

Recenzja rozprawy doktorskiej Pani Anny Szlachcińskiej
pod tytułem *Wykładnik Łojasiewicza zbiorów i odwzorowań semialgebraicznych*

Recenzowana praca składa się z obszernego wstępu, pięciu rozdziałów i bibliografii. We wstępie, Autorka przypomina znaczenie nierówności Łojasiewicza, wprowadza podstawowe definicje, omawia wyniki uzyskane przez licznych matematyków oraz streszcza zawartość całej rozprawy. Nierówności typu Łojasiewicza odgrywają istotną rolę w równaniach różniczkowych, teorii osobliwości, optymalizacji i wielu problemach pojawiających się w naturalny sposób w rzeczywistej lub zespolonej geometrii algebraicznej. Z powodu tak różnorodnych zastosowań, nierówności tego rodzaju stały się obiektem badań prowadzonych przez wielu matematyków, w tym również wybitnych, którzy wytyczali kierunki badań w matematyce 20 wieku (nazwiska tych matematyków można znaleźć w bibliografii).

W Rozdziale 1 wprowadzone są podstawowe definicje dotyczące zbiorów i odwzorowań semialgebraicznych oraz zacytowane ważne twierdzenia (np. twierdzenie Tarskiego-Seidenberga, lemat o wyborze krzywej, twierdzenie o własnościach wymiaru zbiorów semialgebraicznych). Autorka przypomina również pewne fakty z geometrii zespolonej (twierdzenie o skończoności zbioru punktów bifurkacyjnych funkcji wielomianowej, pojęcie stopnia zespolonego zbioru algebraicznego).

W Rozdziale 2 Pani Szlachcińska bada wykładnik Łojasiewicza w punkcie odwzorowania analitycznego z $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$, gdzie $n < m$. Zakładając, że rozważany punkt jest izolowany w zbiorze zer, wykładnik Łojasiewicza funkcji F jest równy wykładnikowi Łojasiewicza złożenia LoF dla generycznego odwzorowania liniowego L z $\mathbb{R}^m$ w $\mathbb{R}^n$ (Twierdzenie 2.1.1). Podobny wynik jest również uzyskany dla wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności odwzorowania wielomianowego (Twierdzenie 2.2.1). Wyniki zawarte w Rozdziale 2 są już opublikowane w Bull. Sci. Math. 61 (2013), we wspólnej pracy Pani Szlachcińskiej z promotorem.

Rozdział 3 poświęcony jest badaniu separacji regularnej zbiorów semialgebraicznych. Niech X i Y będą domkniętymi podzbiorami semialgebraicznymi $\mathbb{R}^n$ i niech 0 będzie punktem z przecięcia tych zbiorów. Wówczas zachodzi nierówność

$$L_o(X,Y) < d(6d-3)^{(n+r-1)},$$

gdzie $L_o(X,Y)$ jest wykładnikiem Łojasiewicza separacji regularnej X, Y w punkcie 0 , natomiast d oraz r są precyzyjnie określonymi liczbami naturalnymi, które zależą od wielomianowego opisu rozważanych zbiorów semialgebraicznych. W Rozdziale 3 Pani Szlachcińska dowodzi również globalną nierówność Łojasiewicza dla zbiorów semialgebraicznych i przedstawia wynikające z tej nierówności konsekwencje dla odwzorowań semialgebraicznych i odwzorowań wielomianowych. Rezultaty uzyskane przez Panią Szlachcińską w tym rozdziale, wspólnie z K. Kurdyką i S. Spodzieją, są już opublikowane w Discrete Comput. Geom. 55 (2016). Warto zauważyć, że wyniki te znalazły bardzo interesujące zastosowania w teorii optymalizacji (praca K. Kurdyki i S. Spodziei w SIAM J.

Optim. 25 (2015)). Głównie wyniki Rozdziału 3 zawarte są w Twierdzeniu 3.1.1 oraz Twierdzeniu 3.2.2.

Rozdział 4 zawiera oszacowanie wykładnika Łojasiewicza $L_o(f,g)$ pary funkcji semialgebraicznych f i g na kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$. W Twierdzeniu 4.2.1 znajdujemy oszacowanie

$$L_o(f,g) < d^{(4n+1)},$$

gdzie d jest precyzyjnie określoną liczbą naturalną, zależną od f i g . Dowód jest bardzo pomysłowy i wykazuje dobre zrozumienie przez Autorkę rozmaitych technik dowodowych. Ponadto, Rozdział 4 zawiera ciekawe przykłady, które dobrze ilustrują główny wynik.

W Rozdziale 5 opisane jest zastosowanie Twierdzenia 4.2.1 do badania wykładnika separacji regularnej rodziny zbiorów semialgebraicznych.

Konkluzja. Pani magister Anna Szlachcińska uzyskała wartościowe wyniki w ważnej i aktywnie badanej dziedzinie matematyki. Jest jasne, że Autorka zapoznała się z wieloma pracami innych matematyków i opanowała rozmaite techniki dowodowe. Dzięki rozprawie doktorskiej Pani Anny Szlachcińskiej nasza wiedza dotycząca wykładnika Łojasiewicza została wzbogacona. Oczekujemy, że praca spełnia wymogi dotyczące rozprawy doktorskiej. Z przekonaniem wnoszę o dopuszczenie Pani magister Anny Szlachcińskiej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Wojciech Kucharz