R, \delta > 0$ takie, że spełniona jest nierówność (M). Łatwo dowodzimy, że zmniejszając ewentualnie otoczenie U punktu y , możemy założyć, że $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$. Z nierówności Cauchy’ego-Schwarza oraz (M) otrzymujemy

$$|\langle \nabla f(x), x \rangle| \leq |\nabla f(x)| |x| \leq \frac{1}{\delta} |x|^2 |\nabla f(x)|^2 \text{ dla } x \in f^{-1}(U), |x| > R,$$

co daje warunek pre-Malgrange’a i kończy dowód. $\square$

Poniższe twierdzenie pokazuje, że spełnianie warunku pre-Malgrange’a przez funkcję f w punkcie y implikuje trywializację funkcji f w pewnym otoczeniu punktu y .

Twierdzenie 3.3.3. *Niech y będzie wartością regularną funkcji f . Jeżeli funkcja f spełnia warunek pre-Malgrange’a w punkcie y , to punkt y jest wartością typową funkcji f .*

Dowód. Z definicji warunku pre-Malgrange’a w punkcie y istnieje otoczenie U punktu y oraz stałe $R, C > 0$ takie, że $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$ oraz zachodzi nierówność (pre-M). Przyjmijmy $(v, h, f^*) = (\nabla f, h_1, f)$, gdzie

$$h_1(x) = \ln(|x|^2) \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n, |x| > 0.$$

Z nierówności (pre-M) dla $x \in f^{-1}(U)$, $|x| > R$ mamy

$$|H(x)| = \left| \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)} \right| = \frac{2|\langle \nabla f(x), x \rangle|}{|x|^2 |\nabla f(x)|^2} \leq 2C.$$

Zatem $(\nabla f, h_1, f) \in O_y(f)$ i wobec twierdzenia 2.4.5 otrzymujemy tezę. $\square$

Bezpośrednio z własności 3.3.2 i twierdzenia 3.3.3 otrzymujemy poniższy wniosek.

Wniosek 3.3.4. *Niech y będzie wartością regularną funkcji f . Jeżeli funkcja f spełnia warunek Malgrange’a w punkcie y , to punkt y jest wartością typową funkcji f .*

Uwaga 3.3.5. W przeciwieństwie do warunku Fedoryuk’a, jeśli f jest funkcją semialgebraiczną, to zbiór punktów niespełniających warunku Malgrange’a jest skończony (patrz np. [KMP], [KOS], [JK1]).

Uwaga 3.3.6. Wprowadzony w tym paragrafie warunek pre-Malgrange’a można uogólnić w następujący sposób.

Niech $a \in \mathbb{R}^n$. Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek a -Malgrange’a nad zbiorem otwartym* $U \subset \mathbb{R}^n$, jeżeli $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$ oraz istnieją stałe $R, C > 0$ takie, że

$$(a-M) \quad |\langle \nabla f(x), x - a \rangle| \leq C|x - a|^2 |\nabla f(x)|^2 \quad \text{dla } x \in f^{-1}(U), |x| > R.$$

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek a -Malgrange’a w punkcie y* , jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}^n$ punktu y takie, że funkcja f spełnia warunek a -Malgrange’a nad zbiorem U .

Zachodzi twierdzenie analogiczne do twierdzenia 3.3.3, gdzie warunek pre-Malgrange’a w punkcie y zastępujemy warunkiem a -Malgrange’a w punkcie y .

3.4 Warunek ρ_a -regularności

Kolejny warunek występujący w wielu pracach (patrz [DT], [NZ], [Ti1], [Ti2]) jest znany pod nazwą warunku ρ_a -regularności, ρ -regularności lub jako warunek M-tame. Przypomnijmy postać tego warunku.

Przypomnijmy, że przez $M(f_1, f_2, D)$ oznaczamy zbiór punktów krytycznych odwzorowania $(f_1, f_2) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ (tj. zbiór punktów $x \in D$, dla których wektory $\nabla f_1(x)$ oraz $\nabla f_2(x)$ są liniowo zależne).

Dla $a \in \mathbb{R}^n$ określmy funkcję $\rho_a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ wzorem

$$\rho_a(x) := |x - a|^2.$$

Powiemy, że punkt y jest *wartością ρ_a -nieregularną funkcji* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, jeżeli istnieje ciąg $(x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, \rho_a, \mathbb{R}^n)$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$ oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y$. Równoważnie, y jest wartością ρ_a -nieregularną funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, jeżeli dla dowolnego otoczenia U punktu y i dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$ istnieje punkt $x \in f^{-1}(U) \setminus K$ taki, że wektory $\nabla f(x)$ oraz $x - a$ są liniowo zależne.

Zbiór wszystkich wartości ρ_a -nieregularnych funkcji f będziemy oznaczać przez $S_a(f)$. Zgodnie z oznaczeniem $S^h(f)$ ze str. 79 mamy $S_a(f) = S^{\rho_a}(f)$.

Dokładniej, zachodzi

$$S_a(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists (x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, \rho_a, \mathbb{R}^n), \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\}.$$

Punkty $y \in \mathbb{R}$ spełniające $y \notin S_a(f)$ będziemy nazywać *wartościami ρ_a -regularnymi w nieskończoności*. Mówimy wtedy, że funkcja f spełnia *warunek ρ_a -regularności w punkcie y* .

Bezpośrednio z części a) twierdzenia 2.7.2 otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.4.1. *Niech y będzie wartością regularną funkcji f . Jeżeli y jest wartością ρ_a -regularną funkcji f w nieskończoności, to y jest wartością typową funkcji f .*

Jak pokażemy poniżej, w przypadku gładkich funkcji semialgebraicznych, warunek ρ_a -regularności daje lepsze oszacowanie zbioru $B(f)$ od warunku a -Malgrange'a. Pewną wersję poniższej własności można znaleźć w pracy [Sk].

Własność 3.4.2. *Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją semialgebraiczną i niech y będzie wartością regularną funkcji f . Jeżeli f spełnia warunek a -Malgrange'a w punkcie y , to f spełnia warunek ρ_a -regularności w punkcie y . W szczególności, jeżeli f spełnia warunek Malgrange'a w punkcie y , to f spełnia warunek ρ_a -regularności w punkcie y .*

Dowód. Przypuśćmy, że f nie spełnia warunku ρ_a -regularności w punkcie y . Wtedy $y \in S_a(f)$ i na mocy uwagi 2.7.8 (por. również twierdzenie 2.7.4) dla dowolnego otoczenia U punktu y i dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$ funkcja $|\nabla \rho_a|/(\rho_a |\nabla f|)$ jest na zbiorze $M(f, \rho_a, f^{-1}(U) \setminus K)$ nieograniczona. Zatem istnieje ciąg $(x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, \rho_a, f^{-1}(U) \setminus K)$ taki, że

$$(3.1) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k| = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = y, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\nabla \rho_a(x_k)|}{\rho_a(x_k) |\nabla f(x_k)|} = +\infty.$$

Ponadto, z określenia zbioru $M(f, \rho_a, f^{-1}(U) \setminus K)$ dla $x \in M(f, \rho_a, f^{-1}(U) \setminus K)$ mamy

$$(3.2) \quad |\langle x - a, \nabla f(x) \rangle| = \frac{1}{2} |\langle \nabla \rho_a(x), \nabla f(x) \rangle| = |x - a| |\nabla f(x)|.$$

Z (3.1) i (3.2) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|\langle x_k - a, \nabla f(x_k) \rangle|}{|x_k - a|^2 |\nabla f(x_k)|^2} &= \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2|x_k - a|}{|x_k - a|^2 |\nabla f(x_k)|} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|\nabla \rho_a(x_k)|}{\rho_a(x_k) |\nabla f(x_k)|} = +\infty. \end{aligned}$$

To, wraz z (3.1), dowodzi, że funkcja f nie spełnia nierówności (a-M) w warunkach a -Malgrane’a w punkcie y . $\square$

Własność odwrotna do własności 3.4.2 nie zachodzi. Poniżej przedstawimy przykład wielomianu spełniającego warunek ρ_0 -regularności w punkcie 0, który nie spełnia warunku a -Malgrange’a w punkcie 0 dla $a \in \mathbb{R}^2$. Przykład ten rozważany był w [DT, Example 2.10] w innym kontekście.

Przykład 3.4.3. Określmy wielomian f następującym wzorem

$$f(x, y) = y(x^2 y^2 + 3xy + 3), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pokażemy, że $0 \notin S_0(f)$. Przypuśćmy przeciwnie, że $0 \in S_0(f)$. Istnieje wtedy ciąg $(x_k, y_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, \rho_a, \mathbb{R}^n)$ taki, że

$$(3.3) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |(x_k, y_k)| = +\infty \text{ oraz } \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k, y_k) = 0.$$

Łatwo sprawdzamy, że

$$(3.4) \quad \nabla f(x, y) = [y^2(2xy + 3), 3(xy + 1)^2], \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

oraz

$$(3.5) \quad M(f, \rho_a, \mathbb{R}^n) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3(2yx + 3) - 3x(xy + 1)^2 = 0\}.$$

Określmy funkcję $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ wzorem

$$g(t) = t^2 + 3t + 3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Oczywiście $f(x, y) = yg(xy)$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ oraz

$$(3.6) \quad g(t) \geq g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \text{ dla } t \in \mathbb{R}.$$

Z powyższego oraz (3.3) dostajemy

$$(3.7) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k| = +\infty.$$

Przypuśćmy, że ciąg $(x_k y_k)_{k=1}^{\infty}$ jest nieograniczony. Wybierając ewentualnie podciąg mamy $\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k y_k| = +\infty$. Wtedy z (3.5) i (3.7) mamy

$$0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{y_k^3}{x_k y_k} \left(2 + \frac{3}{x_k y_k} \right) - 3x_k \left(1 + \frac{1}{x_k y_k} \right)^2 \right| = +\infty,$$

co jest niemożliwe. Reasumując, ciąg $(x_k y_k)_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony i wybierając ewentualnie podciąg możemy założyć, że $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k y_k = c$. Zauważmy, że $c = -1$. Istotnie, w przeciwnym razie z (3.5) i (3.7) mielibyśmy

$$0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} |y_k^3 (2y_k x_k + 3) - 3x_k (x_k y_k + 1)^2| = \lim_{k \rightarrow +\infty} 3|x_k| |c + 1|^2 = +\infty,$$

co jest niemożliwe. Zatem, z (3.5) dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$, mamy $y_k \neq 0$ oraz

$$0 < y_k^4 = \frac{3x_k y_k (x_k y_k + 1)^2}{2x_k y_k + 3} \leq 0,$$

co jest niemożliwe. Reasumując, pokazaliśmy, że $0 \notin S_0(f)$.

Weźmy teraz dowolny punkt $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Pokażemy, że funkcja f nie spełnia warunku a -Malgrange'a w punkcie 0. Rozważmy ciąg określony wzorem $(x_k, y_k) := (k, -1/k)$ dla $k \in \mathbb{N}$. Z (3.4) mamy

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|\langle (x_k, y_k) - a, \nabla f(x_k, y_k) \rangle|}{|(x_k, y_k) - a|^2 |\nabla f(x_k, y_k)|^2} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|(k - a_1) \frac{1}{k^2}|}{((k - a_1)^2 + (\frac{1}{k} - a_2)^2) \frac{1}{k^4}} = +\infty.$$

Reasumując, f nie spełnia warunku a -Malgrange'a w punkcie 0.

Oznaczmy przez Δ_a zbiór wszystkich funkcji $h \in C^1(D_h)$, $D_h \subset \mathbb{R}^n$ postaci

$$(3.8) \quad h(x) := \bar{h}(\rho_a(x)) \text{ dla } x \in D_h,$$

gdzie funkcja $\bar{h} \in C^1((R_{\bar{h}}, \infty))$ spełnia warunek $\bar{h}'(t) \neq 0$ dla $t \in (R_{\bar{h}}, +\infty)$.

Okazuje się, że ograniczenie się do funkcji h ze zbioru Δ_a , funkcji $f^* = f$ oraz warunku $H \equiv 0$ w twierdzeniu 2.4.5 (równoważnie w twierdzeniu 2.4.3) prowadzi do wartości ρ_a -regularnych w nieskończoności. Dokładniej, zachodzi poniższa własność.

Własność 3.4.4. Niech U będzie otoczeniem punktu y , $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ oraz $h \in \Delta_a$. Jeżeli istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $f^{-1}(U) \setminus K \subset D_h$ oraz

$$(3.9) \quad H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} = 0 \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K,$$

to y jest wartością ρ_a -regularną funkcji f w nieskończoności.

