

Anna Myślińska*

PROSTY TEORETYCZNY MODEL SZAREJ GOSPODARKI

1. WSTĘP

Celem niniejszego artykułu jest prezentacja prostej wersji modelu szarej strefy w gospodarce. Model ten pozwala m. in. obliczyć stosunek produkcji wytwarzanej w szarej strefie do produkcji wytwarzanej w sektorze formalnym oraz analogiczne relacje dla zatrudnienia i kapitału. Umożliwia również badanie zależności między parametrami modelu a proporcjami szarej strefy i sektora formalnego.

We wstępnej części pracy zdefiniowano zjawisko szarej strefy w gospodarce. W dalszych częściach przedstawiono założenia, na których opiera się model, rozwiązanie statyczne (równowaga) oraz wnioski płynące z tego rozwiązania. W załączniku umieszczona została najbardziej zmatematyzowana część modelu.

2. PODSTAWOWE DEFINICJE I NAZEWNICTWO

Trudno wyobrazić sobie państwo, w którym wszystkie rodzaje działalności gospodarczej są zgłaszane władzom. Nawet najdoskonalsza statystyka obejmuje jedynie część podmiotów. A obywatele, żywo zainteresowani w ukrywaniu niektórych swoich przedsięwzięć przed różnorodnymi instytucjami państwowymi, nie ułatwiają jej zadania. Władze zwykle próbują ograniczać działalność, na temat której nie mają informacji, ale nigdy działania te nie są do końca skuteczne.

W literaturze można spotkać wiele różnych definicji szarej strefy w gospodarce, żadna z nich nie zadowala jednak wszystkich badaczy¹. Różnorodność

* Mgr, Instytut Ekonomii, Uniwersytet Łódzki.

¹ Różne propozycje definicji można znaleźć np. w: F. Schneider i D. Enste, *Shadow Economies Around the World: Size, Causes and Consequences*, IMF Working Paper (WP/00/26), styczeń 2000 oraz A. S. Ikiz, *Shadow Economy in Bulgaria: Small and Medium Enterprises and Taxation* (referat wygłoszony na konferencji „Unofficial Activities in Transition Countries: Ten Years of Experience”, Zagrzeb 2002).

podejść przejawia się m. in. w wielości określeń². Panuje jedynie zgoda co do tego, że do szarej strefy powinna należeć produkcja ukryta, polegająca:

na wytwarzaniu wyrobów lub świadczeniu usług, których wytwarzanie nie jest zabronione przez prawo, jednakże ich rozmiary są w całości bądź w części ukrywane przed organami administracji państwowej (podatkowymi, celnymi, ubezpieczeń społecznych, statystycznymi)³.

Niektórzy autorzy poprzestają na produkcji ukrytej, inni włączają do szarej strefy działalność nielegalną polegającą na wytwarzaniu towarów lub świadczeniu usług zabronionych przez prawo (np. prostytucja, handel narkotykami, rozboje) lub na produkcji dozwolonych dóbr i usług przez osoby nie posiadające wymaganych uprawnień.

Jednak granica między produkcją nielegalną a ukrytą nie jest jasno określona. W wielu przypadkach niezgłaszanie działalności jest niezgodne z obowiązującym prawem⁴. Kolejny sporny obszar stanowi działalność mająca na celu nielegalne osiąganie dochodów – np. łapówkarstwo, wymuszenia lub kradzieże. Brak także jednomyślności co do barteru i gospodarki naturalnej.

