

Kraków, 8 maja 2017

dr hab. Sławomir Rams
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński

Recenzja pracy doktorskiej Pani magister Anny Szlachcińskiej
"Wykładnik Lojasiewicza zbiorów i odwzorowań semialgebraicznych"

Praca doktorska Pani magister Anny Szlachcińskiej poświęcona jest wykładnikom występującym w nierównościach typu Lojasiewicza. Przypomnijmy, że dla pary ciągłych funkcji semialgebraicznych $f(x)$, $g(x)$ o wartościach rzeczywistych określonych na domkniętym zbiorze semialgebraicznym $X \subset \mathbb{R}^n$, spełniających warunek $0 \in g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0) \neq X$, istnieją stałe dodatnie α i C takie, że na pewnym otoczeniu punktu $0 \in X$ zachodzi nierówność:

$$|g(x)| \geq C|f(x)|^\alpha,$$

(przy zachowaniu konwencji $0^0 := 0$). Kres dolny $\mathcal{L}_0(f, g)$ wykładników w powyższej nierówności nazywany jest wykładnikiem Lojasiewicza pary $f(x)$, $g(x)$ na zbiorze X w punkcie 0. Należy podkreślić, że mimo swego prostego sformułowania, nierówność Lojasiewicza odgrywa fundamentalną rolę w rozwiązywaniu problemu dzielenia dystrybucji przez funkcje analityczne, postawionego w latach 50 poprzedniego wieku i rozwiązanego (częściowo) przez L. Schwartza, L. Hörmandera i (całkowicie) przez S. Lojasiewicza. Z powodu swych licznych zastosowań, różne generalizacje nierówności Lojasiewicza (np. separacja regularna) stały się obiektem intensywnych badań (zajmowali się nimi m.in. J.J. Risler, B. Teissier, J. Kollár, A. Gabrielov czy B. Shiffman - by wymienić kilka znanych postaci).

Praca składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów i bibliografii. Dla wygody czytelnika autorka wyposażyla ją także w krótki skorowidz i wykaz oznaczeń.

Rozdział 1 zawiera podstawowe definicje i twierdzenia. Autorka omawia tu dość krótko pojęcie zbioru i odwzorowania semialgebraicznego, wymiaru, stopnia, a także przypomina twierdzenie Tarskiego-Seidenberga i lemat o wyborze krzywej. Ta część rozprawy jest zredagowana starannie i stanowi istotną pomoc przy lekturze następnych rozdziałów pracy, bo przedstawione w niej fakty i pojęcia są często używane w pracy. Niejakim mankamentem tego rozdziału jest brak omówienia pewnych faktów z monografii Bochnaka, Costy, Roy "Real Algebraic Geometry" i rezultatów z pracy H. Whitneya o stożkach stycznych, które autorka stosuje w czwartym rozdziale pracy. Przedstawienie tych wyników byłoby wygodne dla czytelnika.

W *Rozdziale 2* pracy autorka dowodzi, że wykładnik Lojasiewicza w punkcie odwzorowania analitycznego rzeczywistego nadokreślonego $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (czyli

S. Rams

takiego, że $m > n$), o izolowanym zerze jest równy wykładnikowi złożenia ($L \circ F$), gdzie L jest generycznym odwzorowaniem liniowym $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ i $n \leq k \leq m$ (patrz Tw. 2.1.1). W Podrozdziale 2.2 autorka rozprawy wykazuje także podobny wynik dla wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności rzeczywistych odwzorowań wielomianowych (Tw. 2.2.1). Wyniki przedstawione w tym rozdziale powstały we współpracy z promotorem i zostały już opublikowane (Bull. Sci. Math. 61 (2013)). Dowody Twierdzeń 2.1.1, 2.2.1, których autorem jest mgr Szlachcińska, używają standardowych narzędzi, ale wymagają pewnej pomysłowości i dowodzą, że autorka dobrze rozumie podstawowe własności obiektów, które bada.

Rozdział 3 zawiera nietrywialne wyniki dotyczące separacji regularnej zbiorów semialgebraicznych. Przypomnijmy, że każdy domknięty zbiór semialgebraiczny $X \subset \mathbb{R}^n$ można przedstawić jako sumę mnogościową

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_k$$

gdzie X_i , dla $i = 1, \dots, k$, jest semialgebraicznym zbiorem bazowym danym r_i nierównościami wielomianowymi i l_i równaniami wielomianowymi. Oznaczmy przez $\tau(X_1, \dots, X_k)$ (odpowiednio $\ell(X_1, \dots, X_k)$) największą liczbę nierówności występujących w opisach zbiorów bazowych z powyższego rozkładu (odpowiednio największy stopień wielomianu występującego w opisie zbiorów bazowych z powyższego rozkładu). Wśród parametrów charakteryzujących złożoność zbioru X definiuje się $r(X)$ (odpowiednio $\kappa(X)$) jako minimum zbioru liczb $\tau(X_1, \dots, X_k)$ (odpowiednio minimum zbioru liczb $\ell(X_1, \dots, X_k)$) po wszystkich rozkładach X na zbiory bazowe. W Rozdziale 3 recenzowanej pracy (patrz Tw. 3.1.1) autorka dowodzi, że dla wykładnika Łojasiewicza separacji regularnej $\mathcal{L}_0(X, Y)$ zbiorów domkniętych semialgebraicznych $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ w punkcie $0 \in X \cap Y$ zachodzi nierówność

$$\mathcal{L}_0(X, Y) \leq d(6d - 3)^{n+r-1}$$

gdzie $d := \max(\kappa(X), \kappa(Y))$ oraz $r := r(X) + r(Y)$. Innymi słowy mgr Szlachcińska dowodzi, że dla pewnej dodatniej stałej $C > 0$ i punktów x z pewnego otoczenia U punktu 0 zachodzi nierówność

$$\text{dist}(x, X) + \text{dist}(x, Y) \geq C \cdot \text{dist}(x, X \cap Y)^{d(6d-3)^{n+r-1}}.$$

