Pomiar optymalny w kwantowej teorii decyzji statystycznych

Rafał Wieczorek
Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Łódzki
ul. S. Banacha 22, 90-238 Łódź, Polska

Rozprawa doktorska

Czerwiec 2017

Promotor:
prof. dr hab. Andrzej Łuczak

Spis treści

1 Wstęp

Uogólnienie klasycznej teorii decyzji statystycznych na kwantową powstało na potrzeby rozwijania systemów komunikacyjnych opartych na urządzeniach opisywanych językiem mechaniki kwantowej np. laserach itp. Pierwsze prace z tej dziedziny pojawiły się w latach 70−tych XX wieku. Od tego czasu powstały dziesiątki prac z tej tematyki. Przez ostatnie lata nadal często publikowane są prace z tej dziedziny, spowodowane jest to m. in. ścisłym związkiem z informatyką kwantową.

Rozdziały 1 i 2 mają charakter wstępny. Rozdział 3 poświęcony jest istnieniu pomiaru optymalnego dla ryzyka bayesowskiego. Przedstawimy w nim twierdzenia pochodzące od Ozawy [19] i Holewy [11] oraz warunki Holewy na optymalność pomiaru [11].

W rozdziale 4 umieszczone są przeformułowane warunki Holewy na optymalność pomiaru z których będę korzystał w dalszej części pracy.

W kolejnym rozdziale 5 podajemy postać pomiaru optymalnego w konkretnych przykładach oraz wartość minimalnego ryzyka bayesowskiego.

Rozdział 6 mówi o pewnych warunkach na zmodyfikowany funkcjonał ryzyka ryzyka, które pociągają jednoznaczność pomiaru optymalnego dla ryzyka bayesowskiego. Wnioskiem z udowodnionych twierdzeń jest uogólnienie na przypadek dowolnej algebry von Neumanna twierdzenia o jednoznaczności pomiaru optymalnego dla prawdopodobieństwa detekcji udowodnionego przez Kennedy'ego [14, 15] w przypadku pełnej algebry operatorów w skończenie wymiarowej przestrzeni Hilebrta.

W rozdziale 7 przedstawimy oszacowania na minimalne ryzyko bayesowskie. Uogólnimy na przypadek dowolnej algebry von Neumanna i dowolnej funkcji straty oszacowania udowodnione przez Qiu [23], Jeong Lee, Yang [13] w przypadku pełnej algebry operatorów w skończenie wymiarowej przestrzeni Hilebrta. Pokażmy, także górną nierówność Holewy-Curlandera [29] w przypadku algebry von Neumanna z normalnym, półskończonym, wiernym śladem.

Ostatni rozdział 8 mówi o ważonym pomiarze Bielawkina oraz o asymptotyce minimalnego prawdopodobieństwa błędu dla stanów czystych przy dążeniu ich do stanów wzajemnie ortogonalnych. W przypadku skończonej liczby stanów twierdzenie to pochodzi od Holewy [10], pokażemy jego uogólnienie na przypadek przeliczalnej liczby stanów.

2 Wiadomości podstawowe i oznaczenia

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:
$\mathcal{H}-$ jest przestrzenią Hilberta,
$\mathfrak{M}-$ jest algebrą von Neumanna z jedynką oznaczoną $\mathbb{1}$,
$\mathfrak{M}^h-$ jest zbiorem operatorów hermitowskich z algebry $\mathfrak{M}$,
$\mathfrak{M}^+-$ jest zbiorem operatorów dodatnich z algebry $\mathfrak{M}$,
$\mathfrak{M}_*-$ jest predualem algebry $\mathfrak{M}$ tzn. przestrzenią wszystkich normalnych funkcjonałów liniowych na algebrze $\mathfrak{M}$,
$\mathfrak{M}_*^h-$ jest zbiorem funkcjonałów hermitowskich z przestrzeni $\mathfrak{M}_*$,
$\mathfrak{M}_*^+-$ jest jest zbiorem funkcjonałów dodatnich z przestrzeni $\mathfrak{M}_*$,
$\mathbb{B}(\mathcal{H})-$ jest algebrą wszystkich ograniczonych operatorów na $\mathcal{H}$,
tr$-$ jest śladem kanonicznym na $\mathbb{B}(\mathcal{H})$,
$\mathcal{D}(A)-$ jest dziedziną operatora liniowego A w $\mathcal{H}$,
$\mathcal{R}(A)-$ jest zakresem operatora liniowego A w $\mathcal{H}$,
$s(\varphi)-$ jest nośnikiem funkcjonału $\varphi \in \mathfrak{M}_*^h$,
$|A|-$ jest modułem operatora liniowego A w $\mathcal{H}$,
$\|\cdot\|_\infty-$ jest normą operatorową w algebrze $\mathfrak{M}$.
Na początek przytoczymy podstawowe definicje i twierdzenia potrzebne w pracy.

Definicja 2.1. *Funkcjonał $\rho \in \mathfrak{M}_*^+$ nazywamy stanem, jeżeli ma normę równą jeden.*

Definicja 2.2. *Niech $\{\rho_\theta : \theta \in \Theta\}$ będzie rodziną dodatnich funkcjonałów liniowych na algebrze von Neumanna $\mathfrak{M}$. Rodzinę tę nazywamy wierną, jeżeli dla każdego niezerowego $A \in \mathfrak{M}^+$ istnieje $\theta_0 \in \Theta$, takie że $\rho_{\theta_0}(A) > 0$.*

Szczególnym przypadkiem powyższej definicji jest rodzina składająca się z jednego funkcjonału ρ. Wtedy dodatni funkcjonał liniowy ρ nazywamy po prostu *wiernym.*

Przypomnijmy pojęcie nośnika funkcjonału normalnego.

Definicja 2.3. *Niech $\omega \in \mathfrak{M}_*$. Wtedy istnieją najmniejsze projekcje e i f w $\mathfrak{M}$, takie że $\omega = \omega e$ i $\omega = f\omega$. Projekcje te nazywamy odpowiednio prawym i lewym nośnikiem funkcjonału ω i oznaczamy $s_r(\omega), s_l(\omega)$. Jeżeli funkcjonał jest hermitowski, to $s_r(\omega) = s_l(\omega)$ i mówimy wtedy o nośniku funkcjonału ω. Oznaczamy go przez $s(\omega)$.*

Twierdzenie 2.4 (Rozkład Jordana). *Dla dowolnego funkcjonału $\varphi \in \mathfrak{M}_*^h$ istnieją jednoznacznie wyznaczone funkcjonały $\varphi_+, \varphi_- \in \mathfrak{M}_*^+$, takie że*

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_-, \quad \|\varphi\| = \|\varphi_+\| + \|\varphi_-\|.$$

Niech $\mathfrak{M}$ będzie algebrą von Neumanna z normalnym, półskończonym, wiernym śladem τ. Algebrą *operatorów mierzalnych* $\widetilde{\mathfrak{M}}$ nazywamy topologiczną *-algebrę gęsto określonych, domkniętych operatorów przyłączonych do $\mathfrak{M}$ z działaniami silnego dodawania $\dot{+}$ i silnego mnożenia $\cdot$, tzn.

$$A \dot{+} B = \overline{A+B}, \qquad A \cdot B = \overline{AB}, \qquad A, B \in \widetilde{\mathfrak{M}},$$

gdzie $\overline{A+B}$ i $\overline{AB}$ są domknięciami sumy operatorów i złożenia operatorów określonych na naturalnych dziedzinach danych przez część wspólną dziedzin A i B oraz zakres B i dziedzinę A (w dalszym ciągu dla uproszczenia zapisu będziemy pisać $A+B$ zamiast $A \dot{+} B$ i AB zamiast $A \cdot B$). Niezmiennicza ze względu na przesunięcia topoogia miarowa jest zdefiniowana przez bazę otoczeń 0, $\{N(\varepsilon, \delta) : \varepsilon, \delta > 0\}$, daną przez

$$\begin{aligned} N(\varepsilon,\delta) = \{A \in \widetilde{\mathfrak{M}} : &\text{ istnieje projekcja } P \text{ w } \mathfrak{M}, \text{ taka że} \\ & AP \in \mathfrak{M}, \quad \|AP\|_\infty \leqslant \varepsilon \quad \text{i} \quad \tau(\mathbb{1} - P) \leqslant \delta\}. \end{aligned}$$

Zatem dla operatorów $A_n, A \in \widetilde{\mathfrak{M}}$, ciąg (A_n) zbiega do x *według miary* jeżeli dla dowolnych $\varepsilon, \delta > 0$ istnieje n_0, takie że dla dowolnego $n \geqslant n_0$ istnieje projekcja $P \in \mathfrak{M}$, taka że

$$\tau(\mathbb{1} - P) \leqslant \delta, \qquad (A_n - A)P \in \mathfrak{M}, \qquad \text{i} \qquad \|(A_n - A)P\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Przydatna jest następująca “techniczna” postać zbieżności według miary udowodniona w pracy [32, Proposition 2.7]. Niech

$$|A_n - A| = \int_0^\infty \lambda\, E_n(d\lambda)$$

będzie rozkładem spektralnym opeartora $|A_n - A|$ z miara spektralną E_n, wartości miary spektralnej należą do $\mathfrak{M}$ ponieważ $A_n - A$ oraz $|A_n - A|$ są operatorami przyłączonymi do $\mathfrak{M}$. Wtedy $A_n \to A$ *według miary* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$

$$\tau(E_n([\varepsilon, \infty))) \to 0.$$

Dla dowolnego $\omega \in \mathfrak{M}_*$ istnieje operator mierzalny $\hat{\omega}$, taki że

$$\omega(A) = \tau(A\hat{\omega}) = \tau(\hat{\omega}A), \quad A \in \mathfrak{M}.$$

Przestrzeń takich operatorów oznaczana jest przez $L^1(\mathfrak{M}, \tau)$, powyższa odpowiedniość jest wzajemnie jednoznaczna i izometryczna, normę na $L^1(\mathfrak{M}, \tau)$ oznaczamy $\|\cdot\|_1$ i definiujemy następująco

$$\|A\|_1 = \tau(|A|), \quad A \in L^1(\mathfrak{M}, \tau).$$

Przestrzeń operatorów mierzalnych A, takich że $\tau(|A|^p) < \infty$, $p \geqslant 1$ jest przestrzenią Banacha $L^p(\mathfrak{M}, \tau)$ z normą

$$\|A\|_p = \tau(|A|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Co więcej, funkcjonałom hermitowskim z $\mathfrak{M}_*$ odpowiadają operatory samosprzężone z $L^1(\mathfrak{M}, \tau)$ a funkcjonałom dodatnim z $\mathfrak{M}_*$ — operatory dodatnie z $L^1(\mathfrak{M}, \tau)$. Dla funkcjonału $\omega \in \mathfrak{M}_*$ odpowiadający mu operator z $L^1(\mathfrak{M}, \tau)$ oznaczamy przez $\hat{\omega}$ i nazywamy *macierzą gęstości* funkcjonału ω, zatem

$$\omega(A) = \tau(A\hat{\omega}) = \tau(\hat{\omega}A), \quad A \in \mathfrak{M}.$$

W szczególności

$$\tau(\hat{\omega}) = \omega(\mathbb{1}),$$

zatem dla macierzy gęstości stanu mamy równość $\tau(\hat{\omega}) = 1$.

Dla dowolnego $A \in L^p(\mathfrak{M}, \tau)$ mamy rozkład spektralny

$$|A|^p = \int_0^\infty \lambda^p \, E(d\lambda).$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ otrzymujemy

$$|A|^p \geqslant \int_\varepsilon^\infty \lambda^p \, E(d\lambda) \geqslant \int_\varepsilon^\infty \varepsilon^p \, E(d\lambda) = \varepsilon^p \, E([\varepsilon, \infty)).$$

W konsekwencji otrzymujemy nierówność Czebyszewa

$$\tau(E([\varepsilon, \infty))) \leqslant \frac{\tau(|A|^p)}{\varepsilon^p} = \frac{\|A\|_p^p}{\varepsilon^p}.$$

Korzystając z "technicznej" postaci zbieżności według miary dostajemy

Lemat 2.5. *Jeżeli ciąg operatorów (A_n) z $L^p(\mathfrak{M}, \tau)$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|_p$ to jest zbieżny według miary.*

W dalszych rozważaniach stosować będziemy często notację Diraca, zgodnie z którą wektory $\xi \in \mathcal{H}$ oznaczane są symbolem "ket" $|\xi\rangle$, a ograniczone liniowe funkcjonały na $\mathcal{H}$, dane zgodnie z twierdzeniem Riesza przez wektory $\eta \in \mathcal{H}$– symbolem "bra" $\langle\eta|$. Najczęściej będziemy używać symbolu $|\xi\rangle\langle\eta|$. Jest to oznaczenie operatora liniowego, który na wektor $\zeta \in \mathcal{H}$ działa następująco

$$(|\xi\rangle\langle\eta|)\zeta = \langle\eta|\zeta\rangle\xi.$$

Tak więc $|\xi\rangle\langle\eta|$ jest ograniczonym operatorem liniowym rzędu 1, który wektory z $\mathcal{H}$ odwzorowuje w przestrzeń rozpiętą przez wektor ξ. W szczególności, dla wektora ξ o normie jeden $|\xi\rangle\langle\xi|$ jest rzutem na podprzestrzeń rozpiętą przez ξ.

Dana jest przeliczalna liczba stanów $\rho_1, \rho_2, \ldots$ na algebrze von Neumanna $\mathfrak{M}$, które mogą występować z prawdopodobieństwami a priori $\pi_1, \pi_2, \ldots$.

Chcemy wyznaczyć rzeczywisty stan układu w pewien optymalny sposób. W tym celu przygotowujemy *pomiar* (zwany także strategią) $\mathbb{M}$, przez który rozumiemy ciąg dodatnich operatorów $(M_1, M_2, \ldots)$ z $\mathfrak{M}$, taki że

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_j = \mathbb{1},$$

gdzie szereg zbieżny jest w słabej topologii operatorowej (równoważnie w mocnej) na $\mathfrak{M}$. Pomiar $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots)$, taki że wszystkie operatory M_j są projekcjami nazywamy *pomiarem prostym.*

Jeżeli otrzymamy wynik M_j, to wybieramy stan ρ_j. Prawdopodobieństwo tego, że prawdziwym stanem jest ρ_i, kiedy pomiar dał wynik M_j, wynosi $\rho_i(M_j)$. Zatem $\rho_i(M_i)$ jest prawdopdobieństwem prawidłowego wskazania stanu ρ_i. Jeżeli wybraliśmy stan ρ_j, podczas gdy prawdziwym stanem jest ρ_i, to płacimy karę w wysokości $L(i,j)$. Funkcja $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazywana jest *funkcją straty.*

Załóżmy, że układ jest w stanie ρ_i. Wtedy podejmując decyzję zgodnie ze strategią $\mathbb{M}$, poniesiemy stratę $L(i,j)$ z prawdopodobieństwem $\rho_i(M_j)$, a zatem wartość oczekiwana naszej straty wynosi

$$R_{\mathbb{M}}(i) = \mathbf{E}_i L(i,\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} L(i,j)\rho_i(M_j).$$

Funkcja $R_{\mathbb{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazywa się *funkcją ryzyka strategii* $\mathbb{M}$. Wartość oczekiwaną zmiennej losowej $R_{\mathbb{M}}$ nazywa się *ryzykiem bayesowskim strategii* $\mathbb{M}$ *przy rozkładzie a priori* $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ i oznacza $r(\mathbb{M}, \pi)$. Zachodzi zatem równość

$$r(\mathbb{M}, \pi) = \mathbf{E}_\pi R_{\mathbb{M}} = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i R_{\mathbb{M}}(i) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \pi_i L(i,j)\rho_i(M_j).$$

Naszym zadaniem jest znaleźć pomiar minimalizujący ryzyko bayesowskie.

Zastanówmy się teraz, jak dla danej strategii $\mathbb{M}$ i danego prawdopodobieństwa a priori $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ znaleźć prawdopodobieństwo tego, że prawidłowo odgadniemy stan układu. Oznaczmy to prawdopodobieństwo przez $\mathbb{P}_D(\mathbb{M})$. Zgodnie ze wzorem na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy

$$\mathbb{P}_D(\mathbb{M}) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \rho_i(M_i).$$

W dalszym ciągu prawdopodobieństwo $\mathbb{P}_D(\mathbb{M})$ będziemy nazywać *prawdopodobieństwem detekcji.* Oznaczmy przez $\mathbb{P}_E(\mathbb{M})$ prawdopodobieństwo błędnego odgadnięcia układu przy danej strategii $\mathbb{M}$ i danym prawdopodobieństwie a priori $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$. Oczywiście wtedy

$$\mathbb{P}_E(\mathbb{M}) = 1 - \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \rho_i(M_i).$$

W dalszym ciągu prawdopodobieństwo $\mathbb{P}_E(\mathbb{M})$ będziemy nazywać *prawdopdobieństwem błędu.*

Rozważmy konkretną funkcję straty postaci

$$L(i,j) = 1 - \delta_{ij}.$$

Wtedy mamy

$$r(\mathbb{M}, \pi) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \pi_i (1 - \delta_{ij}) \rho_i(M_j) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \rho_i(M_i) = \mathbb{P}_E(\mathbb{M}).$$

Zatem prawdopdobieństwo błędu jest szczególnym przypadkiem ryzyka bayesowskiego dla powyższej funkcji straty.

3 Istnienie pomiaru optymalnego

Na początku przedstawimy dwa twierdzenia o istnieniu pomiaru optymalnego. Pierwsze pochodzi z pracy [19, Theorem 8]. Komentarz do tego twierdzenia można znaleźć w pracy [16].

Twierdzenie 3.1. *Niech $\pi_1, \pi_2, \ldots$ będzie dowolnym prawdopodobieństwem a priori, a L funkcją straty spełniającą warunki:*

(i) istnieją liczby $a_i \geqslant 0$, takie że $|L(i,j)| \leqslant a_i$ i $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i a_i < \infty$,

(ii) dla każdego i istnieje $\lim_{j\to\infty} L(i,j) = b_i$ oraz dla pewnego j_0 mamy $L(i, j_0) \leqslant b_i$ dla wszystkich $i = 1, 2, \ldots$.

Wtedy istnieje pomiar optymalny.

Na koniec rozdziału podamy dowód tego twierdzenia.

Wniosek 3.2. *Dla dowolnego prawdopodobieństwa a priori $\pi_1, \pi_2, \ldots$ istnieje pomiar minimalizujący prawdopodobieństwo błędu.*

Dowód. W Twierdzeniu 3.1 wystarczy przyjąć $a_i = 1$, co gwarantuje spełnienie warunku (i). Ponieważ

$$\lim_{j\to\infty} L(i,j) = \lim_{j\to\infty} (1 - \delta_{ij}) = 1,$$

to warunek (ii) też jest spełniony. □

Kolejne twierdzenie pochodzi z pracy [9]. My przedstawimy jego wersję z pracy [16, Theorem 2], gdzie można znaleźć także jego dowód.

