

Marek Melaniuk*

PROBLEMY OPTIMALIZACJI
W WARUNKACH WIELORAKOŚCI CELÓW

1. Uwagi wstępne

W praktycznym rozwiązywaniu wielu zagadnień zwłaszcza ekonomicznych, mamy do czynienia z oceną danego problemu z wielu punktów widzenia. W takim przypadku decyzję działania należy podjąć na podstawie wielu często rozbieżnych wskaźników jakości, zwanych również kryterium jakości, funkcją kryterium, funkcją wyboru lub funkcją celu. Dlatego mówimy o wielorakości celów. Cele te dla podejmującego decyzję mogą mieć jednakowe znaczenie lub też różne preferencje, co umożliwia uporządkowanie ich według skali ważności. W tego typu hierarchicznej strukturze celów należy podjąć decyzję dotyczącą jednoczesnej optymalizacji wszystkich celów na danym zbiorze dopuszczalnym. Okazuje się, że rozwiązanie optymalne w sensie matematycznym nie istnieje, można natomiast znaleźć rozwiązanie kompromisowe, suboptymalne.

Artykuł szkicowo omawia rolę celów w poszczególnych formacjach ekonomicznych oraz niektóre zagadnienia ustalania hierarchicznej struktury celów. Następnie przedstawione są zależności między programowaniem matematycznym a rodzajem celów, po czym dochodzi się do optymalizacji kryterium wektorowego i opty-

*Dr, adiunkt w Katedrze Informatyki UŁ.

malizacji hierarchicznego układu wskaźników jakości. Prezentacji tego ostatniego problemu dokonano na podstawie metody kolejnych ustępstw.

W konkluzji proponuje się, aby do optymalizacji stochastycznych systemów wielocelowych wykorzystać metody eksperymentowania symulacyjnego.

2. Kształtowanie się celów działalności gospodarczej w ujęciu historycznym

Procedura określania celów, czyli projektowania systemu wartości, jest kluczowym etapem w procesach podejmowania decyzji.

Metody ustalania celów działalności gospodarczej doskonalili się na przestrzeni wielu stuleci.

W gospodarce naturalnej badziami wyznaczającymi cele działania były konkretne potrzeby. Różnorodność potrzeb powodowała występowanie wielorakości celów. Środki stosowane do ich realizacji kształtowały się na podstawie zbiorowego doświadczenia, na zasadzie prób i błędów. Ustalane w ten sposób cele oraz środki działalności gospodarczej były przekazywane z pokolenia na pokolenie w tradycjach i zwyczajach. Stąd też gospodarowanie miało charakter zwyczajowo-tradycyjny.

Rozwój produkcji towarowej oraz wymiany towarowo-pieniężnej spowodował, iż nastąpiło zerwanie bezpośredniego związku między działalnością gospodarczą a zaspokajaniem potrzeb. Wówczas, jak pisze O. Lange¹, "działalność gospodarcza ludzi rozpada się na dwa odrębne rodzaje działalności: działalność zarobkową oraz działalność w gospodarstwie domowym". Celem tej pierwszej jest uzyskanie dochodu pieniężnego przeznaczonego na zakup dóbr użytych do zaspokojenia potrzeb w gospodarstwie domowym. Cele w gospodarstwie domowym są nadal wielorakie, wyznaczone przez różnorodność potrzeb. Natomiast w działalności gospodarczej występuje tylko jeden cel - jest nim uzyskanie dochodu pieniężnego. W ten sposób powstaje nowy układ celów polegający na wyko-

¹ O. L a n g e, *Ekonomia polityczna*, t. 1, Warszawa 1969, s. 202.

nieniu się celu generalnego, którego urzeczywistnienie jest warunkiem realizacji wszystkich innych celów. Jednocześnie tworzy się specyficzna struktura celów, w której cel generalny staje się środkiem realizacji pozostałych celów. Inaczej mówiąc, następuje "integracja środków przez wspólny cel"². Integracja tego typu występuje w przedsiębiorstwach kapitalistycznych. Z drugiej strony w warunkach prywatnej własności środków produkcji nie może wystąpić integracja celów poszczególnych przedsiębiorstw w jeden cel nadrzędny, wspólny dla całej działalności gospodarczej społeczeństwa. Charakterystyczną cechą gospodarowania kapitalistycznego jest występowanie wielu niezależnych od siebie oraz równoległych celów poszczególnych przedsiębiorstw.