Dowód. Ponieważ K jest zbiorem ograniczonym, więc na mocy (3.9) istnieje liczba $R > 0$ taka, że dla $x \in f^{-1}(U)$, $|x - a| > R$ zachodzi

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \langle x - a, v(x) \rangle &= \frac{1}{2} \bar{h}'(\rho_a(x))^{-1} \partial_{v(x)} h(x) \\ &= \frac{1}{2} \bar{h}'(\rho_a(x))^{-1} H(x) \partial_{v(x)} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że y nie jest wartością ρ_a -regularną funkcji f w nieskończoności. Wtedy istnieje $x_0 \in f^{-1}(U)$, $|x_0 - a| > R$ taki, że $\nabla f(x_0) = t(x_0 - a)$ dla pewnej stałej $t \in \mathbb{R}$. Z założenia $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$ oraz równania (3.10) mamy

$$0 \neq \partial_{v(x_0)} f(x) = \langle v(x_0), \nabla f(x_0) \rangle = \langle v(x_0), t(x_0 - a) \rangle = t \langle x_0 - a, v(x_0) \rangle = 0,$$

co jest niemożliwe. Zatem punkt y jest wartością ρ_a -regularną funkcji f w nieskończoności. $\square$

Uwaga 3.4.5. Niech $v \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$. Jeżeli istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że

$$H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} = 0 \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K,$$

to dla funkcji $h : D_h \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(U) \setminus K \subset D_h$ klasy C^1 , zamiast warunku właściwości (2.44) wystarczy założyć warunek

$$(3.11) \quad \forall_{s \in U} \quad h^{-1}(s) \cap f^{-1}(U) \text{ jest zbiorem ograniczonym.}$$

Istotnie, określmy rodzinę funkcji $h_s := h|_{h^{-1}(s)}$, gdzie $s \in S := \{s \in \mathbb{R} : s = f(x), x \in f^{-1}(U) \setminus K\}$. Wówczas $v(x) \in T_x h^{-1}(s)$ dla $x \in h^{-1}(s)$ i rodzina $\{h_s\}_{s \in S}$ ogranicza trajektorie układu równań (2.11). Zatem na mocy lematu 2.2.1 dostajemy, że $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ jest trywialną wiązką klasy C^∞ .

3.5 Warunek porównawczy

W tym paragrafie przedstawimy pewien warunek na trywializację funkcji pojawiający się w pracy J.Rabiera [Ra]. Rabier w swojej pracy formułuje warunek dla odwzorowań między przestrzeniami Banacha (patrz [Ra, Remark 4.4]). My przedstawimy wersję tego warunku dla funkcji gładkich określonych w $\mathbb{R}^n$.

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek porównawczy nad zbiorem* otwartym $U \subset \mathbb{R}^n$, jeżeli istnieje liczba $R > 0$ oraz funkcja ciągła i nieujemna $\lambda : (R, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniająca warunki:

$$(3.12) \quad |\nabla f(x)| \geq \lambda(|x|) \text{ dla } |x| > R, x \in f^{-1}(U),$$

$$(3.13) \quad \int_R^{+\infty} \lambda(s) ds = +\infty.$$

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek porównawczy w punkcie* $y \in \mathbb{R}$, jeżeli istnieje otoczenie U punktu y takie, że f spełnia warunek porównawczy nad zbiorem U .

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.5.1. *Niech y będzie wartością regularną funkcji f . Jeżeli funkcja f spełnia warunek porównawczy w punkcie y , to punkt y jest wartością typową funkcji f .*

Dowód. Ponieważ y jest wartością regularną funkcji f , więc zmniejszając ewentualnie zbiór U możemy założyć, że $\nabla f \in \mathfrak{h}(f, f^{-1}(U))$. Oznaczmy zbiór zwarty $K := \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq R\}$ i określmy funkcję $h : f^{-1}(U) \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ następującym wzorem

$$h(x) = \int_R^{|x|} \lambda(s) ds.$$

Oczywiście $h \in C^1(f^{-1}(U) \setminus K)$. Ponadto dla dowolnego ciągu $(x_i)_{i=1}^\infty \subset f^{-1}(U) \setminus K$ na mocy (3.13) zachodzi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |x_i| = +\infty \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} |h(x_i)| = \int_R^{+\infty} \lambda(s) ds = +\infty.$$

Korzystając z nieujemności funkcji λ , warunku (3.12) oraz nierówności Cauchy'ego-Schwartza otrzymujemy dla $x \in f^{-1}(U) \setminus K$

$$|H(x)| = \left| \frac{\partial_{\nabla f(x)} h(x)}{\partial_{\nabla f(x)} f(x)} \right| \leq \frac{\lambda(|x|)^{\frac{1}{2|x|}} 2|\langle x, \nabla f(x) \rangle|}{|\nabla f(x)|^2} \leq 1.$$

Reasumując, $(\nabla f, h, f) \in O_y(f)$. Na mocy twierdzenia 2.4.5 otrzymujemy tezę. $\square$

Uwaga 3.5.2. Zauważmy, że

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{s} ds = +\infty.$$

Zatem, w kryterium porównawczym możemy przyjąć $\lambda(s) = \frac{1}{s}$ dla $s > 1$. W ten sposób otrzymujemy warunek Malgrange'a.

3.6 Wykładnik Kurdyki-Łojasiewicza. Ulepszony warunek pre-Malgrange'a

W tym paragrafie podamy pewien warunek umożliwiający trywializację funkcji pojawiający się w pracy [DG]. Jest on pewnym ulepszeniem warunku Malgrange'a. Przedstawimy również wersję analogicznego warunku pochodzącego od warunku pre-Malgrange'a.

Powiemy, że funkcja f spełnia *ulepszony warunek pre-Malgrange'a w punkcie y* jeżeli istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}$ punktu y takie, że $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$ oraz istnieją stałe $R, C > 0$ i $\theta < 1$ takie, że dla $x \in f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(y)$, $|x| > R$ mamy

$$(3.14) \quad |f(x) - y|^\theta |\langle \nabla f(x), x \rangle| \leq C|x|^2 |\nabla f(x)|^2.$$

Mówimy wtedy również, że funkcja f spełnia *ulepszony warunek pre-Malgrange'a w punkcie y z wykładnikiem θ* .

Uwaga 3.6.1. Łatwo zauważamy, że warunek pre-Malgrange'a w punkcie y implikuje ulepszony warunek pre-Malgrange'a w punkcie y z wykładnikiem $\theta \geq 0$. Istotnie, zmniejszając ewentualnie otoczenie U punktu y , możemy założyć, że wyrażenie $|f - y|^\theta$ jest ograniczone, co wraz z nierównością (pre-M) implikuje (3.14).

Twierdzenie 3.6.2. *Niech y będzie wartością regularną funkcji f . Jeżeli funkcja f spełnia ulepszony warunek pre-Malgrange’a w punkcie y , to punkt y jest wartością typową funkcji f .*

Dowód. Z definicji ulepszanego warunku pre-Malgrange’a w punkcie y istnieje otoczenie U punktu y takie, że $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$ oraz istnieją stałe $R, C > 0$ i $\theta < 1$ takie, że zachodzi (3.14). Wtedy przyjmując $v := \nabla f$ na mocy części ii) własności 2.3.1 mamy $f_\theta \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$, gdzie $K := \{x : \|x\| \leq R\}$ i

$$(3.15) \quad f_\theta(x) := |f(x) - y|^{1-\theta} \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K.$$

Przyjmijmy $f^* = f_\theta$ oraz $h(x) = h_1(x) = \ln(|x|^2)$ dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Z nierówności (3.14) dla $x \in f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(y)$, $|x| > R$ mamy

$$|H(x)| = \left| \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f^*(x)} \right| = |f(x) - y|^\theta \frac{2|\langle \nabla f(x), x \rangle|}{|x|^2 |\nabla f(x)|^2} \leq 2C.$$

Zatem $(\nabla f, h_1, f_\theta) \in O_y(f)$ i wobec twierdzenia 2.4.5 dostajemy tezę. $\square$

We wspomnianej wcześniej pracy [DG] autorzy dowodzą poniższą własność (patrz [DG, Proposition 3.1]).

Własność 3.6.3. *Niech f będzie funkcją semialgebraiczną klasy C^1 i niech $y \in \overline{f(\mathbb{R}^n)}$. Istnieją wtedy stałe $C, R, \tau > 0$ oraz liczba wymierna $\theta \leq 1$ taka, że dla $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| > R$ oraz $|f(x) - y| < \tau$ zachodzi*

$$(3.16) \quad |x| \cdot |\nabla f(x)| \geq C |f(x) - y|^\theta.$$

Kres dolny wykładników θ , dla których zachodzi nierówność (3.16) dla pewnych $R, C, \tau > 0$ będziemy, za autorami pracy [DG], nazywać *wykładnikiem Kurdyki-Łojasiewicza w nieskończoności dla wartości y* i oznaczać θ_y . Oczywiście bez założenia, że $y \in \overline{f(\mathbb{R}^n)}$ może zachodzić przypadek, gdy $\theta_y = -\infty$. Podobnie, jeśli zbiór $f^{-1}(y)$ jest ograniczony, to może zachodzić $\theta_y = -\infty$.

W przypadku gdy istnieje ciąg $(x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k| = +\infty$ oraz $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = y$, to warunek $\theta_y \leq 0$ daje, że funkcja f spełnia warunek Malgrange’a w punkcie y , a więc f jest trywialną wiązką w nieskończoności w otoczeniu poziomicy $f^{-1}(y)$ i w szczególności $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Zatem z (3.16) mamy $\theta_y \geq 0$ i w konsekwencji $\theta_y = 0$.

Przy założeniu, że y jest asymptotyczną wartością funkcji f w nieskończoności (to jest istnieje ciąg $(x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k| = +\infty$ oraz $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = y$) liczba θ_y jest wymierna i nierówność (3.16) zachodzi z wykładnikiem θ_y dla pewnych stałych $R, C, \tau > 0$ (por. dowód [DG, Proposition 3.1]).

W odróżnieniu od pracy [DG], w naszej pracy wiązki trywialne są funkcjami gładkimi, dlatego przyjmujemy naturalne założenie, że f jest funkcją gładką.

Łatwo widać, że funkcja f spełnia warunek Malgrange’a w punkcie y wtedy i tylko wtedy, gdy $\theta_y \leq 0$. Zatem, na mocy twierdzenia 3.3.3, jeśli $\theta_y \leq 0$, to y jest wartością typową funkcji f . Wynik ten można istotnie polepszyć, co zostało zrobione w [DG, Theorem 3.4] dla funkcji klasy C^1 . Przedstawimy tutaj naszą wersję tego twierdzenia wraz z krótkim dowodem opartym na twierdzeniu 3.6.2.

Twierdzenie 3.6.4. *Niech y będzie wartością regularną funkcji semialgebrycznej $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli $\theta_y < 1$, to y jest wartością typową funkcji f .*

Dowód. Jeżeli punkt y nie jest asymptotyczną wartością krytyczną w nieskończoności, to oczywiście y jest wartością typową funkcji f . Załóżmy, że punkt y jest asymptotyczną wartością krytyczną funkcji f w nieskończoności i ustalmy stałe $C, R, \tau > 0$ takie, że nierówność (3.16) jest spełniona z wykładnikiem θ_y dla $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| > R$ oraz $|f(x) - y| < \tau$. Z nierówności Cauchy’ego-Schwarza i nierówności (3.16) dla $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| > R$, $|f(x) - y| < \tau$ dostajemy

$$(3.17) \quad |f(x) - y|^{\theta_y} |\langle \nabla f(x), x \rangle| \leq \frac{|f(x) - y|^{\theta_y}}{|x| |\nabla f(x)|} |x|^2 |\nabla f(x)|^2 \leq \frac{1}{C} |x|^2 |\nabla f(x)|^2.$$

Z założenia θ_y i nierówności (3.17) otrzymujemy, że funkcja f spełnia ulepszony warunek pre-Malgrange’a w punkcie y . Zatem, na mocy twierdzenia 3.6.2, punkt y jest wartością typową funkcji f . $\square$

Uwaga 3.6.5. W [DG, Example 5.3] autorzy rozważali funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$f(x, y) = y^{11} + (1 + (1 + x^2)y)^3.$$

Pokazali oni, że $\theta_0 = 19/22$. Zatem f nie spełnia warunku Malgrange’a w punkcie 0, ale wartość 0 funkcji f , na mocy twierdzenia 3.6.4 (por. również [DG, Theorem 3.4]), jest wartością typową funkcji f .

Rozdział 4

Trywializacja wzdłuż foliacji

W tym rozdziale podamy definicję zbioru $O_y^{\mathbb{G}}(f)$, gdzie $\mathbb{G} = \{G_s : s \in S\}$ jest pewną rodziną rozłącznych rozmaitości gładkich $G_s \subset \mathbb{R}^n$. Zbiór $O_y^{\mathbb{G}}(f)$ jest w pewnym sensie zbiorem pośrednim między zbiorami $O_y(f)$ i $\overline{O}_y(f)$. Podobnie jak w przypadku zbiorów $O_y(f)$ i $\overline{O}_y(f)$, warunek $O_y^{\mathbb{G}}(f) \neq \emptyset$ implikuje trywializację funkcji f w otoczeniu poziomicy $f^{-1}(y)$. Warunek ten prowadzi do warunków typu Malgrange’a, w których dopuszczamy różne stałe δ_s dla różnych zbiorów G_s .

4.1 Warunek $(\mathbb{G}, \pi)$ -pre-Malgrange’a

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Niech $D \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i $\mathbb{G} = \{G_s : s \in S\}$ będzie rodziną rozłącznych rozmaitości gładkich $G_s \subset \mathbb{R}^n$ indeksowaną elementami zbioru S taką, że $D \subset \bigcup_{s \in S} G_s$. Wówczas rodzinę zbiorów $\mathbb{G}$ będziemy nazywać *foliacją na zbiorze D* .