Twierdzenie 3.3. *Niech $\pi_1, \pi_2, \ldots$ będzie dowolnym prawdopodobieństwem a priori oraz L funkcją straty spełniającą warunki:*

(i) dla każdego i istnieje $\lim_{j\to\infty} L(i,j) = \infty$,

(ii) istnieją liczby $c_i, i = 1, 2, \ldots$ takie że dla każdego $j = 1, 2, \ldots$ zachodzi $c_i \leqslant L(i,j)$ i $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i |c_i| < \infty$.

Wtedy istnieje pomiar optymalny.

Oznaczmy przez φ_j funkcjonał ryzyka tzn.

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i L(i,j)\rho_i, j = 1, 2, \ldots.$$

Oczywiście szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i L(i,j)\rho_i$ nie musi być zbieżny. Jeżeli założymy istnienie ciągu (a_i) takiego, że $|L(i,j)| \leqslant a_i, i, j = 1, 2, \ldots$ i $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i a_i < \infty$, to $\varphi_j, j = 1, 2, \ldots$ będzie funkcjonałem normalnym. Ryzyko bayesowskie możemy zapisać wtedy w postaci

$$r(\mathbb{M}, \pi) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \pi_i L(i,j)\rho_i(M_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i L(i,j)\rho_i(M_j).$$

Mamy zatem

$$r(\mathbb{M}, \pi) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(M_j).$$

Nastepne twierdzenie pochodzi z pracy [9, II Theorem 2.2].

Twierdzenie 3.4. *Załóżmy, że φ_j są funkcjonałami normalnymi oraz, że istnieje funkcjonał normalny ψ, taki że $\psi \leqslant \varphi_j, j = 1, 2, \ldots$. Wtedy*

$$\inf_{\mathbb{M}} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(M_j) = \max\{\varphi(\mathbb{1}) : \varphi \in \mathfrak{M}_*^h, \varphi \leqslant \varphi_j, j = 1, 2, \ldots\}. \tag{3.1}$$

Następujące warunki są równoważne:

(i) Istnieje pomiar $\widetilde{\mathbb{M}} = \left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \ldots\right)$ minimalizujący lewą stronę (3.1) oraz $\varphi \in \mathfrak{M}_*$ maksymalizuje prawą stronę (3.1).

(ii) $\varphi \leqslant \varphi_j$ oraz $(\varphi - \varphi_j)\widetilde{M}_j = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots$.

(iii) $\varphi \leqslant \varphi_j$ dla $j = 1, 2, \ldots$ oraz $\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{M}_j\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j\widetilde{M}_j = \varphi$.

Niech $\widetilde{\mathbb{M}} = \left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \ldots\right)$ będzie pomiarem optymalnym. Funkcjonał

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{M}_j\varphi_j$$

nazywamy funkcjonałem Lagrange'a.

Kolejne twierdzenie jest moim własnym wynikiem.

Twierdzenie 3.5. *Funkcjonał Lagrange'a jest wyznaczony jednoznacznie.*

Dowód. Określmy zbiór

$$\mathfrak{N}_* = \left\{\psi \in \mathfrak{M}_*^h : \psi \leqslant \varphi_j \text{ dla dowolnego j}\right\}$$

oraz rozważmy maksymalizację $\psi(\mathbb{1})$ na zbiorze $\mathfrak{N}_*$. Pokażemy, że dla dowolnego funkcjonału Lagrange'a osiągane jest maksimum. Dla dowolnego funkcjonału Lagrange'a postaci

$$\varphi = \sum_j M_j \varphi_j$$

oraz dla $\psi \in \mathfrak{N}_*$ mamy

$$\psi\,(M_j) \leqslant \varphi_j(M_j)$$

dla dowolnego j. Sumując po j dostajemy

$$\psi(\mathbb{1}) = \sum_j \psi(M_j) \leqslant \sum_j \varphi_j(M_j) = \varphi(\mathbb{1}).$$

W konsekwencji wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\psi \in \mathfrak{N}_*$ osiągającego maksimum tzn. takiego, że $\psi(\mathbb{1}) = \varphi(\mathbb{1})$, mamy $\psi = \varphi$. Dla takich ψ dostajemy

$$0 = \varphi(\mathbb{1}) - \psi(\mathbb{1}) = \sum_j (M_j(\varphi_j - \psi))(\mathbb{1}) = \sum_j (\varphi_j - \psi)(M_j),$$

ponieważ $\varphi_j - \psi \geqslant 0$, to

$$(\varphi_j - \psi)(M_j) = 0.$$

Z nierówności Schwarza mamy

$$|M_j(\varphi_j - \psi)(A)| = |(\varphi_j - \psi)(AM_j)| = \left|(\varphi_j - \psi)\left(\left(M_j^{\frac{1}{2}} A^*\right)^* M_j^{\frac{1}{2}}\right)\right| \leqslant$$
$$\left[(\varphi_j - \psi)\,(A^* M_j A^*)\right]^{\frac{1}{2}} \left[(\varphi_j - \psi)(M_j)\right]^{\frac{1}{2}} = 0$$

dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$. Zatem $M_j(\varphi_j - \psi) = 0$ co daje $M_j\varphi_j = M_j\psi$. Sumując po j dostajemy

$$\varphi = \sum_j M_j \varphi_j = \sum_j M_j \psi = \psi.$$

□

Niech $\mathfrak{M}_j = \mathfrak{M}$ i niech $\widetilde{\mathfrak{M}}$ będzie sumą prostą algebr von Neumanna $\mathfrak{M}_j$,

$$\widetilde{\mathfrak{M}} = \sum_j{}^{\oplus} \mathfrak{M}_j.$$

Wtedy $\widetilde{\mathfrak{M}}$ jest algebrą von Neumanna działającą na przestrzeni Hilberta

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \bigoplus_j \mathcal{H}_j, \quad \text{gdzie} \quad \mathcal{H}_j = \mathcal{H}.$$

Każdy operator $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ jest ciągiem $\widetilde{T} = (T_j)$, gdzie $T_j \in \mathfrak{M}_j = \mathfrak{M}$ i $\sup_j \|T_j\| < \infty$, dlatego każdy pomiar (M_j) może być rozważany jako element $\widetilde{\mathfrak{M}}$, aby to podkreslić można pisać $\widetilde{\mathbb{M}} = (M_j)$. Niech

$$\widetilde{\mathfrak{R}} = \{\widetilde{T} = (T_j) \in \widetilde{\mathfrak{M}} : 0 \leqslant T_j \leqslant \mathbb{1} \text{ dla dowolnego j}, \sum_j T_j \leqslant \mathbb{1}\}.$$

Wtedy $\widetilde{\mathfrak{R}}$ jest podzbiorem części dodatniej kuli jednostkowej $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ i $\widetilde{\mathfrak{R}}$ jest $\sigma-$ słabo zwarty. Istotnie, ponieważ $\widetilde{\mathfrak{M}}_1$ jest $\sigma-$ słabo zwarty wystarczy pokazać, że $\widetilde{\mathfrak{R}}$ jest słabo domknięty co wynika z faktu, że dla dowolnej sieci $\{T_j^\alpha\}$ w $\widetilde{\mathfrak{R}}$ i dowolnego skończonego zbioru J indeksów j mamy $\sum_{j\in J} T_j^\alpha \leqslant \mathbb{1}$, więc to samo zachodzi dla granicy sieci. Zbiór wszystkich pomiarów to

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_1 = \{\widetilde{T} = (T_j) \in \widetilde{\mathfrak{M}} : 0 \leqslant T_j \leqslant \mathbb{1} \text{ dla dowolnego j, } \sum_j T_j = \mathbb{1}\}$$

i nie jest on $\sigma-$słabo zwarty (patrz przykład poniżej). Sieć $\widetilde{T}^\alpha = (T_j^\alpha)$ elementów z $\widetilde{\mathfrak{R}}$ zbiega $\sigma-$ słabo do elementu $\widetilde{T} = (T_j) \in \widetilde{\mathfrak{R}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiega słabo na zbiorze wektorów z $\widetilde{\mathcal{H}}$, które mają tylko skończoną liczbę niezerowych elementów, ponieważ te wektory są gęste w $\widetilde{\mathcal{H}}$ i sieć $\widetilde{T}^\alpha$ jest ograniczona w normie. W konsekwencji jest to równoważne słabej zbieżności $T_j^\alpha \underset{\alpha}{\to} T_j$ dla każdej liczby indeksów j i znowu z ograniczoności w normie wszystkich T_j^α jest to równoważne $\sigma-$słabej zbieżności $T_j^\alpha \underset{\alpha}{\to} T_j$ w $\mathfrak{M}$ dla skończonej liczby indeksów j. Zatem $\sigma-$słaba zbieżność w $\widetilde{\mathfrak{R}}$ jest równoważna $\sigma-$słabej zbieżności po współrzędnych.

Przykład
Rozważmy ciąg $\widetilde{T}^n = \left(T_j^n\right)$ elementów z $\widetilde{\mathfrak{R}}_1$, postaci

$$T_j^n = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad n \neq j \\ \mathbb{1} & \text{gdy} \quad n = j \end{cases} \quad .$$

Ciąg $\widetilde{T}^n$ zbiega $\sigma-$ słabo po współrzędnych do elementu $\widetilde{T} = (0)$, zatem zbiega też do $\widetilde{T} = (0)$ w $\sigma-$ słabej topologii. Element $\widetilde{T}$ nie należy do $\widetilde{\mathfrak{R}}_1$, co pokazuje, że zbiór $\widetilde{\mathfrak{R}}_1$ nie jest $\sigma-$ słabo domknięty czyli nie jest też $\sigma-$ słabo zwarty.

Potrzebne nam będą dwa proste lematy.

Lemat 3.6. *Niech (r_j) będzie ciagiem liczb rzeczywistych zbieżnym do 0. Wtedy odwzorowanie*

$$\widetilde{\mathfrak{R}} \ni \widetilde{T} \mapsto \sum_j r_j T_j \in \mathfrak{M}, \quad \textit{gdzie} \quad \widetilde{T} = (T_j) \tag{3.2}$$

jest słabo (równoważnie $\sigma-$słabo) ciągłe.

Dowód. Najpierw zauważmy, że szereg po prawej stronie w (3.2) zbiega w normie. Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$ i niech j_0 będzie, takie że $-\varepsilon < r_j < \varepsilon$ dla $j > j_0$. Dla każdego $n \geqslant m \geqslant j_0$ mamy

$$-\varepsilon\mathbb{1} \leqslant -\varepsilon \sum_{j=m+1}^{n} T_j \leqslant \sum_{j=m+1}^{n} r_j T_j \leqslant \varepsilon \sum_{j=m+1}^{n} T_j \leqslant \varepsilon\mathbb{1},$$

co oznacza, że dla każdego $n \geqslant m \geqslant j_0$ mamy

$$\left\| \sum_{j=m+1}^{n} r_j T_j \right\| \leqslant \varepsilon,$$

zatem ciąg $(\sum_{k=1}^{n} r_k T_k)$ spełnia warunek Cauchy'ego w normie. $-r \leqslant r_i \leqslant r$ dla pewnego r, zatem dla dowolnego $\widetilde{T} \in \widetilde{\mathfrak{R}}$

$$-r\mathbb{1} \leqslant -r \sum_{j=1}^{\infty} T_j \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} r_j T_j \leqslant r \sum_{j=1}^{\infty} T_j \leqslant r\mathbb{1},$$

co oznacza, że obraz naszego odwzorowania jest ograniczony w normie. Ponieważ dziedzina też jest ograniczona w normie to słaba ciągłość jest równoważna $\sigma-$słabej ciągłości.

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i każdego $\xi \in \mathcal{H}$ znajdziemy $\delta > 0$ i $\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta} \in \widetilde{\mathcal{H}}$, takie że

$$\left| \left\langle \xi \right| \left(\sum_{j=1}^{\infty} r_j T_j - \sum_{j=1}^{\infty} r_j T'_j \right) \xi \right\rangle \right| < \varepsilon,$$

gdy

$$\left| \left\langle \widetilde{\xi} \right| \left(\widetilde{T} - \widetilde{T}' \right) \widetilde{\eta} \right\rangle \right| < \delta,$$

gdzie $\widetilde{T} = (T_j), \widetilde{T}' = (T'_j)$. Dla $\varepsilon > 0$ i $\xi \in \mathcal{H}$ wybierzmy j_0, takie że $|r_j| < \frac{\varepsilon}{4\|\xi\|^2}$ dla $j > j_0$ i połózmy $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\widetilde{\xi} = \begin{cases} r_j\xi, & \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, j_0 \\ 0, & \text{dla} \quad j \geqslant 0 \end{cases}, \widetilde{\eta} = \begin{cases} \xi, & \text{dla} \quad j = 1, 2, \ldots, j_0 \\ 0, & \text{dla} \quad j \geqslant 0 \end{cases}.$$

Wtedy dla

$$\left| \left\langle \widetilde{\xi} \right| \left(\widetilde{T} - \widetilde{T}' \right) \widetilde{\eta} \right\rangle \right| < \delta$$

mamy

$$\left| \left\langle \xi \right| \left(\sum_{j=1}^{\infty} r_j T_j - \sum_{j=1}^{\infty} r_j T'_j \right) \xi \right\rangle \right| \leqslant \left| \sum_{j=1}^{j_0} r_j \left\langle \xi \right| \left(T_j - T'_j \right) \xi \right\rangle \right| +$$
$$\left| \sum_{j=j_0+1}^{\infty} r_j \left\langle \xi \right| \left(T_j - T'_j \right) \xi \right\rangle \right| \leqslant \left| \left\langle \widetilde{\xi} \right| \left(\widetilde{T} - \widetilde{T}' \right) \widetilde{\eta} \right\rangle \right| + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} |r_j| \left| \left\langle \xi \right| \left(T_j - T'_j \right) \xi \right\rangle \right| <$$
$$\delta + \frac{\varepsilon}{4\|\xi\|^2} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \left(|\langle \xi | T_j \xi \rangle| + \left| \left\langle \xi | T'_j \xi \right\rangle \right| \right) <$$
$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4\|\xi\|^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(|\langle \xi | T_j \xi \rangle| + \left| \left\langle \xi | T'_j \xi \right\rangle \right| \right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4\|\xi\|^2} (\|\xi\|^2 + \|\xi\|^2) = \varepsilon.$$

□

Lemat 3.7. *Niech $\widetilde{\mathfrak{N}}$ będzie dowolnym podzbiorem $\widetilde{\mathfrak{M}}$ i niech $g_j, j = 1, 2, \ldots$ będą odwzorowaniami z $\widetilde{\mathfrak{N}}$ w $\widetilde{\mathfrak{M}}$ takimi, że obrazy $g_j(\widetilde{\mathfrak{N}})$ są wspólnie ograniczone w normie. Jeżeli g_j są słabo ciągłe to odwzorowanie $g : \widetilde{\mathfrak{N}} \to \widetilde{\mathfrak{M}}$ określone jako*

$$g\left(\tilde{T}\right) = (g_j(T_j)), \quad \textit{gdzie} \quad \tilde{T} = (T_j)$$

jest słabo ciągłe. Dodatkowo, jeśli $\widetilde{\mathfrak{N}}$ jest ograniczone w normie to g jest $\sigma-$słabo ciągłe.

Dowód. Niech $\{\tilde{T}^\alpha\} = \{(T_j^\alpha)\} \subset \widetilde{\mathfrak{N}}$ będzie siecią słabo zbieżną do pewnego $\tilde{T} \in \widetilde{\mathfrak{N}}$. Ponieważ zbiór $g(\widetilde{\mathfrak{N}})$ jest ograniczony w normie, to do pokazania słabej zbieżności $g(\tilde{T}^\alpha) \to g(\tilde{T})$ wystarczy pokazać

$$\langle\tilde{\xi}, g(\tilde{T}^\alpha)\tilde{\eta}\rangle \to \langle\tilde{\xi}, g(\tilde{T})\tilde{\eta}\rangle$$

dla wszystkich $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ z pewnego gestego podzbioru $\widetilde{\mathcal{H}}$. W tym celu weźmy zbiór tych wektorów z $\widetilde{\mathcal{H}}$ które mają tylko skończoną liczbę niezerowych elementów. Jeżeli $\tilde{\xi} = (\xi_j)$ i $\tilde{\eta} = (\eta_j)$ są takimi wektorami, że dla pewnego m mamy $\xi_j = \eta_j = 0$ dla $j > m$, to

$$\langle\tilde{\xi}, g(\tilde{T}^\alpha)\tilde{\eta}\rangle = \sum_{j=1}^{m}\langle\xi_j, g_j(T_j^\alpha)\eta_j\rangle \to \sum_{j=1}^{m}\langle\xi_j, g_j(T_j)\eta_j\rangle = \langle\tilde{\xi}, g(\tilde{T})\tilde{\eta}\rangle,$$

ponieważ słaba ciągłość g_j daje

$$\langle\xi_j, g_j(T_j^\alpha)\eta_j\rangle \to \langle\xi_j, g_j(T_j)\eta_j\rangle$$

dla dowolnego j. $\sigma-$słabą ciągłość uzasadnia się tak samo jak w Lemacie 3.6. □

Teraz przejdziemy do dowodu Twierdzenia 3.1.