Powstanie gospodarki socjalistycznej i wynikająca stąd konieczność planowania przyczyniły się do zintegrowania celów wszystkich przedsiębiorstw przez cel wspólny, ustanowiony w planie centralnym. Dlatego mówimy o hierarchicznej strukturze celów, w której środki służące do realizacji celu nadrzędnego (pierwszego rzędu) są celami drugiego rzędu. Schodząc hierarchicznie w dół, dojdziemy do poszczególnych stanowisk roboczych realizujących cele n-tego rzędu, a środkiem do ich urzeczywistnienia są operacje technologiczne.

3. Hierarchiczna struktura celów

Powstaje problem ustalenia hierarchicznej struktury celów. Możliwe są tutaj dwa podejścia: pierwsze polega na uporządkowaniu poszczególnych alternatywnych funkcji celu według ich ważności, drugie związane jest z przypisaniem dla danych funkcji celu określonych wartości liczbowych, czyli współczynników wagowych.

W pierwszym - podchodząc od strony matematycznej - korzysta się z teorii relacji i porządków. Jak wiadomo, nie można wprowadzać dowolnego uporządkowania poszczególnych funkcji celu niezależnie od istniejącego systemu społeczno-gospodarczego. W systemie socjalistycznym, w dużej mierze scentralizowanym, obowiązują

² O. L a n g e, op. cit., s. 205.

jące zakazy ograniczają w praktyce substytucyjność celów. Teorię porządków, która obejmuje porządki ograniczające substytucję, T. Kęprzak w swojej rozprawie habilitacyjnej³ nazywa pseudoporzędkami.

Najważniejszymi z tej klasy są porządki leksykograficzne. Nazwa tego uporządkowania pochodzi od sposobu ustawienia słów w słownikach. Litery alfabetu danego języka traktuje się jako kryteria wyboru, natomiast zasób słów jest zbiorem alternatyw. Na przykład słowo "aster" występuje jako pierwsze w stosunku do słowa "barak" tylko dlatego, że litera a występuje w alfabecie przed b, mimo iż pozostałe litery słowa "aster" są kryteriami niższego rzędu, aniżeli odpowiadające im litery słowa "barak". Inaczej mówiąc, liczy się wynik uzyskany na podstawie pierwszego napotkanego kryterium, a nie na podstawie dalszych kryteriów. To też przedsiębiorstwo rozliczane z wykonania zadań planowych - w przypadku ich osiągnięcia - jest wyżej oceniane od przedsiębiorstwa, które wprowadziło w minimalnym stopniu tych zadań nie osiągnie, ale za to uzyskało o wiele lepsze wyniki we wszystkich pozostałych wskaźnikach.

Stosując porządek leksykograficzny można uszeregować m celów w ten sposób, że

$$z_1 \prec z_2 \prec z_3 \prec \dots \prec z_m$$

gdzie $z_{i-1} \prec z_i$ oznacza, iż cel z_{i-1} bezpośrednio poprzedza z_i , a więc cel z_{i-1} stoi wyżej w hierarchii niż z_i .

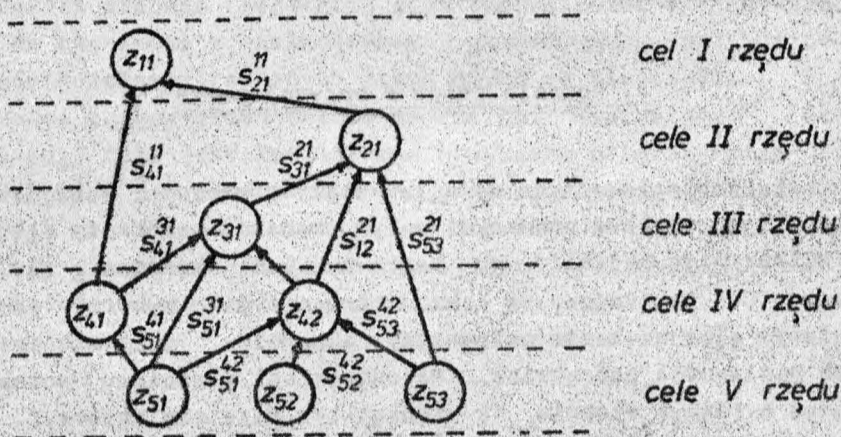
Nie są jeszcze określone przesłanki ani metody, na podstawie których dokonuje się szeregowania celów.