Dla $x \in \bigcup_{s \in S} G_s$ przez $s(x)$ będziemy oznaczać jednoznacznie wyznaczony indeks $s = s(x)$ ze zbioru S , dla którego zachodzi $x \in G_s$. Przez $T_x G_s \subset \mathbb{R}^n$ będziemy oznaczać przestrzeń styczną do rozmaitości G_s w punkcie x .

Powiemy, że pole $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, $D_v \subset \mathbb{R}^n$ jest *zgodne z foliacją $\mathbb{G}$ na zbiorze D* , jeżeli

$$(4.1) \quad D \subset D_v,$$

oraz

$$(4.2) \quad v(x) \in T_x G_{s(x)} \text{ dla } x \in D.$$

Zbiór wszystkich pól transwersalnych do f na zbiorze D i zgodnych z foliacją $\mathbb{G}$ na zbiorze D będziemy oznaczać przez $\mathfrak{h}^{\mathbb{G}}(f, D)$. Analogicznie oznaczamy $\mathfrak{h}_+^{\mathbb{G}}(f, D) := \mathfrak{h}_+(f, D) \cap \mathfrak{h}^{\mathbb{G}}(f, D)$.

Przypomnijmy, że przez Γ oznaczamy zbiór wszystkich trójek (v, h, f^*) , gdzie $v \in C^\infty(D_v, \mathbb{R}^n)$, $h \in C^1(D_h)$, $f^* \in C^0(D_{f^*})$ oraz D_v, D_h, D_{f^*} są podzbiórami otwartymi w $\mathbb{R}^n$.

Przez $O_y^{\mathbb{G}}(f)$ oznaczamy zbiór wszystkich trójek $(v, h, f^*) \in \Gamma$, dla których istnieje otoczenie U punktu y oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ takie, że zachodzą następujące warunki:

$$(O_y^{\mathbb{G}}(f)\text{-i}) \quad v \in \mathfrak{h}^{\mathbb{G}}(f, f^{-1}(U)),$$

$$(O_y^{\mathbb{G}}(f)\text{-ii}) \quad h \text{ ma własność właściwości na zbiorze } f^{-1}(U) \setminus K,$$

$$(O_y^{\mathbb{G}}(f)\text{-iii}) \quad f^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K} \text{ i funkcja } H : f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y)) \rightarrow \mathbb{R},$$

określona wzorem $H = \frac{\partial_v h}{\partial_v f^*}$ jest funkcją ograniczoną na każdym zbiorze postaci $G_s \cap f^{-1}(U) \setminus (K \cup f^{-1}(y))$ dla $s \in S$.

Definicja zbioru $[f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ jest podana na s. 54.

Uwaga 4.1.1. Zauważmy, że jeśli $O_y^{\mathbb{G}}(f) \neq \emptyset$, to, w otoczeniu poziomicy $f^{-1}(y)$, zbiory G_s przecinają poziomice funkcji f w sposób transwersalny. To znaczy istnieje otoczenie U punktu y takie, że zachodzi warunek

$$T_x f^{-1}(f(x)) + T_x G_{s(x)} = \mathbb{R}^n \text{ dla } x \in f^{-1}(U).$$

Istotnie, w przeciwnym wypadku mamy $T_x G_{s(x)} \subset T_x f^{-1}(f(x))$, a więc dla dowolnego pola $v \in C^\infty(f^{-1}(U), \mathbb{R}^n)$ zgodnego z foliacją $\mathbb{G}$ na zbiorze $f^{-1}(U)$ zachodzi $v(x) \in T_x G_{s(x)} \subset T_x f^{-1}(f(x))$. W szczególności $\partial_{v(x)} f(x) = 0$, co przeczy warunkowi $(O_y^{\mathbb{G}}(f)\text{-i})$.

Głównym narzędziem wykorzystywanym w dalszym ciągu tego rozdziału jest następujący wniosek z twierdzenia 2.4.3.

Wniosek 4.1.2. *Jeżeli $O_y^{\mathbb{G}}(f) \neq \emptyset$, to y jest wartością typową funkcji f .*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że z założenia $(O_y^{\mathbb{G}}(f)$ -i) dostajemy (4.2), a zatem ustalona trajektoria pola v przebiega w zbiorach G_s dla pewnego $s \in S$. Stąd warunek $O_y^{\mathbb{G}}(f) \neq \emptyset$ implikuje $\overline{O}_y(f) \neq \emptyset$ i z twierdzenia 2.4.3 dostajemy tezę. $\square$

Uwaga 4.1.3. Analizując dowód twierdzenia 2.4.3 oraz uwagę 2.4.4, łatwo zauważyć, że wniosek 4.1.2 pozostaje prawdziwy, jeśli w warunkach $(O^G$ -ii) oraz $(O^G$ -iii) dopuścimy różne funkcje h_s i różne funkcje $f_s^* \in [f, y]_v^{f^{-1}(U) \setminus K}$ dla różnych indeksów $s \in S$. Co więcej, zamiast warunku $(O_y^{\mathbb{G}}(f)$ -ii) wystarczy założyć, że funkcja h ma własność właściwości na zbiorach $G_s \cap f^{-1}(U) \setminus K$ dla $s \in S$.

Wniosek 4.1.2 pełni rolę twierdzenia w pewnym sensie pośredniego między twierdzeniem 2.4.3 oraz 2.4.5. Umożliwia on formułowanie pewnych nowych warunków, zależnych od foliacji $\mathbb{G}$, dających trywializację funkcji f . Zilustrujemy to na przykładzie warunku pre-Malgrange’a.

Niech $\mathbb{G}$ będzie foliacją na zbiorze D i niech $\pi : C^\infty(D, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$. Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek $(\mathbb{G}, \pi)$ -pre-Malgrange’a nad zbiorem $U \subset \mathbb{R}$ jeżeli istnieje zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^n$ taki, że:*

$$(1M_{\mathbb{G}}) \quad f^{-1}(U) \setminus K \subset D,$$

$$(2M_{\mathbb{G}}) \quad \pi(\nabla f|_{f^{-1}(U \setminus K)}) \in \mathcal{H}_+^{\mathbb{G}}(f, f^{-1}(U) \setminus K),$$

$$(3M_{\mathbb{G}}) \quad \forall_{s \in S} \quad \exists_{C_s > 0} \quad |\langle x, \pi(\nabla f)(x) \rangle| \leq C_s |x|^2 \langle \nabla f(x), \pi(\nabla f)(x) \rangle \text{ dla } x \in (f^{-1}(U) \setminus K) \cap G_s.$$

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek $(\mathbb{G}, \pi)$ -pre-Malgrange’a w punkcie $y \in \mathbb{R}$* , jeżeli istnieje otoczenie U punktu y takie, że funkcja f spełnia warunek $(\mathbb{G}, \pi)$ -pre-Malgrange’a nad U .

Uwaga 4.1.4. Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i $id_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$ oznacza funkcję identyczności na zbiorze $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Przyjmując

$$\mathbb{G} = \{G_0\}, \quad S = \{0\}, \quad G_0 = \mathbb{R}^n, \quad \pi = id_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}$$

dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ otrzymujemy warunek $(\mathbb{G}, \pi)$ -pre-Malgrange’a w punkcie $y \in \mathbb{R}$ równoważny wcześniej wprowadzonemu warunkowi pre-Malgrange’a.

Z wniosku 4.1.2 otrzymujemy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.1.5. *Niech $y \in \mathbb{R}$ będzie wartością regularną funkcji f . Jeżeli funkcja f spełnia warunek $(\mathbb{G}, \pi)$ -pre-Malgrange w punkcie y , to y jest wartością typową funkcji f .*

Dowód. Niech U będzie otoczeniem punktu y takim, że funkcja f spełnia warunek $(\mathbb{G}, \pi)$ -pre-Malgrange'a nad U . Ponieważ y jest wartością regularną funkcji f , to, zmniejszając ewentualnie otoczenie U , możemy założyć, że $\nabla f(x) \neq 0$ dla $x \in f^{-1}(U)$. Z założenia (4.1) i własności 2.1.9 istnieje liczba $R > 0$ i pole $v \in \mathfrak{h}_+(f, f^{-1}(U))$ takie, że $v(x) = \pi(\nabla f)(x)$ dla $|x| > R, x \in f^{-1}(U)$. Przyjmijmy $h(x) = \ln|x|^2$ dla $x \neq 0$ oraz $f^* = f$. Wobec warunku $(3M_{\mathbb{G}})$ funkcja $H : f^{-1}(U) \setminus (B \cup K) \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $B := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq R\}$, określona jako $H = \frac{\partial_v h}{\partial_v f}$, jest ograniczona na każdym zbiorze $G_s \cap (f^{-1}(U) \setminus (B \cup K))$ dla $s \in S$. Zatem $(v, h, f) \in O_y^{\mathbb{G}}(f)$, a więc $O_y^{\mathbb{G}}(f) \neq \emptyset$ i na mocy własności 4.1.2 punkt y jest wartością typową funkcji f . $\square$

4.2 Warunek pre-Malgrange'a na poziomicach submersji

W paragrafie tym podamy szczególną wersję wyników z poprzedniego paragrafu. Przedstawimy mianowicie pewną naturalną metodę konstruowania foliacji przy użyciu submersji. Specyfikujemy również odwzorowanie π będące rzutem prostopadłym na przestrzenie styczne do odpowiednich rozmaiwości.

Niech M, N będą rozmaiwościami gładkimi. Powiemy, że odwzorowanie $g : M \rightarrow N$ jest *submersją w punkcie $p \in M$* , jeżeli różniczka $dg(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ jest odwzorowaniem surjektywnym. Powiemy, że odwzorowanie $g : M \rightarrow N$ jest *submersją*, jeżeli g jest submersją w każdym punkcie $p \in M$.

Poniższe dobrze znane twierdzenie pozwala na konstruowanie foliacji przy użyciu submersji.

Twierdzenie 4.2.1. *Jeżeli odwzorowanie $g : M \rightarrow N$ jest submersją, to dla dowolnego $q \in N$ zbiór $g^{-1}(q)$ jest rozmaiwością gładką.*

Niech $D_g \subset \mathbb{R}^n$ i niech $g = (g_1, \dots, g_r) : D_g \rightarrow \mathbb{R}^r$ będzie submersją. Wtedy wektory $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_r(x)$ są liniowo niezależne dla $x \in D_g$. Przyjmijmy $S = g(D_g)$ i rozważmy następującą rodzinę rozmaitości gładkich

$$G_s = g^{-1}(s) = \{x \in D_g : g(x) = s\}, \quad s \in S.$$

W tej sytuacji, foliację $\mathbb{G} = \{G_s : s \in S\}$ będziemy nazywać *foliacją zbioru D_g adaną przez submersję g* . Jeśli $D_g = \mathbb{R}^n$, to foliację zbioru D_g adaną przez submersję g będziemy nazywać w skrócie *foliacją adaną przez submersję g* . Oczywiście zachodzi

$$T_x G_{s(x)} = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0 \text{ dla } i = 1, \dots, r\}, \quad x \in D_g.$$

Przechodząc do konstrukcji odwzorowania π , wprowadzimy następującą definicję.

Rzutem na foliację $\mathbb{G}$ w zbiorze $D \subset \bigcup_{s \in S} G_s$ będziemy nazywać gładkie odwzorowanie $\pi : C^\infty(D, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(D, \mathbb{R}^n)$ spełniające warunek

$$(4.3) \quad \text{dla dowolnego } v \in C^\infty(D, \mathbb{R}^n) \text{ pole } \pi(v) \text{ jest zgodne z foliacją } \mathbb{G}.$$

Kanonicznym przykładem rzutu na foliację $\mathbb{G}$ w zbiorze D jest rzut prostopadły na rozmaitości $G_s \cap D$ dla $s \in S$. Przedstawimy teraz dokładniejszą konstrukcję rzutu prostopadłego w przypadku foliacji zbioru D_g adanego przez submersję g .

Niech $\mathbb{G}$ będzie foliacją zbioru D_g adaną przez submersję g . Ustalmy dowolny wektor $v \in \mathbb{R}^n$ i punkt $x \in D_g$. Rozważmy układ r równań liniowych o niewiadomych $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ postaci

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^r a_i \langle \nabla g_i(x), \nabla g_j(x) \rangle = \langle v, \nabla g_j(x) \rangle \quad j = 1, \dots, r.$$

Z liniowej niezależności wektorów $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_r(x)$ dostajemy, że wyznacznik $W(x)$ macierzy układu równań (4.4) spełnia nierówność

$$W(x) := \det[\langle \nabla g_i(x), \nabla g_j(x) \rangle]_{1 \leq i, j \leq r} \neq 0,$$

jako wyznacznik macierzy Grama dla wektorów $\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_r(x)$. Zatem, na mocy wzorów Cramera, układ równań (4.4) ma jednoznacznie określone rozwiązania $a_1(x, v), \dots, a_r(x, v)$ postaci

$$a_i(x, v) = \frac{W_i(x, v)}{W(x)} \quad i = 1, \dots, r,$$

gdzie przez $W_i(x, v)$ oznaczyliśmy wyznacznik macierzy powstałej z macierzy $[\langle \nabla g_i(x), \nabla g_j(x) \rangle]_{1 \leq i, j \leq r}$ przez zamianę i -tej kolumny na kolumnę postaci $[\langle v, \nabla g_j(x) \rangle]_{1 \leq j \leq r}$. Otrzymane w ten sposób funkcje $a_i : D_g \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami gładkimi. Zauważmy, że jako odwzorowanie π z poprzedniego rozdziału możemy przyjąć

$$(4.5) \quad \pi(v)(x) = v(x) - \sum_{i=1}^r a_i(x, v(x)) \nabla g_i(x), \quad x \in D_g, v \in C^\infty(D_g, \mathbb{R}^n).$$

W dalszym ciągu tego paragrafu będziemy zakładać, że odwzorowanie π jest postaci (4.5). Ponieważ funkcje $a_1, \dots, a_n$ spełniają (4.4), więc zachodzi

$$\langle \pi(v)(x), \nabla g_j(x) \rangle = \langle v(x), \nabla g_j(x) \rangle - \sum_{i=1}^r a_i(x, v(x)) \langle \nabla g_i(x), \nabla g_j(x) \rangle = 0,$$

dla $j = 1, \dots, r, x \in D_g, v \in C^\infty(D_g, \mathbb{R}^n)$. Zatem π jest rzutem na foliację $\mathbb{G}$ w D_g .