Urzędy statystyczne w wielu krajach próbują oszacować wielkość szarej strefy, a następnie rezultaty swoich szacunków włączają do oficjalnie publikowanych szeregów⁵. Ważne jest, aby odróżniać od siebie produkcję zgłaszaną władzom, ukrytą, szacowaną przez urzędy statystyczne oraz ukrytą, pozostającą poza oszacowaniami. Termin „zmienna oficjalna” oznacza zmienną rejestrowaną, powiększoną o szacunki gospodarki ukrytej. Wyrażenie „zmienna nieoficjalna” należy interpretować jako tę część gospodarki ukrytej, która nie znalazła odzwierciedlenia w oficjalnie publikowanych wskaźnikach⁶. Zwroty:

² W języku polskim na określenie niezgłaszanej władzom działalności gospodarczej funkcjonują m. in. terminy: „szara strefa”, „szara gospodarka”, „gospodarka ukryta”, „drugi obieg”, „gospodarka utajona”, „gospodarka nielegalna”, „gospodarka nieformalna”, „gospodarka niewidzialna”, „gospodarka nierejestrowana”, „gospodarka nieoficjalna”, „sektor nieformalny”, „czarny rynek”. Powyższe terminy nie są synonimami.

³ Definicja zaczerpnięta z: *Rachunki narodowe według sektorów i podsektorów instytucjonalnych 2000–2001. National Accounts by Institutional Sectors and Sub-sectors 2000–2001*, GUS, Warszawa 2003.

⁴ *Szara gospodarka w Polsce. Rozmiary, przyczyny, konsekwencje*, Studia i Prace Zakładu Badań Statystyczno-Ekonomicznych, z. 233, Wydawnictwo GUS i ZBS-E, Warszawa 1996.

⁵ Zgodnie z zasadami obowiązującymi w Unii Europejskiej (ESA'95 – European System of Accounts 1995) należy uwzględniać nierejestrowaną gospodarkę (zarówno produkcję ukrytą, jak i produkcję nielegalną) w systemach rachunków narodowych (*Rachunki narodowe według sektorów...*). Także OECD (por. *Framework for the Measurement of Unrecorded Economic Activities in Transition Economies*, OECD, 1997) sugeruje, że państwa członkowskie powinny uwzględniać szacunki gospodarki ukrytej.

⁶ J. Dean, *Why Most Measures of the „Unofficial Economy” Are Systematically Wrong: With Illustrations from Ukraine* (referat wygłoszony na konferencji „Unofficial Activities in Transition Countries: Ten Years of Experience”, Zagrzeb 2002).

„szara strefa”, „zmienna ukryta”, „zmienna nieformalna”, „zmienna nierejestrowana” stosowane są na określenie działalności ukrywanej przed organami administracyjnymi (niezależnie od tego, czy wchodzi w skład zmiennych oficjalnych, czy nie). Pojęcie „zmienna całkowita” odnosi się do całości działalności gospodarczej – obejmującej zgłaszaną władzom i ukrytą, oficjalną i nieoficjalną.

W niniejszej pracy do szarej strefy w gospodarce zaliczana będzie produkcja ukryta, ale nie produkcja nielegalna.

3. ZAŁOŻENIA MODELU

Model opiera się na szeregu założeń:

- Gospodarka jest podzielona na dwa funkcjonujące obok siebie sektory – szarą strefę i formalny. Brak jest barier wejścia i wyjścia z poszczególnych sektorów. Przedsiębiorstwa działające w szarej strefie nie rejestrują swojego istnienia i nie informują władz o działalności gospodarczej. Przedsiębiorstwa funkcjonujące w sektorze formalnym rejestrują swoją działalność, a następnie całą produkcję zgłaszają odpowiednim organom⁷. Produkcja całkowita jest sumą produkcji wytworzonej w szarej strefie i w sektorze formalnym:

$$Y = Y_S + Y_F,$$

gdzie: Y – produkcja całkowita,

Y_S – produkcja wytwarzana w szarej strefie,

Y_F – produkcja wytwarzana w sektorze rejestrowanym.