Drugie podejście związane z ustalaniem wag dla poszczególnych celów opiera się przede wszystkim na wykorzystaniu metod psychometrycznych. Istota tych metod polega na wyborze kryteriów oceny poszczególnych alternatyw, a następnie na przyporządkowaniu współczynników wagowych dla tych kryteriów. Jedną z tego typu metod jest metoda sytuacji konfliktowych⁴, w której po-

³ T. Kęprzak, Funkcje kryterium opisane na uporządkowanych polach preferencji, Warszawa 1968.

⁴ M. Habałuk, Kwantyfikacja hierarchii celów w procesie podejmowania decyzji kierowniczych, "Ekonomika i Organizacja Pracy" 1971, nr 7.

Hierarchiczną strukturę celów można przedstawić w postaci grafu $G(Z, S)$, w którym wierzchołki z oznaczają cele, a łuki s środki do ich osiągnięcia. Cel naczelny z_{11} (rys. 1) jest celem pierwszego rzędu (pierwszego szczebla), a środki służące do jego realizacji są celami drugiego i niższych rzędów. Tak więc każdy z celów pośrednich stanowi środek do osiągnięcia celu wyższego rzędu.



z_{ij} - j-ty cel i-tego rzędu; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$;
a_{gh}^{ij} - środek przeznaczony do realizacji celu g_h powstały w wyniku realizacji celu i_j; $g < i$; $h = 1, \dots, m$

Podmiot gospodarujący np. na szczeblu czwartym podejmuje decyzję wykonania zadania gospodarczego. Zadanie to polega na osiągnięciu dwóch celów: z_{41} i z_{42} , będących planem dyrektywnym. Zrealizowanie tych celów jest warunkiem wykonania zadań przez wyższe szczeble w hierarchii, a więc realizacji celów pośrednich z_{31} i z_{32} oraz celu nadrzędnego z_{11} . Dany podmiot dysponuje środkami wynikającymi z wykonania celów z_{51} , z_{52} , z_{53} . Do zrea-

lizowania celu z_{41} potrzebne są środki w ilości s_{51}^{41} , a wykonanie celu z_{42} wymaga środków s_{51}^{42} , s_{52}^{42} i s_{53}^{42} . Cel z_{51} jest środkiem dla jednoczesnego osiągnięcia trzech celów wyższego rzędu: z_{31} , z_{41} i z_{42} . Należy dokonać takiego rozdziału środków s_{51}^{41} i s_{52}^{42} pomiędzy oba cele, aby zostały zrealizowane ich optymalne wartości. Cele te dla podejmującego decyzję mogą mieć jednakową ważność lub też z pewnych względów jeden cel jest preferowany w stosunku do drugiego. W ten sposób na danym szczeblu zarządzania również może powstać sytuacja, kiedy będzie istniał hierarchiczny układ celów.

Poszukiwanie optymalnego rozwiązania w hierarchicznej strukturze celów omówiono w p. 5.

4. Rodzaje celów a optymalizacja

Charakter celu wpływa na całokształt procesu podejmowania decyzji łącznie ze stosowanymi w tym procesie metodami.

Należy więc określić, czy ma to być cel jakościowy, czy ilościowy. Cel jakościowy to taki, który w wyniku wyboru sposobu działania albo zostanie osiągnięty, albo nie. Tutaj nie ma żadnych możliwości pośrednich. Natomiast cel ilościowy można osiągnąć w różnym stopniu, a stopień ten daje się zmierzyć. W przypadku stwierdzenia, że jest to cel ilościowy, podaje się jego wymiary i wartości. Należy dążyć do przedstawienia zarówno celów, jak i środków w jednakowych jednostkach miary, tzn., żeby były one współmierne między sobą. Tą jednolitą jednostką miary najczęściej staje się koszt wyrażony w pieniądzu. Wtedy wartość celu jest oczywiście określona liczbowo ilości jednostek pieniężnych. Stąd też dochodzi się do problemu kwantyfikacji celów i środków.

W wielu przypadkach w procesie podejmowania decyzji nie określa się wartości celu, ale zastępuje się ją żądaniem osiągnięcia możliwie najlepszej wartości przy danych warunkach działania, a więc przy istniejących środkach. Wobec tego mamy do czynienia z problematyką optymalizacji i metodami programowania matematycznego.