Zauważmy, że dla $v \in C^\infty(D_g, \mathbb{R}^n)$ mamy

$$(4.6) \quad |\pi(v)(x)|^2 = \langle \pi(v)(x), v(x) \rangle, \quad x \in D_g.$$

Istotnie, z (4.4) dla $x \in D_g, v \in C^\infty(D_g, \mathbb{R}^n)$ mamy

$$\begin{aligned} |\pi(v)(x)|^2 &= \langle v(x) - \sum_{i=1}^r a_i(x, v(x)) \nabla g_i(x), v(x) - \sum_{j=1}^r a_j(x, v(x)) \nabla g_j(x) \rangle \\ &= \langle v(x) - \sum_{i=1}^r a_i(x, v(x)) \nabla g_i(x), v(x) \rangle - \langle v(x), \sum_{j=1}^r a_j(x, v(x)) \nabla g_j(x) \rangle \\ &\quad + \langle \sum_{i=1}^r a_i(x, v(x)) \nabla g_i(x), \sum_{j=1}^r a_j(x, v(x)) \nabla g_j(x) \rangle \\ &= \langle \pi(v)(x), v(x) \rangle - \sum_{j=1}^r a_j(x, v(x)) \langle v(x), \nabla g_j(x) \rangle \\ &\quad + \langle v(x) - \pi(v)(x), \sum_{j=1}^r a_j(x, v(x)) \nabla g_j(x) \rangle \\ &= \langle \pi(v)(x), v(x) \rangle - \sum_{j=1}^r a_j(x, v(x)) \langle v(x), \nabla g_j(x) \rangle \\ &\quad + \sum_{j=1}^r a_j(x, v(x)) \langle v(x), \nabla g_j(x) \rangle = \langle \pi(v)(x), v(x) \rangle. \end{aligned}$$

Przyjmujemy następujące oznaczenie ¹

$$\nabla^g f(x) := \pi(\nabla f)(x) = \nabla f(x) - \sum_{i=1}^r a_i(x, \nabla f(x)) \nabla g_i(x) \text{ dla } x \in D_g.$$

Dla $x \in D_g$ wektor $\nabla^g f(x)$ jest gradientem funkcji $f|_{g^{-1}(g(x))}$.

Uwaga 4.2.2. Jeśli funkcja $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ jest submersją to $\nabla g(x) \neq 0$ dla $x \in \mathbb{R}^n$ oraz zachodzi wzór

$$(4.7) \quad \nabla^g f(x) = \nabla f(x) - \frac{\langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle}{|\nabla g(x)|^2} \nabla g(x), \quad x \in D_g.$$

Przedstawimy teraz szczególny przypadek warunku $(\mathbb{G}, \pi)$ -pre-Malgrange’a.

Niech $D_g \subset \mathbb{R}^n$ i niech $g = (g_1, \dots, g_r) : D_g \rightarrow \mathbb{R}^r$ będzie submersją. Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek g-pre-Malgrange’a nad zbiorem* otwartym $U \subset \mathbb{R}$, jeżeli istnieje zbiór zwarty K taki, że:

$$(1M_g) \quad f^{-1}(U) \setminus K \subset D_g,$$

$$(2M_g) \quad \nabla^g f(x) \neq 0 \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K,$$

$$(3M_g) \quad \forall_{s \in S} \exists_{C_s > 0} |\langle x, \nabla^g f(x) \rangle| \leq C_s |x|^2 |\nabla^g f(x)|^2 \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K \cap G_s.$$

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek g-pre-Malgrange’a w punkcie* $y \in \mathbb{R}$, jeżeli istnieje otoczenie U punktu y takie, że funkcja f spełnia warunek g-pre-Malgrange’a nad U .

Uwaga 4.2.3. Warunki $(1M_g)$ i $(2M_g)$ odpowiadają warunkom $(1M_{\mathbb{G}})$ i $(2M_{\mathbb{G}})$ odpowiednio, a wobec (4.6) warunek $(3M_{\mathbb{G}})$ przyjmuje postać $(3M_g)$.

Wobec powyższej uwagi, z twierdzenia 4.1.5, natychmiast dostajemy poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.4. *Niech y będzie wartością regularną funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli funkcja f spełnia warunek g-pre-Malgrange’a w punkcie y , to y jest wartością typową funkcji f .*

¹W odróżnieniu od oznaczenia $\nabla_g f$ gradientu funkcji przy zadanym tensorze metrycznym g , submersję g będziemy umieszczać w indeksie górnym.

Uwaga 4.2.5. Załóżmy, że zbiory $G_s = g^{-1}(s)$ są zbiorami zwartymi dla $s \in S = g(D_g)$. Wtedy warunek $(2M_g)$ implikuje $(3M_g)$ w warunku g -pre-Malgrange’a nad zbiorem U . Zatem w tej sytuacji możemy pominąć warunek $(3M_g)$. Kładąc przykładowo $g : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x - a|^2$ dla $a \in \mathbb{R}^n$ otrzymujemy warunek ρ_a -regularności.

Podobnie jak na s. 88, możemy wprowadzić warunek g -Malgrange’a.

Niech $D_g \subset \mathbb{R}^n$ i niech $g = (g_1, \dots, g_r) : D_g \rightarrow \mathbb{R}^r$ będzie submersją. Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek g -Malgrange’a nad zbiorem* otwartym $U \subset \mathbb{R}$, jeżeli istnieje zbiór zwarty K taki, że:

$$(1M'_g) \quad f^{-1}(U) \setminus K \subset D_g,$$

$$(2M'_g) \quad \forall_{s \in S} \exists_{\delta_s > 0} |\nabla^g f(x)| |x| \geq \delta_s \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K \cap G_s.$$

Powiemy, że funkcja f spełnia *warunek g -Malgrange’a w punkcie* $y \in \mathbb{R}$, jeżeli istnieje otoczenie U punktu y takie, że funkcja f spełnia warunek g -Malgrange’a nad U .

Podobnie jak poprzednio, łatwo dowodzimy, że jeżeli funkcja f spełnia warunek g -Malgrange’a w punkcie y , to funkcja f spełnia warunek g -pre-Malgrange’a w punkcie y . Zatem z twierdzenia 4.2.4 dostajemy bezpośrednio poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.6. *Niech y będzie wartością regularną funkcji $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Jeżeli funkcja f spełnia warunek g -Malgrange’a w punkcie y , to y jest wartością typową funkcji f .*

Uwaga 4.2.7. Niech $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, $V = \text{lin}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Jeżeli przez $\text{vol}_k(v_1, \dots, v_k)$ oznaczymy k -wymiarową objętość prostopadłościanu rozpiętego na wektorach $v_1, \dots, v_k$, a przez $\pi_V(v_n)$ rzut wektora v_n na przestrzeń V to zachodzi

(4.8)

$$\text{vol}_n(v_1, \dots, v_n) = |\pi_V(v_n)| \text{vol}_{n-1}(v_1, \dots, v_{n-1}) = |\pi_V(v_n)| (G(v_1, \dots, v_{n-1}))^{\frac{1}{2}},$$

gdzie przez $G(v_1, \dots, v_{n-1})$ oznaczyliśmy wyznacznik Grama wektorów $v_1, \dots, v_{n-1}$.

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie dowolną funkcją gładką, $y \in \mathbb{R}$ i U otoczeniem punktu y . Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, a odwzorowanie

$g := (g_1, \dots, g_{n-1}) \in C^\infty(f^{-1}(U) \setminus K, \mathbb{R}^{n-1})$ będzie gładką submersją. Oznaczmy przez $Jac(g, f)$ jacobian odwzorowania (g, f) . Wobec (4.8) warunek g -Malgrange'a możemy teraz zapisać jako

$$\forall_{s \in S} \exists_{\delta_s > 0} \frac{|Jac(g, f)(x)||x|}{(G(\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_{n-1}(x)))^{\frac{1}{2}}} \geq \delta_s \text{ dla } x \in f^{-1}(U) \setminus K \cap g^{-1}(s).$$

Wprowadzone powyżej warunki dają większe możliwości badania zbioru wartości bifurkacyjnych co pokażemy na poniższych przykładach.

Przykład 4.2.8. Niech $p, q \in \mathbb{N}$. Określmy funkcję $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ wzorem

$$f_{p,q}(x, y, z) := x - 3x^{2p+1}y^{2q} + 2x^{3p+1}y^{3q} + yz, \quad x, y, z \in \mathbb{C}.$$

L. Păunescu i A. Zacharia zauważyli (patrz [PZ, Remark 1.2]), że po następującej zamianie zmiennych

$$Z := z - 3x^{2p+1}y^{2q-1} + 2x^{3p+1}y^{3q-1},$$

$$Y := y,$$

$$X := x + yZ,$$

funkcja $f_{p,q}$ upraszcza się do postaci $f_{p,q}(X, Y, Z) = X$. Dokładniej istnieje automorfizm wielomianowy $P = (P_1, P_2, P_3) : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ postaci

$$P_3(x, y, z) = z - 3x^{2p+1}y^{2q-1} + 2x^{3p+1}y^{3q-1},$$

$$P_2(x, y, z) = y,$$

$$P_1(x, y, z) = x + yP_3(x, y, z),$$

taki, że $f_{p,q} \circ P = P_1$. Zatem funkcja $f_{p,q}$ jest trywialną wiązką klasy C^∞ i $B(f_{p,q}) = \emptyset$. Ponadto wykładnik Łojasiewicza² funkcji $f_{p,q}$ w nieskończoności $L_\infty(f_{p,q})$ jest równy $-p/q$. Zatem dla $p \geq q$ mamy $L_\infty(f_{p,q}) \leq -1$ i funkcja $f_{p,q}$ nie spełnia warunku Malgrange'a w punkcie 0.

Analogicznie, w przypadku rzeczywistym, dowodzimy, że dla $p \geq q$ zachodzi

$$\emptyset = B(f_{p,q}) \subsetneq K_\infty(f_{p,q}) = \{0\}.$$

² $L_\infty(f_{p,q}) := \sup\{\nu \in \mathbb{R} : \exists_{C,R>0} |\nabla f_{p,q}(x)| \geq C|x|^\nu \text{ dla } |x| \geq R\}.$

Pokażemy, jak w tym przypadku prosta submersja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$g(x, y, z) := y, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

prowadzi do dokładnego oszacowania zbioru $B(f_{p,q})$. Dokładniej pokażemy, że $f_{p,g}$ spełnia warunek g -Malgrange'a nad $\mathbb{R}$, a ponieważ $\nabla f(x, y, z) \neq 0$ dla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ to, na mocy twierdzenia 4.2.6, zachodzi $B(f_{p,q}) = \emptyset$.

Istotnie, połóżmy $U := \mathbb{R}, K := \emptyset$. Mamy $\nabla g(x, y, z) = [0, 1, 0] \neq 0$ dla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ oraz $f^{-1}(U) \setminus K \subset D_g = \mathbb{R}^3$, co daje $(1M'_g)$. Ustalmy teraz $s \in S = \mathbb{R}$. Na mocy wzoru (4.7) dla $(x, y, z) \in G_s = g^{-1}(s)$ zachodzi

$$\begin{aligned} \nabla^g f(x, y, z) &= [1 - 3(2p+1)x^{2p}y^{2q} + 2(3p+1)x^{3p}y^{3q}, 0, y] \\ &= [1 - 3(2p+1)x^{2p}s^{2q} + 2(3p+1)x^{3p}s^{3q}, 0, s]. \end{aligned}$$

W przypadku gdy $s \neq 0$, mamy $|\nabla^g f(x, y, z)| \geq |s| > 0$ dla $(x, y, z) \in G_s$. Jeżeli $s = 0$, to otrzymujemy $|\nabla^g f(x, y, z)| = 1$ dla $(x, y, z) \in G_s$. Reasumując, spełniony jest warunek $(2M'_g)$, a zatem funkcja $f_{p,q}$ spełnia warunek g -Malgrange'a nad $\mathbb{R}$ i na mocy twierdzenia 4.2.6, zachodzi $B(f_{p,q}) = \emptyset$.