- Przedsiębiorstwa w obydwu sektorach wytwarzają homogeniczne produkty⁸.
- Nabywcy produktów maksymalizują użyteczność zależącą od ilości konsumowanych dóbr.
- W obydwu sektorach występują identyczne agregatowe funkcje produkcji (Cobba–Douglassa), o malejących korzyściach skali:

$$Y_S = L_S^\alpha K_S^\beta,$$

$$Y_F = L_F^\alpha K_F^\beta,$$

⁷ Oznacza to, że przedsiębiorstwa albo rejestrują całą działalność gospodarczą, albo nie rejestrują jej w ogóle. Nie dopuszcza się możliwości działania w obydwu sektorach jednocześnie, tzn. rejestrowania i płacenia podatków jedynie od części produkcji.

⁸ Nie oznacza to, że wszystkie przedsiębiorstwa wytwarzają to samo dobro, ale że dobro X wyprodukowane w szarej strefie jest identyczne z dobrem X wyprodukowanym w sektorze formalnym.

gdzie: L_S (L_F) – liczba osób zatrudnionych w szarej strefie (sektorze formalnym);

K_S (K_F) – kapitał zatrudniony w sektorze nierejestrowanym (formalnym);

α – elastyczność produkcji względem zatrudnienia;

β – elastyczność produkcji względem kapitału;

$\alpha, \beta \in (0; 1)$; $\alpha + \beta < 1$ ⁹.

- Przedsiębiorstwa w obydwu sektorach gospodarki sprzedają swoją produkcję po dodatniej cenie P . Od nominalnej wartości formalnej produkcji sprzedanej pobierany jest podatek. Stopa podatkowa wynosi t , gdzie $t \in (0; 1)$. Ponadto firmy w sektorze formalnym ponoszą koszty związane z funkcjonowaniem w tym sektorze – koszty stosowania się do różnorodnych przepisów (np. BHP), uzyskiwania licencji i zezwoleń, koszty związane z uiszczaniem podatków itd. Z działaniem w sektorze formalnym wiązą się także korzyści – przedsiębiorstwa rejestrowane mają swobodny dostęp do systemu bankowego, ubezpieczeń, sądów itp. Koszty netto działania w sektorze formalnym wynoszą B . Przedsiębiorstwa działające w szarej strefie ryzykują wykrycie przez administrację państwa. Ryzyko wykrycia jest równe γ . W przypadku wykrycia nierejestrowanej działalności przedsiębiorstwa płacą grzywnę wynoszącą G .

- Rynki czynników produkcji są doskonałe. Przedsiębiorstwa w obydwu sektorach wypłacają pracownikom płace nominalne wynoszące w , przy czym firmy w sektorze formalnym dodatkowo przekazują państwu ubezpieczenia społeczne powiększające koszty pracy o δ część płac, gdzie $\delta > 0$. Nominalny koszt pozyskania jednostki kapitału w każdym sektorze wynosi r .

- Przedsiębiorstwa w obydwu sektorach tak dobierają wielkość czynników produkcji, aby maksymalizować zyski. Jeżeli nawet przy optymalnych wielkościach zatrudnienia i kapitału zysk jest ujemny, to przedsiębiorstwa uciekną z danego sektora i rozwiązaniem równowagi będzie rozwiązanie brzegowe (cała produkcja wytwarzana w gospodarce powstaje w jednym z sektorów).

4. ROZWIĄZANIE STATYCZNE

Jeżeli ani obciążenia wynikające z funkcjonowania w gospodarce formalnej, ani oczekiwane koszty wykrycia niezarejestrowanej działalności nie są zbyt wysokie i przedsiębiorstwa osiągają nieujemne zyski, w stanie równowagi będą istniały obydwa sektory gospodarki.

⁹ Założenie o malejących korzyściach skali można wyjaśnić istnieniem podatków (M. Blaug, *Teoria ekonomii. Ujęcie retrospektywne*, PWN, Warszawa 2000) lub wpływem czynników produkcji niewyspecyfikowanych w funkcji produkcji (D. Romer, *Advanced Macroeconomics*, McGraw-Hill, New York *etc.* 1996). Ponadto, w przypadku przedsiębiorstw nierejestrowanych, ryzyko wykrycia rośnie wraz z wielkością produkcji przedsiębiorstwa.

