

Prof. dr hab. Marek Izydorek
Wydział FT i MS
Politechnika Gdańska
80-233 Gdańsk
ul. G. Narutowicza 11/12

Gdańsk, dn. 7 października 2016 r.

RECENZJA

rozprawy doktorskiej mgr Anny Kimaczyńskiej pt. "The differential operators in the bundle of symmetric tensors on Riemannian manifolds."

Autorka recenzowanej rozprawy podjęła się zadania polegającego na zbadaniu własności wybranych operatorów różniczkowych na wiązkach tensorów symetrycznych n -wymiarowej rozmaitości Riemanna. Gradient i dywergencja są naturalnymi przykładami takich operatorów. Ich definicje na wiązkach tensorów symetrycznych są analogiczne do definicji podanych przez Rummlera w 1989 roku dla form różniczkowych. Ponadto, istotnym w przedstawionych rozważaniach jest operator różniczkowy, zdefiniowany jako symetryzacja koneksji Levi-Civity, nazywany pochodną symetryczną. Mając do dyspozycji pochodną symetryczną i operator do niej dualny, można przez analogię do klasycznej sytuacji zdefiniować operator typu Laplace'a Δ^s , działający na wiązkach tensorów symetrycznych. Taki operator rozważał Sampson już w 1973 roku. Głównym obiektem badań jest jednak operator drugiego rzędu postaci div grad , czyli złożenie operatorów gradientu i dywergencji. Na uwagę zasługuje fakt, że podobnie jak w przypadku form różniczkowych, różnica operatorów div grad oraz Δ^s jest operatorem rzędu zero (tensorem) zależącym od krzywizny. Oznacza to, że również na wiązkach tensorów symetrycznych można formułować twierdzenia typu Weitzenböcka. Główne wyniki pracy opisane są w Rozdziale 4. Dla operatora div grad , który jest silnie eliptyczny, p. Kimaczyńska rozważa naturalny układ warunków brzegowych skonstruowany wg wzorca zaproponowanego przez Bransona i Pierzchalskiego w preprintie pt. *Natural boundary conditions for gradients* z 2008 roku. Problem tzw. naturalnych warunków brzegowych omówiony jest krótko na stronach 345 i 346 w pracy Kozłowskiego i Pierzchalskiego [KP] opublikowanej w 2008 r. z odsyłaczem do preprintu cytowanego w poz. [8]. Autorka rozprawy dowodzi m.in., że operator div grad z każdym naturalnym warunkiem brzegowym jest samosprężony i eliptyczny.

Cele i zadania jakie postawiła przed sobą doktorantka są jasno sprecyzowane. Większość dowodów polega na wykonaniu odpowiednich obliczeń.

W Rozdziale 1, p. Kimaczyńska przypomina definicje i podstawowe własności przestrzeni k -tensorów symetrycznych S^k oraz podaje definicję iloczynu symetrycznego w czterech wariantach. Myślę, że w rozprawie powinna znaleźć się chociaż krótka lista własności iloczynu symetrycznego, przynajmniej tych, które wykorzystywane są natychmiast po Definicji 1.4 w kolejnych faktach (Proposition 1.2 i 1.3). W tym rozdziale zdefiniowany jest ważny dla dalszych konstrukcji operator $a: S^k \rightarrow S^{k-1} \otimes V$ (Def. 1.6), podane są jego własności oraz twierdzenie o postaci operatora sprzężonego a^* . Rozdział kończą definicje operatorów śladu oznaczanych odpowiednio tr oraz „ tr z falką”.

W Rozdziale 2 doktorantka definiuje interesujące ją operatory różniczkowe na wiązkach tensorów symetrycznych nad n -wymiarową rozmaitością Riemanna. Pochodna symetryczna $d^s : C^\infty(S^k) \rightarrow C^\infty(S^{k+1})$ określona jest jako odpowiednia symetryzacja koneksji na $C^\infty(S^k)$ indukowanej przez koneksję Leviego-Civity. W tej części rozprawy znajdujemy definicje operatorów $grad : C^\infty(S^k) \rightarrow C^\infty(S^k \otimes T)$, $grad = a d^s - d^s a$, oraz $div : C^\infty(S^k \otimes T) \rightarrow C^\infty(S^k)$, $div = tr d^s - d^s tr$. Autorka dowodzi całego szeregu własności tych operatorów, podaje wzory rachunkowe ułatwiające ich obliczanie oraz formuły opisujące zachodzące pomiędzy nimi związki. W tym rozdziale brakuje mi precyzyjnej definicji $div X$. Dywergencja pola pojawia się we wzorze w Proposition 2.16.