Dowód Twierdzenia 3.1. Mamy $|b_i| \leqslant |a_i|$, więc szereg $\sum_i \pi_i b_i$ jest absolutnie zbieżny. W konsekwencji szereg $\sum_i \pi_i b_i \rho_i$ jest zbieżny w normie do pewnego normalnego funkcjonału ρ na $\mathfrak{M}$. Zapiszmy ryzyko Bayesowskie w postaci

$$\begin{gathered} r(\mathbb{M}, \pi) = \sum_i\sum_j \pi_i L(i,j)\rho_i(M_j) = \\ \sum_i\sum_j \pi_i b_i\rho_i(M_j) - \sum_i\sum_j \pi_i[b_i - L(i,j)]\rho_i(M_j) = \\ (\sum_i \pi_i b_i\rho_i)(\sum_j M_j) - \sum_i\sum_j \pi_i[b_i - L(i,j)]\rho_i(M_j) = \\ \rho(\mathbb{1}) - \sum_i\sum_j \pi_i[b_i - L(i,j)]\rho_i(M_j), \end{gathered}$$

zatem minimalizacja ryzyka bayesowskiego jest równoważna maksymalizacji funkcji

$$f(\widetilde{\mathbb{M}}) = \sum_i\sum_j \pi_i[b_i - L(i,j)]\rho_i(M_j), \quad \widetilde{\mathbb{M}} = (M_j).$$

Rozważmy tę funkcję na zbiorze $\widetilde{\mathfrak{R}}$,

$$f(\widetilde{T}) = \sum_i \sum_j \pi_i[b_i - L(i,j)]\rho_i(T_j), \quad \widetilde{T} = (T_j) \in \widetilde{\mathfrak{R}}.$$

Możemy założyć, że $a_i > 0$, ponieważ dla i, takich że $a_i = 0$ mamy

$$\pi_i[b_i - L(i,j)]\rho_i(T_j) = 0$$

dla wszystkich j. Wtedy

$$f(\widetilde{T}) = \sum_i \pi_i a_i \rho_i \left(\sum_j \frac{b_i - L(i,j)}{a_i} T_j \right).$$

Dla dowolnie ustalonego i rozważmy funkcję $g_i : \widetilde{\mathfrak{R}} \to \mathfrak{M}$ określoną jako

$$g_i(\widetilde{T}) = \sum_j \frac{b_i - L(i,j)}{a_i} T_j.$$

Ponieważ

$$\frac{b_i - L(i,j)}{a_i} \to 0 \quad \text{przy} \quad j \to \infty,$$

to z Lematu 3.6 dostajemy, że funkcje g_i są $\sigma-$słabo ciągłe. Mamy

$$-2 \leqslant \frac{b_i - L(i,j)}{a_i} \leqslant 2,$$

zatem

$$-2\mathbb{1} \leqslant -2\sum_j T_j \leqslant \sum_j \frac{b_i - L(i,j)}{a_i} T_j \leqslant 2\sum_j T_j \leqslant 2\mathbb{1},$$

co pokazuje, że obrazy $g_i(\widetilde{\mathfrak{R}})$ są wspólnie ograniczone w normie przez 2. W konsekwencji z Lematu 3.7 wynika, że funkcja g zdefiniowana jako

$$g(\widetilde{T}) = (g_i(\widetilde{T})) = \left(\sum_j \frac{b_i - L(i,j)}{a_i} T_j \right)$$

jest $\sigma-$słabo ciagła. Niech $\widetilde{\rho}$ będzie funkcjonałem na $\widetilde{\mathfrak{M}}$ zdefiniowanym jako

$$\widetilde{\rho}(\widetilde{T}) = \sum_i \pi_i a_i \rho_i(T_i), \quad \widetilde{T} = (T_i) \in \widetilde{\mathfrak{M}}.$$

Ponieważ szereg $\sum_i \pi_i a_i \rho_i$ jest zbieżny w normie, to $\widetilde{\rho}$ jest normalnym dodatnim funkcjonałem na $\widetilde{\mathfrak{M}}$ (funkcjonał normalny na $\widetilde{\mathfrak{M}}$ można przedstawić w postaci $\widetilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ gdzie $\varphi_i \in \mathfrak{M}_*$ i szereg $\sum_i \varphi_i$ jest zbieżny w normie; wtedy $\widetilde{\varphi}(\widetilde{T}) = \sum_i \varphi_i(T_i)$). Zatem mamy następujacą reprezentację funkcji f

$$f(\widetilde{T}) = \widetilde{\rho}(g(\widetilde{T})),$$

czyli f jest $\sigma-$słabo ciągła jako złożenie $\sigma-$słabo ciągłych funkcji. Ponieważ $\widetilde{\mathfrak{R}}$ jest $\sigma-$słabo zwarty, to f osiąga maksimum na $\widetilde{\mathfrak{R}}$. Niech to maksimum będzie osiągane w punkcie $\tilde{T}_0 = (T_j^{(0)})$. Pokażemy, że jest ono osiagane także dla pewnego pomiaru. Połóżmy

$$T = \mathbb{1} - \sum_j T_j^{(0)},$$

oraz

$$M_j = \begin{cases} T_{j_0}^{(0)} + T, & \text{dla} \quad j = j_0 \\ T_j^{(0)}, & \text{dla} \quad j \neq j_0 \end{cases} .$$

Wtedy $\widetilde{\mathbb{M}} = (M_j)$ jest pomiarem i mamy

$$f(\widetilde{\mathbb{M}}) = \sum_i \sum_j \pi_i [b_i - L(i,j)] \rho_i(M_j) = \sum_i \sum_j \pi_i [b_i - L(i,j)] \rho_i(T_{j_0}^{(0)}) +$$
$$\sum_i \pi_i [b_i - L(i,j_0)] \rho_i(T) = f(\tilde{T}_0) + \sum_i \pi_i [b_i - L(i,j_0)] \rho_i(T) \geqslant f(\tilde{T}_0),$$

co oznacza, że f osiaga maksimum na pomiarze $\widetilde{\mathbb{M}}$. □

4 Twierdzenia pomocnicze

Załóżmy, że funkcje straty spełniają założenia Twierdzenia 3.1. Zauważmy, że warunek (i) pociaga zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_i L(i,j)\rho_i(M_j)$ dla dowolnego pomiaru. Istotnie,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_i|L(i,j)|\rho_i(M_j) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_i a_i \rho_i(M_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\pi_i a_i.$$

Zatem ryzyko bayesowskie można zapisać w postaci

$$r(\mathbb{M},\pi) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i L(i,j)\rho_i(M_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(M_j),$$

gdzie $\varphi_j = \sum_{i=1}^{\infty}\pi_i L(i,j)\rho_i$. Szereg $\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i L(i,j)$ jest bezwzględnie zbieżny, co pociąga zbieżność w normie szeregu funkcjonałów $\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i L(i,j)\rho_i$, zatem fukcjonały φ_j są normalne.

Weźmy dowolny ciąg $c = (c_i)$, taki że $L(i,j) \leqslant c_i$ dla dowolnych i, j oraz $\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i c_i < \infty$. Określmy funkcjonał

$$r_c(\mathbb{M},\pi) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_i(c_i - L(i,j))\rho_i(M_j).$$

Szereg $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_i(c_i - L(i,j))\rho_i(M_j)$ jest bezwzględnie zbieżny dla dowolnego pomiaru. Istotnie,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_i|c_i - L(i,j)|\rho_i(M_j) = \sum_{i=1}^{\infty}\pi_i c_i - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\pi_i L(i,j))\rho_i(M_j).$$

Zatem funkcję r_c można zapisać w postaci

$$r_c(\mathbb{M},\pi) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i(c_i - L(i,j))\rho_i(M_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j^c(M_j),$$

gdzie $\varphi_j^c = \sum_{i=1}^{\infty}\pi_i(c_i - L(i,j))\rho_i$. Szereg $\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i(c_i - L(i,j))$ jest bezwzględnie zbieżny, co pociąga zbieżność w normie szeregu funkcjonałów

$$\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i(c_i - L(i,j))\rho_i,$$

zatem fukcjonały φ_j^c są normalne.

Z powyższych rozważań wynika, że problem minimalizacji ryzyka bayesowskiego r z funkcjonałami ryzyka φ_j można sprowadzić do maksymalizacji funkcji r_c z dodatnimi funkcjonałami φ_j^c.

Twierdzenie 4.1. *Zachodzą równości*

$$r_c(\mathbb{M},\pi) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i c_i - r(\mathbb{M},\pi)$$
$$\min_{\mathbb{M}} r(\mathbb{M},\pi) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i c_i - \max_{\mathbb{M}} r_c(\mathbb{M},\pi).$$

Twierdzenie 4.2. *Zachodzi równość*

$$\max_{\mathbb{M}} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(M_j) = \min\{\varphi(\mathbb{1}) : \varphi \in \mathfrak{M}_*^h, \varphi_j^c \leqslant \varphi, j = 1,2,\ldots\}. \tag{4.1}$$

Następujące warunki są równoważne:

(i) Pomiar $\widetilde{\mathbb{M}} = \left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \ldots\right)$ *maksymalizuje lewą stronę (4.1) oraz* $\varphi \in \mathfrak{M}_*$ *minimalizuje prawą stronę (4.1).*

(ii) $\varphi_j^c \leqslant \varphi$ *oraz* $(\varphi - \varphi_j^c)\widetilde{M}_j = 0$ *dla* $j = 1,2,\ldots$.

(iii) $\varphi_j^c \leqslant \varphi$ *dla* $j = 1,2,\ldots$ *oraz* $\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{M}_j \varphi_j^c = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j^c \widetilde{M}_j = \varphi$.

Dowód. Z Twierdzenia 3.4(3.1) otrzymujemy

$$r(\mathbb{M},\pi) = \max\{\psi(\mathbb{1}) : \psi \leqslant \sum_i \pi_i L(i,j)\rho_i, j = 1,2,\ldots\}.$$

Oznaczmy przez φ funkcjonał $\sum_i \pi_i c_i \rho_i - \psi$. Powyższa równość przyjmuje postać

$$r(\mathbb{M},\pi) = \sum_i c_i \pi_i - \min\{\varphi(\mathbb{1}) : \varphi_j^c \leqslant \varphi, j = 1,2,\ldots\}.$$

W konsekwencji

$$r_c(\mathbb{M},\pi) = \min\{\varphi(\mathbb{1}) : \varphi_j^c \leqslant \varphi, j = 1,2,\ldots\}.$$

Warunek (i) równoważny jest temu, że pomiar $\widetilde{\mathbb{M}}$ minimalizuje lewą stronę (3.1) oraz $\sum_i \pi_i c_i \rho_i - \varphi$ maksymalizuje prawą stronę (3.1).

Warunek (ii) równoważny jest warunkowi

$$\sum_i \pi_i c_i \rho_i - \varphi \leqslant \varphi_j \quad \text{oraz} \quad (\varphi - \varphi_j)\widetilde{M}_j = 0 \quad \text{dla} \quad j = 1,2,\ldots.$$

Warunek (iii) równoważny jest warunkowi

$$\sum_i \pi_i c_i \rho_i - \varphi \leqslant \varphi_j \quad \text{dla} \quad j = 1,2,\ldots$$
$$\text{oraz} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{M}_j \varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \widetilde{M}_j = \sum_j \pi_i c_i \rho_i - \varphi.$$

Zatem korzystając z Twierdzenia 3.4 warunki (i), (ii), (iii) są równoważne. □

W dalszym ciągu tej pracy często będziemy korzystać z powyższych twierdzeń dla prawdopodobieństwa detekcji i ciągu $c_i = 1$. Mamy wtedy

$$\varphi_j^c = \pi_j \rho_j.$$

Otrzymujemy zatem następujące twierdzenia.

Twierdzenie 4.3.

$$\mathbb{P}_D(\mathbb{M}) = 1 - \mathbb{P}_E(\mathbb{M})$$
$$\min_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_E(\mathbb{M}) = 1 - \max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}).$$

Twierdzenie 4.4. *Zachodzi równość*

$$\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) = \min\{\varphi(\mathbb{1}) : \varphi \in \mathfrak{M}_*^h, \pi_j \rho_j \leqslant \varphi, j = 1, 2, \ldots\}. \tag{4.2}$$

Następujące warunki są równoważne:

(i) Pomiar $\widetilde{\mathbb{M}} = \left(\widetilde{M}_1, \widetilde{M}_2, \ldots\right)$ *maksymalizuje lewą stronę (4.2) oraz* $\varphi \in \mathfrak{M}_*$ *minimalizuje prawą stronę (4.2).*

(ii) $\pi_j \rho_j \leqslant \varphi$ *oraz* $(\varphi - \pi_j \rho_j)\widetilde{M}_j = 0$ *dla* $j = 1, 2, \ldots$.

(iii) $\pi_j \rho_j \leqslant \varphi$ *dla* $j = 1, 2, \ldots$ *oraz* $\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \widetilde{M}_j \rho_j = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \rho_j \widetilde{M}_j = \varphi$.

5 Pomiar optymalny w konkretnych przykładach

5.1 Dla dwóch stanów

Dla dwóch stanów czystych $\hat{\rho}_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|, \hat{\rho}_2 = |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$ z dowolnymi prawdopodobieństwami a priori π_1, π_2 wzór na minimalne prawdopodobieństwo błędu możemy znaleźć w [8, IV (2.34)], ma on postać

$$\min_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_E(\mathbb{M}) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\pi_1\pi_2|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}\right).$$

Dla dwóch dowolnych stanów ρ_1, ρ_2 w skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta z dowolnymi prawdopodobieństwami a priori π_1, π_2 wzór na minimalne prawdopodobieństwo błędu ma postać

$$\min_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_E(\mathbb{M}) = \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{tr}|\pi_1\hat{\rho}_1 - \pi_2\hat{\rho}_2|\right),$$

a pomiarem optymalnym jest strategia $M_1 = s((\pi_1\rho_1 - \pi_2\rho_2)_+), M_2 = \mathbb{1} - M_1$. Rezultat ten możemy znaleźć w wielu pracach np. [3], [12, Example 2.2.3], w żadnej pracy nie spotkałem dowodu tego wyniku.

Przedstawimy uogólnienie powyższych wyników na przypadek ryzyka bayesowskiego z dowolną funkcją straty w dowolnej algebrze von Neumanna wraz z dowodami.

Niech $\varphi_1 = \pi_1 L(1,1)\rho_1 + \pi_2 L(2,1)\rho_2, \varphi_2 = \pi_1 L(1,2)\rho_1 + \pi_2 L(2,2)\rho_2$. Wtedy $r(\mathbb{M}, \pi) = \varphi_1(M_1) + \varphi_2(M_2) = (\varphi_1 - \varphi_2)(M_1) + \varphi_2(\mathbb{1})$. W dalszym ciągu będziemy minimalizować funkcjonał r, czyli będziemy szukać minimum funkcjonału $\psi(M_1)$, gdzie $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$. Zgodnie z rozkładem Jordana mamy $\psi = \psi_+ - \psi_-, \psi_+, \psi_- \geqslant 0$. Zatem

$$\min \psi(M_1) = \min(\psi_+ - \psi_-)(M_1) \geqslant \min \psi_+(M_1) - \max \psi_-(M_1) \geqslant -\psi_-(\mathbb{1}) = -\psi_-(s(\psi_-)),$$

gdzie $s(f)$ oznacza nośnik funkcjonału f. Z drugiej strony $\min \psi(M_1) \leqslant \psi(s(\psi_-)) = -\psi_-(s(\psi_-))$, zatem $\min \psi(M_1) = -\psi_-(\mathbb{1})$. W konsekwencji

$$\min r(\mathbb{M}, \pi) = \varphi_2(\mathbb{1}) - (\varphi_1 - \varphi_2)_-(\mathbb{1}) = \varphi_2(\mathbb{1}) - (\varphi_2 - \varphi_1)_+(\mathbb{1}) \tag{5.1}$$

oraz pomiar

$$\mathbb{M} = (s((\varphi_1 - \varphi_2)_-), \mathbb{1} - s((\varphi_1 - \varphi_2)_-)) = (s((\varphi_2 - \varphi_1)_+), \mathbb{1} - s((\varphi_2 - \varphi_1)_+))$$

jest pomiarem optymalnym. Analogicznie można otrzymać wzór

$$\min r(\mathbb{M},\pi) = \varphi_1(\mathbb{1}) - (\varphi_2-\varphi_1)_-(\mathbb{1}) = \varphi_1(\mathbb{1}) - (\varphi_1-\varphi_2)_+(\mathbb{1}) \tag{5.2}$$

oraz optymalność pomiaru

$$\mathbb{M} = (\mathbb{1} - s((\varphi_2-\varphi_1)_-), s((\varphi_2-\varphi_1)_-)) = \\ (\mathbb{1} - s((\varphi_1-\varphi_2)_+), s((\varphi_1-\varphi_2)_+)).$$

Ze wzorów (5.1), (5.2) otrzymujemy

$$\min r(\mathbb{M},\pi) = \frac{1}{2}\left(\varphi_1(\mathbb{1}) + \varphi_2(\mathbb{1}) - |\varphi_1-\varphi_2|(\mathbb{1})\right). \tag{5.3}$$

Następne twierdzenie jest moim własnym rezultatem.

Twierdzenie 5.1. *Pomiar optymalny jest wyznaczony jednoznacznie wtedy i tylko wtedy, gdy* $s(\varphi_1-\varphi_2) = \mathbb{1}$.

Dowód. "$\Rightarrow$:" Z powyższych rozważań pomiar optymalny jest postaci $\mathbb{M} = (s((\varphi_1-\varphi_2)_-)), s((\varphi_1-\varphi_2)_+)))$. Zatem $s(\varphi_1-\varphi_2) = s((\varphi_1-\varphi_2)_-)) + s((\varphi_1-\varphi_2)_+)) = \mathbb{1}$.

"$\Leftarrow$:" Ponieważ $s(\varphi_1-\varphi_2) = s((\varphi_1-\varphi_2)_-)) + s((\varphi_1-\varphi_2)_+)) = \mathbb{1}$, więc $\mathbb{M} = (s((\varphi_1-\varphi_2)_-)), s((\varphi_1-\varphi_2)_+)))$ jest pomiarem optymalnym. Załóżmy, że $\widetilde{\mathbb{M}} = (A, \mathbb{1}-A), A \neq s((\varphi_1-\varphi_2)_-))$ jest także pomiarem optymalnym. Wtedy $(\varphi_1-\varphi_2)_+(A) = 0, (\varphi_1-\varphi_2)_-(\mathbb{1}-A) = 0$, zatem $A = s((\varphi_1-\varphi_2)_-))$, sprzeczność. □

5.2 Dla stanów komutujących

Niech $\mathfrak{M}$ będzie półskończoną algebrą von Neumanna na ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ z normalnym, półskończonym, wiernym śladem τ oraz $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ funkcjonałami ryzyka na $\mathfrak{M}$. Oznaczmy przez $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \ldots, \hat{\varphi}_n$ macierze gęstości z $L_1(\mathfrak{M})$ funkcjonałów $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Załóżmy, że

$$\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \ldots, \hat{\varphi}_n \in \mathfrak{M} \quad \text{oraz} \quad \hat{\varphi}_i\hat{\varphi}_j = \hat{\varphi}_j\hat{\varphi}_i.$$

Rozważmy alegbrę von Neumanna $\widetilde{\mathfrak{M}}$ generowaną przez operatory

$$\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \ldots, \hat{\varphi}_n.$$

Oczywiście jest ona algebrą abelową. Z Twierdzenia [25, Proposition 1.21] algebra $\widetilde{\mathfrak{M}}$ jest generowana przez jeden operator samosprzężony, oznaczmy go przez A. Zatem istnieją ograniczone funkcje borelowskie $f_1, f_2, \ldots, f_n$, takie że $\hat{\varphi}_i = f_i(A)$ dla dowolnego i.