Funkcje zysków w poszczególnych sektorach dane są wzorami:

$$\Pi_S = PL_S^\alpha K_S^\beta - \gamma G - wL_S - rK_S, \quad (1)$$

$$\Pi_F = PL_F^\alpha K_F^\beta - tPL_F^\alpha K_F^\beta - B - (w + \delta)L_S - rK_S. \quad (2)$$

Z założenia o maksymalizacji zysku wynika, że w każdym z sektorów czyniki produkcji będą zatrudniane do momentu, kiedy wartość ich produktu krańcowego zrówna się z krańcowymi kosztami ich zatrudnienia, czyli pochodna cząstkowa funkcji zysków po każdym z czynników produkcji musi być równa zero;

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial L_i} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \Pi_i}{\partial K_i} = 0, \quad \text{gdzie } i = S, F,$$

co daje cztery warunki konieczne maksymalizacji zysku w obydwu sektorach¹⁰:

$$\alpha PL_S^{\alpha-1} K_S^\beta - w = 0, \quad (3)$$

$$\alpha(1-t)PL_F^{\alpha-1} K_F^\beta - (1+\delta)w = 0, \quad (4)$$

$$\beta PL_S^\alpha K_S^{\beta-1} - r = 0, \quad (5)$$

$$\beta(1-t)PL_F^\alpha K_F^{\beta-1} - r = 0. \quad (6)$$

Po wyznaczeniu z równań 3 i 4 w , przyrównaniu do siebie oraz uproszczeniu otrzymujemy równość:

$$\frac{(1-t)L_F^{\alpha-1} K_F^\beta}{1+\delta} = L_S^{\alpha-1} K_S^\beta,$$

która pozwala na wyznaczenie ilorazu zatrudnienia w szarej strefie do zatrudnienia w sektorze formalnym, podniesionego do potęgi $1 - \alpha$:

$$\frac{L_S^{1-\alpha}}{L_F^{1-\alpha}} = \frac{(1+\delta)K_S^\beta}{(1-t)K_F^\beta}. \quad (7)$$

¹⁰ Spełnienie warunków dostatecznych wynika z założeń modelu. Dyskusja znaków znajduje się w załączniku.

Analogiczny proces należy powtórzyć z równaniami 5 i 6, wyznaczając najpierw r , a następnie iloraz zatrudnienia w szarej strefie do zatrudnienia w gospodarce rejestrowanej do potęgi α :

$$\frac{L_S^\alpha}{L_F^\alpha} = \frac{(1+\delta)K_S^{\beta-1}}{(1-t)K_S^{\beta-1}}. \quad (8)$$

Po przemnożeniu równań 7 i 8 przez siebie można otrzymać:

$$\frac{L_S}{L_F} = \frac{(1+\delta)K_S}{(1-t)K_S}. \quad (9)$$

Po obustronnym podniesieniu do potęgi α i wstawieniu do równania 8 można wyznaczyć iloraz kapitału zatrudnionego w szarej strefie do kapitału zatrudnionego w sektorze formalnym jako funkcję parametrów modelu:

$$\frac{K_S}{K_F} = \frac{(1-t)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}}{(1+\delta)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}}, \quad (10)$$

co z kolei, po podstawieniu do równania 9, pozwala na wyznaczenie stosunku zatrudnienia w szarej strefie do zatrudnienia w sektorze formalnym:

$$\frac{L_S}{L_F} = \frac{(1-t)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}}{(1+\delta)^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}}}. \quad (11)$$

Znajomość formuł 10 oraz 11 umożliwia obliczenie relacji produkcji wytwarzanej w szarej strefie do produkcji w sektorze rejestrowanym (równanie 12), a tym samym, udziału szarej strefy w gospodarce całkowitej (równanie 13)¹¹:

¹¹ Oczywiście cała powyższa analiza ma sens, jeżeli koszty netto działania w sektorze formalnym oraz oczekiwana wartość grzywny płaconej przez przedsiębiorstwa nierejestrowane w przypadku wykrycia, nie są zbyt wysokie i zyski w każdym z sektorów są nieujemne. W przeciwnym razie rozwiązaniem równowagi jest rozwiązanie brzegowe, kiedy wszystkie przedsiębiorstwa działają albo w sektorze formalnym, albo w nieformalnym. Praktyka wskazuje, że taka sytuacja nie zachodzi.

$$\frac{Y_S}{Y_F} = \frac{(1-t)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}}{(1+\delta)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}}, \quad (12)$$

$$\frac{Y_S}{Y} = \frac{(1+\delta)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}}}{(1+\delta)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}} + (1-t)^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-1}}}. \quad (13)$$

5. WNIOSKI

Z równań opisujących równowagę można wnioskować o kierunkach zależności między parametrami modelu a proporcjami szarej strefy do sektora formalnego (liczonymi dla wielkości produkcji, zatrudnienia i kapitału), a tym samym między parametrami modelu a udziałem szarej strefy w gospodarce całkowitej. Znaki poszczególnych pochodnych cząstkowych są przedstawione w tab. 1. Wzory pochodnych oraz dyskusja znaków znajdują się w załączniku.

Jak należało oczekiwać, zwiększenie stawki podatkowej i narzut na koszty pracy (czyli te z parametrów modelu, które w największym stopniu zależą od polityki fiskalnej) zwiększają stosunek szarej strefy do sektora formalnego przy każdym z analizowanych mierników. Ponadto, im wyższa elastyczność produkcji względem kapitału, tym większy jest udział szarej strefy w produkcji oraz w zatrudnieniu. Wpływ α na udział sektora nieformalnego w kapitale całkowitym oraz wpływ elastyczności produkcji względem zatrudnienia na udział szarej strefy w gospodarce całkowitej jest niejednoznaczny i zależy od stopy opodatkowania, narzutu na koszty pracy oraz elastyczności produkcji względem kapitału.

Tabela 1

Wpływ parametrów modelu na relację szarej strefy do sektora formalnego

Miernik	δ	t	α	β
Y_S/Y_F	+	+	+	?
L_S/L_F	+	+	+	?
K_S/K_F	+	+	?	?

Źródło: obliczenia własne

Z analizy modelu wynika również, że szara strefa będzie wykorzystywać bardziej pracochłonne technologie niż sektor formalny. Dzieje się tak, ponieważ koszt pracy ponoszony przez przedsiębiorstwa rejestrowane jest $1+\delta$ razy wyższy niż koszt ponoszony przez przedsiębiorstwa nierejestrowane. Koszty kapitału w obydwu częściach gospodarki są takie same, a zatem nachylenie izokoszt będzie różne w szarej strefie i w sektorze formalnym i będzie wynosić odpowiednio $-w/r$ i $-w(1+\delta)/r$. Korzystając z funkcji produkcji, można obliczyć stosunek nakładów kapitału do nakładów pracy w obydwu sektorach:

$$\frac{K_S}{L_S} = \frac{w\beta}{r(1-\alpha)},$$

$$\frac{K_F}{L_F} = \frac{w\beta(1+\delta)}{r(1-\alpha)}.$$

ZAŁĄCZNIK

DYSKUSJA ZNAKÓW

A.1. Warunek dostateczny maksymalizacji zysków

Warunek dostateczny drugiego rzędu istnienia maksimum względnego funkcji dwu zmiennych wymaga, aby drugie pochodne cząstkowe były ujemne oraz aby ich iloczyn był większy od mieszanej pochodnej cząstkowej podniesionej do kwadratu.