Przykład 4.2.9. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x, y) := \frac{y}{1+x^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Na s. 71 pokazaliśmy, że funkcja f nie spełnia warunku pre-Malgrange'a w punkcie 0. Rozważmy submersję $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$g(x, y) := x.$$

Pokażemy, że funkcja f spełnia warunek g -Malgrange'a nad $\mathbb{R}$. Istotnie, dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mamy $\nabla g(x, y) = [1, 0]$. Ustalmy $s \in S = \mathbb{R}$. Na mocy wzoru (4.7) zachodzi

$$|\nabla^g f(x, y)| = |[0, \frac{1}{1+x^2}]| = \frac{1}{1+s^2} \quad \text{dla } (x, y) \in G_s = g^{-1}(s).$$

Reasumując, spełniony jest warunek $(2M'_g)$, a zatem funkcja f spełnia warunek g -Malgrange'a nad $\mathbb{R}$. Ponieważ $\nabla f(x, y) \neq 0$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, to na mocy twierdzenia 4.2.6, zachodzi $B(f) = \emptyset$.

Jak pokażemy w kolejnym przykładzie, nieodpowiedni wybór submersji g może powodować, że funkcja f nie spełnia warunku g -Malgrange'a w punkcie y , podczas gdy klasyczny warunek Malgrange'a był spełniony.

Przykład 4.2.10. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$f(x, y) := y.$$

Oczywiście funkcja f spełnia warunek Malgrange'a w dowolnym punkcie $t \in \mathbb{R}$.

Oznaczmy $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y) := e^x - y.$$

Oczywiście $\nabla g(x, y) = [e^x, 1] \neq 0$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, zatem g jest submersją. Na mocy wzoru (4.7) dla dowolnych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi

$$\nabla^g f(x, y) = \left[\frac{e^x}{e^{2x} + 1}, \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right].$$

Weźmy dowolne $s \in S = \mathbb{R}$. Wtedy $G_s = g^{-1}(s) = \{(x, e^x - s) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$.

Ponadto

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, e^x - s) = -s,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |\nabla^g f(x, e^x - s)| |(x, e^x - s)| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \left[\frac{e^x}{e^{2x} + 1}, \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right] \right| |(x, e^x - s)| = 0.$$

Reasumując, funkcja f nie spełnia warunku (g, S) -Malgrange'a w żadnym punkcie $t \in \mathbb{R}$, podczas gdy f spełnia warunek Malgrange'a w dowolnym punkcie $t \in \mathbb{R}$.

Rozdział 5

Metody efektywne

W tym rozdziale przedstawimy metody pozwalające na wyznaczanie pewnych nadzbiorów zbioru punktów bifurkacyjnych $B(f)$ funkcji wielomianowej f . Dokładniej, podamy efektywny algorytm pozwalający na wyznaczenie zbiorów punktów $y \in \mathbb{R}$, dla których $(v, h, f) \notin O_y(f)$ przy ustalonych v, h . Podamy również algorytm pozwalający oszacować zbiór $S^h(f)$ przy pewnych założeniach narzuconych na funkcje h .

5.1 Łuki wymierne

Przedstawimy teraz definicje i twierdzenia wykorzystywane w dalszym ciągu pracy. Nazewnictwo i definicje zostały zapożyczone z pracy autorstwa Z. Jelonka i K. Kurdyki [JK2].

Niech $D_1, D_2 \in \mathbb{N}_0$. *Łukiem wymiernym* będziemy nazywać funkcję $x(t)$ postaci

$$(5.1) \quad x(t) = \sum_{-D_2 \leq k \leq D_1} a_k t^k, \quad t \in \mathbb{R}^*,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{R}^n$. Łuki wymierne postaci (5.1) będziemy nazywać łukami wymiernymi dwustopnia co najwyżej (D_1, D_2) . Jeśli dodatkowo $a_k \neq 0$ dla $k = D_1$ oraz $k = D_2$, to mówimy, że łuk wymierny ma dwustopień (D_1, D_2) . W dalszej części pracy będziemy utożsamiać łuk wymierny $x(t)$ z układem współczynników a_k , $k = -D_2, \dots, D_1$ we wzorze (5.1). Utożsamienie to zadaje bijekcję zbioru

wszystkich łuków wymiernych dwustopnia co najwyżej (D_1, D_2) ze zbiorem $\mathbb{R}^{n(1+D_1+D_2)}$.

Niech $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym¹ oraz $\deg f_i \leq d$. Połóżmy

$$D_1 := (d+1)^n(d^n+2)^{n-1}, \quad D_2 = (d-1)D_1 + 1.$$

Przez *rozmaitość asymptotycznych łuków wymiernych* odwzorowania F będziemy rozumieć zbiór algebraiczny $AV(F) \subset \mathbb{R}^{n(dD_1+2)}$ składający się z łuków wymiernych $x(t)$ dwustopnia co najwyżej (D_1, D_2) postaci (5.1) takich, że

$$(5.2) \quad F(x(t)) = c_0 + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k t^k \text{ dla pewnych } c_k \in \mathbb{R}^m, k < 0,$$

oraz

$$(5.3) \quad \sum_{k>0} \sum_{j=1}^n a_{k,j}^2 = 1, \text{ gdzie } a_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^n.$$

Przy ustalonym odwzorowaniu F , każdemu elementowi $x(t) \in AV(F)$ możemy przyporządkować wektor $c_0 \in \mathbb{R}^m$ zgodnie ze wzorem (5.2). Odwzorowanie to będziemy oznaczać przez $c_0 : AV(F) \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dla pełności pracy, przedstawimy twierdzenie wraz z szkicem dowodu, pochodzące z pracy [JK2]. Jest ono zestawieniem [JK2, Theorem 6.7] oraz [JK2, Proposition 6.12], gdzie pominęliśmy niewykorzystywane założenie o generycznej skończoności odwzorowania F .

Twierdzenie 5.1.1. *Niech $F : \mathbb{R}^n \ni x \rightarrow (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym takim, że $\deg f_i \leq d$ dla $i = 1, \dots, m$. Załóżmy, że $b \in \mathbb{R}^m$ jest punktem niewłaściwości odwzorowania F . Istnieje wtedy krzywa $x(t)$ postaci*

$$x(t) = \sum_{-(d-1)D-1 \leq k \leq D} a_k t^k, t \in \mathbb{R}^*,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{R}^n$, $D = (d+1)^n(d^n+2)^{n-1}$ taka, że $\lim_{t \rightarrow \infty} F(x(t)) = b$. Ponadto, możemy założyć, że

$$(5.4) \quad \sum_{k>0} \sum_{j=1}^n a_{k,j}^2 = 1, \text{ gdzie } a_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^n.$$

¹W pracy [JK2] zakładano dodatkowo, że F jest odwzorowaniem niewłaściwym, generycznie skończonym. My pomijamy te założenia.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $n = m$. Niech $(x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ będzie ciągiem takim, że $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) = b$. Z lematu o wyborze krzywej w nieskończoności (por. 1.7.3) istnieje krzywa semialgebraiczna $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ taka, że $\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = +\infty$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} F(\gamma(t)) = b$. Oznaczmy przez $\bar{\gamma}(t) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ obraz krzywej $\gamma(t)$ po zanurzeniu w przestrzeń rzutową $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ postaci

$$\Phi_0 : \mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (1 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$

Z założenia o semialgebraiczności krzywej $\gamma(t)$ istnieje granica $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\gamma}(t) := \bar{a} = (\bar{a}_0 : \bar{a}_1 : \dots : \bar{a}_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. Ponieważ $\lim_{t \rightarrow \infty} |\gamma(t)| = +\infty$ to $\bar{a} \in H_0$, gdzie

$$H_0 = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x_0 = 0\}.$$

Oznaczamy przez Y obraz wykresu odwzorowania F po zanurzeniu w przestrzeni $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, a przez X domknięcie zbioru Y w topologii Zarayskiego przestrzeni $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$. Wtedy zbiór X jest składową nierozkładalną zbioru opisanego przez układ równań

$$(5.5) \quad x_0^{d_i} y_i = \bar{f}_i(x_0, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie dla $i = 1, \dots, n$ przez $\bar{f}_i$ oznaczyliśmy ujednorodnienie² wielomianu f_i . Bez straty ogólności rozważań, możemy założyć, że $\bar{a}_1 = 1$ i rozważmy układ współrzędnych w otoczeniu punktu a postaci

$$\Phi_1 : \mathbb{R}^n \ni (x_0, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (x_0 : 1 : x_2 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$

Zbiór

$$X' := \{(x_0, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (\Phi_1(x_0, x_2, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \in X\}$$

opisany jest przez układ równań postaci

$$(5.6) \quad p_i(x_0, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) := x_0^{d_i} y_i - \bar{f}_i(x_0, 1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Oczywiście $\deg p_i = 1 + d_i$. Oznaczając $Y' := X' \setminus (\Phi_1^{-1}(H_0) \times \mathbb{R}^n)$ otrzymujemy $(\bar{a}, b) \in (\Phi_1^{-1}(H_0) \times \mathbb{R}^n) \cap \bar{Y}'$, gdzie przez $\bar{Y}'$ oznaczyliśmy domknięcie zbioru Y' w topologii naturalnej. Wektory ∇p_i dla $i = 1, \dots, n$ są liniowo niezależne

² $\bar{f}_i(x_0, \dots, x_n) := x_0^{d_i} f_i(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0})$ dla $i = 1, \dots, n$.

na zbiorze Y' , więc odwzorowanie $P = (p_1, \dots, p_n) : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest submersją na zbiorze Y' . Z [JK2, Proposition 6.2] istnieje krzywa algebraiczna $C_1 \subset \mathbb{R}^{2n}$ stopnia $d_* \leq (d+1)^n(d^n+1)^{n-1}$ taka, że $(\bar{a}, b) \in \overline{C_1 \cap Y'}$. Przyjmijmy $C := \Phi_0^{-1}(\Phi_1(\pi(C_1)))$, gdzie $\pi(x_0, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (x_0, x_2, \dots, x_n)$. Oczywiście $\deg C \leq d_*$. Z definicji krzywej C istnieje składowa C_b krzywej C taka, że $\lim_{x \in C_b, x \rightarrow \infty} F(x) = b$. Na mocy [JK2, Lemma 3.2 i Lemma 3.3] istnieje łuk wymierny $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ postaci

$$\tilde{x}(t) = \sum_{-(d-1)D-1 \leq k \leq D} \tilde{a}_k t^k, t \in \mathbb{R}^*,$$

gdzie $\tilde{a}_k \in \mathbb{R}^n$, $D = (d+1)^n(d^n+2)^{n-1}$, $\sum_{k>0} |\tilde{a}_k| > 0$ taki, że $\lim_{t \rightarrow \infty} F(\tilde{x}(t)) = b$. Ponadto, istnieje liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\sum_{k>0} \sum_{j=1}^n \lambda^{2k} (\tilde{a}_{k,j})^2 = 1,$$

gdzie $\tilde{a}_k = (\tilde{a}_{k,1}, \dots, \tilde{a}_{k,n})$. Zatem kładąc $x(t) = \tilde{x}(\lambda t)$ otrzymujemy poszukiwaną krzywą w tym przypadku.

Przypadek gdy $m > n$ sprowadza się do powyższego przez rozważenie odwzorowania $\pi \circ F$, gdzie π jest generycznym rzutem z przestrzeni $\mathbb{R}^m$ na przestrzeń $\mathbb{R}^n$ (por. dowód [JK2, Theorem 4.2]).

Przypadek gdy $m < n$ sprowadza się do powyższego przez powtórzenie $n - m$ razy dowolnej współrzędnej odwzorowania F . $\square$

5.2 Wyznaczanie zbioru $K_\infty^{v,h}(f)$ dla wielomianów

Niech $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym. Ustalmy funkcję $h \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ posiadającą własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$ oraz pole wektorowe $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Przyjmijmy

$$\Sigma^v(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_v f(x) = 0\},$$

$$K_\infty^v(f) := \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k) \subset \Sigma^v(f)} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\}.$$

Uwaga 5.2.1. Zbiór $K_\infty^v(f)$ jest dokładnie zbiorem punktów niewłaściwości funkcji f obciętej do zbioru $\Sigma^v(f)$. W przypadku gdy pole v spełnia warunek $v(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x) = 0$, zbiór $K_\infty^v(f)$ jest zawarty w zbiorze wartości nieregularnych funkcji f . W szczególności, jeżeli f jest wielomianem i pole v spełnia wspomniany warunek, to zbiór $K_\infty^v(f)$ jest efektywnie wyznaczalny (na przykład przy pomocy baz Gröbnera jak w [JK1, Remark 3.1], lub przy pomocy algorytmu Algebraic Sampling [BPR, Algorithm 12.64]). Pola v spełniające powyższy warunek możemy konstruować z pola ∇f podobnie jak pola z rodzin $\mathfrak{h}^1, \mathfrak{h}^2, \mathfrak{h}^3$ z podrozdziału 2.1.