Twierdzenie 5.2. *Minimalne ryzyko bayesowskie wynosi*

$$\tau(\min\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}(A)).$$

Dowód. Zdefiniujmy zbiory

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} : f_1(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}\},$$
$$S_i = \{x \in \mathbb{R} : f_i(x) = \min\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\}\} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} S_j, i = 2, 3, \dots, n.$$

Dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$ zachodzi oczywista nierówność

$$f_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} (f_i \mathbb{1}_{S_i}).$$

Z powyższej nierówności dla dowolnego $i = 1, 2, \dots, n$ dostajemy

$$\hat{\varphi}_i = f_i(A) \geqslant \sum_{j=1}^{n} (f_i \mathbb{1}_{S_i})(A).$$

Oczywiście $\mathbb{M} = (\mathbb{1}_{S_1}(A), \mathbb{1}_{S_2}(A), \dots, \mathbb{1}_{S_n}(A))$ jest pomiarem. Zatem z Twierdzenia 3.4 (iii)$\Rightarrow$(i) $\mathbb{M}$ jest pomiarem optymalnym oraz minimalne ryzyko bayesowskie wynosi $\tau(\sum_{i=1}^{n} f_i \mathbb{1}_{S_i}(A))$. Ponieważ zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \mathbb{1}_{S_i} = \min\{f_1, f_2, \dots, f_n\},$$

to otrzymujemy wzór na minimalne ryzyko bayesowskie

$$\tau(\min\{f_1, f_2, \dots, f_n\}(A)).$$

$\square$

Idea dowodu powyższego twierdzenia została zaczerpnięta z [11, Proposition II.2.2].

6 Jednoznaczność pomiaru optymalnego

W dalszym ciągu będziemy rozważać tylko funkcje straty spełniające założenia powyższego Twierdzenia 3.1. Niech $c = (c_i)$ będzie dowolnym ciagiem, takim że $L(i,j) \leqslant c_i$ dla dowolnych i, j oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i c_i < \infty$. Zakładamy, że φ_j^c są niezerowe ponieważ zerowe funkcjonały nie mają wpływu na wartość r_c. Oznaczmy przez $s(\varphi)$ nośnik normalnego funkcjonału hermitowskiego φ, przez P projekcję $\bigvee_{j=1}^{\infty} s(\varphi_j^c)$ oraz przez $P\mathfrak{M}P$ algebrę von Neumanna postaci $\{PAP|_{P\mathcal{H}} : A \in \mathfrak{M}\}$. Dowolny funkcjonał φ na $\mathfrak{M}$ można obciąć do algebry $P\mathfrak{M}P$ w następujący sposób: $\varphi(A) := \varphi(PAP) = \varphi(AP), A \in P\mathfrak{M}P$. Wtedy oczywiście $\varphi_j^c(M) = \varphi_j^c(PMP) = \varphi_j^c(PMP|_{P\mathcal{H}}), M \in \mathfrak{M}$. Stąd mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.1. *Jeżeli pomiar* $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots)$ *jest optymalny dla funkcjonału* r_c *na algebrze* $\mathfrak{M}$*, to pomiar* $\widetilde{\mathbb{M}} = (PM_1P|_{P\mathcal{H}}, PM_2P|_{P\mathcal{H}}, \ldots)$ *jest optymalny dla funkcjonału* r_c *na algebrze* $P\mathfrak{M}P$ *oraz* $r_c(\mathbb{M}, \pi) = r_c(\widetilde{\mathbb{M}}, \pi)$.

W dalszym ciągu będziemy rozważać maksymalizację r_c na algebrze $P\mathfrak{M}P$. Wszystkie funkcjonały będą określone na $P\mathfrak{M}P$. Ustalmy pewien indeks $j_0 \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że

$$s(\varphi_{j_0}^c) \wedge \bigvee_{j \neq j_0} s(\varphi_j^c) = 0.$$

Powyższy warunek można też zapisać następująco

$$\xi_{j_0} \notin \overline{\mathrm{Lin}\{\xi_j : \xi_j \in \mathcal{R}(s(\varphi_j^c)), j \in \mathbb{N} \setminus \{j_0\}\}}$$

dla dowolnego $\xi_{j_0} \in \mathcal{R}(s(\varphi_{j_0}^c))$.

Lemat 6.2. *Jeżeli* $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots)$ *jest pomiarem optymalnym, to*

$$M_{j_o} s(\varphi_{j_0}^c) \neq 0.$$

Dowód. Załóżmy, że $M_{j_o} s(\varphi_{j_0}^c) = 0$. Niech $Q = \bigvee_{j \neq j_0} s(\varphi_j^c)$. Zdefiniujmy nowy pomiar $\widetilde{\mathbb{M}} = (QM_1Q, QM_2Q, \ldots, \mathbb{1} - Q + QM_{j_0}Q, \ldots)$. Z równości $\varphi_j^c(M_{j_0}) = 0$ mamy

$$r_c(\widetilde{\mathbb{M}}, \pi) = \varphi_{j_0}^c(\mathbb{1} - Q) + \varphi_{j_0}^c(QM_{j_0}Q) + \sum_{j \neq j_0} \varphi_j^c(QM_jQ) =$$

$$\varphi_{j_0}^c(\mathbb{1} - Q) + \varphi_{j_0}^c(QM_{j_0}Q) + r_c(\mathbb{M}, \pi).$$

Z powyższego i z optymalności pomiaru $\mathbb{M}$ otrzymujemy $\varphi_{j_0}^c(\mathbb{1} - Q) = 0$. Z własności nośnika $s(\varphi_{j_0}^c)$ mamy $s(\varphi_{j_0}^c)P\mathcal{H} \subset QP\mathcal{H}$, sprzeczność. □

Twierdzenie 6.3. *Jeżeli pomiar $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots)$ jest optymalny, to wynik M_{j_0} jest jednoznacznie wyznaczoną niezerową projekcją.*

Dowód. Z Twierdzenia 4.2(ii) mamy

$$\sum_{j \neq j_0} \varphi_j^c M_j M_{j_0} = \varphi_{j_0}^c (M_{j_0} - M_{j_0}^2).$$

Zatem dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$ zachodzi

$$\sum_{j \neq j_0} \varphi_j^c (M_{j_0} M_j A Q) = \varphi_{j_0}^c ((M_{j_0} - M_{j_0}^2) A s(\varphi_{j_0}^c)),$$

gdzie $Q = \bigvee_{j \neq j_0} s(\varphi_j^c)$. Prawe nośniki funkcjonałów po lewej i prawej stronie równości są równe i zawarte w projekcjach $Q, s(\varphi_{j_0}^c)$, co jest możliwe tylko gdy obydwa funkcjonały są zerowe. Stąd $\varphi_{j_0}^c(M_{j_0} - M_{j_0}^2) = 0$, co daje $M_{j_0}^2 s(\varphi_{j_0}^c) = M_{j_0} s(\varphi_{j_0}^c)$. Stąd i z Lematu 6.5 istnieje wektor $\xi \in \mathcal{H}$, taki że $M_{j_0} s(\varphi_{j_0}^c)\xi$ jest wektorem własnym operatora M_{j_0} odpowiadającym wartości własnej 1. Zdefiniujmy ciąg $\hat{\mathbb{M}} = (\hat{M}_1, \hat{M}_2, \ldots)$, gdzie $\hat{M}_j = M_j$ dla $j \neq j_0$ oraz $\hat{M}_{j_0}$ jest niezerową projekcją na przestrzeń $\overline{\mathcal{R}(M_{j_0} s(\varphi_{j_0}^c))}$. Oczywiście $\hat{M}_{j_0} \in P\mathfrak{M}P$.

Z nierówności $\hat{M}_{j_0} \leqslant M_{j_0}$ mamy $\varphi_{j_0}^c(\hat{M}_{j_0}) \leqslant \varphi_{j_0}^c(M_{j_0})$. Z drugiej strony, z komutowania operatorów $\hat{M}_{j_0}$ i M_{j_0} mamy

$$\varphi_{j_0}^c(M_{j_0}) = \varphi_{j_0}^c(\hat{M}_{j_0}^2 M_{j_0} s(\varphi_{j_0}^c)) = \varphi_{j_0}^c(\hat{M}_{j_0} M_{j_0} \hat{M}_{j_0} s(\varphi_{j_0}^c)) \leqslant \varphi_{j_0}^c(\hat{M}_{j_0}^2 s(\varphi_{j_0}^c)) = \varphi_{j_0}^c(\hat{M}_{j_0}).$$

Powyższe nierówności dają równość $\varphi_{j_0}^c(\hat{M}_{j_0}) = \varphi_{j_0}^c(M_{j_0})$ zatem $r_c(\hat{\mathbb{M}}, \pi) = r_c(\mathbb{M}, \pi)$.

Pokażemy, że $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{M}_j = \mathbb{1}$. Oznaczmy $T = \mathbb{1} - \sum_{j=1}^{\infty} \hat{M}_j$. Niech $i = 1, 2, \ldots$ będzie dowolnie wybranym indeksem i $\mathbb{N} = (N_1, N_2, \ldots)$, gdzie $N_j = \hat{M}_j$ dla $j \neq i$ oraz $N_i = \hat{M}_i + T$. Wtedy

$$r_c(\mathbb{N}, \pi) \leqslant r_c(\hat{\mathbb{M}}, \pi) \Leftrightarrow \sum_{j \neq i} \varphi_j^c(\hat{M}_j) + \varphi_i^c(\hat{M}_i + T) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j^c(\hat{M}_j) \Leftrightarrow \varphi_i^c(T) = 0.$$

Z dowolności i mamy, że $\varphi_i^c(T) = 0$ dla dowolnego i. Co daje $s(\varphi_j^c) T s(\varphi_j^c) = 0$ dla dowolnego i, czyli $T = 0$ na $P\mathcal{H}$. Zatem $\sum_{j=1}^{\infty} \hat{M}_j = \mathbb{1}$, a stąd $\hat{M}_{j_0} = M_{j_0}$.

Załóżmy, że $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots)$ i $\mathbb{N} = (N_1, N_2, \ldots)$ są różnymi pomiarami takimi, że $M_{j_0} \neq N_{j_0}$. Z powyższego M_{j_0} i N_{j_0} są projekcjami. Oczywiście $\frac{1}{2}\mathbb{M} + \frac{1}{2}\mathbb{N}$ jest także pomiarem optymalnym oraz $\frac{1}{2}M_{j_0} + \frac{1}{2}N_{j_0}$ jest projekcją. Wtedy

$$\frac{1}{2}M_{j_0} + \frac{1}{2}N_{j_0} = \left(\frac{1}{2}M_{j_0} + \frac{1}{2}N_{j_0}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$2M_{j_0} + 2N_{j_0} = M_{j_0} + M_{j_0}N_{j_0} + N_{j_0}M_{j_0} + N_{j_0} \Leftrightarrow$$
$$(M_{j_0} - N_{j_0})^2 = 0 \Leftrightarrow M_{j_0} = N_{j_0},$$

co jest sprzeczne z założeniem. W konsekwencji M_{j_0} jest wyznaczone jednoznacznie. □

Załóżmy, że dla dowolnego $i = 1, 2, \ldots$ zachodzi

$$s(\varphi_i^c) \wedge \bigvee_{j \neq i} s(\varphi_j^c) = 0. \tag{6.1}$$

Twierdzenie 6.4. *Istnieje jednoznacznie wyznaczony pomiar maksymalizujący funkcjonał r_c, ponadto jest to pomiar prosty o niezerowych wynikach.*

Dowód. Niech $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots)$ będzie pomiarem optymalnym. Z Twierdzenia 6.3 każdy wynik M_j jest jednoznacznie wyznaczoną niezerową projekcją. Projekcje M_j są wzajemnie ortogonalne ponieważ $M_1 + M_2 + \ldots = \mathbb{1}$. Zatem $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots)$ jest jednoznacznie wyznaczonym pomiarem prostym z niezerowymi wynikami. □

Nie zakładajmy teraz żadnego warunku na nośniki funkcjonałów φ_j^c.

Lemat 6.5. *Funkcjonał Lagrange'a jest dodatnim funkcjonałem wiernym.*

Dowód. Niech φ będzie funkcjonałem Lagrange'a. Z Twierdzenia 4.2 wiemy, że $\varphi \geqslant \varphi_j^c$, co daje dodatniość φ. Załóżmy, że funkcjonał Lagrange'a φ nie jest wierny tzn. istnieje operator $A \geqslant 0, A \neq 0$, taki że $\varphi(A) = 0$. Wtedy znowu zgodnie z Twierdzeniem 4.2, $0 = \varphi(A) \geqslant \varphi_j^c(A)$ dla dowolnego j. Stąd $\varphi_j^c(A) = 0$ dla dowolnego j. Ponieważ $\{\varphi_j^c\}$ jest wierną rodziną funkcjonałów dodatnich, to $A = 0$. Co daje sprzeczność. Czyli φ jest wierny. □

Załóżmy, że $\mathfrak{M} = \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Następne twierdzenie pokazuje relacje pomiędzy zakresami wyników pomiaru optymalnego a zakresami funkcjonałów φ_j^c.

Twierdzenie 6.6. *Niech $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots)$ będzie pomiarem maksymalizującym funkcjonał r_c. Wtedy*

$$\dim \mathcal{R}(M_j) \leqslant \dim \mathcal{R}(\hat{\varphi}_j^c)$$

dla dowolnego $j = 1, 2, \ldots$.

Dowód. Niech φ będzie funkcjonałem Lagrange'a. Z Twierdzenia 4.2(ii) mamy

$$(\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_j^c) M_j = 0 \tag{6.2}$$

dla dowolnego $j = 1, 2, \ldots$. Z Lematu 6.5 operator $\hat{\varphi}$ jest odwracalny. Zatem z (6.2) dostajemy

$$M_j = \hat{\varphi}^{-1} \hat{\varphi}_j^c M_j,$$

co daje, $\dim \mathcal{R}(M_j) \leqslant \dim \mathcal{R}(\hat{\varphi}_j^c)$. □

Rozważmy dalej przypadek pełnej algebry. Przyjmijmy za funkcję straty $L(i, j) = 1 - \delta_{ij}$ oraz za ciąg c ciąg $c_i = 1$. Wtedy $\varphi_j^c = \pi_j \rho_j$, a funkcjonał r_c to prawdopodobieństwo detekcji. Każdy stan ρ_j ma postać

$$\hat{\rho}_j = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^j |\xi_i^j\rangle\langle\xi_i^j|.$$

Załóżmy, że wektory $\{\xi_i^j\}$ rozpinają całą przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$. Warunek (6.1) w tym przypadku można zapisać jako

$$\xi_i^j \notin \overline{\mathrm{Lin}\{\xi_n^m : m \neq j\}}.$$

Nazwijmy ten warunek mocną liniową niezależnością stanów $\rho_1, \rho_2, \ldots$. Twierdzenie 6.4 można wtedy zapisać w postaci:

Twierdzenie 6.7. *Niech stany $\rho_1, \rho_2, \ldots$ będą mocno liniowo niezależne. Wtedy istnieje jednoznacznie wyznaczony pomiar maksymalizujący prawdopodobieństwo detekcji, ponadto jest to pomiar prosty o niezerowych wynikach.*

Powyższe twierdzenie jest głównym wynikiem pracy [31, Theorem 3]; dokładniej, w cytowanej pracy warunek mocnej liniowej niezależności stanów jest mocniejszy $\xi_i^j \notin \overline{\mathrm{Lin}\{\xi_n^m : m \neq j \wedge n \neq i\}}$. Dla skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta twierdzenie to udowodniła Eldar w pracy [6, Theorem 1]. Analogiczne twierdzenie dla stanów czystych w nieskończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta udowodnił Łuczak w pracy [16, Theorem 5], a w skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta Kennedy w pracach [14, 15].

7 Oszacowania

7.1 Oszacowanie typu Qiu

Nierówność Qiu jest głównym wynikiem pracy [23, Theorem 1], podana jest ona we Wniosku 7.1. W cytowanej pracy jest ona udowodniona dla $\mathfrak{M} = \mathbb{B}(\mathbb{C}^d)$. W następnym twierdzeniu uogólnimy ją na przypadek minimalizacji ryzyka bayesowskiego z dowolną funkcją straty oraz dowolnej algebry $\mathfrak{M}$. Dowód będzie przeprowadzony inną metodą niż w pracy [23].

Dana jest skończona liczba stanów $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Niech $c = (c_i)$ będzie dowolnym ciągiem, takim że $L(i,j) \leqslant c_i$ dla dowolnych i, j.

Twierdzenie 7.1.

$$\min_{\mathbb{M}} r(\mathbb{M}, \pi) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \pi_i c_i - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^c(\mathbb{1}) - \frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |\varphi_i - \varphi_j|(\mathbb{1})\right)$$

Dowód. Zachodzą równości

$$\max_{\mathbb{M}} r_c(\mathbb{M}, \pi) = \max_{\mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^c(M_i) = \max_{\mathbb{M}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{n-1}\varphi_i^c(M_i)\right) =$$
$$\max_{\mathbb{M}} \frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\varphi_i^c(M_i) + \varphi_j^c(M_j)\right).$$

Weźmy dowolny pomiar $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$. Wtedy zachodzi nierówność

$$\varphi_i^c(M_i) + \varphi_j^c(M_j) \leqslant \varphi_i^c(M_i) + \varphi_j^c(\mathbb{1} - M_i),$$

stąd

$$\varphi_i^c(M_i) + \varphi_j^c(M_j) \leqslant \max_{\mathbb{N}=(N_1,N_2)}\left[\varphi_i^c(N_1) + \varphi_j^c(N_2)\right],$$

gdzie $\mathbb{N} = (N_1, N_2)$ jest dowolnym pomiarem. Z powyższej nierówności i dowolności pomiaru $\mathbb{M}$ otrzymujemy nierówność

$$\max_{\mathbb{M}} \frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\varphi_i^c(M_i) + \varphi_j^c(M_j)\right) \leqslant$$
$$\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\max_{\mathbb{N}=(N_1,N_2)}\left(\varphi_i^c(N_1) + \varphi_j^c(N_2)\right).$$

Mamy dalej

$$\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\max_{\mathbb{N}=(N_1,N_2)}\left(\varphi_i^c(N_1)+\varphi_j^c(N_2)\right) =$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}\pi_k c_k-\min_{\mathbb{N}=(N_1,N_2)}\left(\varphi_i(N_1)+\varphi_j(N_2)\right)\right)$$

Tak samo jak wzór (5.3) otrzymujemy wzór

$$\min_{\mathbb{N}=(N_1,N_2)}\left(\varphi_i(N_1)+\varphi_j(N_2)\right)=\frac{1}{2}\left(\varphi_i(\mathbb{1})+\varphi_j(\mathbb{1})-|\varphi_i-\varphi_j|(\mathbb{1})\right),$$

stąd

$$\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}\pi_k c_k-\min_{\mathbb{N}=(N_1,N_2)}\left(\varphi_i(N_1)+\varphi_j(N_2)\right)\right) =$$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\sum_{k=1}^{n}\pi_k c_k-\frac{1}{2}\left(\varphi_i(\mathbb{1})+\varphi_j(\mathbb{1})-|\varphi_i-\varphi_j|(\mathbb{1})\right)\right) =$$

$$\frac{1}{2(n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\varphi_i^c(\mathbb{1})+\varphi_j^c(\mathbb{1})+|\varphi_i-\varphi_j|(\mathbb{1})\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^c(\mathbb{1})+\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\varphi_i-\varphi_j|(\mathbb{1})\right).$$

□

Wniosek 7.2.

$$\max_{\mathbb{M}}\mathbb{P}_D(\mathbb{M})\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n-1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|\pi_i\rho_i-\pi_j\rho_j|(\mathbb{1})\right)$$

Dowód. W Twierdzeniu 7.1 wystarczy przyjąć $c=(1,1,\ldots,1)$. □

7.2 Oszacowanie entropijne

W pracy [13] autorzy wykorzystują entropię stanu do oszacowania prawdopodobieństwa detekcji. Dla pełnej algebry, skończenie wymiarowej przestrzeni Hilberta i skończonej liczby stanów otrzymują nierówność (7.9). Uogólnimy ten rezultat na przypadek ryzyka bayesowskiego korzystając z idei dowodu [5, Lemma 2]. Otrzymamy także warunki na zachodzenie równości w naszej nierówności. Będziemy korzystać z dwóch definicji entropii: Arakiegi i Segala.