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji zysków w szarej strefie (równanie 1) dane są wzorami A.1–A.3.

$$\frac{\partial^2 \Pi_S}{\partial L_S^2} = \alpha(\alpha-1)PL_S^{\alpha-2}K_S^\beta, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_S}{\partial K_S^2} = \beta(\beta-1)PL_S^\alpha K_S^{\beta-2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_S}{\partial K_S \partial L_S} = \alpha\beta PL_S^{\alpha-1} K_S^{\beta-1}. \quad (\text{A.3})$$

Dwie pierwsze pochodne są ujemne, ponieważ ujemne są wyrażenia $\alpha - 1$ oraz $\beta - 1$, podczas gdy wszystkie pozostałe wyrazy są dodatnie.

$$\frac{\partial^2 \Pi_S}{\partial K_S^2} \frac{\partial^2 \Pi_S}{\partial L_S^2} = \alpha(\alpha - 1)\beta(\beta - 1)P^2 L_S^{2\alpha-2} K_S^{2\beta-2}, \quad (\text{A.4})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi_S}{\partial K_S L_S} \right)^2 = \alpha^2 \beta^2 P^2 L_S^{2\alpha-2} K_S^{2\beta-2}. \quad (\text{A.5})$$

Wyrażenie A.4 jest większe od A.5, ponieważ $1 - \alpha - \beta > 0$ (por. założenia co do funkcji produkcji).

Analogiczny wywód można przeprowadzić dla funkcji zysków w sektorze formalnym (równanie 2). Pochodne cząstkowe drugiego rzędu dla tej funkcji dane są wzorami A.6–A.8.

$$\frac{\partial^2 \Pi_F}{\partial L_F^2} = \alpha(\alpha - 1)(1 - t)P L_F^{\alpha-2} K_F^\beta, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_F}{\partial K_F^2} = \beta(\beta - 1)(1 - t)P L_F^\alpha K_F^{\beta-2}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_F}{\partial K_F L_F} = \alpha\beta(1 - t)P L_F^{\alpha-1} K_F^{\beta-1}. \quad (\text{A.8})$$

Dwie pierwsze pochodne są ujemne, ponieważ ujemne są wyrażenia $\alpha - 1$ oraz $\beta - 1$, podczas gdy wszystkie pozostałe wyrazy są dodatnie.

$$\frac{\partial^2 \Pi_F}{\partial K_F^2} \frac{\partial^2 \Pi_F}{\partial L_F^2} = \alpha(\alpha - 1)\beta(\beta - 1)(1 - t)^2 P^2 L_F^{2\alpha-2} K_F^{2\beta-2}, \quad (\text{A.9})$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Pi_F}{\partial K_F L_F} \right)^2 = \alpha^2 \beta^2 (1 - t)^2 P^2 L_F^{2\alpha-2} K_F^{2\beta-2}. \quad (\text{A.10})$$

A.9 jest większe od A.10, ponieważ $1 - \alpha - \beta > 0$ (por. założenia co do funkcji produkcji).

Warunek dostateczny drugiego rzędu dla istnienia maksimum funkcji zysków jest zatem spełniony dla obydwu rozpatrywanych sektorów.

A.2. Wpływ parametrów modelu na wielkość szarej strefy w stosunku do sektora formalnego

Pochodne cząstkowe stosunku produkcji w szarej strefie do produkcji w sektorze formalnym po parametrach modelu dane są wzorami A.11–A.14.

$$\frac{\partial \left(\frac{Y_S}{Y_F} \right)}{\partial \delta} = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \frac{(1 + \delta)^{\frac{2\alpha + \beta - 1}{1 - \beta - \alpha}}}{(1 - t)^{\frac{\alpha}{1 - \beta - \alpha}}} > 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial \left(\frac{Y_S}{Y_F} \right)}{\partial t} = \frac{\alpha}{1 - \alpha - \beta} \frac{(1 + \delta)^{\frac{\alpha}{1 - \beta - \alpha}}}{(1 - t)^{\frac{2\alpha + \beta - 1}{1 - \beta - \alpha}}} > 0. \quad (\text{A.12})$$