W Rozdziale 3 znajdujemy kolejne fakty oraz definicje, przygotowujące do sformułowania i dowodu twierdzenia typu Weitzenböcka na wiązkach tensorów symetrycznych (Theorem 3.1). Złożenie operatorów $grad$ i div jest operatorem drugiego rzędu, $div grad : C^\infty(S^k) \rightarrow C^\infty(S^k)$. Z drugiej strony można za Sampsonem rozpatrywać operator Laplace'a na wiązkach tensorów symetrycznych $\Delta^s : C^\infty(S^k) \rightarrow C^\infty(S^k)$, $\Delta^s = d^{s*} d^s - d^s d^{s*}$. Twierdzenie 3.1 mówi, że różnica operatorów: Laplace'a i $-div grad$ jest operatorem rzędu zero zależącym od krzywizny.

Punktem wyjścia w Rozdziale 4 jest założenie, że zorientowana rozmaitość riemannowska M jest zwarta z niepustym brzegiem. Autorka rozprawy konstruuje wspomniany wyżej układ warunków brzegowych dla operatora typu $div grad$. Przypomnę, że możliwość konstruowania kompletnej listy naturalnych z geometrycznego punktu widzenia warunków brzegowych dla $O(n)$ -gradientów w/g pewnych ogólnych zasad zauważyli Branson i Pierchalski w preprintcie z 2008 roku. W wiązkach k -tensorów symetrycznych mamy 2^{k+1} takich warunków brzegowych. Zatem ich liczba rośnie wraz ze wzrostem k , co istotnie odróżnia wiązki tensorów symetrycznych od klasycznych form różniczkowych, dla których niezależnie od k istnieją cztery naturalne warunki brzegowe. Fakt ten również pochodzi ze wspomnianego preprintu Bransona i Pierchalskiego. Po wprowadzeniu wygodnych oznaczeń, zgodnych z odpowiednimi naturalnymi rozkładami rozważanych wiązek, p. Kimaczyńska formułuje i dowodzi Proposition 4.2 o samosprężoności operatora $div grad$ z dowolnym zaproponowanym wcześniej warunkiem brzegowym. Następnie uzasadnia, że otrzymane warunki brzegowe są eliptycznymi warunkami brzegowymi w sensie Gilkeya i Smitha [GS], a swoje wnioski formułuje w postaci Twierdzenia 4.2. Dowody głównych rezultatów nie są technicznie trudne, jednakże wymagają dobrej znajomości metod stosowanych w tego typu zagadnieniach, jak również pewnej biegłości rachunkowej.

Oprócz podstawowych twierdzeń omówionych wyżej, doktorantka podaje kilka faktów nieco mniejszej rangi, świadczących jednak o jej wnikliwości badawczej. Mam tu na myśli Twierdzenie 3.1 (identyczny wzór dla form różniczkowych znajdujemy w pracy [HR] str. 547) oraz Twierdzenie 4.6 punkt c).

Rozprawa napisana jest w języku angielskim. Zredagowana w sposób przejrzysty, co niewątpliwie ułatwia czytanie i zrozumienie intencji autorki. Podział na rozdziały jest trafnie dostosowany do przyjętego sposobu prezentacji wyników. W zasadzie nie mam zastrzeżeń do pracy. W trakcie jej czytania nie skupiałem się na wyszukiwaniu ewentualnych literówek, błędów interpunkcyjnych czy gramatycznych.

Nie czuję się ekspertem na tyle, by orzekać, czy problematyka, której dotyczy rozprawa jest w głównym nurcie współczesnej geometrii różniczkowej, czy też nie. Wydaje mi się jednak, że fakt zastąpienia form różniczkowych formami symetrycznymi powoduje nieco mniejsze zainteresowanie tą problematyką.

Z drugiej strony, rozważane w pracy zagadnienia są efektem naturalnej ciekawości badacza i z pewnością pojawiły jako konsekwencja wcześniejszych zainteresowań promotora rozprawy. Dodatkową motywację do tego typu badań stanowi fakt, że otrzymane wyniki dają się łatwo porównywać z klasycznymi rezultatami.

Reasumując stwierdzam, że cele badawcze określone przez autorkę w Introduction zostały w pracy zrealizowane. Bibliografia przedmiotu jest wyczerpująca. Brakuje jedynie odnośnika do preprintu Bransona i Pierchalskiego. Autorka przedstawiła konkretne wyniki w sposób przejrzysty i ciekawy. Uzyskane rezultaty poszerzają naszą wiedzę o operatorach różniczkowych z naturalnymi warunkami brzegowymi na wiązkach tensorów symetrycznych i tym samym uzupełniają wcześniejsze badania prowadzone m. in. przez promotora A. Pierchalskiego.

Uważam, że recenzowana rozprawa doktorska pani mgr Anny Kimaczyńskiej spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim, więc - zgodnie z obowiązującą procedurą - wnoszę o jej dopuszczenie do publicznej obrony.

Marek Bydłowski