Za pomocą entropii Arakiego

Przy kolejnych oszacowaniach potrzebne nam będą pewne wiadomości o entropii funkcjonałów dodatnich, które zamieścimy bez dowodów. Oznaczmy przez $S(\phi, \psi)$ relatywną entropię Arakiego dla dodatnich normalnych funcjonałów ϕ i ψ na algebrze von Neumanna $\mathfrak{M}$ (patrz [1, 2]) tzn.

$$S(\phi, \psi) = \begin{cases} -\langle \Phi | \log \Delta_{\psi|\phi} \Phi \rangle & \text{jeżeli} \quad s(\psi) \geqslant s(\phi) \\ +\infty & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases},$$

gdzie Φ jest wektorem z naturalnego dodatniego stożka odpowiadającym funkcjonałowi ϕ, $\Delta_{\psi|\phi}$ to relatywny operator modularny funkcjonałów ψ i ϕ oraz $s(\psi), s(\phi)$ to nosniki funkcjonałów ψ, ϕ. Araki w pracach [1, 2] entropię relatywną oznacza przez $S(\psi, \phi)$, ale w nowszych książkach [21], [18] używane jest oznaczenie $S(\phi, \psi)$, my też będziemy takiego używać.

Twierdzenie 7.3. *1. $S(\phi, \psi)$ przyjmuje wartość skończoną lub $+\infty$.*

2. (Nierówność Kleina) Jeżeli $\phi(\mathbb{1}) = \psi(\mathbb{1}) > 0$, to $S(\phi, \psi) \geqslant 0$.

3. Dla $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ zachodzi równość

$$S(\lambda_1 \phi, \lambda_2 \psi) = \lambda_1 S(\phi, \psi) - \lambda_1 \phi(\mathbb{1})(\log \lambda_2 - \log \lambda_1).$$

4. Niech ψ_1 i ψ_2 będą dodatnimi normalnymi funkcjonałami na algebrze $\mathfrak{M}$. Jeżeli $\psi_1 \geqslant \psi_2$, to $S(\phi, \psi_1) \leqslant S(\phi, \psi_2)$.

Podpunkt 1, to [2, Lemma 3.2], podpunkty 2-4 znajdziemy w [2, Theorem 3.6].

Twierdzenie 7.4 (Tożsamość Donalda)**.** *Niech ψ i $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ będą dodatnimi normalnymi funkcjonałami. Wtedy zachodzi równość*

$$S(\phi, \psi) + \sum_{i=1}^{n} S(\phi_i, \phi) = \sum_{i=1}^{n} S(\phi_i, \psi),$$

gdzie $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i$.

To twierdzenie można znaleźć w [21, Proposition 5.22].

Niech $c = (c_i)$ będzie dowolnym ciagiem, takim że $L(i,j) \leqslant c_i$ dla dowolnych i, j. Dla skończonej liczby stanów zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.5. *Zachodzi oszacowanie*

$$\min_{\mathbb{M}} r(\mathbb{M}, \pi) \leqslant \sum_i \pi_i c_i - 2^{\frac{1}{a_c}\left(\sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i^c, \varphi^c) - a_c \log a_c\right)}, \tag{7.1}$$

gdzie $\varphi^c = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^c, a_c = \sum_{ij} \pi_i (c_i - L(i,j))$.

Dowód. Niech φ' będzie funkcjonałem Lagrange'a. Z tożsamości Donalda (Twierdzenie 7.4) mamy

$$S(\varphi^c, \varphi') + \sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i^c, \varphi^c) = \sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i^c, \varphi'). \tag{7.2}$$

Ponieważ $\varphi' \geqslant \varphi_i^c$ to z Twierdzenia 7.3.4 mamy

$$S(\varphi_i^c, \varphi') \leqslant S(\varphi_i^c, \varphi_i^c) = 0. \tag{7.3}$$

Zatem stosując nierówność (7.3) do równści (7.2) dostajemy

$$S(\varphi^c, \varphi') + \sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i^c, \varphi^c) \leqslant 0, \tag{7.4}$$

co daje nam

$$\sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i^c, \varphi^c) \leqslant -S(\varphi^c, \varphi'). \tag{7.5}$$

Z Twierdzenia 7.3.3 mamy

$$S(\varphi^c, \varphi') = S\left(a_c \frac{\varphi^c}{a_c}, \varphi'(\mathbb{1}) \frac{\varphi'}{\varphi'(\mathbb{1})}\right) = a_c S\left(\frac{\varphi^c}{a_c}, \frac{\varphi'}{\varphi'(\mathbb{1})}\right) - \tag{7.6}$$

$$a_c(\log \varphi'(\mathbb{1}) - \log a_c). \tag{7.7}$$

Z nierówności Kleina (Twierdzenie 7.3.2) mamy $S\left(\frac{\varphi^c}{a_c}, \frac{\varphi'}{\varphi'(\mathbb{1})}\right) \geqslant 0$ co razem z (7.5) i (7.6, 7.7) daje nam

$$\sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i^c, \varphi^c) \leqslant a_c(\log \varphi'(\mathbb{1}) - \log a_c)$$

Po przekształceniach otrzymujemy nierówność

$$\frac{1}{a_c}\left(\sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i^c, \varphi^c) - a_c \log a_c\right) \leqslant \log \varphi'(\mathbb{1}).$$

Co daje nam

$$\log \min_{\mathbb{M}} r_c(\mathbb{M}, \pi) \geqslant \frac{1}{a_c}\left(\sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i^c, \varphi^c) - a_c \log a_c\right).$$

Ostatecznie

$$\min_{\mathbb{M}} r(\mathbb{M}, \pi) \leqslant \sum_i \pi_i c_i - 2^{\frac{1}{a_c}\left(\sum_{i=1}^{n} S(\varphi_i^c, \varphi^c) - a_c \log a_c\right)}.$$

□

Wniosek 7.6.

$$\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) \geqslant 2^{\sum_{i=1}^{n} S\left(\pi_i\rho_i, \sum_{j=1}^{n} \pi_j\rho_j\right)} = 2^{\sum_{i=1}^{n} \pi_i S\left(\rho_i, \sum_{j=1}^{n} \pi_j\rho_j\right) - H(\pi)},$$

gdzie $H(\pi) = -\sum_{i=1}^{n} \pi_i \log \pi_i$ *jest entropią Shannona ciągu* $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$.

Za pomocą entropii Segala

Załóżmy teraz, że $\mathfrak{M}$ jest algebrą von Neumanna z normalnym, skończonym, wiernym, unormowanym śladem τ. Niech ρ będzie normalnym funkcjonałem na algebrze $\mathfrak{M}$. Oznaczmy przez $\hat{\rho}$ jego macierz gęstości względem śladu τ należącą do $L^1(\mathfrak{M}, \tau)$. W następnym oszacowaniu będziemy wykorzystywać entropię Segala. Przypomnijmy jej definicję.

Definicja 7.7 (Entropia Segala)**.** *Entropię Segala dodatniego normalnego funkcjonału ρ na algebrze $\mathfrak{M}$ oznaczamy przez $H(\rho)$ i definiujemy jako*

$$H(\rho) = \tau(\hat{\rho} \log \hat{\rho}).$$

Uwaga
W przypadku pełnej algebry entropię von Neumanna definiuje się jako $-\mathrm{tr}(\hat{\rho} \log \hat{\rho})$ i jest ona dodatnia. W naszym przypadku aby entropia Segala była dodatnia definiujemy ją bez minusa.

Więcej informacji o entropii Segala można znaleźć w [22]. Będą nam potrzebne pewne wiadomości związane z entropią Segala.

Twierdzenie 7.8 (Nierówność Kleina)**.** *Niech $A, B \in \mathfrak{M}, A, B \geqslant 0, \tau(A) = \tau(B) = 1$ oraz supp $A \leqslant$ supp B, gdzie supp A, supp B to nośniki operatorów A, B. Wtedy*

$$\tau(A \log B) \geqslant \tau(A \log B).$$

W przypadku $\mathfrak{M} = \mathbb{B}(\mathbb{C}^d)$ równość $\tau(A \log A) = \tau(A \log B)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$.

Nierówność Kleina można znaleźć w [30, Theorem 1], a twierdzenie o równości w [18, Theorem 2.1.2 (i)].

Twierdzenie 7.9. *Niech $A, B \in \mathfrak{M}$ oraz $0 \leqslant A \leqslant B$. Wtedy*

$$\tau(A \log B - A \log A) \geqslant 0.$$

Równość w powyższej nierówności zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = BA = A^2$.

Powyższe twierdzenie można znaleźć w [22, Proposition 1].

Twierdzenie 7.10. *Niech $A, B \in \mathfrak{M}$ oraz $0 \leqslant A \leqslant B$. Wtedy $A \log B \in \mathfrak{M}$.*

Dowód. Z relacji $0 \leqslant A \leqslant B$ mamy

$$0 \leqslant (\log B)A(\log B) \leqslant (\log B)B(\log B) = B(\log B)^2,$$

zatem $(\log B)A(\log B)$ jest ograniczony i należy do $\mathfrak{M}$. Ponadto

$$(\log B)A(\log B) = (A^{\frac{1}{2}} \log B)^*(A^{\frac{1}{2}} \log B),$$

stąd $A^{\frac{1}{2}} \log B$ jest ograniczony i należy do $\mathfrak{M}$ czyli $A \log B$ też jest ograniczony i należy do $\mathfrak{M}$. $\square$

W dalszym ciągu będziemy rozważać tylko funkcje straty spełniające założenia powyższego Twierdzenia 3.1. Niech $c = (c_i)$ będzie dowolnym ciagiem, takim że $L(i,j) \leqslant c_i$ dla dowolnych i, j oraz $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i c_i < \infty$.

Twierdzenie 7.11. *Załóżmy, że szereg $\sum_{ij} \pi_i(c_i - L(i,j))\|\hat{\rho}_i\|_\infty$ jest zbieżny i przyjmijmy oznaczenie $a_c = \sum_{ij} \pi_i(c_i - L(i,j))$. Zachodzi oszacowanie*

$$\min_{\mathbb{M}} r(\mathbb{M}, \pi) \leqslant \sum_i \pi_i c_i - 2^{\frac{1}{a_c}\left(\sum_i H(\varphi_i^c)\right) - H\left(\frac{1}{a_c}\left(\sum_i \varphi_i^c\right)\right)}. \tag{7.8}$$

Dowód. Zauważmy, że zbieżność szeregu $\sum_{ij} \pi_i(c_i - L(i,j))\|\hat{\rho}_i\|_\infty$ implikuje $\hat{\varphi}_1^c, \hat{\varphi}_2^c, \ldots \in \mathfrak{M}, \sum_i \hat{\varphi}_i^c \in \mathfrak{M}$ oraz zbieżność szeregu $\sum_{ij} \pi_i(c_i - L(i,j))$. Niech φ' będzie funkcjonałem Lagrange'a. Z Twierdzenia 4.2(iii)

$$\hat{\varphi}' = \sum_i \hat{\varphi}_i^c M_i,$$

gdzie $\mathbb{M} = (M_i)$ jest pomiarem optymalnym. Szereg $\sum_{ij} \pi_i(c_i - L(i,j))\|\hat{\rho}_i\|_\infty$ jest zbieżny stąd szereg $\sum_i \hat{\varphi}_i^c M_i$ spełnia warunek Cauchy'ego w normie $\|\cdot\|_\infty$. Ponieważ $\hat{\varphi}_i^c M_i \in \mathfrak{M}$ to $\hat{\varphi}' \in \mathfrak{M}$. Zauważmy, że $a_c = \tau(\sum_i \hat{\varphi}_i^c)$ i operator $\hat{\varphi}_i^c \log \hat{\varphi}'$ jest ograniczony poniweaż $\hat{\varphi}' \geqslant \hat{\varphi}_i^c$ (Twierdzenie 7.10). Operator $(\sum_i \hat{\varphi}_i^c) \log \hat{\varphi}'$ jest granicą punktową ciagu operatorów $(\sum_{i=1}^n \hat{\varphi}_i^c) \log \hat{\varphi}'$, więc jest ograniczony. Z drugiej strony (7.9)

$$\tau(\hat{\varphi}_i^c \log \hat{\varphi}') \geqslant \tau(\hat{\varphi}_i^c \log \hat{\varphi}_i^c).$$

Zatem mamy zbieżność szeregów $\sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c \log \hat{\varphi}')$ i

$$\sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c(\log \hat{\varphi}' - \log \hat{\varphi}_i^c)) \geqslant 0.$$

Rozważmy dwa przypadki.

Szereg $\sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c(\log \hat{\varphi}' - \log \hat{\varphi}_i^c))$ jest rozbieżny

$$\sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c(\log \hat{\varphi}' - \log \hat{\varphi}_i^c)) = \infty.$$

Wtedy $\sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c \log \hat{\varphi}_i^c) = -\infty$ i nierówność (7.8) jest prawdziwa ponieważ przyjmuje postać

$$\min_{\mathbb{M}} r(\mathbb{M}, \pi) \leqslant \sum_i \pi_i c_i.$$

Szereg $\sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c(\log \hat{\varphi}' - \log \hat{\varphi}_i^c))$ jest zbieżny, zatem $\sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c(\log \hat{\varphi}' - \log \hat{\varphi}_i^c))$ jest zbieżny. Korzystając z powyższych rezultatów, otrzymujemy oszacowanie

$$\log \max_{\mathbb{M}} r_c(\mathbb{M}, \pi) \geqslant \log \tau(\hat{\varphi}') - \frac{1}{a_c} \sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c(\log \hat{\varphi}' - \log \hat{\varphi}_i^c)) =$$

$$-\frac{1}{a_c} \sum_i \tau\left(\hat{\varphi}_i^c\left(\log \frac{\hat{\varphi}'}{\tau(\hat{\varphi}')} - \log \hat{\varphi}_i^c\right)\right) = -\frac{1}{a_c} \tau\left(\left(\sum_i \hat{\varphi}_i^c\right) \log \frac{\hat{\varphi}'}{\tau(\hat{\varphi}')}\right)$$

$$+\frac{1}{a_c} \sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c \log \hat{\varphi}_i^c).$$

Z nierówności Kleina (Twierdzenie 7.8) mamy

$$\tau\left(\frac{\sum_i \hat{\varphi}_i^c}{a_c}\log\frac{\sum_i \hat{\varphi}_i^c}{a_c}\right) \geqslant \tau\left(\frac{\sum_i \hat{\varphi}_i^c}{a_c}\log\frac{\hat{\varphi}'}{\tau(\hat{\varphi}')}\right),$$

stąd

$$\log\max_{\mathbb{M}} r_c(\mathbb{M},\pi) \geqslant -\tau\left(\frac{\sum_i \hat{\varphi}_i^c}{a_c}\log\frac{\sum_i \hat{\varphi}_i^c}{a_c}\right) + \frac{1}{a_c}\sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c\log\hat{\varphi}_i^c).$$

Ostatecznie otrzymujemy nierówność

$$\min_{\mathbb{M}} r(\mathbb{M},\pi) \leqslant \sum_i \pi_i c_i - 2^{-\tau\left(\frac{\sum_i \hat{\varphi}_i^c}{a_c}\log\frac{\sum_i \hat{\varphi}_i^c}{a_c}\right)+\frac{1}{a_c}\sum_i\tau(\hat{\varphi}_i^c\log\hat{\varphi}_i^c)}.$$

□

Wniosek 7.12. *Załóżmy, że szereg $\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i\|\rho_i\|_\infty$ jest zbieżny. Wtedy dla prawdopodobieństwa detekcji zachodzi nierówność*

$$\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) \geqslant 2^{\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i\log\pi_i - H\left(\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i\rho_i\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i H(\rho_i)}. \tag{7.9}$$

Dowód. W Twierdzeniu 7.13 rozważmy konkretną funkcję straty postaci $L(i,j) = 1-\delta_{ij}$ and $c=(1,1,\ldots)$. Wtedy mamy $r_c(M,\pi)=\sum_i \pi_i\rho_i(M_i)$. Jest to prawdopodobieństwo detekcji. Z nierówności (7.8) otrzymujemy

$$\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) \geqslant 2^{\sum_i H(\pi_i\rho_i) - H(\sum_i \pi_i\rho_i)}.$$

Mamy

$$\sum_i H(\pi_i\rho_i) = \sum_i \tau(\pi_i\rho_i\log\pi_i\rho_i) = \sum_i[\pi_i\tau(\rho_i\log\rho_i)+\pi_i\log\pi_i].$$

Zachodzi nierówność $\tau(\hat{\rho}_i\log\hat{\rho}_i) \geqslant 0$. Z drugiej strony z nierówności $\log x \leqslant x-1$ otrzymujemy

$$\tau(\hat{\rho}_i\log\hat{\rho}_i) = \int_0^{\|\hat{\rho}_i\|_\infty}\lambda\log\lambda\tau(E_i(d\lambda)) \leqslant \log\|\hat{\rho}_i\|_\infty \leqslant \|\hat{\rho}_i\|_\infty - 1.$$

Zatem $0 \leqslant \pi_i\tau(\hat{\rho}_i\log\hat{\rho}_i) \leqslant \pi_i\|\hat{\rho}_i\|_\infty - \pi_i$. Z założenia szereg $\sum_i(\pi_i\|\rho_i\|_\infty - \pi_i)$ jest zbieżny, stąd szereg $\sum_i \pi_i\tau(\rho_i\log\rho_i)$ jest także zbieżny. W konsekwencji mamy

$$\sum_i[\pi_i\tau(\rho_i\log\rho_i)+\pi_i\log\pi_i] = \sum_i \pi_i\tau(\rho_i\log\rho_i) + \sum_i \pi_i\log\pi_i$$

oraz

$$\sum_i H(\pi_i\rho_i) - H(\sum_i \pi_i\rho_i) = +\sum_i \pi_i H(\rho_i) + \sum_i \pi_i\log\pi_i - H\left(\sum_i \pi_i\rho_i\right).$$

□

Załóżmy, że $\mathfrak{M} = \mathbb{B}(\mathbb{C}^d)$. Każdy operator $\hat{\varphi}_i^c$ ma rozkład spektralny $\hat{\varphi}_i^c = \sum_{j=1}^d \lambda_i^j |v_i^j\rangle\langle v_i^j|$. Określmy zbiór $E = \{v_i^j : j = 1, 2, \ldots, d, i = 1, 2, \ldots, n\}$. Załóżmy, że $\mathrm{Lin}\, E = \mathbb{C}^d$ i $E \neq A \cup B$ gdzie $A, B \neq \emptyset$ oraz $\forall_{v\in A}\forall_{w\in B}\ v \perp w$, innymi słowy, E nie da się podzielić na sumę zbiorów wzajemnie ortogonalnych.