W tym momencie należy zwrócić uwagę na pewną własność programowania matematycznego mającą związek z ustalaniem celów. Mianowicie w przypadku programowania nieliniowego rozwiązanie jego zadania nie ulegnie zmianie dla jednakowego typu przekształceń monotonicznych funkcji celu. Daną funkcję celu $u = f(x_1)$ $i = 1, \dots, n$ można zastąpić funkcją $v = F(u)$, będącą przekształceniem funkcji u , taką, że funkcja v rośnie wraz ze wzrostem funkcji u i maleje, gdy funkcja u też maleje. Wówczas funkcje u i v będą miały wartości ekstremalne w tych samych punktach. W tym przypadku istotne jest jedynie to, aby został zachowany ten sam porządek liczb wyrażających stopień realizacji celu, czyli żeby dokonane przekształcenie było monotoniczne, nie jest natomiast istotna wartość funkcji celu.

Jeżeli stopnie realizacji celu tworzą zbiór uporządkowany, to mamy do czynienia z wielkościami. Jednoznaczne przyporządkowanie wielkościom określonych liczb czyni je ilościami. Dopiero wielkości będące ilościami są mierzalne. Mierzalność stopnia realizacji celu jest konieczna w przypadku programowania liniowego, bowiem jedyne dopuszczalne przekształcenia funkcji celu polegają na zmianie skali pomiaru i punktu odniesienia. Wynika stąd, iż dla programów liniowych stopień realizacji celu musi być ilością, a nie tylko wielkością, jak w przypadku programowania nieliniowego. Problem mierzalności rozpatruje Q. Lange⁵.

5. Optymalizacja wielocelowa

Działalność gospodarcza wymaga często rozwiązania problemu podejmowania decyzji w warunkach występowania wielu celów jednocześnie ważnych. Pojawia się dążenie do podjęcia takiej decyzji, aby każdy z celów osiągnął jednocześnie swoje optimum.

Dochodzi się więc do zagadnień związanych z wielorakością celów. Termin ten stosuje się w przypadku, gdy mamy różne cele, do których mierzenia stosowane są różne kryteria, czyli różne punkty widzenia, z jakich dokonuje się wyboru między tymi cela-

⁵ O. Lange, op. cit: t e n z e, Optymalne decyzje. Zasady programowania, Warszawa 1967.

mi. Optymalizacja wielocelowa oznacza, iż mamy do czynienia z celami rozbieżnymi i częściowo rozbieżnymi⁶. Cele są rozbieżne, jeżeli zwiększenie stopnia realizacji jednych celów prowadzi do więcej niż proporcjonalnego zmniejszenia realizacji innych celów. Realizacja celów częściowo rozbieżnych opiera się na przydzielonych środkach, które w pewnej części są wspólne dla obu celów razem, a w pozostałej - indywidualne dla każdego celu z osobną. Optymalizacja wielocelowa jest niemożliwa w przypadku celów sprzecznych, gdy realizacja jednego z nich uniemożliwia realizację drugiego celu.

Ogólnie rzecz biorąc należy - w miarę możliwości - kierować się zasadą, aby nie poszukiwać rozwiązań celów konfliktowych, lecz łagodzić konflikty między nimi.

Problem podejmowania optymalnych lub raczej quasi-optymalnych decyzji w przypadku wielu celów działania wiąże się ze stosowaniem programowania metamatycznego.

5.1. Optymalizacja wektorowego kryterium jakości

Zadanie programowania matematycznego przedstawia się w sposób następujący:

Należy znaleźć optymalną wartość funkcji $z(X)$ określonej na zbiorze wypukłym $SC \in E^n$ przy warunkach, że $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $X \in SC \in E^n$.

Wprowadźmy oznaczenia:

1) $z(x)$ i $z(X)$ - są skalarnymi funkcjami odpowiednio jednej i n zmiennych, gdzie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$;

2) $Z(x)$ i $Z(X)$ - są wektorowymi funkcjami odpowiednio jednej i n zmiennych.

Niech $Z : E^n \rightarrow E^m$ oznacza przyporządkowanie punktom $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in E^n$ punktów $Z(X) \in E^m$. Wartości funkcji $Z(X)$ są wektorami $Z(X) = \{z_1(X), \dots, z_m(X)\}$.

Jeżeli $m > 1$, to o takiej funkcji mówimy, że jest ona wektorowa. Funkcja $Z(X)$ zwana jest też - zwłaszcza w literaturze

⁶ L. B i l i n s k i, Optymalne decyzje w przypadku wielorakości celów, "Ekonomista" 1969, nr 3.

radzieckiej⁷ - wektorowym kryterium jakości lub wskaźnikiem jakości.