Własność 5.2.2. Przy powyższych założeniach i oznaczeniach, jeśli $y \in \mathbb{R} \setminus K_\infty^v$, to istnieje liczba $\varepsilon_y > 0$ oraz zbiór zwarty $K_y \subset \mathbb{R}^n$ takie, że

$$\Sigma^v(f) \cap f^{-1}(y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y) \setminus K_y = \emptyset.$$

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że nie jest spełniona teza wniosku 5.2.2. Wówczas istnieje ciąg punktów $(x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $x_k \in \Sigma^v(f) \cap f^{-1}(y - \varepsilon_k, y + \varepsilon_k) \setminus K'_k$ dla $k \in \mathbb{N}$, gdzie

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k}, K'_k := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq k\}, k \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $y \in K_\infty^v(f)$, co jest sprzeczne z założeniem. □

Położmy³

$$K_\infty^{v,h,H}(f) := \{y \in \mathbb{R} \setminus K_\infty^v(f) : \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y, \lim_{k \rightarrow \infty} |H(x_k)| = +\infty\}.$$

Wobec własności 5.2.2, zbiór $K_\infty^{v,h,H}(f)$ jest poprawnie zdefiniowany. Przez $K_\infty^{v,h}(f)$ będziemy oznaczać zbiór postaci

$$K_\infty^{v,h}(f) := K_\infty^{v,h,H}(f) \cup K_\infty^v(f).$$

³Przypomnijmy, że $H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)}$, dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus (K \cup \Sigma_v(f))$.

Zbiór $K_\infty^{v,h}(f)$ będziemy nazywać *zbiorem (v, h) -asymptotycznych wartości krytycznych funkcji f w nieskończoności*. Jest on pewnym uogólnieniem zbioru asymptotycznych wartości krytycznych $K_\infty(f)$.

Z twierdzenia 2.6.3 dostajemy poniższy wniosek.

Wniosek 5.2.3. $B_\infty(f) \subset K_\infty^{v,h}(f)$.

Dowód. Ustalmy punkt $y \notin K_\infty^{v,h}(f)$. Pokażemy, że y jest wartością typową funkcji f w nieskończoności. Niech liczba ε_y i zbiór K_y będą określone jak we własności 5.2.2. Z założenia $y \notin K_\infty^{v,h,H}(f)$ otrzymujemy, że istnieje liczba $\varepsilon \in (0, \varepsilon_y)$ i zbiór zwarty $K' \supset (K \cup K_y)$ takie, że $v \in \cap (f, f^{-1}(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \setminus K')$ oraz funkcja $H = \frac{\partial_v h}{\partial_v f}$ jest ograniczona na zbiorze $f^{-1}(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \setminus K'$. Istotnie, w przeciwnym przypadku istnieje ciąg $(x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y$ oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} |H(x_k)| = +\infty$, co przeczy temu, że $y \notin K_\infty^{v,h,H}(f)$.

Z twierdzenia 2.6.3 otrzymujemy, że y jest wartością typową funkcji f w nieskończoności, co kończy dowód. $\square$

W dalszym ciągu paragrafu będziemy zakładać, że f jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i $\deg f \leq d$. Założymy ponadto, że dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\Sigma^v(f) \cup K)$ zachodzi

$$(5.7) \quad H(x) = \frac{\partial_{v(x)} h(x)}{\partial_{v(x)} f(x)} = \frac{p(x)}{q(x)},$$

gdzie $p, q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ są wielomianami takimi, że $\deg p, \deg q \leq d - 1$. Rozważmy odwzorowanie $\phi_{v,h} : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^5$ określone wzorem

$$(5.8) \quad \phi_{v,h}(x, z_1, z_2) = (f(x), z_1 p(x), z_1 q(x), z_2 |x|^2, z_2),$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^n, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Niech $c_0 : AV(\phi_{v,h}) \rightarrow \mathbb{R}^5$ będzie odwzorowaniem określonym przez równanie (5.2) dla $F = \phi_{v,h}$. Oznaczmy zbiór

$$BV(\phi_{v,h}) := \{(x, z_1, z_2)(t) \in AV(\phi_{v,h}) : c_0((x, z_1, z_2)(t)) = (y, 1, 0, 1, 0)\}.$$

Twierdzenie 5.2.4. $K_\infty^{v,h}(f) = \pi(c_0(BV(\phi_{v,h}))) \cup K_\infty^v(f)$ gdzie przez $\pi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ oznaczyliśmy rzut na pierwszą współrzędną.

Dowód. Wystarczy pokazać, że $K_\infty^{v,h,H}(f) = \pi(BV(\phi_{v,h})) \setminus K_\infty^v(f)$. Pokażemy najpierw $\pi(BV(\phi_{v,h})) \setminus K_\infty^v(f) \subset K_\infty^{v,h,H}(f)$. Niech $y \in \pi(BV(\phi_{v,h})) \setminus K_\infty^v(f)$ i $(x, z_1, z_2)(t) \in AV(\phi_{v,h})$ spełnia

$$(5.9) \quad c_0((x, z_1, z_2)(t)) = (y, 1, 0, 1, 0).$$

Zatem, z określenia odwzorowania c_0 , mamy

$$(5.10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)|^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z_2(t)|x(t)|^2}{z_2(t)} = +\infty.$$

Ponieważ $y \notin K_\infty^v(f)$, to z własności 5.2.2 istnieje liczba $t_0 > 0$ taka, że dla $t > t_0$ zachodzi $x(t) \in \mathbb{R}^n \setminus (\Sigma^v \cup K)$. Na mocy wzorów (5.9) i (5.7) dostajemy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |H(x(t))| = \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z_1(t)\partial_{v(x(t))}h(x(t))}{z_1(t)\partial_{v(x(t))}f(x(t))} \right| = \left| \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z_1(t)p(x(t))}{z_1(t)q(x(t))} \right| = +\infty,$$

co daje $y \in K_\infty^{v,h,H}(f)$ i kończy dowód inkluzji $\pi(c_0(BV(\phi_{v,h}))) \setminus K_\infty^v \subset K_\infty^{v,h,H}(f)$.

Pokażemy teraz, że $K_\infty^{v,h,H}(f) \subset \pi(c_0(BV(\phi_{v,h}))) \setminus K_\infty^v$. Weźmy dowolny punkt $y \in K_\infty^{v,h,H}(f)$. Z definicji zbioru $K_\infty^{v,h,H}(f)$ otrzymujemy, że istnieje ciąg punktów $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y$ oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} |H(x_k)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |p(x_k)/q(x_k)| = +\infty$. Zatem istnieje indeks $k_0 \in \mathbb{N}$ taki, że dla $k > k_0$ mamy $p(x_k) \neq 0$ i $|x_k| \neq 0$. Przyjmijmy $z_1^k = 1/p(x_k)$, $z_2^k = 1/|x_k|^2$ dla $k > k_0$. Wtedy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{v,h}(x_k, z_1^k, z_2^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_k), 1, \frac{1}{H(x_k)}, 1, \frac{1}{|x_k|^2}) = (y, 1, 0, 1, 0).$$

Zatem $(y, 1, 0, 1, 0)$ jest punktem niewłaściwości odwzorowania $\phi_{v,h}$ i na mocy twierdzenia 5.1.1 otrzymujemy $y \in \pi(BV(\phi_{v,h}))$. To daje inkluzję $K_\infty^{v,h,H}(f) \subset \pi(c_0(BV(\phi_{v,h}))) \setminus K_\infty^v$ i kończy dowód. $\square$

Algorytm wyznaczania zbioru $\pi(c_0(BV(\phi_{v,h})))$

Niech $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ i $\deg f \leq d$. Niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, $h \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus K)$ funkcją posiadającą własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$ i niech $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Załóżmy, że dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\Sigma^v(f) \cup K)$ zachodzi $H(x) = \frac{\partial_{v(x)}h(x)}{\partial_{v(x)}f(x)} =$

$\frac{p(x)}{q(x)}$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ są wielomianami takimi, że $\deg p, \deg q \leq d-1$.
Oznaczmy dodatkowo

$$D_1 := (d+1)^{(n+2)}(d^{(n+2)} + 2)^{n+1}, \quad D_2 = (d-1)D_1 + 1$$

i niech $d \geq 3$.

W tej sytuacji zbiór $\pi(c_0(BV(\phi_{v,h})))$ wyznaczamy wykonując kolejno następujące punkty.

1. Wyznaczenie układu równań opisującego rozmaitość $BV(\phi_{v,h})$:

(a) oznaczamy łuk wymierny

$$(x, z_1, z_2)(t) := \sum_{-D_2 \leq k \leq D_1} a_k t^k,$$

gdzie $a_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ i dalej przyjmujemy

$$a := (a_{-D_2}, \dots, a_{D_1}) \in \mathbb{R}^{(n+2)(1+D_1+D_2)},$$

(b) wyznaczamy wielomiany $b_k(a)$ będące współczynnikami rozwinięcia

$$f(x(t)) = \sum_k b_k(a) t^k,$$

(c) wyznaczamy wielomiany $c_k(a)$ będące współczynnikami rozwinięcia

$$z_1(t)p(x(t)) = \sum_k c_k(a) t^k,$$

(d) wyznaczamy wielomiany $d_k(a)$ będące współczynnikami rozwinięcia

$$z_1(t)q(x(t)) = \sum_k d_k(a) t^k,$$

(e) wyznaczamy wielomiany $e_k(a)$ będące współczynnikami rozwinięcia

$$z_2(t)|x(t)|^2 = \sum_k e_k(a) t^k.$$

Rozwinięcia występujące w punktach (a), (b), (c), (d) oraz (e) są oczywiście rozwinięciami skończonymi.

Układ równań opisujący rozmaitość $BV(\phi_{v,h})$ możemy zapisać jako:

$$(5.11) \quad \begin{cases} \sum_{k>0} \sum_{j=1}^n a_{k,j}^2 - 1 = 0, \\ b_k(a) = 0 \text{ dla } k > 0, \\ c_k(a) = 0 \text{ dla } k > 0, \\ c_0(a) - 1 = 0, \\ d_k(a) = 0 \text{ dla } k \geq 0, \\ e_k(a) = 0 \text{ dla } k > 0, \\ e_0(a) - 1 = 0, \\ a_{k,n+2} = 0 \text{ dla } k \geq 0. \end{cases}$$

Ponieważ nierówność $\sum_{k>0} \sum_{j=1}^n a_{k,j}^2 > 0$ wynika z ostatnich trzech warunków w układzie 5.11, to, w celu wyznaczenia zbioru $\pi(c_0(BV(\phi_{v,h})))$, równanie $\sum_{k>0} \sum_{j=1}^n a_{k,j}^2 - 1 = 0$ można pominąć i ograniczyć się do rozważania zbioru $\widetilde{BV}(\phi_{v,h})$ (por. koniec dowodu twierdzenia 5.1.1) opisanego następującym układem:

$$(5.12) \quad \begin{cases} b_k(a) = 0 \text{ dla } k > 0, \\ c_k(a) = 0 \text{ dla } k > 0, \\ c_0(a) - 1 = 0, \\ d_k(a) = 0 \text{ dla } k \geq 0, \\ e_k(a) = 0 \text{ dla } k > 0, \\ e_0(a) - 1 = 0, \\ a_{k,n+2} = 0 \text{ dla } k \geq 0, \end{cases}$$

Jest to skończony układ równań wielomianowych. Oznaczmy przez N liczbę równań w powyższym układzie.

2. Układ równań (5.12) zastępujemy równaniem $R(a) := \sum_{l=1}^N r_l^2(a) = 0$, gdzie r_l dla $l = 1, \dots, N$ są wielomianami występującymi po lewej stronie układu (5.12). Mamy $\widetilde{BV}(\phi_{v,h}) := \{a \in \mathbb{R}^{(n+2)(1+D_1+D_2)} : R(a) = 0\}$.
3. Korzystając z algorytmu Algebraic Sampling [BPR, Algorithm 12.64], wyznaczamy skończony zbiór $A \subset \widetilde{BV}(\phi_{v,h})$ przecinający wszystkie

składowe spójności zbioru $\widetilde{BV}(\phi_{v,h})$. Bezpośrednio z definicji zbioru $\pi(c_0(\widetilde{BV}(\phi_{v,h})))$ mamy

$$\{b_0(\bar{a}) : \bar{a} \in A\} \subset \pi(c_0(\widetilde{BV}(\phi_{v,h}))).$$

4. Oznaczmy

$$\bar{b}_0(a) := \prod_{\bar{a} \in A} (b_0(a) - \bar{a}) \quad \text{dla } a \in \mathbb{R}^{(n+2)(1+D_1+D_2)}.$$

Metodami baz Gröbnera sprawdzamy, czy $\bar{b}_0(a) = 0$ na zbiorze $\widetilde{BV}(\phi_{v,h})$. Alternatywnie, możemy użyć algorytmu Algebraic Sampling [BPR, Algorithm 12.64] do rozstrzygnięcia, czy zbiór

$$B := \{(a, s) \in \mathbb{R}^{(n+2)(1+D_1+D_2)+1} : (\bar{b}_0(a)s - 1)^2 + R(a) = 0\}$$

jest pusty. Łatwo zauważyć, że $B = \emptyset \Leftrightarrow \bar{b}_0(a) = 0$ na zbiorze $\widetilde{BV}(\phi_{v,h})$.

5. (a) Jeśli $\bar{b}_0(a) = 0$ dla $a \in \widetilde{BV}(\phi_{v,h})$ to zachodzi

$$\{b_0(\bar{a}) : \bar{a} \in A\} = \pi(c_0(\widetilde{BV}(\phi_{v,h}))) = \pi(c_0(BV(\phi_{v,h})))$$

w tym przypadku.