Twierdzenie 7.13. *W nierówności (7.8) zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{\varphi}_i^c = aP_i, i = 1, 2, \ldots, n$ gdzie a jest pewną liczbą dodatnią, P_i jest projekcją oraz $\sum_i P_i = \frac{a_c}{a}\mathbb{1}$.*

Dowód. $'' \Rightarrow''$: Załóżmy, że zachodzi równość w nierówności (7.8), wtedy

$$\sum_i \tau(\hat{\varphi}_i^c(\log\hat{\varphi}' - \log\hat{\varphi}_i^c)) = 0.$$

Zatem z (7.9) mamy

$$\hat{\varphi}'\hat{\varphi}_i^c = \hat{\varphi}_i^c\hat{\varphi}' = (\hat{\varphi}_i^c)^2.$$

Ponieważ $\hat{\varphi}'\hat{\varphi}_i^c = \hat{\varphi}_i^c\hat{\varphi}'$, to wszystkie wektory własne ze zbioru E są wektorami własnymi operatora $\hat{\varphi}'$. Z założenia o zbiorze E wynika, że operator $\hat{\varphi}'$ posiada tylko jedną wartść własną. Oznaczmy ją przez a. Z Lematu 6.5 Operator $\hat{\varphi}'$ jest odwracalny, zatem jest równy $a\mathbb{1}$. Z równości $\hat{\varphi}_i^c\hat{\varphi}' = (\hat{\varphi}_i^c)^2$ otrzymujemy, że $a\hat{\varphi}_i^c = (\hat{\varphi}_i^c)^2$, więc wszystkie wartości własne operatora $\hat{\varphi}_i^c$ są równe a. Stąd

$$\hat{\varphi}_i^c = aP_i \quad \text{dla pewnej projekcji} \quad P_i.$$

Musi także zachodzić równość w nierówności Kleina (Twierdzenie 7.8)

$$\tau\left(\frac{\sum_i \hat{\varphi}_i^c}{a_c}\log\frac{\sum_i \hat{\varphi}_i^c}{a_c}\right) = \tau\left(\frac{\sum_i \hat{\varphi}_i^c}{a_c}\log\frac{\hat{\varphi}'}{\tau(\hat{\varphi}')}\right),$$

zatem $\frac{1}{\tau(\hat{\varphi}')}\hat{\varphi}' = \frac{1}{a_c}\sum_i \hat{\varphi}_i^c$. To daje warunek $\sum_i P_i = \frac{a_c}{a}\mathbb{1}$.

$'' \Leftarrow''$: Niech $\mathbb{M} = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$, $M_i = \frac{a}{a_c}P_i$. Mamy

$$\sum_i \hat{\varphi}_i^c M_i = \sum_i \frac{a^2}{a_c}P_i = a\mathbb{1} \geqslant aP_i = \hat{\varphi}_i^c,$$

zatem z Twieedzenia 3.4 (iii) $\mathbb{M}$ jest pomiarem optymalnym i $\max_M r_c(M, \pi) = \tau(a\mathbb{1}) = a$. Z drugiej strony

$$\frac{1}{a_c}\left(\sum_i H(\varphi_i^c)\right) - H\left(\frac{1}{a_c}\left(\sum_i \varphi_i^c\right)\right) = \frac{1}{a_c}\left(\sum_i H(aP_i)\right) - H(\mathbb{1}) =$$
$$\frac{a}{a_c}\sum_i \tau(P_i\log(aP_i)) = \frac{a}{a_c}\sum_i \tau(P_i)\log a = \log a,$$

stąd $\max_{\mathbb{M}} r_c(\mathbb{M}, \pi) = 2^{\frac{1}{a_c}\left(\sum_i H(\varphi_i^c)\right) - H\left(\frac{1}{a_c}\left(\sum_i \varphi_i^c\right)\right)}$. □

Dla prawdopodobieństwa detekcji otrzymujemy wniosek.

Wniosek 7.14. *W nierówności (7.9) zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy* $\hat{\rho}_i = \frac{1}{m_i} P_i, i = 1, 2, \ldots, n$ *gdzie* $m_i = \tau(P_i)$, P_i *jest projekcją,* $\sum_i P_i = m\mathbb{1}, m = \sum_i m_i$ *oraz* $\pi_i = \frac{m_i}{m}$.

Dowód. Z Twierdzenia 7.13 mamy, że $\pi_i \hat{\rho}_i = aP_i$ dla pewnego $a > 0$ i projekcji P_i. Zatem $\pi_i = am_i$ i $a = \frac{1}{m}$. W konsekwencji $\pi_i = \frac{m_i}{m}$ oraz $\sum_i P_i = m\mathbb{1}$. □

7.3 Nierówności Holewy–Curlandera

Kolejna nierówność (7.13) w przypadku $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ dla skończenie wymiarowej przestrzeni Hilebrta i skończonej liczby stanów została udowodniona po raz pierwszy w pełnej ogólności w pracy [29, Theorem 9]. Udowodnimy ją inną metodą przy ogólniejszych założeniach, nasza metoda pozwoli także na uzyskanie warunku na zachodzenie równości.

Załóżmy, że $\mathfrak{M}$ jest algebrą z normalnym, półskończonym, wiernym śladem τ. Niech ρ będzie normalnym funkcjonałem na algebrze $\mathfrak{M}$. Oznaczmy przez $\hat{\rho}$ jego macierz gęstości względem śladu τ należącą do $L^1(\mathfrak{M}, \tau)$. Dalej będziemy zajmować się maksymalizacją prawdopodobieństwa detekcji.

W dalszych rozważaniach ważną rolę będzie odgrywał operator $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Pokażemy, że jego ślad jest skończony.

Lemat 7.15. *Szereg*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2$$

jest zbieżny według miary a operator

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

należy do przestrzeni $L^1(\mathfrak{M}, \tau)$.

Dowód. Rozważmy algebrę $\mathfrak{M} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbb{B}(\mathcal{K})$, gdzie $\mathcal{K}$ jest ośrodkową przestrzenią Hilberta z bazą ortonormalną (ξ_i). Niech $e_{ij} = |\xi_i\rangle\langle\xi_j|$. Oczywiście $\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1} \in L^1(\mathfrak{M}, \tau) \mathbin{\overline{\otimes}} L^1(\mathbb{B}(\mathcal{K}), \mathrm{tr})$. Ponieważ zachodzi relacja

$$L^1(\mathfrak{M}, \tau) \mathbin{\overline{\otimes}} L^1(\mathbb{B}(\mathcal{K}), \mathrm{tr}) = \mathfrak{M}_* \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbb{B}(\mathcal{K})_* \overset{(\triangle)}{=} (\mathfrak{M} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbb{B}(\mathcal{K}))_* = \\ L^1(\mathfrak{M} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbb{B}(\mathcal{K}), \tau \otimes \mathrm{tr}),$$

gdzie równość $(\triangle)$ mamy z [25, IV Definition 5.1(1)], to także $\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1} \in L^1(\mathfrak{M} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbb{B}(\mathcal{K}), \tau \otimes \mathrm{tr})$. Mamy dalej

$$|\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1}| = \left((\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1})^* \left(\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{11}$$

czyli

$$\|\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1}\|_1 = \|\, |\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1}| \,\|_1 = \|\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{11}\|_1 = \tau \otimes \mathrm{tr}\,(\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{11}) = \pi_i.$$

Stąd $\sum_{i=1}^{\infty} \|\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1}\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1$. Zatem szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1}$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|_1$ oraz operator

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1}$$

należy do przestrzeni $L^1(\mathfrak{M} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbb{B}(\mathcal{K}), \tau \otimes \mathrm{tr})$. Zbieżność w normie $\|\cdot\|_1$ implikuje zbieżność według miary więc szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{i1}$ jest także zbieżny według miary. Mamy

$$x^* x = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{1i} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \hat{\rho}_j \otimes e_{j1} \right) =$$

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{1i} \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \pi_j \hat{\rho}_j \otimes e_{j1} \right) \supset$$

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(\pi_i \hat{\rho}_i \otimes e_{1i} \right) \left(\pi_j \hat{\rho}_j \otimes e_{j1} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \otimes e_{11},$$

zatem szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2$ jest zbieżny według miary.

Wiemy, że $\tau \otimes \mathrm{tr}(|x|) < \infty$. Z drugiej strony

$$\tau \otimes \mathrm{tr}(|x|) = \tau \otimes \mathrm{tr} \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \otimes e_{11} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = \tau \otimes \mathrm{tr} \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \otimes e_{11} \right) =$$

$$\tau \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

W konsekwencji $\tau \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) < \infty$. □

Z Lematu 7.15 wiemy, że ślad operatora $\left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ jest skończony. W następnym twierdzeniu pokażemy, że przy pewnych założeniach jest on mniejszy bądź równy jeden.

Lemat 7.16. *Załóżmy, że $\mathfrak{M}$ jest algebrą z normalnym, skończonym, unormowanym, wiernym śladem τ, dana jest nieskończona liczba stanów, takich że $\hat{\rho}_i \in \mathfrak{M}$. Wtedy zachodzi nierówność*

$$\tau \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leqslant 1.$$

Dowód. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $S_n = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2$ mamy

$$\tau \left((S_n + \varepsilon \mathbb{1})^{\frac{1}{2}} \right) = \tau \left((S_n + \varepsilon \mathbb{1})^{-\frac{1}{4}} (S_n + \varepsilon \mathbb{1}) (S_n + \varepsilon \mathbb{1})^{-\frac{1}{4}} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tau \left((S_n + \varepsilon \mathbb{1})^{-\frac{1}{4}} \left(\pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n} \mathbb{1} \right) (S_n + \varepsilon \mathbb{1})^{-\frac{1}{4}} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \tau \left(\left(\pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n} \mathbb{1} \right)^{\frac{1}{2}} (S_n + \varepsilon \mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} \left(\pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n} \mathbb{1} \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Z operatorowej monotoniczności funkcji pierwiastek mamy

$$\left(\pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (S_n + \varepsilon\mathbb{1})^{\frac{1}{2}}.$$

Następnie z [24, Corollary 10.12] mamy

$$(S_n + \varepsilon\mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left(\pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

co daje nierówność

$$\left(\pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1}\right)^{\frac{1}{2}} (S_n + \varepsilon\mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} \left(\pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Korzystając z powyższych nierówności otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} \tau\left(\left(\pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1}\right)^{\frac{1}{2}} (S_n + \varepsilon\mathbb{1})^{-\frac{1}{2}} \left(\pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \tau\left(\left(\pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

W konsekwencji

$$\tau\left((S_n + \varepsilon\mathbb{1})^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \tau\left(\left(\pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{7.10}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} S_n + \varepsilon\mathbb{1} \to S_n \quad &\text{w normie} \quad \|\cdot\|_\infty \quad \text{przy} \quad \varepsilon \to 0 \\ \text{oraz} \quad \pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1} \to \pi_i^2\hat{\rho}_i^2 \quad &\text{w normie} \quad \|\cdot\|_\infty \quad \text{przy} \quad \varepsilon \to 0 \end{aligned}$$

to

$$\begin{aligned} (S_n + \varepsilon\mathbb{1})^{\frac{1}{2}} \to S_n^{\frac{1}{2}} \quad &\text{w normie} \quad \|\cdot\|_\infty \quad \text{przy} \quad \varepsilon \to 0 \\ \text{oraz} \quad \left(\pi_i^2\hat{\rho}_i^2 + \frac{\varepsilon}{n}\mathbb{1}\right)^{\frac{1}{2}} \to \pi_i\hat{\rho}_i \quad &\text{w normie} \quad \|\cdot\|_\infty \quad \text{przy} \quad \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Zatem przechodząc z $\varepsilon \to 0$ w nierówności (7.10) otrzymujemy nierówność

$$\tau\left(S_n^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \pi_i. \tag{7.11}$$

Z Lematu 7.15 wiemy, że $\sum_{i=1}^{n} \pi_i^2\hat{\rho}_i^2 \to \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2\hat{\rho}_i^2$ według miary. Zatem z [20, Theorem 2.1] $\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i^2\hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \to \left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i^2\hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ według miary. Dodatkowo z monotoniczności funkcji pierwiastek dla operatorów nieograniczonych [24, Proposition 10.14] mamy nierówność $\left(\sum_{i=1}^{n}\pi_i^2\hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i^2\hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Spełnione są więc założenia twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej [7, Theorem 3.5(ii)]. Przechodząc z $n \to \infty$ w nierówności (7.11) otrzymujemy nierówność

$$\tau\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i^2\hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant 1. \tag{7.12}$$

□

We Wniosku 8.4 pokażemy, że nierówność $\tau\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}\pi_i^2\hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leqslant 1$ zachodzi także w przypadku $\mathfrak{M} = \mathbb{B}(\mathcal{H})$ oraz nieskończonej liczby mocno liniowo niezależnych stanów czystych.

Do następnego twierdzenia będą nam potrzebne pewne założenia. Rozważmy trzy przypadki:

(i) dana jest skończona liczba stanów,

(ii) $\mathfrak{M}$ jest algebrą z normalnym, skończonym, unormowanym, wiernym śladem τ oraz dana jest nieskończona liczba stanów,

(iii) dana jest nieskończona liczba stanów, takich że $\hat{\rho}_i \in \mathfrak{M}$ oraz

$$\sum_i \pi_i\|\hat{\rho}_i\|_\infty < \infty.$$

Twierdzenie 7.17. *Załóżmy, że spełniony jest warunek (i) lub (ii) lub (iii). Zachodzi wtedy oszacowanie*

$$\max_{\mathbb{M}}\mathbb{P}_D(\mathbb{M}) \leqslant \tau\left(\left(\sum_i\pi_i^2\hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{7.13}$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ρ_i mają ortogonalne nośniki.

Dowód. Niech φ będzie funkcjonałem Lagrange'a oraz $\mathbb{M}$ pomiarem optymalnym. Z Twierdzenia 4.4(ii) mamy równość

$$(\varphi - \pi_i\rho_i)M_i = 0.$$

Z nierówności Schwarza otrzymujemy

$$|((\varphi-\pi_i\rho_i)M_i^{\frac{1}{2}})(A)| = |(\varphi-\pi_i\rho_i)(M_i^{\frac{1}{2}}A)| \leqslant$$
$$[(\varphi-\pi_i\rho_i)(M_j)]^{\frac{1}{2}}[(\varphi-\pi_i\rho_i)(A^*A)]^{\frac{1}{2}} = 0$$

dla dowolnego $A \in \mathfrak{M}$. Zatem $(\varphi - \pi_i\rho_i)M_j^{\frac{1}{2}} = 0$. A stąd

$$(\hat{\varphi} - \pi_i\hat{\rho}_i)M_i^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Zatem

$$\hat{\varphi} M_i^{\frac{1}{2}} = \pi_i \hat{\rho}_i M_i^{\frac{1}{2}},$$

co daje

$$\hat{\varphi} M_i \hat{\varphi} = \pi_i^2 \hat{\rho}_i M_i \hat{\rho}_i.$$

Sumując obie strony nierówności po i dostajemy

$$\hat{\varphi}^2 = \sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i M_i \hat{\rho}_i,$$

gdzie w przypadku:

(i) nie ma problemów ze zbieżnością ponieważ suma jest skończona,

(ii) szereg jest zbieżny według miary. Istotnie, mamy $\sum_{i=1}^n M_i \nearrow \mathbb{1}$ w normie $\|\cdot\|_\infty$ czyli

$$1 = \tau(\mathbb{1}) = \lim_{n\to\infty} \tau(\sum_{i=1}^n M_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \tau(M_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \|M_i\|_1$$

więc szereg $\sum_{i=1}^n M_i$ jest zbieżny w normie $\|\cdot\|_1$. W szczególności

$$\sum_{i=1}^n M_i \nearrow \mathbb{1} \quad \text{według miary},$$

czyli $\hat{\varphi}\left(\sum_{i=1}^n M_i\right)\hat{\varphi} \to \hat{\varphi}^2$ według miary,

(iii) szereg jest zbieżny w normie $\|\cdot\|_\infty$. Istotnie, z Twierdzenia 4.4(iii)

$$\hat{\varphi} = \sum_i \pi_i \hat{\rho}_i M_i.$$

Ponieważ $\sum_i \pi_i \|\hat{\rho}_i M_i\|_\infty \leqslant \sum_i \pi_i \|\hat{\rho}_i\|_\infty < \infty$ to $\hat{\varphi} \in \mathfrak{M}$. Ponieważ $\hat{\varphi}$ jest operatorem ograniczonym to $\hat{\varphi}\left(\sum_{i=1}^n M_i\right)\hat{\varphi} \to \hat{\varphi}^2$ w normie $\|\cdot\|_\infty$.

