

Opinia o rozprawie doktorskiej
mgr Aleksandry Zakrzewskiej pt. "Skoki liczb Milnora
deformacji liniowych osobliwości krzywych"

Niech $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną tzn. kielkiem funkcji holomorficznej o izolowanym punkcie krytycznym w początku układu współrzędnych $0 \in \mathbb{C}^2$. Zakładamy, że $f_0(0) = 0$. Gdy g jest kielkiem funkcji holomorficznej w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^2$, $g(0) = 0$, to określa on *deformację liniową* $f_s = f_0 + sg$, $s \in \mathbb{C}$ kielka f_0 (w tradycyjnej terminologii *pek lokalny* wyznaczony przez f_0 i g). Tego typu deformacje pojawiają się w naturalny sposób w badaniu osobliwości w nieskończoności odwzorowań wielomianowych $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Takie odwzorowanie wyznacza pek krzywych afinicznych $F(x, y) + s = 0$, który we współrzędnych rzutowych $(X : Y : Z)$ ma postać $\tilde{F}(X, Y, Z) + sZ^n = 0$, gdzie n jest stopniem F . Ustalmy punkt O_∞ prostej w nieskończoności $Z = 0$. Przechodząc do współrzędnych afinicznych $(\bar{x}, \bar{y})$ o środku w punkcie O_∞ otrzymujemy pek lokalny $f(\bar{x}, \bar{y}) + s\bar{x}^N = 0$. Tego typu peki, a także ich naturalne uogólnienie, w którym $\bar{x}^N$ zastąpione jest przez dowolny wielomian zmiennych $\bar{x}, \bar{y}$ (por. D. T. Lê et C. Weber, Enseign. Math. 1997 i C. Laubel, Proc. London Math. Soc. 2001) były przedmiotem intensywnych badań na przełomie dwudziestego i dwudziestego pierwszego wieku.

Podsumowując: peki lokalne krzywych analitycznych tworzą ważny obiekt badań niezależnie od ich roli w teorii deformacji i nadal są przedmiotem dobrych prac (por. J. Gwoździwicz, Inf. Math. Res. Mat. IMRN 2013).

W teorii osobliwości szczególną rolę pełni liczba Milnora. Oznaczmy $\mu_0(f)$ liczbę Milnora kielka f , $f(0) = 0$ i zdefiniujmy $\lambda(f_0, g) = \mu_0(f_0) - \mu_0(f_0 + sg)$ dla $s \in \mathbb{C}^*$ dostatecznie bliskich zeru.¹ Definicja jest poprawna (nie zależy od wyboru 'małego' parametru $s \in \mathbb{C}$), jest $\lambda(f_0, g) \geq 0$.

Przyjmujemy $\lambda^{lin}(f_0) = \min\{\lambda(f_0, g) : g \text{ kielek holomorficzny, } g(0) = 0\}$ i nazywamy $\lambda^{lin}(f_0)$ skokiem liczby Milnora kielka f_0 .

Efektywne obliczenie skoku $\lambda^{lin}(f_0)$ jest trudnym problemem. Recenzowana rozprawa dotyczy skoków liczby Milnora osobliwości postaci

$$(*) \quad f_0(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=n} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \text{wyrazy stopnia } > n,$$

przy czym $f_n(x, y) = \sum_{\alpha+\beta=n} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$ jest formą jednorodną bez czynników wielokrotnych.

Głównym wynikiem pracy jest następujące

Twierdzenie (4.17, str 34) *Jeżeli f_0 jest osobliwością izolowaną typu $(*)$ (semi-jednorodną w terminologii Autorki), to*

$$\lambda^{lin}(f_0) = \begin{cases} n-2 & \text{dla } n \geq 3, \\ 1 & \text{dla } n = 2. \end{cases}$$

W związku z powyższym Autorka podaje przykład deformacji liniowej formy

¹ Autorka pisze $\lambda((f_s))$ zamiast $\lambda(f_0, g)$, co może prowadzić do nieporozumień

jednorodnej $f_0^n(x, y) = x^n + y^n$, która realizuje skok $\lambda^{lin}(f_0)$. Dla tej deformacji jest $\mu_0(f_s) = (n-1)^2 - (n-2)$ (Uwaga 4.15, str. 35).

Innym ważnym faktem udowodnionym w rozprawie jest

Własność (Wniosek 3.33, str 21) Skok $\lambda^{lin}(f_0)$ osobliwości semi-jednorodnej f_0 jest niezmiennikiem topologicznym.

Opiniowana rozprawa w dużym stopniu nawiązuje do pracy Alberich i Roé (Canad. J. Math., 57(1), 2005), w której podstawowym narzędziem są diagramy Enriquesa opisujące osobliwości krzywych jako złożonych z punktów nieskończenie bliskich. Taki opis struktury osobliwości krzywych pochodzi od klasyków geometrii algebraicznej (M. Noethera, Enriquesa). We współczesnej wersji został przedstawiony przez Casasa-Alvero w jego monografii "Singularities of Plane Curves" i intensywnie stosowany przez jego uczniów.

Ponieważ Doktorantka korzysta z rezultatów Alberich i Roé pierwszą część pracy (rozdziały drugi i trzeci) poświęca abstrakcyjnym diagramom Enriquesa wprowadzonych przez wspomnianych autorów. Ta część pracy ma charakter przygotowawczy. Druga część pracy (rozdziały czwarty i piąty) jest oryginalnym przyczynkiem Autorki. W rozdziale czwartym przedstawiony jest wraz z dowodem główny rezultat, który zacytowałem wyżej. Mimo prostoty wypowiedzi dowód jest techniczny i długi. Świadczy on, że Autorka ma bardzo dobrą znajomość teorii osobliwości krzywych opartej na rozdmuchiwaniach.

Rozdział piąty rozprawy dotyczy możliwości uogólnienia głównego twierdzenia na osobliwości quasi-jednorodne.

Uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia wymogi ustawowe stawiane pracom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie mgr Aleksandry Zakrzewskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Arkadiusz Płoski

Arkadiusz Płoski