(b) Jeśli istnieje $a \in \widetilde{BV}(\phi_{v,h})$ takie, że $\bar{b}_0(a) \neq 0$, to istnieje składowa spójności zbioru $\widetilde{BV}(\phi_{v,h})$, na której funkcja b_0 nie jest stała. Z własności Darboux, zbiór $\pi(c_0(\widetilde{BV}(\phi_{v,h}))) = \pi(c_0(BV(\phi_{v,h})))$ jest nieskończony w tym przypadku.

Uwaga 5.2.5. Powyższy algorytm jest w pewnym sensie uogólnieniem algorytmu występującego w pracy [JK2]. Uogólnienie to polega na możliwości użycia dowolnej funkcji h oraz pola v spełniających założenia podane przed algorytmem. Przyjmując $h(x) := \ln(|x|)^2$ dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ oraz $v = \nabla f$, zbiór $K_\infty^{v,h}(f)$ pokrywa się ze zbiorem wartości spełniającym warunek pre-Malgrange’a. Jest on podzbiorem zbioru asymptotycznych wartości krytycznych (patrz własność 3.3.2), którego dotyczył algorytm w [JK2]. Należy zwrócić uwagę, że w stosunku do algorytmu w [JK2], w celu uniknięcia rozważania funkcji wymiernych, dodaliśmy dwie nowe niewiadome z_1, z_2 , które powodują zwiększenie wymiaru przestrzeni otaczającej zbiór $BV(\phi_{v,h})$.

Uwaga 5.2.6. Metoda użyta w powyższym algorytmie pozwala w efektywny sposób rozstrzygnąć, czy dany wielomian $b \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ znika na zbiorze algebraicznym V postaci $V := \{x \in \mathbb{R}^n : r_1(x) = \dots = r_N(x) = 0\}$, gdzie $r_1, \dots, r_N \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ (por. [BPR, Remark 13.3, Exercise 13.4]). Mianowicie, biorąc wielomian

$$q(x, y) := (b(x)y - 1)^2 + q_1^2(x) + \dots + q_r^2(x)$$

i stosując algorytm Algebraic Sampling [BPR, Algorithm 12.64], możemy efektywnie stwierdzić, czy zbiór $q^{-1}(0)$ jest niepusty. Wielomian b znika na zbiorze V wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $q^{-1}(0)$ jest pusty, bowiem zbiór $V \setminus b^{-1}(0)$ jest rzutem zbioru $q^{-1}(0)$ na przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

5.3 Szacowanie zbioru $S^h(f)$ dla wielomianów

Niech $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ i niech $K \subset \mathbb{R}^n$ będzie zwartym zbiorem semialgebraicznym oraz niech $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus K)$ będzie funkcją mającą własność właściwości na $\mathbb{R}^n \setminus K$. Przypomnijmy, że przez $S^h(f)$ oznaczamy zbiór postaci

$$S^h(f) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists_{(x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, h, \mathbb{R}^n \setminus K)} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\}.$$

Z wniosku 2.7.5 otrzymujemy, że $B(f) \subset S^h(f) \cup K_0(f)$. W pracy [DT] autorzy podali pewną metodę szacowania zbioru $S^h(f)$ w przypadku, gdy $h(x) = \rho_a(x) = |x - a|^2$. Inspirowani tą pracą podamy algorytm pozwalający aproksymować zbiór $S^h(f)$ przy innych założeniach. Mianowicie będziemy zakładać, że $\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}$ są funkcjami wymiernymi. Oznaczmy

$$I := \{i \in \{1, \dots, n\} : \frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0\}.$$

Funkcja h ma własność właściwości na zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus K$, więc $\frac{\partial h}{\partial x_i} \neq 0$ i dla $i \in I$ istnieją wielomiany $p_i, q_i \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$, $p_i \neq 0, q_i \neq 0$ takie, że

$$(5.13) \quad p_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = q_i \frac{\partial h}{\partial x_i}.$$

Ponieważ $\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}$ są funkcjami wymiernymi, więc dla dowolnych $i \in I, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$ istnieją wielomiany $m_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ takie, że

$$(5.14) \quad \frac{m_{i,j}}{r_{i,j}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial h}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial h}{\partial x_i},$$

przy czym $r_{i,j} \neq 0$ dla $i \in I, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$. Przyjmijmy

$$\deg p := \max\{\deg p_i : i \in I\},$$

$$\deg q := \max\{\deg q_i : i \in I\},$$

$$\deg m := \max\{\deg m_{i,j} : i \in I, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i\}.$$

Dla $i \in I$ oznaczmy

$$M_i := \{x \in \mathbb{R}^n : m_{i,j}(x) = 0 \quad \text{dla } j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i\}.$$

Zbiory M_i są zbiorami algebraicznymi takimi, że $M(f, h, \mathbb{R}^n \setminus K) \subset \bigcup_{i \in I} M_i$. Będziemy zakładać dodatkowo, że dla każdego $i \in I$ wektory $\nabla m_{i,j}(x)$, $j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$ są liniowo niezależne⁴ dla $x \in M_i$. Oznaczmy

$$D_1 := (\deg m)^{n-1}(\deg p + 1), \quad D_2 := D_1 \max\{\deg f - 1, \deg p, \deg q\}.$$

Dla $i \in I$ przez AV_i będziemy rozumieć łuki wymierne $(x, z) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dwustopnia co najwyżej (D_1, D_2) , postaci

$$(x(t), z(t)) = \sum_{-D_2 \leq k \leq D_1} a_k t^k,$$

takie, że:

- a) $\sum_{k>0} \sum_{j=1}^n a_{k,j}^2 = 1$, gdzie $a_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n+1})$,
- b) $f(x(t)) = b_0 + \sum_{k=-1}^{-\infty} b_k t^k$, gdzie $b_k \in \mathbb{R}$ dla $k < 0$,
- c) $p_i(x(t))z(t) = 1 + \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k^i t^k$, gdzie $c_k \in \mathbb{R}$ dla $k < 0$,
- d) $q_i(x(t))z(t) = \sum_{k=-1}^{-\infty} d_k^i t^k$, gdzie $d_k \in \mathbb{R}$ dla $k < 0$.

Zbiory $AV_i \subset \mathbb{R}^{(n+1)(1+D_1+D_2)}$ są zbiorami algebraicznymi dla $i \in I$. Każdemu elementowi $(x(t), z(t)) \in AV_i$ możemy przyporządkować punkt $b_0 \in \mathbb{R}$ zgodnie z podpunktem b). Odwzorowanie to będziemy oznaczać przez $b_0 : AV_i \rightarrow \mathbb{R}$.

Twierdzenie 5.3.1. $S^h(f) \setminus K_0(f) \subset \bigcup_{i \in I} b_0(AV_i)$

⁴W przypadku gdy $h = \rho_a$ założenie to jest generycznie spełnione, patrz [DT, Lemma 2.3].

Dowód. Niech $y \in S^h(f) \setminus K_0(f)$. Wówczas istnieje ciąg $(x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, h, \mathbb{R}^n \setminus K)$ taki, że $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = +\infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y$. Ponieważ $y \notin K_0(f)$, to istnieje indeks $i \in \{1, \dots, n\}$ taki, że dla nieskończenie wielu $k \in \mathbb{N}$ zachodzi⁵ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_k) \neq 0$. Zatem, wybierając ewentualnie podciąg, możemy założyć, że $x_k \in M_i$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz ustalonego indeksu $i \in I$ oraz istnieje gałąź $\Gamma_0 \subset \mathbb{R}^n$ kielka M_i w nieskończoności taka, że $x_k \in \Gamma_0$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{x \in \Gamma_0, |x| \rightarrow \infty} f(x) = y$. Wówczas z równości (5.13), określenia zbioru M_i oraz uwagi 2.7.8 wynika, że

$$(5.15) \quad \lim_{x \in \Gamma_0, |x| \rightarrow \infty} \frac{|p_i(x)|}{|q_i(x)|} = \lim_{x \in \Gamma_0, |x| \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)}{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)} \right| = \lim_{x \in \Gamma_0, |x| \rightarrow \infty} \frac{|\nabla h(x)|}{|\nabla f(x)|} = +\infty.$$

Zatem wielomian p_i nie ma zer na kielku Γ_0 . Oznaczmy

$$m_{i,(n+1)}(x, z) := p_i(x)z,$$

$$\Gamma_1 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \Gamma_0, \quad m_{i,(n+1)}(x, z) = 1\}.$$

Zauważmy, że wektory $\nabla m_{i,j}(x), j = 1, \dots, n, j \neq i, \nabla m_{i,(n+1)}(x, z)$ są liniowo niezależne dla $(x, z) \in \Gamma_1$ (traktujemy tutaj $m_{i,j}$ jako funkcje zależne od zmiennych x, z). Zatem zbiór Γ_1 jest krzywą gładką stopnia co najwyżej D_1 . Na mocy lematu ([JK2, Lemma 3.2]) kielk Γ_1 posiada parametryzację postaci

$$(x(t), z(t)) = \sum_{-\infty < k \leq D_1} a_k t^k, \text{ dla } t \in \mathbb{R}, |t| > R,$$

gdzie $a_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,(n+1)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ i $\lim_{t \rightarrow \infty} |(x(t), z(t))| = +\infty$.

Zauważmy, że $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = +\infty$. Istotnie, w przeciwnym razie istniałby punkt $c \in \mathbb{R}^n$ taki, że $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c$. Oznaczmy przez $\overline{\Gamma_1}$ domknięcie zbioru Γ_1 w przestrzeni $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R})$. Wtedy

$$(c : \frac{1}{p(c)} : 1) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) : z(t) : 1) \in H_\infty,$$

gdzie $H_\infty = \{(x : z : w) \in \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{R}) : w = 0\}$, co jest niemożliwe. Reasumując, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = +\infty$.

Z równości $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = +\infty$ dostajemy, że zachodzi nierówność $\sum_{k>0}^{D_1} \sum_{j=1}^n |a_{k,j}| > 0$. Ponadto, z określenia zbioru Γ_1 mamy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(x(t))z(t) = 1,$$

⁵Przez $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_k)$ rozumiemy i -tą pochodną cząstkową funkcji f w punkcie x_k .

co wobec równości (5.15) i (5.13) daje

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(x(t))z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(x(t))z(t) \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))}{\frac{\partial h}{\partial x_i}(x(t))} = 0.$$

Na mocy [JK2, Lemma 3.2], jeżeli przyjmiemy⁶ $(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t)) := \sum_{-D_2 \leq k \leq D_1} a_k t^k$, to spełnione są warunki b), c), d) z definicji AV_i przy czym $b_0 = y$. Przeparametryzowując ewentualnie krzywą $(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t))$ możemy założyć, że spełniony jest warunek a) z definicji AV_i . To daje tezę. $\square$

Algorytm wyznaczania zbioru $\bigcup_{i \in I} b_0(AV_i)$

Przyjmijmy oznaczenia i założenia jak przed twierdzeniem 5.3.1 i ustalmy indeks $i \in I$. Podamy teraz algorytm pozwalający wyznaczyć zbiór $b_0(AV_i)$ przy zadanych współczynnikach wielomianów f, p_i, q_i . Wobec twierdzenia 5.3.1 algorytm ten prowadzi do efektywnego oszacowania zbioru wartości bifurkacyjnych wielomianu f .

1. Wyznaczenie układu równań opisującego rozmaitość AV_i :

(a) oznaczamy łuk wymierny

$$(x(t), z(t)) := \sum_{-D_2 \leq k \leq D_1} a_k t^k,$$

gdzie $a_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,(n+1)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ i dalej przyjmujemy

$$a := (a_{-D_2}, \dots, a_{D_1}) \in \mathbb{R}^{(n+1)(1+D_1+D_2)},$$

(b) wyznaczamy wielomiany $b_k(a)$ będące współczynnikami rozwinięcia

$$f(x(t)) = \sum_k b_k(a) t^k,$$

(c) wyznaczamy wielomiany $c_k(a)$ będące współczynnikami rozwinięcia

$$z(t)p_i(x(t)) = \sum_k c_k(a) t^k,$$

⁶Przypomnijmy, że $D_2 = D_1 \max\{\deg f - 1, \deg p, \deg q\}$.

(d) wyznaczamy wielomiany $d_k(a)$ będące współczynnikami rozwinięcia

$$z(t)q_i(x(t)) = \sum_k d_k(a)t^k.$$

Rozwinięcia występujące w punktach (a), (b), (c) oraz (d) są oczywiście rozwinięciami skończonymi.

Układ równań opisujący rozmaitość AV_i możemy zapisać jako:

$$(5.16) \quad \begin{cases} \sum_{k>0} \sum_{j=1}^n a_{k,j}^2 - 1 = 0, \\ b_k(a) = 0 \text{ dla } k > 0, \\ c_k(a) = 0 \text{ dla } k > 0, \\ c_0(a) - 1 = 0, \\ d_k(a) = 0 \text{ dla } k \geq 0, \end{cases}$$

Jest to skończony układ równań wielomianowych. Oznaczmy przez N liczbę równań w powyższym układzie.

2. Układ równań (5.16) zastępujemy równaniem $R(a) := \sum_{l=1}^N r_l^2(a) = 0$, gdzie r_l dla $l = 1, \dots, N$ są wielomianami występującymi po lewej stronie układu (5.16). Mamy $AV_i := \{a \in \mathbb{R}^{(n+1)(1+D_1+D_2)} : R(a) = 0\}$.