Zatem

$$\hat{\varphi} = \left(\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i M_i \hat{\rho}_i\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.14}$$

Z monotoniczności funkcji pierwiastek dla operatorów nieograniczonych [24, Proposition 10.14] otrzymujemy

$$\hat{\varphi} = \left(\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i M_i \hat{\rho}_i\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.15}$$

gdzie z Lematu 7.15 operator po prawej stronie nierówności jest z przestrzeni $L^1(\mathfrak{M}, \tau)$. Z powyższego i Twierdzenia 4.4(4.2) dostajemy nierówność

$$\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) \leqslant \tau\left(\left(\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Załóżmy, że zachodzi równość, wtedy

$$\tau(\hat{\varphi}) = \max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) = \tau\left(\left(\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

A stąd

$$\tau\left(\left(\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}} - \hat{\varphi}\right) = 0.$$

Z (7.14) i (7.15)

$$\left(\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i M_i \hat{\rho}_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zatem

$$\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 = \sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i M_i \hat{\rho}_i.$$

Stąd

$$\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i (\mathbb{1} - M_i) \hat{\rho}_i = 0,$$

co daje $\hat{\rho}_i(\mathbb{1} - M_i)\hat{\rho}_i = 0$. Czyli $\hat{\rho}_i(\mathbb{1} - M_i)s(\rho_i) = 0$, gdzie $s(\rho_i)$ to nośnik stanu ρ_i. Przykładając do ostatniej równości ślad dostajemy $\tau(\hat{\rho}_i(\mathbb{1} - M_i)) = 0$ a stąd $\rho_i(M_i) = 1$. Zatem $\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) = 1$, co jest możliwe jedynie, gdy ρ_i mają ortogonalne nośniki.

Załóżmy, że ρ_i mają ortogonalne nośniki. Wtedy oczywiście $\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) = 1$ oraz $\tau\left(\left(\sum_i \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \tau\left(\sum_i \left(\pi_i^2 \hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \tau\left(\sum_i \pi_i \hat{\rho}_i\right) = 1.$ □

W przypadku $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ dla skończenie wymiarowej przestrzeni Hilebrta i skończonej liczby stanów mamy dodatkowo kolejną nierówność (7.16). Została ona udowodniona po raz pierwszy w pełnej ogólności w pracy [29, Theorem 10]. Inny dowód można znaleźć w pracy [28, Theorem 15]. Zamieszczamy klarowniejszą wersję dowodu nierówności opartą na cytowanej pracy.

Twierdzenie 7.18.

$$\left(\mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^n \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leqslant \mathbb{P}_D(\mathbb{M}^{QW}), \tag{7.16}$$

gdzie $\mathbb{M}^{QW} = (\Lambda^{-\frac{1}{2}} \pi_i^2 \rho_i^2 \Lambda^{-\frac{1}{2}}), \Lambda = \sum_{i=1}^n \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2$.

Dowód. Z nierówności Schwarza wynika nierówność $\rho(A) \leqslant [\rho(AA^*)]^{\frac{1}{2}}$ dla dowolnego stanu ρ i dowolnego elementu A z algebry. Korzystając z tej nierówności mamy

$$\mathrm{tr}\Lambda^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(\pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \Lambda^{-\frac{1}{2}}) = \sum_{i=1}^n \pi_i \rho_i(\Lambda^{-\frac{1}{2}}(\pi_i \hat{\rho}_i)) \leqslant \sum_{i=1}^n \pi_i \left(\rho_i(\Lambda^{-\frac{1}{2}} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \Lambda^{-\frac{1}{2}})\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Z nierówności Jensena dla funkcji pierwiatek mamy

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i \left(\rho_i(\Lambda^{-\frac{1}{2}} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \Lambda^{-\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \rho_i(\Lambda^{-\frac{1}{2}} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \Lambda^{-\frac{1}{2}}) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathbb{P}_D(\mathbb{M}^{QW})}.$$

□

Dla $\mathbb{B}(\mathcal{H})$, skończenie wymiarowej przestrzeni Hilebrta i skończonej liczby stanów z Twierdzeń 7.17 i 7.18 dostajemy wniosek.

Wniosek 7.19.

$$\left(\operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \leqslant \mathbb{P}_D(\mathbb{M}^{QW}) \leqslant \max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) \leqslant \operatorname{tr} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i^2 \hat{\rho}_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

8 Ważony pomiar Bielawkina i jego asymptotyka

Załóżmy teraz, że $\mathfrak{M} = \mathbb{B}(\mathcal{H})$ oraz, że stany $\rho_1, \rho_2, \ldots$ są czyste czyli

$$\hat{\rho}_i = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

gdzie $\psi_i \in \mathcal{H}$, $\|\psi_i\| = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots$. W dalszym ciągu będziemy zajmować się maksymalizacją prawdopodobieństwa detekcji i minimalizacją prawdopodobieństwa błędu. Załóżmy także, że

$$\overline{\mathrm{Lin}\{\psi_i : i = 1, 2, \ldots\}} = \mathcal{H}.$$

Założenie to jest naturalne, bo można się ograniczyć do przestrzeni rozpiętej na wektorach ψ_i. Następne twierdzenie jest uogólnieniem [4, Theorem 5] na wymiar nieskończony.

Twierdzenie 8.1. *Niech* $\mathbb{M}$ *będzie pomiarem optymalnym dla prawdopodobieństwa detekcji. Wtedy* $M_i = |\xi_i\rangle\langle\xi_i|$ *dla pewnych* $\xi_i \in \mathcal{H}$ *oraz*

$$M_i = \Lambda^{-\frac{1}{2}} w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \Lambda^{-\frac{1}{2}},$$

gdzie $\Lambda = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ *i* $w_i = \pi_i^2 |\langle\psi_i|\xi_i\rangle|$.

Dowód. Z Twierdzenia 6.6 wyniki pomiaru optymalnego $\mathbb{M}$ są postaci $M_i = |\xi_i\rangle\langle\xi_i|$ dla pewnych $\xi_i \in \mathcal{H}$. Niech φ będzie funkcjonałem Lagrange'a. Wtedy z Twierdzenia 4.4(ii) mamy

$$(\hat{\varphi} - \pi_i \rho_i) = 0.$$

Zatem

$$\hat{\varphi}\xi_i = \langle\psi_i|\xi_i\rangle\psi_i.$$

Co daje nam

$$\hat{\varphi}|\xi_i\rangle\langle\xi_i|\hat{\varphi} = \pi_i^2 |\langle\psi_i|\xi_i\rangle| |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \tag{8.1}$$

Z warunku $\sum_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i| = \mathbb{1}$ dostajemy

$$\hat{\varphi}^2 = \sum_i \pi_i^2 |\langle\psi_i|\xi_i\rangle| |\psi_i\rangle\langle\psi_i|.$$

Z Lematu 6.5 wiemy, że operator $\hat{\varphi}$ jest dodatni i odwracalny, zatem

$$\hat{\varphi}^{-1} = \left(\sum_i \pi_i^2 |\langle\psi_i|\xi_i\rangle| |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Korzystając z (8.1), dostajemy

$$|\xi_i\rangle\langle\xi_i| = \hat{\varphi}^{-1}w_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{\varphi}^{-1},$$

gdzie $w_i = \pi_i^2|\langle\psi_i|\xi_i\rangle|$. □

Załóżmy, że stany $\rho_1, \rho_2, \ldots$ są mocno liniowo niezależne.

Definicja 8.2. *Ważonym pierwiastkowym pomiarem Bielawkina (w skrócie pomiarem Bielawkina) nazywamy pomiar* $\mathbb{M}$ *postaci*

$$M_i = \Lambda^{-\frac{1}{2}}w_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\Lambda^{-\frac{1}{2}},$$

gdzie $\Lambda = \sum_i w_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|, w_i > 0$ *oraz* $\sum_i w_i < \infty$.

Niech Λ, w_i będą takie jak w powyższej definicji i $\widetilde{\psi}_i$ będzie niezerowym wektorem, takim że $\widetilde{\psi}_i \perp \psi_j$ dla dowolnych $j \neq i$. Operator Λ jest ograniczony, dodatni i odwracalny. Mamy $\Lambda\widetilde{\psi}_i = w_i\langle\psi_i|\widetilde{\psi}_i\rangle\psi_i$, zatem $\psi_i \in \mathcal{D}(\Lambda^{-\frac{1}{2}})$. Oczywiście też $\overline{\mathcal{R}(\Lambda)} = \mathcal{H}$. Zauważmy, że

$$\langle\Lambda^{-\frac{1}{2}}\psi_i|\Lambda^{-\frac{1}{2}}\psi_j\rangle = \langle\psi_i|\Lambda^{-1}\psi_j\rangle = \frac{1}{w_j\langle\psi_j|\widetilde{\psi}_j\rangle}\langle\psi_i|\widetilde{\psi}_j\rangle = 0,$$

zatem $\mathbb{M}$ jest pomiarem prostym.

Prawdopodobieństwo detekcji dla pomiaru Bielawkina $\mathbb{M} = (|\xi_i\rangle\langle\xi_i|)$ wynosi

$$\mathbb{P}_D((|\xi_i\rangle\langle\xi_i|)) = \sum_i \pi_i|\langle\psi_i|\xi_i\rangle|^2.$$

W dalszej części chcemy podać pewne przybliżenia dla tego prawdopodobieństwa. Zdefiniujmy operator T na bazie (ξ_i) wzorem

$$T\xi_i = \frac{\pi_i}{\sqrt{w_i}}\xi_i$$

i rozszerzmy go na całą przestrzeń $\mathrm{Lin}\{\xi_i : i = 1, 2, \ldots\}$. T może być nieograniczony, ale zachodzi

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}T\xi_i = \frac{\pi_i}{\sqrt{w_i}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\xi_i = \pi_i\psi_i.$$

Niech $A = \sum_i \pi_i|\psi_i\rangle\langle\xi_i|$. Szereg ten jest zbieżny w normach $\|\cdot\|_\infty$ i $\|\cdot\|_1$, bo $\||\psi_i\rangle\langle\xi_i|\|_\infty = 1$ i $\||\psi_i\rangle\langle\xi_i|\|_1 \leqslant 1$, zatem A jest śladowy. Z drugiej strony $\Lambda^{\frac{1}{2}}T \subset A$, stąd $\Lambda^{\frac{1}{2}}T$ także jest śladowy.

Twierdzenie 8.3. *Niech* $m = \inf_i|\langle\psi_i|\xi_i\rangle|$. *Zachodzi następujące oszacowanie*

$$\left(\mathrm{tr}\Lambda^{\frac{1}{2}}T\right)^2 \leqslant \mathbb{P}_D((|\xi_i\rangle\langle\xi_i|)) \leqslant (1+m)\mathrm{tr}\Lambda^{\frac{1}{2}}T - m \leqslant \mathrm{tr}\Lambda^{\frac{1}{2}}T.$$

Dowód. Korzysatjąc z nierówności $x^2 \leqslant (1+m)x - m$ dla $x \in [m,1]$, mamy

$$\mathbb{P}_D((|\xi_i\rangle\langle\xi_i|)) = \sum_i \pi_i |\langle\psi_i|\xi_i\rangle|^2 \leqslant \sum_i \pi_i[(1+m)|\langle\psi_i|\xi_i\rangle| - m] =$$
$$(1+m)\sum_i \pi_i \left|\left\langle \frac{1}{\sqrt{w_i}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\xi_i|\xi_i\right\rangle\right| - m = (1+m)\sum_i \left\langle \Lambda^{\frac{1}{2}}\xi_i|\frac{\pi_i}{\sqrt{w_i}}\xi_i\right\rangle - m =$$
$$\sum_i \left\langle \Lambda^{\frac{1}{2}}\xi_i|T\xi_i\right\rangle - m = (1+m)\mathrm{tr}\Lambda^{\frac{1}{2}}T - m.$$

Z drugiej strony z nierówności Schwarza dostajemy

$$\mathbb{P}_D((|\xi_i\rangle\langle\xi_i|)) = \sum_i \pi_i |\langle\psi_i|\xi_i\rangle|^2 = \left(\sum_i (\sqrt{\pi_i})^2\right)\left(\sum_i (\sqrt{\pi_i}|\langle\psi_i|\xi_i\rangle|)^2\right) \geqslant$$
$$\left(\sum_i \sqrt{\pi_i}\sqrt{\pi_i}|\langle\psi_i|\xi_i\rangle|\right)^2 = \left(\sum_i \pi_i|\langle\psi_i|\xi_i\rangle|\right)^2 = \left(\mathrm{tr}\Lambda^{\frac{1}{2}}T\right)^2.$$

□

Połóżmy
$$w_i = \pi_i^2$$
i niech
$$\widetilde{\Lambda} = \sum_i \pi_i^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i|.$$
Definiujemy wektor
$$\widetilde{\xi}_i = \pi_i \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\psi_i.$$
Dla dowolnego operatora unitarnego U, $(U\widetilde{\xi}_i)$ jest bazą ortonormalną. Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 8.3 dostajemy oszacowanie

$$\left(\sum_i \left|\left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\xi}_i|U\widetilde{\xi}_i\right\rangle\right|\right)^2 \leqslant \mathbb{P}_D\left(\left(\left|U\widetilde{\xi}_i\right\rangle\left\langle U\widetilde{\xi}_i\right|\right)\right) \leqslant \sum_i \left|\left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\xi}_i|U\widetilde{\xi}_i\right\rangle\right|.$$

Wiemy, że
$$\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) = \sum_i \pi_i |\langle\psi_i|\eta_i\rangle|^2$$
dla pewnej bazy ortonormalnej (η_i). Ponieważ każdą bazę możemy otrzymać z bazy $\left(\widetilde{\xi}_i\right)$ przez operator unitarny, to mamy

$$\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) = \max_U \sum_i \pi_i |\langle\psi_i|U\widetilde{\xi}_i\rangle|^2 = \max_U \mathbb{P}_D\left(\left(\left|U\widetilde{\xi}_i\right\rangle\left\langle U\widetilde{\xi}_i\right|\right)\right).$$

Zatem

$$\max_U \left(\sum_i \left|\left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\xi}_i|U\widetilde{\xi}_i\right\rangle\right|\right)^2 \leqslant \max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) \leqslant \max_U \sum_i \left|\left\langle \widetilde{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\xi}_i|U\widetilde{\xi}_i\right\rangle\right|.$$

Korzystając z faktu, że dla dowolnego operatora śladowego W i dowolnej bazy ortonormalnej (ξ_i) mamy

$$\max_{U-unitarny} \sum_i |\langle W\xi_i|U\xi_i\rangle| = \mathrm{tr}|W|, \tag{8.2}$$

otrzymujemy

Wniosek 8.4.

$$\left(\mathrm{tr}\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leqslant \max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D(\mathbb{M}) \leqslant \mathrm{tr}\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \leqslant 1.$$

Dowód. Wystarczy pokazać nierówność $\mathrm{tr}\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \leqslant 1$. Mamy

$$\mathrm{tr}\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = \sum_i \langle \widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\widetilde{\xi}_i|\widetilde{\xi}_i\rangle = \sum_i \pi_i\langle\psi_i|\widetilde{\xi}_i\rangle \leqslant 1.$$

□

Z powyższego dowodu widać także, że równość $\mathrm{tr}\widetilde{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = 1$ zachodzi tylko wtedy gdy $\psi_i = \widetilde{\xi}_i$ a to jest możliwe tylko dla wektorów ψ_i wzajemnie ortogonalnych.

Załóżmy, że $\{\psi_i^{(\gamma)}\}$ jest siecią stanów czystych taką, że dla dowolnie ustalonego γ stany $\psi_i^{(\gamma)}, i = 1, 2, \ldots$ są mocno liniowo niezależne i

$$\overline{\mathrm{Lin}\{\psi_i^{(\gamma)} : i = 1, 2, \ldots\}} = \mathcal{H}$$

oraz stany $\{\psi_i^{(\gamma)}\}$ zbiegają do pewnej bazy ortonormalnej. Można przypuszczać, że wtedy prawdopodobieństwo detekcji zbiega do 1, zatem prawdopodobieństwo błędu zbiegałoby do 0 i interesujące jest badanie asymptotyki dla tego prawdopodoieństwa. Problem ten był rozważany w pracach [10], [27] dla wymiaru skończonego. Sytuacja jest bardziej skomplikowana w nieskończonym wymiarze, co pokazuje następny przykład. Z Twierdzenia 8.3 mamy oszacowanie

$$\left(\mathrm{tr}\widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}}\right)^2 \leqslant \max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D^{(\gamma)}(\mathbb{M}),$$

gdzie $\widetilde{\Lambda}_\gamma = \sum_i \pi_i^2 \left|\psi_i^{(\gamma)}\right\rangle\left\langle\psi_i^{(\gamma)}\right|$ i $\mathbb{P}_D^{(\gamma)}(\mathbb{M})$ jest prawdopodobieństwem detekcji dla stanów $(\psi_i^{(\gamma)})$. Przyjmujemy także oznaczenie $\mathbb{P}_E^{(\gamma)}(\mathbb{M}) = 1 - \mathbb{P}_D^{(\gamma)}(\mathbb{M})$. Niech $(\psi_i^{(\gamma)})$ zbiegają do bazy ortonormalnej (ψ_i). W skończonym wymiarze mamy

$$\widetilde{\Lambda}_\gamma \to \sum_i \pi_i^2|\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

stąd

$$\widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}} \to \sum_i \pi_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

zatem

$$\mathrm{tr}\widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}} \to \mathrm{tr}\sum_i \pi_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| = 1.$$

Zajmijmy się teraz wymiarem nieskończonym. Skonstruujemy rodzinę pomiarów Bielawkina $(M_i^{(\gamma)}) = (|\xi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\xi_i^{(\gamma)}|)$ takich, że

$$\lim_{\gamma} \mathbb{P}_D((M_i^{(\gamma)})) = 1.$$

Niech $w_i > 0$ i $\sum_i w_i < \infty$. Zdefiniujmy

$$\Lambda_\gamma = \sum_i w_i \left|\psi_i^{(\gamma)}\right\rangle \left\langle\psi_i^{(\gamma)}\right|, \tag{8.3}$$

$$\Lambda = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{8.4}$$

oraz

$$\xi_i^{(\gamma)} = \sqrt{w_i}\widetilde{\Lambda}_\gamma^{-\frac{1}{2}}\psi_i^{(\gamma)}.$$

Zachodzi nastepujący lemat.