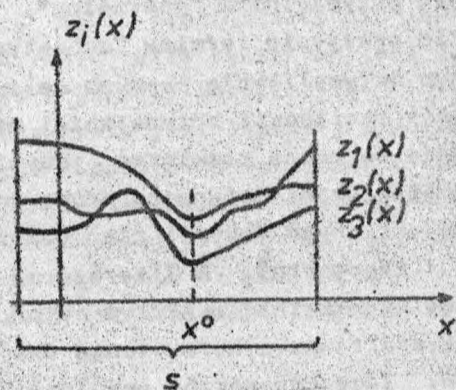
Problem optymalizacji wektorowej przedstawia się następująco:

Dany jest układ, którego strukturę określa wektor n -wymiarowy $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $X \in S \subset E^n$. Oceną działania jest m -wymiarowa funkcja wektorowa $Z(X) = \{z_1(X), z_2(X), \dots, z_m(X)\}$, której składnikami są funkcje rzeczywiste zmiennej X . Trzeba określić punkt $X^0 \in S$, w którym jednocześnie funkcje $z_1(X)$, $z_2(X)$, ..., $z_m(X)$ osiągają swoje wartości optymalne.

Należy zauważyć, że o ile w matematyce istnieje pojęcie funkcji wektorowej, o tyle nie jest ściśle zdefiniowane pojęcie optimum wektorowe. Problem maksymalizacji wektorowej rozpatrywany jest w pracy S. Karlina⁸. Znaleźnienie "punktu efektywnego", będącego rozwiązaniem maksymalizacji wektorowej, określane jest jako równoważne znalezienie punktu siodłowego w programowaniu nieliniowym.

Trudności, jakie napotyka optymalizacja wielocelowa, zobrazowane są na rys. 2 i 3.

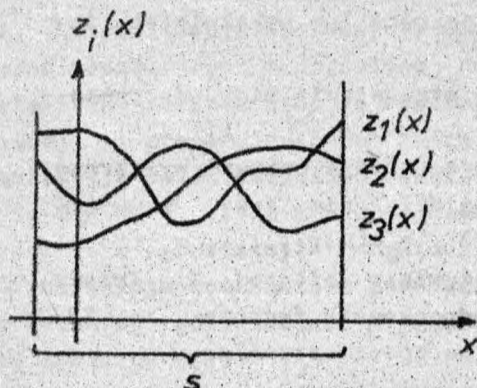
Sytuacja, kiedy wszystkie trzy funkcje celu osiągają swoje optimum minimum w punkcie $X^0 \in S$ (rys. 2), zdarza się niezmiernie rzadko. W praktyce niemal zawsze występuje sytuacja, kiedy zmniejszenie wartości jednej lub kilku funkcji powoduje zwiększenie wartości in-



Rys. 2. Punkt optymalny X^0 dla trzech funkcji celu

⁷ R. G a b a s o w, F. M. K i r i ł ł o w a, Metody optymalizacji, Mińsk 1975; M. E. S a l u k w a d z e, Zadania wektorowej optymalizacji w teorii uprawnień, Tbilisi 1975.

⁸ S. K a r l i n, Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, London-Paris 1959.



Rys.3. Brak jednoczesnego optimum dla trzech funkcji celu

współmiernych wielorakich funkcji celu lub optymalizacji funkcji wektorowych, a także czy w zagadnieniu tym w ogóle wolno używać przymiotnika "optymalny". Na pewno bardziej właściwe będzie przyjęcie terminu "suboptymalny" na określenie stanu, w którym optymalizacja pewnych celów doprowadza do zmniejszenia stopnia realizacji przynajmniej niektórych z pozostałych. Zagadnienie to można rozwiązać jedynie w sposób kompromisowy.

Historycznie pierwszą próbę rozwiązania problemu podejmowania efektywnych decyzji dla rozbieżnych celów działania podjął F. Y. Edgeworth⁹. W literaturze ekonomicznej znany jest "protokół Edgewortha", w którym autor w sposób geometryczny rozpatruje efektywne wykorzystanie dwóch środków dla realizacji dwóch celów. Idee Edgewortha uogólnił V. Pareto, stąd też przyjął się termin "optimum Pareto" na określenie rozwiązań suboptymalnych. Mianowicie rozwiązaniem korzystnym ze względu na przyjęte kryterium - np. maksymalizacja funkcji celu $z(x)$ - jest każde rozwiązanie x^0 w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych S mające tę własność, że jeżeli dla dowolnego punktu (lub wektora) $x \in S$ oraz $x^0 \neq x$ jest możliwa koniunkcja warunków:

nych funkcji celu, a punkt x^0 w tym przypadku nie istnieje (rys. 3).