W Tw. 3.1.1 mgr Szlachcińska podaje także silniejsze oszacowania odległości od punktu 0 . W dalszej części Rozdziału 3 zostaje udowodniona globalna nierówność Łojasiewicza dla zbiorów semialgebraicznych (Tw. 3.2.2) i wynikające z niej oszacowania dla odwzorowań semialgebraicznych (Wniosek 3.2.3) i wielomianowych (Wniosek 3.2.4). Wyniki przedstawione w tym rozdziale zostały już opublikowane (Discrete Comput. Geometry 55 (2016)) i znalazły interesujące zastosowania w teorii optymalizacji (patrz artykuł K. Kurdyka, S. Spodzieja w SIAM J. Optim. 25 (2015)). Trzeba nadmienić, że wyniki z Rozdziału 3 rozprawy powstały we współpracy z promotorem rozprawy i prof. K. Kurdyką. Są to wyniki bardzo ciekawe, a wkład autorki w ich uzyskanie jest istotny.

S. Rams

W Rozdziale 4 mgr Szlachcińska dowodzi oszacowania wykładnika Łojasiewicza $\mathcal{L}_0(f, g)$ pary funkcji semialgebraicznych $f(x)$, $g(x)$ na kuli jednostkowej $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pierwsza część dowodu polega na rozkładzie zbioru Ω na podzaimności różniczkowe, nad którymi wykres funkcji $f(x)$, (odpowiednio $g(x)$) ma dogodny opis algebraiczny (rozkład specjalny skojarzony z funkcją $f(x)$, odpowiednio $g(x)$ - patrz §. 4.1). Następnie autorka wykorzystuje lemat o wyborze krzywej, aby znaleźć krzywą w zbiorze Γ minimów funkcji $g(x)$ na poziomnicach funkcji $f(x)$. Tym samym wystarczy dowieść oszacowania wykładnika Łojasiewicza dla punktów na wybranej krzywej. Przy pomocy mnożników Lagrange'a i twierdzenia Chevalley'a mgr Szlachcińska dowodzi istnienia niezerowego wielomianu R_k , takiego że $R_k(f, g) = 0$ dla wszystkich punktów z przecięciu k -tego zbioru z rozkładu specjalnego z wybraną krzywą w zbiorze Γ . Stopień wielomianu R_k zależy od stopni wielomianów zadających k -ty zbiór z rozkładu specjalnego i wielomianów zadających opisy algebraiczne wykresów restrikcji rozpatrywanych funkcji $f(x)$, $g(x)$. Pozwala to na wykazanie nierówności (patrz Tw. 4.2.1)

$$\mathcal{L}_0(f, g) \leq d^{4n+1},$$

gdzie d jest maksimum stopni wielomianów występujących w opisach zbiorów z rozkładu specjalnego i stopni wielomianów zadających opisy algebraiczne wykresów restrikcji rozpatrywanych funkcji $f(x)$, $g(x)$.

Dowód Twierdzenia 4.2.1 uważam za ciekawy. Sądzę, że przedstawione w nim idee mogą zostać wykorzystane w szerszym kontekście. Pokazuje on biegłość Pani Szlachcińskiej w stosowaniu standardowych technik badania wykładnika Łojasiewicza. Ta część rozprawy pokazuje także pomysłowość autorki i jej umiejętność zręcznej redukcji ogólnej sytuacji do przypadku, w którym można zastosować klasyczne narzędzia analizy, geometrii semianalitycznej i subanalitycznej. Zastosowane w dowodzie Twierdzenia 4.2.1 szacowanie wykładnika $\mathcal{L}_0(f, g)$ jest efektywne, ale technika ograniczania stopnia wielomianu R_k przy pomocy stopnia zbioru rozwiązań układu dużej liczby równań daje czasami mało optymalną wartość majoranty wykładnika Łojasiewicza.

W ostatniej części Rozdziału 4 autorka dokładnie omawia cztery przykłady par funkcji semialgebraicznych $f(x)$, $g(x)$ na kuli jednostkowej. Przedstawione przykłady pozwalają lepiej zrozumieć zalety i wady uzyskanego przez autorkę wyniku.

Rozdział 5 to zastosowanie Twierdzenia 4.2.1 i konstrukcji przekątniowej do badania wykładnika separacji regularnej układu zbiorów semialgebraicznych.

Podsumowując, tematyka pracy doktorskiej Pani magister Anny Szlachcińskiej jest obecnie obiektem intensywnych badań. W pracy zostały zaprezentowane oryginalne wyniki stanowiące istotny wkład w aktualny poziom wiedzy. Rozprawa jest zredagowana dość starannie. Nieliczne literówki nie umniejszają jej wartości, choć pewne drobne przejęzyczenia utrudniają lekturę rozdziału czwartego. Autorka wykazała się znajomością aktualnej literatury i biegłym opanowaniem pewnych klasycznych technik analizy, geometrii semianalitycznej i subanalitycznej. Moim zdaniem praca spełnia wymogi dotyczące rozprawy doktorskiej zawarte w

S. Ram

Ustawie o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki z dnia 14 marca 2013. Wnioskuje o dopuszczenie Pani magister Anny Szlachcińskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Sławomir Rams

Sławomir Rams