Lemat 8.5.

$$\lim_{\gamma} \mathbb{P}_D((|\xi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\xi_i^{(\gamma)}|)) = 1.$$

Dowód. Z założenia $\psi_i^{(\gamma)} \underset{\gamma}{\to} \psi_i$ mamy

$$\lim_{\gamma} \Lambda_\gamma = \Lambda \quad \text{w normie.}$$

Zatem

$$\lim_{\gamma} \Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} = \Lambda^{\frac{1}{2}} \quad \text{w normie.}$$

Wektory $\xi_i^{(\gamma)}$ mają normę jeden, weźmy podsieć $\{\gamma'\}$ taką, że $\xi_i^{(\gamma')} \to \xi_i$. Dla dowolnego $\eta \in \mathcal{H}$ mamy

$$\left|\left\langle\eta|\Lambda_{\gamma'}^{\frac{1}{2}}\xi_i^{(\gamma')} - \Lambda^{\frac{1}{2}}\xi_i\right\rangle\right| \leqslant \left|\left\langle\eta|\Lambda_{\gamma'}^{\frac{1}{2}}\xi_i^{(\gamma')} - \Lambda^{\frac{1}{2}}\xi_i^{(\gamma')}\right\rangle\right| + \left|\left\langle\eta|\Lambda^{\frac{1}{2}}\xi_i^{(\gamma')} - \Lambda^{\frac{1}{2}}\xi_i\right\rangle\right| \leqslant$$
$$\|\eta\| \left\|\xi_i^{(\gamma')}\right\| \left\|\Lambda_{\gamma'}^{\frac{1}{2}} - \Lambda^{\frac{1}{2}}\right\|_\infty + \left|\left\langle\Lambda^{\frac{1}{2}}\eta|\xi_i^{(\gamma')} - \xi_i\right\rangle\right| \underset{\gamma'}{\to} 0,$$

co pokazuje, że

$$\lim_{\gamma'} \Lambda_{\gamma'}^{\frac{1}{2}}\xi_i^{(\gamma')} = \Lambda^{\frac{1}{2}}\xi_i \quad \text{słabo.}$$

Z drugiej strony

$$\frac{1}{\sqrt{w_i}}\Lambda_{\gamma'}^{\frac{1}{2}}\xi_i^{(\gamma')} = \psi_i^{(\gamma)} \underset{\gamma'}{\to} \psi_i \quad \text{w normie,}$$

co daje

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{w_i}}\Lambda^{\frac{1}{2}}\xi_i.$$

W szczególności ξ_i jest jedyną granicą sieci $\{\xi_i^{(\gamma)}\}$ i wzór (8.4) daje

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{w_i}} \sum_j \sqrt{w_j}\langle\psi_j|\xi_i\rangle\psi_j.$$

W konsekwencji

$$1 = \langle \psi_i | \psi_i \rangle = \langle \psi_i | \xi_i \rangle,$$

zatem

$$\xi_i = \psi_i.$$

Dodatkowo

$$\left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle - 1 = \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle - \langle \psi_i | \xi_i \rangle = \left\langle \psi_i^{(\gamma)} - \psi_i | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle + \left\langle \psi_i | \xi_i^{(\gamma)} - \xi_i \right\rangle,$$

zbiezność w normie $\psi_i^{(\gamma)} \underset{\gamma}{\rightarrow} \psi_i$ razem ze słabą zbeżnością $\xi_i^{(\gamma)} \rightarrow \xi_i$ daje nam

$$\lim_{\gamma} \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle = 1 \quad \text{dla dowolnego i.}$$

Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$ i wybierzmy m, takie że

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i > 1 - \varepsilon.$$

Otrzymujemy

$$\lim_{\gamma} \mathbb{P}_D((|\xi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\xi_i^{(\gamma)}|)) = \sum_i \pi_i \left| \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right|^2 \geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i \left| \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right|^2 \underset{\gamma}{\rightarrow} \sum_{i=1}^{m} \pi_i > 1 - \varepsilon,$$

co daje tezę. □

Wniosek 8.6.

$$\lim_{\gamma} \max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D^{(\gamma)}(\mathbb{M}) = 1.$$

W dalszej części będziemy rozważać pomiary Bielawkina $\left(\left| \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle \left\langle \xi_i^{(\gamma)} \right| \right)$, takie że

$$\lim_{\gamma} \mathbb{P}_D((|\xi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\xi_i^{(\gamma)}|)) = \sum_i \pi_i \left| \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right|^2 = 1.$$

Powyższy warunek jest równoważny warunkowi

$$\lim_{\gamma} \left| \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right| = 1.$$

Przy następnych rozważaniach będziemy jednak potrzebować silniejszego założenia, naturalne byłoby założenie spełnienia powyzszego warunku jednostajnie względem i, jednakże nie udało się w tym przypadku uzyskać pożądanego rezultatu. Załóżmy zatem, że

$$\sum_j \|\psi_j^{(\gamma)} - \psi_j\|^2 \rightarrow 0.$$

Niech $\widetilde{\psi}_i^{(\gamma)}$ będzie wektorem jednostkowym, takim że $\widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} \perp \psi_j^{(\gamma)}, j \neq i$. Niech $\left(\left|\xi_i^{(\gamma)}\right\rangle \left\langle \xi_i^{(\gamma)}\right|\right)$ będzie pomiarem Bielawkina, takim że

$$\xi_i^{(\gamma)} = \sqrt{w_i^{(\gamma)}} \Lambda_\gamma^{-\frac{1}{2}} \psi_i^{(\gamma)},$$

gdzie

$$\Lambda_\gamma = \sum_i w_i^{(\gamma)} |\psi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\psi_i^{(\gamma)}|.$$

Lemat 8.7. *Zachodzi nierówność* $\left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle \geqslant \left| \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right|$.

Dowód. Niech $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ będzie operatorem dodatnim i odwracalnym. Wtedy

$$\left\langle \psi | A^{-1} \psi \right\rangle \geqslant \frac{|\langle \xi | \psi \rangle|^2}{\langle \xi | A \xi \rangle}, \xi \in \mathcal{H}, \psi \in \mathcal{R}(A). \tag{8.5}$$

Istotnie, niech $\psi = A\zeta$ wtedy

$$\langle \xi | A \xi \rangle \left\langle \psi | A^{-1} \psi \right\rangle = \left\| A^{\frac{1}{2}} \xi \right\|^2 \left\| A^{\frac{1}{2}} \zeta \right\|^2 \geqslant |\langle \xi | \psi \rangle|^2.$$

Mamy

$$\left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle = \sqrt{w_i^{(\gamma)}} \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \Lambda_\gamma^{-\frac{1}{2}} \psi_i^{(\gamma)} \right\rangle \geqslant \frac{\sqrt{w_i^{(\gamma)}} \left| \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right|^2}{\left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} \right\rangle} \geqslant$$

$$\frac{\sqrt{w_i^{(\gamma)}} \left| \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right|^2}{\sqrt{\left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \Lambda_\gamma \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} \right\rangle}} = \left| \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right|,$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z nierówności (8.5) dla $A = \Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}}, \psi = \psi_i^{(\gamma)}, \xi = \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)}$. □

Lemat 8.8. *Ciąg* $\left\{ \inf_i \left| \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right| \right\}$ *zbiega do* 1.

Dowód. Chcemy pokazać $\inf_i \left| \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right| \to 1$, więc pokażemy, że

$$\left| \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right| \to 1$$

jednostajnie względem i. Z Lematu 8.7 wystarczy pokazać, że $\left| \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right| \to 1$ jednostajnie względem i. Najpierw pokażemy $\left| \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_i \right\rangle \right| \to 1$ jednostajnie względem i. Wynika to z poniższego

$$\left| \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_i \right\rangle \right|^2 = 1 - \sum_{j \neq i} \left| \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_j \right\rangle \right|^2 = 1 - \sum_{j \neq i} \left| \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_j - \psi_j^{(\gamma)} \right\rangle \right|^2 \geqslant$$

$$1 - \sum_j \left\| \psi_j - \psi_j^{(\gamma)} \right\|^2.$$

Z równości
$$\left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_i^{(\gamma)} \right\rangle = \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_i \right\rangle + \left\langle \widetilde{\psi}_i^{(\gamma)} | \psi_i^{(\gamma)} - \psi_i \right\rangle$$
mamy, że $\left| \left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle \right| \to 1$ jednostajnie względem i. □

Twierdzenie 8.9. *Niech*
$$T_\gamma \xi_i^{(\gamma)} = \frac{\pi_i}{\sqrt{w_i^{(\gamma)}}} \xi_i^{(\gamma)}$$

Wtedy
$$\mathbb{P}_E((|\xi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\xi_i^{(\gamma)}|)) \sim 1 - (\mathrm{tr}\,\Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} T_\gamma)^2 \sim 2(1 - \mathrm{tr}\,\Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} T_\gamma).$$

Dowód. Połóżmy
$$m_\gamma = \inf_i |\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \rangle|.$$

Z Twierdzenia (8.3) mamy
$$\left(\mathrm{tr}\Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} T_\gamma\right)^2 \leqslant \mathbb{P}_D((|\xi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\xi_i^{(\gamma)}|)) \leqslant (1 + m_\gamma)\mathrm{tr}\Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} T_\gamma - m_\gamma,$$

stąd
$$(1+m_\gamma)(1-\mathrm{tr}\Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} T_\gamma) \geqslant 1-\mathbb{P}_D((|\xi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\xi_i^{(\gamma)}|)) = \mathbb{P}_E((|\xi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\xi_i^{(\gamma)}|) \geqslant 1-\left(\mathrm{tr}\Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} T_\gamma\right)^2.$$

Dzieląc powyższe nierówności przez $1 - \left(\mathrm{tr}\Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} T_\gamma\right)^2$, otrzymujemy nierówności
$$\frac{1 + m_\gamma}{2} \leqslant \frac{1 + m_\gamma}{1 + \mathrm{tr}\Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} T_\gamma} \leqslant \frac{\mathbb{P}_E((|\xi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\xi_i^{(\gamma)}|))}{1 - \left(\mathrm{tr}\Lambda_\gamma^{\frac{1}{2}} T_\gamma\right)^2} \leqslant 1.$$

Z Lematu 8.8 mamy $m_\gamma \to 1$. □

Kolejne twierdzenie i wniosek są głównymi rezultatami pracy [10] w przypadku skończonej liczby stanów.

Twierdzenie 8.10. *Niech*
$$\widetilde{\Lambda}_\gamma = \sum_i \pi_i^2 |\psi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\psi_i^{(\gamma)}|.$$

Wtedy
$$\min_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_E^{(\gamma)}(\mathbb{M}) \sim 1 - (\mathrm{tr}\,\widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}})^2 \sim 2(1 - \mathrm{tr}\,\widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}}).$$

Dowód. Niech $\left(\left|\xi_i^{(\gamma)}\right\rangle\left\langle\xi_i^{(\gamma)}\right|\right)$ będzie optymalnym pomiarem Bielawkina. Wtedy

$$\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D^{(\gamma)}(\mathbb{M}) = \sum_i \pi_i \left|\left\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \right\rangle\right|^2$$

Połóżmy

$$m_\gamma = \inf_i |\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \rangle|.$$

Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 8.3 dostajemy

$$\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D^{(\gamma)}(\mathbb{M}) \leqslant (1 + m_\gamma) \sum_i \pi_i |\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \rangle| - m_\gamma.$$

Połóżmy

$$\widetilde{\xi}_i^{(\gamma)} = \pi_i \widetilde{\Lambda}_\gamma^{-\frac{1}{2}} \psi_i^{(\gamma)}. \tag{8.6}$$

Ponieważ $(\xi_i^{(\gamma)})$ i $(\widetilde{\xi}_i^{(\gamma)})$ są bazami ortonormalnymi, to istnieją operatory unitarne U_γ, takie że

$$\xi_i^{(\gamma)} = U_\gamma \widetilde{\xi}_i^{(\gamma)}.$$

W konsekwencji mamy

$$\sum_i \pi_i |\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \rangle| = \sum_i \pi_i |\langle \psi_i^{(\gamma)} | U_\gamma \widetilde{\xi}_i^{(\gamma)} \rangle = \sum_i \pi_i |\langle \frac{1}{\pi_i} \widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}} \widetilde{\xi}_i^{(\gamma)} | U_\gamma \widetilde{\xi}_i^{(\gamma)} \rangle =$$
$$\sum_i |\langle \widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}} \widetilde{\xi}_i^{(\gamma)} | U_\gamma \widetilde{\xi}_i^{(\gamma)} \rangle \leqslant \mathrm{tr} \widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}},$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z (8.2). Zatem otrzymujemy

$$\max_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_D^{(\gamma)}(\mathbb{M}) \leqslant (1 + m_\gamma) \sum_i \pi_i |\langle \psi_i^{(\gamma)} | \xi_i^{(\gamma)} \rangle| - m_\gamma \leqslant (1 + m_\gamma) \mathrm{tr} \widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}} - m_\gamma,$$

co daje

$$\min_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_E^{(\gamma)}(\mathbb{M}) \geqslant (1 + m_\gamma)(1 - \mathrm{tr} \widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}}).$$

Z Wniosku 8.4 dostajemy tak jak w dowodzie Twierdzenia 8.9

$$\frac{1 + m_\gamma}{2} \leqslant \frac{1 + m_\gamma}{1 + \mathrm{tr}\, \widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{\min_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_E^{(\gamma)}(\mathbb{M})}{1 - (\mathrm{tr}\, \widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}})^2} \leqslant 1.$$

Z Lematu 8.8 mamy $m_\gamma \to 1$. □

Wniosek 8.11. *Niech* $(|\widetilde{\xi}_i^{(\gamma)}\rangle\langle\widetilde{\xi}_i^{(\gamma)}|)$ *będzie pomiarem Bielawkina takim jak w (8.6). Wtedy*

$$\mathbb{P}_E((|\widetilde{\xi}_i^{(\gamma)}\rangle\langle\widetilde{\xi}_i^{(\gamma)}|)) \sim \min_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_E^{(\gamma)}(\mathbb{M}).$$

Dowód. Przyjmując w Twierdzeniu 8.9 $w_i^{(\gamma)} = \pi_i^2$, mamy

$$\Lambda_\gamma = \sum_i w_i^{(\gamma)} |\psi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\psi_i^{(\gamma)}| = \sum_i \pi_i^2 |\psi_i^{(\gamma)}\rangle\langle\psi_i^{(\gamma)}| = \widetilde{\Lambda}_\gamma$$

oraz

$$T_\gamma \widetilde{\xi}_i^{(\gamma)} = \frac{\pi_i}{\sqrt{w_i^{(\gamma)}}} \widetilde{\xi}_i^{(\gamma)} = \widetilde{\xi}_i^{(\gamma)},$$

tzn. $T_\gamma = \mathbb{1}$. W konsekwencji, Twierdzenia 8.9 i 8.10 dają

$$\mathbb{P}_E((|\widetilde{\xi}_i^{(\gamma)}\rangle\langle\widetilde{\xi}_i^{(\gamma)}|)) \sim 1 - (\operatorname{tr} \widetilde{\Lambda}_\gamma^{\frac{1}{2}})^2 \sim \min_{\mathbb{M}} \mathbb{P}_E^{(\gamma)}(\mathbb{M})$$

□

Bibliografia

[1] Araki H., *Relative Entropy of States of von Neumann Algebras*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University **11** (1976), 809-833.

[2] Araki H., *Relative Entropy for States of von Neumann Algebras II*, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University **13** (1977), 173-192.

[3] Audenaert K. M. R., Calsamiglia J., Munoz-Tapia R., Bagan E., Masanes Ll., Acin A., Verstraete F., *Discriminating States: The Quantum Chernoff Bound*, Physical Review Letters **98** (2007), 160501.

[4] Belavkin V. P., *Optimal multiple quantum statistical hypothesis testing*, Stochastics **1** (1975) 315–345.

[5] Colbeck R., Renner R., Tomamichel M., *A Fully Quantum Asymptotic Equipartition Property*, IEEE Transactions on Information Theory **55** (2009), 5840–5847.

[6] Eldar Y. C., *Von Neumann Measurement is Optimal for Detecting Linearly Independent Mixed Quantum State*, Physical Review A **68** (2003), 052303:1-052303:4.

[7] Fack T., Kosaki H., *Generalized s-numbers of τ–measurable operators*, Pacific Journal of Mathematics **123** (1986), 269–300.

[8] Helstrom C. W., *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press, New York, San - Francisco, London, 1976.

[9] Holevo A.S., *Investigations in the general theory of statistical decisions*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, vol. 124, issue 3 (1978).

[10] Holevo A. S., *On Asymptotically Optimal Hypothesis Testing in Quantum Statistics*, Theory of Probability and its Applications **23**(2) (1978), 411–415.

[11] Holevo A. S., *Statistical decision theory for quantum systems*, Journal of Multivariate Analysis **3** (1973), 337–394.

[12] Holevo A. S., *Statistical Structure of Quantum Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2001).

[13] Jeong H., Lee J., Yang S., *Entropic Lower Bound for Distinguishability of Quantum States*, Advances in Mathematical Physics (2015), Article ID 683658.

[14] Kennedy R. S., *On the optimum receiver for the M-ary linearly independent pure state problem*, Massachusetts Institute of Technology Research Laboratory of Electronics Quarterly Progress Report **110** (1973), 142.

[15] Kennedy R. S., *Uniqueness of the optimum receiver for the M-ary pure state problem*, Massachusetts Institute of Technology Research Laboratory of Electronics Quarterly Progress Report **113** (1974), 129.

[16] Łuczak A., *Maximizing the probability of detection for pure states*, Journal of Mathematical Physics **50** (2009), 053502.

[17] Łuczak A., *Wstęp do statystyki kwantowej*, preprint Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego (2008).

[18] Neshveyev S., Størmer E., *Dynamical Entropy in Operator Algebras*, Springer: Berlin, Germany and New York, NY, USA (2006).

[19] Ozawa M., *Optimal measurements for general quantum systems*, Reports on Mathematical Physics **18** (1980), 11–28.

[20] Padmanabhan, A.R., *Probabilistic aspects of von Neumann algebras*, Journal of Functional Analysis **31** (1979), 139–149.

[21] Petz D., Ohya M., *Quantum Entropy and Its Use*, Springer: Berlin, Germany and New York, NY, USA (2004).

[22] Podsędkowska H., *Entropy of Quantum Measurement*, Entropy **17** (2015), 1181–1196.

[23] Qiu D., *Minimum-error discrimination between mixed quantum states*, Physical Review A **77**, issue 1 (2008), 012328.

[24] Schmüdgen K., *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*, Springer, Dordrecht, Heidelberg, New York, London (2012).

[25] Takesaki M., *Theory of Operator Algebras I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences vol. **124**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2001.

[26] Takesaki M., *Theory of Operator Algebras II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences vol. **125**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2003.

[27] Tyson J., *Error rates of Belavkin weighted quantum measurements and a converse to Holevo's asymptotic optimality Theorem*, Physical Review A **79**, issue 3 (2009), 032343.

[28] Tyson J., *Two-sided bounds on minimum-error quantum measurement, on the reversibility of quantum dynamics, and on maximum overlap using directional iterates*, Journal of Mathematical Physics **51** (2010), 092204; doi: 10.1063/1.3463451.

[29] Tyson J., *Two-sided estimates of minimum-error distinguishability of mixed quantum states via generalized Holevo–Curlander bounds*, Journal of Mathematical Physics **50** (2009), 032106; doi: 10.1063/1.3094322.

[30] Umegaki H., *Conditional expectation in an operator algebra, IV (Entropy and information)*, Kodai Mathematical Seminar Reports **14** (1962), 59–85.

[31] Wieczorek R., *On the Form of the Optimal Measurement for the Probability of Detection*, International Journal of Theoretical Physics (2015) 54:4506–4511,10773-015-2653-8.

[32] Yeadon F. J., *Non-commutative L_p-spaces*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **77** (1975), 91–102.