Obydwie powyższe pochodne są dodatnie, ponieważ:

- pierwszy ułamek jest dodatni, gdyż zarówno α , jak i $1 - \alpha - \beta$ są dodatnie (por. założenia dotyczące funkcji produkcji);
- drugi ułamek jest dodatni, gdyż dodatnie są wyrażenia $1 + \delta$ oraz $1 - t$, nie mogą więc zmienić znaku po podniesieniu do dowolnej potęgi.

$$\frac{\partial \left(\frac{Y_S}{Y_F} \right)}{\partial \alpha} = \frac{(1 + \delta)^{\frac{\alpha}{1 - \beta - \alpha}} [(1 - \beta) \ln(1 + \delta) + \ln(1 - t)]}{(1 - \beta - \alpha)^2 (1 - t)^{\frac{\alpha + \beta - 1}{1 - \beta - \alpha}}} > 0. \quad (\text{A.13})$$

Powyższa pochodna jest dodatnia, ponieważ:

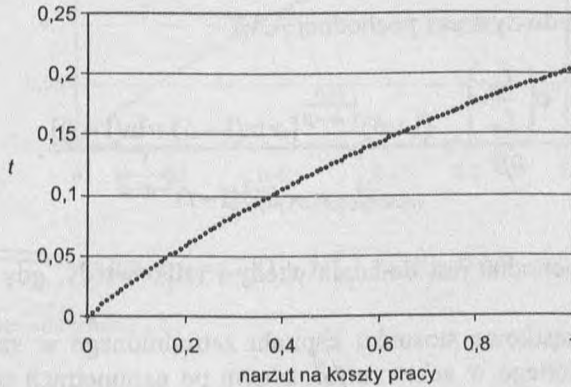
- wyrażenie $(1 - \alpha - \beta)^2$ jest dodatnie, gdyż $\alpha + \beta < 1$, a zatem nie może być równe 0;
- wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest dodatnie, gdyż $1 + \delta > 1$, a zatem $\ln(1 + \delta) > 0$, oraz $1 - t < 1$, a zatem $\ln(1 - t) < 0$;
- wszystkie pozostałe wyrażenia są dodatnie (por. dyskusje dla pochodnych A.11 i A.12).

$$\frac{\partial \left(\frac{Y_S}{Y_F} \right)}{\partial \beta} = \frac{(1 + \delta)^{\frac{\alpha}{1 - \beta - \alpha}} [\alpha \ln(1 + \delta) + \ln(1 - t)]}{(1 - \beta - \alpha)^2 (1 - t)^{\frac{\alpha + \beta - 1}{1 - \beta - \alpha}}}. \quad (\text{A.14})$$

Powyższa pochodna jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$t < 1 - \frac{1}{(1+\delta)^\alpha} \quad (\text{A.15})$$

Zależność między t a δ dla $\alpha = 0,33$ została przedstawiona na rys. 1¹².



Rys. 1. $t = 1 - \frac{1}{(1+\delta)^\alpha}$ dla $\alpha = 0,33$

Źródło: obliczenia własne

Pochodne cząstkowe stosunku zatrudnienia w szarej strefie do zatrudnienia w sektorze formalnym po parametrach modelu dane są wzorami A.16–A.19.

$$\frac{\partial \left(\frac{L_S}{L_F} \right)}{\partial \delta} = \frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta} \frac{(1+\delta)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}}{(1-t)^{\frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha-\beta}}} > 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial \left(\frac{L_S}{L_F} \right)}{\partial t} = \frac{1}{1-\alpha-\beta} \frac{(1+\delta)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}}{(1-t)^{\frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha-\beta}}} > 0. \quad (\text{A.17})$$

¹² Wartość parametru α przyjęto na podstawie: T. Tokarski, *Determinanty wzrostu gospodarczego w warunkach stałych efektów skali*, Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2001.