Tak więc zadania jednoczesnej optymalizacji wielu niewspółmiernych funkcji celu nie można rozwiązać jednoznacznie z matematycznego punktu widzenia, ponieważ w danym momencie można optymalizować realizację tylko jednego celu.

Stąd też nasuwa się pytanie dotyczące rozumienia pojęcia optymalizacji nie-

⁹ L. B i l i Ń s k i, op. cit.

$$z_1(x) \geq z_1(x^0)$$

$$z_2(x) \geq z_2(x^0)$$

$$\vdots$$

$$z_m(x) \geq z_m(x^0)$$

to możliwa jest ona tylko jako układ równości. Mówiąc inaczej, można poprawiać (optymalizować) pewne funkcje celu do momentu, aż inne funkcje celu nie zaczną się pogarszać. O. Lange¹⁰ nazywa tego typu rozwiązania programami sprawnymi. Są to sytuacje, w których nie można nadal zwiększać jednego wskaźnika jakości bez zmniejszenia przynajmniej jednego z pozostałych.

Rozwiązania kompromisowe - w praktycznym ich stosowaniu - związane są z wykonywaniem działań algebraicznych na funkcjach celu. Toteż w rzeczywistości nie optymalizuje się funkcji wektorowej, a jedynie dokonuje się optymalizacji na poszczególnych funkcjach skalarnych. Funkcje te łączy się na zasadach apriorycznych, przy czym nie wiadomo, czy takie łączenie jest dobre, ponieważ nie istnieje obiektywne kryterium weryfikujące i uzasadniające, który ze sposobów połączenia jest lepszy i dlaczego.

Jedna z metod suboptymalizacji¹¹ polega na wyznaczeniu takiego rozwiązania, przy którym odchylenie względne jednej funkcji celu $z_1(x)$ od jej wartości ekstremalnej $z_1^0 \neq 0$ jest równe odchyleniu względnemu $z_2(x)$ od $z_2^0 \neq 0$ i jednocześnie dla obu funkcji celu osiąga ono na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych S swoją wartość najmniejszą.

Występuje więc warunek

$$\left| \frac{z_1^0 - z_1(x)}{z_1^0} \right| = \left| \frac{z_2^0 - z_2(x)}{z_2^0} \right|$$

który w sposób dość radykalny zawęża zbiór S. Na zbiorze tym poszukuje się minimum funkcji z, gdzie

¹⁰ O. Lange, Optymalne decyzje.

¹¹ I. F. Połunin, Kurs matematycznego programowania, Mińsk 1975.

$$z = \left| \frac{z_1^0 - z_1(x)}{z_1^0} \right| \quad \text{lub} \quad z = \left| \frac{z_2^0 - z_2(x)}{z_2^0} \right|$$

W metodzie przedstawionej przez S. Trojanowskiego¹², również poszukuje się minimum nadrzędnej funkcji celu, ale jest nią suma odchyleń względnych wartości poszczególnych funkcji celu od wielkości optymalnych, czyli

$$z = \sum_{i=1}^k \frac{M_i - z_i(x)}{M_i} + \sum_{i=k+1}^m \frac{z_i(x) - N_i}{N_i}$$

gdzie:

$$M_i = \max_{x \in S} z_i(x) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k;$$

$$N_i = \min_{x \in S} z_i(x) \quad \text{dla } i = k+1, \dots, m.$$

Inna metoda¹³ polega na znalezieniu dla poszczególnych funkcji celu jak najmniej szkodliwych strat względem ich wartości optymalnych. Rozwiązaniem kompromisowymi (suboptymalnymi) będą te, które na zbiorze S zminimalizują najgorsze, a więc maksymalne odchylenie poszczególnych funkcji celu od swoich wartości optymalnych. Łączna (nadrzędna) funkcja kryterium ma wówczas postać

$$z = \min_{x \in S} \left\{ \max_i \left| \frac{z_i^0 - z_i(x)}{z_i^0} \right| \right\} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, m$$

Przeglądy niektórych metod optymalizacji wielokryteriowej w programowaniu liniowym były podawane w innych pracach¹⁴.

¹² S. Trojanowski, Wielokryteriowa optymalizacja w sensie Pareto niewspółmiernych funkcji celu, "Przegląd Statystyczny" 1975, nr 3.

¹³ I. Nykowskij, Wielokryteriowe modele liniowe, "Ekonomista" 1970, nr 4.