3. Korzystając z algorytmu Algebraic Sampling [BPR, Algorithm 12.64] wyznaczamy skończony zbiór $A \subset AV_i$ przecinający wszystkie składowe spójności zbioru AV_i . Bezpośrednio z definicji zbioru $b_0(AV_i)$ mamy

$$\{b_0(\bar{a}) : \bar{a} \in A\} \subset b_0(AV_i).$$

4. Oznaczmy

$$\bar{b}_0(a) := \prod_{\bar{a} \in A} (b_0(a) - \bar{a}) \text{ dla } a \in \mathbb{R}^{(n+1)(1+D_1+D_2)}.$$

Metodami baz Gröbnera sprawdzamy, czy $\bar{b}_0(a) = 0$ na zbiorze AV_i . Alternatywnie, możemy użyć algorytmu Algebraic Sampling [BPR, Algorithm 12.64] do rozstrzygnięcia, czy zbiór

$$B := \{(a, s) \in \mathbb{R}^{(n+1)(1+D_1+D_2)+1} : (\bar{b}_0(a)s - 1)^2 + R(a) = 0\}$$

jest pusty. Łatwo zauważyć, że $B = \emptyset \Leftrightarrow \bar{b}_0(a) = 0$ na zbiorze AV_i .

5. (a) Jeśli $\bar{b}_0(a) = 0$ dla $a \in AV_i$ to zachodzi

$$\{b_0(\bar{a}) : \bar{a} \in A\} = b_0(AV_i)$$

w tym przypadku.

- (b) Jeśli istnieje $a \in AV_i$ takie, że $\bar{b}_0(a) \neq 0$, to istnieje składowa spójności zbioru AV_i na której funkcja b_0 nie jest stała. Z własności Darboux, zbiór AV_i jest nieskończony w tym przypadku.

Jeżeli zbiór $\bigcup_{i \in I} b_0(AV_i)$ jest skończony, to, stosując powyższy algorytm dla wszystkich $i \in I$, z podpunktu 4.(a) dostajemy postać tego zbioru.

Jeżeli zbiór $\bigcup_{i \in I} b_0(AV_i)$ jest nieskończony, to istnieje indeks $i \in I$ taki, że zbiór $b_0(AV_i)$ jest nieskończony, co rozstrzyga podpunkt 4.(b) powyższego algorytmu.

Bibliografia

- [BPR] S. Basu, R. Pollack, M.-F. Roy, *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, Springer, Berlin (2016).
- [BCF] T. Bárta, R. Chill, E. Fašangová, *Every ordinary differential equation with a strict lyapunov function is a gradient system*, Monatshefte für Mathematik, Springer Verlag (2012), 166 (1), 57-72.
- [BCR] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, *Real algebraic geometry*, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [Br1] S.A. Broughton, *On the topology of polynomial hypersurfaces*, Proceedings A.M.S. Symp. in Pure. Math., vol. 40, I (1983), 165-178.
- [Br2] S.A. Broughton, *Milnor number and the topology of polynomial hypersurfaces*, Inventiones Math. 92 (1988), 217-241.
- [CDTT] Y.Chen, L.R.G. Dias, K. Takeuchi, M. Tibăr, *Invertible polynomial mappings via Newton non-degeneracy*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 64 (2014), no. 5, 1807–1822.
- [CP] M. Coste, M. J. de la Puente, *Atypical values at infinity of a polynomial function on the real plane: an erratum, and an algorithmic criterion*, J. Pure Appl. Algebra 162 (2001), no. 1, 23–35.
- [DG] D. D’Acuneto, V. Grandjean, *Vincent On gradient at infinity of semialgebraic functions*, Ann. Polon. Math. 87 (2005), 39–49.
- [DT] L.R.G. Dias, M. Tibăr, *Detecting bifurcation values at infinity of real polynomials*, Math. Z. 279 (2015), no. 1-2, 311–319.

- [Eh] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 29-55.
- [Fe] M.V. Fedoryuk, *The asymptotics of the Fourier transform of the exponential function of a polynomial*, Docl. Acad. Nauk 227 (1976), 580-583; Soviet Math. Dokl. (2) 17 (1976), 486-490.
- [GS] J. Gwoździejewicz, S. Spodzieja, *The Łojasiewicz gradient inequality in a neighbourhood of the fibre*, Ann. Polon. Math. 87 (2005), 151–163.
- [Ha] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc. New York (1964).
- [HL] H.V. Hà, D.T. Lê, *Sur la topologie des polynômes complexes*, Acta Math. Vietnam. 9(1) (1984), 21–32.
- [Je] Z. Jelonek, *The set of points at which polynomial map is not proper*, Annales polonici mathematici LVIII.3 (1993).
- [JK1] Z. Jelonek, K. Kurdyka, *On asymptotic critical values of a complex polynomial*, J.für die reine und angewandte Mathematik 565,1-11 (2003).
- [JK2] Z. Jelonek, K. Kurdyka, *Reaching generalized critical values of polynomial*, Math. Z. 276(2014) no. 1-2, 557-570.
- [Ka] L. Kaczmarek, *Wstęp do równań różniczkowych zwyczajnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego (1997).
- [KMP] K. Kurdyka, T. Mostowski, A. Parusiński, *Proof of the gradient conjecture of R. Thom*, Annals of Math., 152 (2000), 763-792.
- [KOS] K. Kurdyka, P. Orro, S. Simon, *Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values*, J. Differential Geom. 56 (2000), no. 1, 67–92.
- [NZ] A. Némethi, A. Zaharia, *On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 26 (1990), no. 4, 681–689.
- [Pa] A. Parusiński, *On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity*, Compositio Math. 97, 369–384 (1995).

- [PZ] L. Păunescu, A. Zaharia, *On the Łojasiewicz exponent at infinity for polynomial functions*, Kodai Math. J. 20 (1997), no. 3, 269–274.
- [Ra] P. Rabier, *Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifolds*, Ann. of Math. (2) 146 (1997), no. 3, 647–691.
- [ST] D. Siersma, M. Tibăr, *Singularities at infinity and their vanishing cycles*, Duke Math. Journal 80 (3) (1995), 771–783.
- [Sk] G. Skalski, *Nierówność Łojasiewicza a analityczna równoważność funkcji w nieskończoności*, praca doktorska, Uniwersytet Łódzki, Łódź (2007).
- [Sp] S. Spodzieja, *Łojasiewicz inequalities at infinity for the gradient of a polynomial*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 50 (2002), no. 3, 273–281.
- [Su] M. Suzuki, *Propriétés topologiques des polynômes de deux variables complexes, et automorphismes algébriques de l'espace $\mathbb{C}^2$* J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 241–257.
- [Th] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés*, Bull. Am. Math. Soc. 75 (1969), 240–284.
- [Ti1] M. Tibăr, *On the monodromy fibration of polynomial functions with singularities at infinity*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 324 (1997), no. 9, 1031–1035.
- [Ti2] M. Tibăr, *Regularity at infinity of real and complex polynomial functions*, Singularity Theory, The C.T.C Wall Anniversary Volume, LMS Lecture Notes Series 263 (1999), 249–264. Cambridge University Press.
- [TZ] M. Tibăr, A. Zaharia, *Asymptotic behaviour of families of real curves*, Manuscripta Math. 99 (1999), no. 3, 383–393.

Skorowidz

- łuk wymierny, 110
- foliacja, 99
- foliacja zadana przez submersję, 103
- funkcja
 - $\{v, y\}$ -kontrolowalna, 45
 - v -kontrolowalna, 46
 - Lapunowa, 25
 - semialgebraiczna, 30
- gradient względem tensora metrycznego, 20
- odwzorowanie
 - niewłaściwe, 27
 - semialgebraiczne, 30
 - właściwe, 27
- pole wektorowe
 - transwersalne do poziomic funkcji, 40
 - zgodne z foliacją, 99
- punkty niewłaściwości, 27
- rodzina $\{f, y\}$ -ograniczająca trajektorie, 45
- rozmaitość asymptotycznych łuków wymiernych, 111
- rozwiązanie integralne, 21
- rzut na foliację, 103
- submersja, 102
- tensor metryczny, 19
- trajektoria, 21
- trywializacja, 28
- trywialna wiązka, 27
 - w nieskończoności, 29
- układ gradientowy, 25
- własność właściwości, 57
- wartość
 - ρ_a -regularnymi w nieskończoności, 91
 - bifurkacyjna, 28
 - w nieskończoności, 29
 - typowa, 28
 - typowa w nieskończoności, 29
- wartość regularna, 20
- warunek
 - pre-Malgrange'a, 88
 - ρ_a -regularności, 91
 - a -Malgrange'a, 90

g -Malgrange'a, 106
 g -pre-Malgrange'a, 105
 $(\mathbb{G}, \pi)$ -pre-Malgrange'a, 101
 Fedoryuk'a, 87
 Malgrange'a, 88
 porównawczy, 95
 ulepszony pre-Malgrange'a, 96

zbiór
 (v, h) -asymptotycznych
 wartości krytycznych, 115
 algebraiczny, 29
 Milnora, 75
 semialgebraiczny, 30

Wykaz oznaczeń

$K_0(f)$	zbiór wartości krytycznych	11
$\mathbb{R}$	ciało liczb rzeczywistych	17
$\mathbb{C}$	ciało liczb zespolonych	17
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych	17
$\mathbb{R}_+$	zbiór liczb rzeczywistych dodatnich	17
$\mathbb{R}_+^0$	zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych	17
$\mathbb{R}^*$	zbiór liczb rzeczywistych różnych od 0	17
$\mathbb{N}_0$	zbiór liczb całkowitych nieujemnych	17
$(\cdot \cdot)$	iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$	17
$\ \cdot\ $	norma w $\mathbb{R}^n$	18
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$	18
$ \cdot $	norma Euklidesowa w $\mathbb{R}^n$	18
$\text{lin } A$	podprzestrzeń liniowa rozpięta na zbiorze A	18
$A^\perp$	dopełnienie liniowe zbioru A	18
$T_x M$	przestrzeń styczna do M w punkcie x	18
$C^k(M, N)$	zbiór odwzorowań $f : M \rightarrow N$ klasy C^k	18
$C^k(D)$	zbiór funkcji $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^k	18
df	różniczka funkcji f	19
$\partial_v f$	pochodna kierunkowa funkcji f w kierunku pola wektorowego v	19
$M_{m \times n}$	zbiór macierzy o m wierszach i n kolumnach o współczynnikach z $\mathbb{R}$	19
$\nabla_g f$	gradient funkcji f względem tensora metrycznego g	20
∇f	gradient funkcji f względem standardowego tensora metrycznego	20
S_F	$S_F = \{y \in Y \exists_{(x_k)_{k=1}^\infty \subset X} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \rightarrow \infty \wedge \lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k) \rightarrow y\}$	27

$B(f)$	zbiór wartości bifurkacyjnych	28
$B_\infty(f)$	zbiór wartości bifurkacyjnych w nieskończoności	29
$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$	pierścieniem wielomianów n zmiennych o współczynnikach z $\mathbb{K}$	29
$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$	n -wymiarowa rzeczywista przestrzeń rzutowa	31
$\mathfrak{h}(f, D)$	zbiór pól transwersalnych do poziomic funkcji f na zbiorze D	40
$\mathfrak{h}_+(f, D)$	$\mathfrak{h}_+(f, D) = \{v \in \mathfrak{h}(f, D) : \partial_{v(x)} f(x) > 0\}$.	41
$\mathfrak{h}(v, D)$	$\mathfrak{h}(v, D) = \{f \in C^\infty(D_f, \mathbb{R}) : D \subset D_f \wedge v \in \mathfrak{h}(f, D)\}$	54
$\overline{O}_y(f)$		58
$O_y(f)$		59
$\overline{O}_y^\infty(f)$		73
$O_y^\infty(f)$		74
$M(f_1, f_2, G)$	zbiór Milnora odwzorowania $(f_1, f_2) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$	75
$S^h(f)$	$S^h(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k)_{k=1}^\infty \subset M(f, h, \mathbb{R}^n \setminus K)} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\}$	79
$K_\infty(f)$	zbiór asymptotycznych wartości krytycznych	88
$\mathbb{G}$	foliacja $\mathbb{G} = \{G_s : s \in S\}$	99
$\mathfrak{h}^\mathbb{G}(f, D)$	zbiór wszystkich pól transwersalnych do f na zbiorze D	100
$\mathfrak{h}_+^\mathbb{G}(f, D)$	$\mathfrak{h}_+^\mathbb{G}(f, D) = \mathfrak{h}_+(f, D) \cap \mathfrak{h}^\mathbb{G}(f, D)$	100
$O_y^\mathbb{G}(f)$		100
$\nabla^g f(x)$	gradient funkcji $f _{g^{-1}(g(x))}$	105
$AV(F)$	rozmaitość asymptotycznych łuków wymiernych	111
$\Sigma^v(f)$	$\Sigma^v(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \partial_v f(x) = 0\}$	113
$K_\infty^v(f)$	$K_\infty^v(f) = \{y \in \mathbb{R} : \exists_{(x_k) \subset \Sigma^v(f)} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y\}$	114
$K_\infty^{v, h, H}(f)$		114
$K_\infty^{v, h}(f)$	zbiór (v, h) -asymptotycznych wartości krytycznych f w nieskończoności	115