Analogicznie do dyskusji pochodnych A.11 i A.12.

$$\frac{\partial \left(\frac{L_S}{L_F} \right)}{\partial \alpha} = \frac{(1-\beta)(1+\delta)^{\frac{2-\alpha-2\beta}{1-\alpha-\beta}} [\alpha \ln(1+\delta) + \ln(1-t)]}{(1-\alpha-\beta)^2 (1-t)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}} > 0. \quad (\text{A.18})$$

Analogicznie do dyskusji pochodnej A.13

$$\frac{\partial \left(\frac{L_S}{L_F} \right)}{\partial \beta} = \frac{(1+\delta)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} [\alpha \ln(1+\delta) + \ln(1-t)]}{(1-\alpha-\beta)^2 (1-t)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}}. \quad (\text{A.19})$$

Powyższa pochodna jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek A.15.

Pochodne cząstkowe stosunku kapitału zatrudnionego w szarej strefie do kapitału zatrudnionego w sektorze formalnym po parametrach modelu dane są wzorami A.20–A.22.

$$\frac{\partial \left(\frac{K_S}{K_F} \right)}{\partial \delta} = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} \frac{(1+\delta)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}}}{(1-t)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}} > 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial \left(\frac{K_S}{K_F} \right)}{\partial t} = \frac{1}{1-\alpha-\beta} \frac{(1+\delta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}}{(1-t)^{\frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha-\beta}}} > 0. \quad (\text{A.21})$$

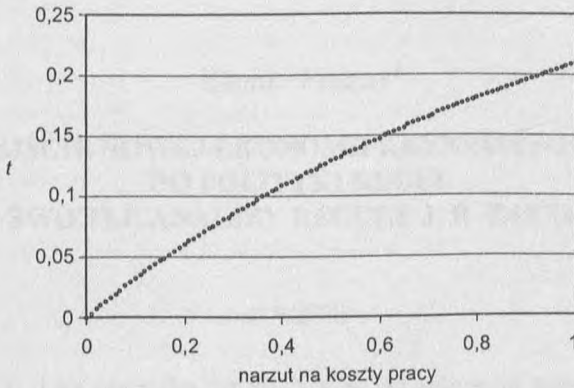
Analogicznie do dyskusji pochodnych A.11 i A.12

$$\frac{\partial \left(\frac{K_S}{K_F} \right)}{\partial \alpha} = \frac{(1+\delta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} [\ln(1-t) - (\beta-1) \ln(1+\delta)]}{(1-\alpha-\beta)^2 (1-t)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}} > 0. \quad (\text{A.22})$$

Powyższa pochodna jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$t < 1 - (1+\delta)^{\beta-1}. \quad (\text{A.23})$$

Zależność między t a δ dla $\beta = 0,66$ została przedstawiona na rys. 2¹³.



Rys. 2. $t = 1 - (1 + \delta)^{\beta-1}$ dla $\beta = 0,66$

Źródło: obliczenia własne

$$\frac{\partial \left(\frac{K_S}{K_F} \right)}{\partial \beta} = \frac{(1 + \delta)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} [\alpha \ln(1 + \delta) + \ln(1 - t)]}{(1 - \alpha - \beta)^2 (1 - t)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}}. \quad (\text{A.24})$$

Powyższa pochodna jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek A.15.

Anna Myślińska

SIMPLE THEORETICAL MODEL OF SHADOW ECONOMY

(Summary)

The article presents a theoretical shadow economy model based on Cobb–Douglas production function with decreasing returns to scale. The whole economy is divided into formal and informal sector with each enterprise operating in only one of the sectors. The size of shadow economy is measured with ratios of informal to formal production, informal to formal employment and informal to formal capital. The influence of main parameters (the difference between wages in formal and informal sectors, corporate income tax rate, labour elasticity of output and capital elasticity of output) on shadow economy is then analysed.

¹³ Wartość parametru β przyjęto na podstawie: T. Tokarski, *Determinanty wzrostu...*