¹⁴ M. in. M. Melaniuk, Optymalizacja programu produkcji i planowanie kroczące w warunkach automatyzacji w przemyśle maszynowym, Łódź 1974 (praca magisterska).

5.2. Optymalizacja hierarchicznego układu funkcji celów

Rozpatrywana w poprzednim punkcie optymalizacja wielocelowa dotyczyła przypadku, kiedy poszczególne cele miały dla podejmującego decyzję jednakową wagę.

W praktyce gospodarczej wieloszczeblowa struktura zarządzania powoduje występowanie hierarchicznego układu celów. Niejednakowe preferencje określonych celów umożliwiają szeregowanie ich według ważności oraz przedstawienie w porządku hierarchicznym (zob. pkt 3).

Na podstawie porządku preferencyjnego określonych celów wprowadza się uporządkowanie skalarnych funkcji celu:

$$z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x) \text{ oraz } x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (1)$$

Mówimy, że zbiór funkcji celów $z_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ jest zbiorem uporządkowanym¹⁵, jeżeli istnieją podzbiory rozwiązań dopuszczalnych takie, że

$$S_1 \subset S_0, S_2 \subset S_1, \dots, S_{m-1} \subset S_{m-2} \quad (2)$$

Niech na tych podzbiórach skalarne funkcje celu $z_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ osiągnęły swoje wartości optymalne (np. maksimum), tj.

$$z_i(x^{(i)}) = \max z_i(x) \text{ dla } i = 1, 2, \dots, m \quad (3)$$

Warunki (1)-(3) określają zadanie optymalizacji hierarchicznej struktury funkcji celów. Punktem optymalnym jest punkt $x^0 = x^{(m)}$.

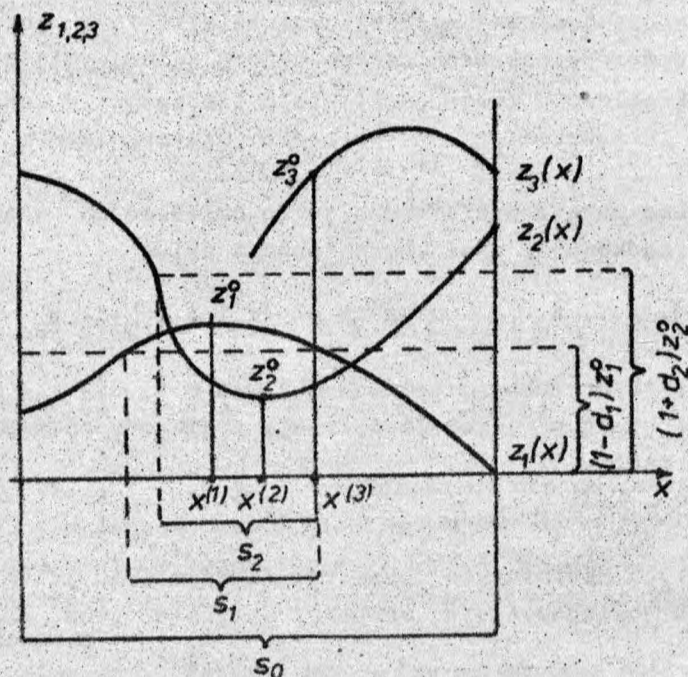
W praktyce zagadnienie optymalizacji wielu celów o strukturze hierarchicznej można rozwiązać na podstawie metody kolejnych ustępstw¹⁶. Polega ona na uszeregowaniu poszczególnych funkcji celu w porządku hierarchicznym, po czym ustala się dopuszczalne odchylenia funkcji celów od ich wartości optymalnych.

¹⁵ M. E. Salukwadze, op. cit.

¹⁶ I. F. Polunin, op. cit.

Kolejne ustępowstwa dokonywane są w wyniku wprowadzania uzyskanych wartości funkcji optymalizowanych (wraz z ich dopuszczalnymi odchyleniami) do zbioru ograniczeń dla optymalizacji ze względu na następną w hierarchii funkcję celu.

Metodę kolejnych ustępowstw ilustruje rys. 4.



Rys. 4. Ilustracja metody kolejnych ustępowstw

Założmy, że dane są trzy funkcje celu uszeregowane według ważności oraz dopuszczalne odchylenia od wartości optymalnych:

- $z_1 \rightarrow \text{max, odchylenie} = d_1\%.$
- $z_2 \rightarrow \text{min, odchylenie} = d_2\%.$
- $z_3 \rightarrow \text{max, odchylenie} = d_3\%.$

Jeżeli dopuszczalne zmniejszenie funkcji z_1 wynosi $d_1\%$, wówczas postuluje się spełnienie nierówności $z_1(x) \geq (1 - d_1) z_1^0$. Obezar rozwiązań S_0 zmniejszy się do wielkości S_1 (rys. 4). W przypadku maksymalizacji drugiej funkcji celu z_2 warunek $z_2(x) \leq (1 + d_2) z_2^0$ utworzy zbiór rozwiązań dopuszczalnych S_2 .

Na tym obazarze funkcja celu osiągnie wartość maksymalną w punkcie $x^{(3)}$. Punkt ten będzie stanowił rozwiązanie dla całego zadania. Z rys. 3 wynika, że bez względu na przyjęte odchylenie d_3 punkt $x^{(3)}$ będzie wyznaczał obszar dopuszczalny S_3 i tylko w tym punkcie osiągnięte wartości następnych funkcji celu (jeżeli takie będą) przyjmie się jako rozwiązanie optymalne. W praktycznym rozwiązywaniu wielu problemów fakt ten może ograniczać stosowanie metody kolejnych ustępów, toteż w miarę możliwości postuluje się, aby kolejne obszary rozwiązań dopuszczalnych były zbiorami wielopunktowymi.

6. Optymalizacja dynamicznych systemów wielocelowych o charakterystykach losowych

W poprzednich rozdziałach przedstawiono optymalizację wielocelową dla systemów statycznych i deterministycznych.

W praktyce mamy do czynienia przede wszystkim z systemami działającymi w czasie określonym pewnym rozkładem prawdopodobieństwa. Typowym przykładem są tutaj systemy masowej obsługi. Charakteryzują się one dynamiką działania, wielocelowością i prawdopodobieństwem osiągnięcia stanów wyróżnionych.

Załóżmy, że pewien system masowej obsługi składa się z określonej ilości stanowisk obsługujących klientów. Dany jest przy tym rozkład czasów przybyć klientów oraz rozkład czasów obsługi przez poszczególne stanowiska. Optymalizacja takiego systemu związana jest z realizacją dwóch celów: minimalizacji ilości stanowisk obsługi i minimalizacji czasów oczekiwań klientów na obsługę.

Inny wariant, również dwucelowy, może polegać na maksymalizacji ilości obsłużonych klientów i minimalizacji czasów obsługi przez poszczególne stanowiska. W tym wariacie ograniczeniem będzie nie-jak poprzednio-rozkład czasów obsługi, ale ilość stanowisk obsługi.

Występujące w obydwu wariantach cele są, jak widać, różnokierunkowe. Podjęcie najlepszej decyzji w tym przypadku nie jest więc proste, ponieważ system taki z jednej strony charakteryzuje się wielocelowością, a z drugiej strony występujące tam parametry

try dane są z pewnym prawdopodobieństwem ich pojawienia się (nie zawsze stabilizowanym) oraz są funkcją czasu. Nie ma, jak dotychczas, analitycznych metod badania i rozwiązywania wielocelowych, stochastycznych systemów dynamicznych. Efektywnej analizy takich systemów można dokonać jedynie przy wykorzystaniu metod eksperymentalnych. Stosowanie symulacji komputerowej dla różnych kombinacji danych wejściowych umożliwia określenie ich wpływu na zachowanie się systemu w zadanym okresie jego pracy oraz na kształtowanie się stopnia osiągnięcia poszczególnych rozbieżnych celów działania.

Marek Melaniuk

PROBLEMS OF OPTIMIZATION IN CONDITIONS OF MULTIPLICITY OF OBJECTIVES

The article discusses problems connected with optimization of multi-objective systems.

The author analyzes formation of economic activity objectives in particular economic formations and some problems connected with determination of hierarchical structure of objectives. There were defined relationships between type of objectives and mathematical programming and formulated the vector optimization problem. The author presented, moreover, some attempts at solution of multiobjective optimization:

- compromise solution in Pareto optimum sense;
- minimization of relative deviations of objective functions from extreme values;
- minimization of the sum of relative deviations of particular functions from their optimal values;
- minimization of maximum deviations of objective functions from optimal values.

The analysis was next focussed on optimization of hierarchical structure of objectives and the way solving this problem by means of successive concessions method.

In the final part of the article, the author proposes utilization of simulation experimenting methods for optimization of stochastic multi-objective systems.