

*Piotr Krajewski**

STOPY PODATKOWE MAKSYMALIZUJĄCE UŻYTECZNOŚĆ GOSPODARSTWA DOMOWEGO W WARUNKACH NIEPEWNOŚCI STAWKI PŁAC**

1. WPROWADZENIE

Celem artykułu jest wyznaczenie stóp podatkowych maksymalizujących oczekiwaną użyteczność gospodarstw domowych w warunkach niepewności stawki płac. Funkcjonowanie gospodarstwa domowego w takich warunkach oznacza, że gospodarstwo domowe jest losowo przypisane albo do wyższej, albo do niższej stawki płac. Na podstawie przyjętych założeń zweryfikowano założenie, czy w warunkach niepewności dotyczącej kształtowania się płac państwo powinno utrzymywać jedną stopę podatkową, czy też różnicować stopy podatkowe w zależności od poziomu dochodu gospodarstwa domowego.

2. ZAŁOŻENIA MODELU

Stopy podatkowe maksymalizujące oczekiwaną użyteczność gospodarstw domowych wyznaczone zostały przy przyjęciu następujących założeń:

1. Gospodarstwo domowe funkcjonuje w warunkach niepewności – z prawdopodobieństwem π_1 otrzymuje stawkę płac w_1 , a z prawdopodobieństwem π_2 otrzymuje stawkę płac w_2 ¹.
2. Gospodarstwo domowe uzyskuje dochody wyłącznie z pracy.
3. Gospodarka składa się z N jednakowych gospodarstw domowych.

* Dr, Instytut Ekonomii, Uniwersytet Łódzki.

** Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005–2007 jako projekt badawczy 1 H02C 020 28.

¹ Podobne założenie przedstawione jest m. in. w pracy G. Hansena i R. Wrighta, *The Labor Market in Real Business Cycle Theory*, „Quarterly Review” 1992, vol. 16, No 2, Federal Reserve Bank of Minneapolis, gdzie poszczególne podmioty są losowo przypisane do zatrudnienia lub bezrobocia.

4. Użyteczność oczekiwana gospodarstwa domowego (EU) jest funkcją użyteczności von Neumanna-Morgensterna, czyli:

$$EU = \pi_1 U_1 + \pi_2 U_2, \quad \pi_1 + \pi_2 = 1, \quad (1)$$

gdzie:

U_1 – użyteczność gospodarstwa domowego przy stawce płac w_1 ,

U_2 – użyteczność gospodarstwa domowego przy stawce płac w_2 .

5. Dla każdej stawki płac funkcja użyteczności gospodarstwa domowego jest zlogarytmizowaną funkcją użyteczności Cobba–Douglasa o stałych efektach skali, czyli:

$$U_1 = \gamma \ln C_1 + (1 - \gamma) \ln R_1, \quad \gamma \in (0, 1), \quad (2)$$

$$U_2 = \gamma \ln C_2 + (1 - \gamma) \ln R_2, \quad \gamma \in (0, 1), \quad (3)$$

gdzie:

C_1 – konsumpcja gospodarstwa domowego przy stawce płac w_1 ,

R_1 – czas wolny gospodarstwa domowego przy stawce płac w_1 ,

C_2 – konsumpcja gospodarstwa domowego przy stawce płac w_2 ,

R_2 – czas wolny gospodarstwa domowego przy stawce płac w_2 .

6. Państwo nakłada podatki w takiej wysokości, aby otrzymać wartość oczekiwaną wpływów z podatków równą T .

7. Podatki nakładane są wyłącznie na dochody z pracy.

8. Gospodarstwo domowe jest podmiotem płacącym podatki (np. w każdym gospodarstwie domowym występuje wspólne opodatkowanie małżonków).

9. Krańcowe stopy podatkowe są równe przeciętnym stopom podatkowym.

10. Państwo może różnicować przeciętne stopy podatkowe w zależności od wysokości stawki płac uzyskiwanej przez gospodarstwo domowe. Zatem państwo określa stopę podatkową t_1 dla stawki płac w_1 , a stopę podatkową t_2 dla stawki płac w_2 . Każda ze stóp podatkowych należy do przedziału $(0, 1)$.

11. Państwo wybiera takie stopy podatkowe t_1 i t_2 , aby maksymalizować użyteczność gospodarstw domowych.

3. WYPROWADZENIE STÓP PODATKOWYCH MAKSYMALIZUJĄCYCH UŻYTECZNOŚĆ

Oznaczając jako $\bar{R}$ całkowity zasób wolnego czasu posiadany przez gospodarstwo domowe i przyjmując, że L_1 oznacza liczbę przepracowanych godzin w gospodarstwie domowym, gdy stawka płac wynosi w_1 , natomiast L_2 oznacza liczbę przepracowanych godzin w gospodarstwie domowym, gdy stawka płac wynosi w_2 , otrzymuje się:

$$C_1 = w_1(1 - t_1)(\bar{R} - R_1) = w_1(1 - t_1)L_1, \quad (4)$$

$$C_2 = w_2(1 - t_2)(\bar{R} - R_2) = w_2(1 - t_2)L_2. \quad (5)$$

Maksymalizując wartość oczekiwaną funkcji użyteczności, określoną równaniami (1), (2) i (3), przy występowaniu ograniczeń budżetowych określonych równaniami (4) i (5), otrzymuje się:

$$C_1 = \gamma \bar{R} w_1(1 - t_1), \quad (6)$$

$$R_1 = (1 - \gamma)\bar{R}, \quad (7)$$

$$C_2 = \gamma \bar{R} w_2(1 - t_2), \quad (8)$$

$$R_2 = (1 - \gamma)\bar{R}. \quad (9)$$

Na podstawie powyższych równań wyznaczyć można również zatrudnienie maksymalizujące oczekiwaną użyteczność gospodarstwa domowego:

$$L_1 = \bar{R} - R_1 = \gamma \bar{R}, \quad (10)$$

$$L_2 = \bar{R} - R_2 = \gamma \bar{R}. \quad (11)$$

Normalizując czas wolny do jedności, czyli przyjmując, że:

$$\bar{R} = 1, \quad (12)$$

otrzymuje się następujące wielkości dla stawki płac w_1 :

$$R_1 = 1 - \gamma, \quad (13)$$

$$L_1 = \gamma, \quad (14)$$

$$C_1 = \gamma w_1(1 - t_1). \quad (15)$$

Natomiast dla stawki płac w_2 otrzymuje się:

$$R_2 = 1 - \gamma, \quad (16)$$

$$L_2 = \gamma, \quad (17)$$

$$C_2 = \gamma w_2(1 - t_2). \quad (18)$$

Zatem, jeżeli funkcja użyteczności gospodarstwa domowego jest funkcją opisaną równaniami (1)–(3) oraz gospodarstwo domowe nie ma dochodów pozapłacowych², to stawka płacy netto ($w(1-t)$) wpływa co prawda na wysokość konsumpcji gospodarstwa domowego, ale nie wpływa na kształtowanie się podaży pracy i czasu wolnego. Oznacza to, że krzywa podaży pracy jest pionowa. Zatem kształtowanie się zatrudnienia w tym przypadku nie jest uzależnione od wysokości stawki płacy brutto (w). Również wysokości stopy podatkowej (t) w tym przypadku nie wpływają na kształtowanie się zatrudnienia³.

Brak wpływu obniżenia płacy netto na podaż pracy oznacza, że wzrost podaży pracy wynikający z efektu dochodowego jest taki sam jak spadek podaży pracy wynikający z efektu substytucyjnego. Efekt dochodowy jest więc w analizowanym przypadku na tyle silny, że neutralizuje wpływ efektu substytucyjnego. Efekt dochodowy zmiany stawki płac jest relatywnie wysoki w porównaniu z efektem substytucyjnym w przypadku, gdy:

- w gospodarstwie domowym pracuje tylko jedna osoba oraz w przypadku podstawowego żywiciela, czyli najczęściej zarabiającej osoby w gospodarstwie domowym⁴,

- analizowana jest trwała zmiana stawki płac, a zatem nie występuje międzyokresowa substytucja czasu wolnego⁵.

Podstawiając do równań (2)–(3) wyznaczoną wielkość konsumpcji oraz wyznaczoną, niezależną od stawki płac, wartość podaży pracy wyznaczyć można poziom użyteczności w przypadku stawki płac w_1 :

$$U_1 = \gamma \ln[\gamma w_1(1-t_1)] + (1-\gamma) \ln(1-\gamma), \quad (19)$$

oraz w przypadku stawki płac w_2 :

$$U_2 = \gamma \ln[\gamma w_2(1-t_2)] + (1-\gamma) \ln(1-\gamma). \quad (20)$$

² Jeżeli założy się, że dochód pozapłacowy występuje, to przy funkcji użyteczności Cobba–Douglassa wzrost stawki płac wpływa na wzrost zatrudnienia.

³ Większość badań empirycznych wskazuje jednak, że zwiększenie opodatkowania pracy oddziałuje na zatrudnienie. Na negatywną zależność między poziomem opodatkowania a wysokością zatrudnienia wskazują m. in.: C. A. Pissarides, *Are Employment Tax Cuts the Answer to Europe's Unemployment Problem*, Centre for Economic Performance, London 1996; F. Deveri, G. Tabellini, *Unemployment, Growth and Taxation in Industrial Countries*, maszynopis powielany, 1997; S. Nickell, *Unemployment and Labor Market Rigidities: Europe versus North America*, „Journal of Economic Perspectives” 1997, No 11 oraz B. Heitger, *The Impact of Taxation on Unemployment in OECD Countries*, „Cato Journal” 2002, vol. 22, No 2.

⁴ Por. P. van den Noord, Ch. Heady, *Tax Design, Economic Efficiency and Growth*, [w:] *The impact of Fiscal Policy*, Banca d'Italia, Rome 2002.

⁵ Por. m. in. B. Snowdon, H. Vane, P. Wynarczyk, *Współczesne nurty teorii makroekonomii*, PWN, Warszawa 1998.

Użyteczność oczekiwana wynosi zatem:

$$EU = \pi_1 \{ \gamma \ln[\gamma w_1 (1 - t_1)] + (1 - \gamma) \ln(1 - \gamma) \} + \pi_2 \{ \gamma \ln[\gamma w_2 (1 - t_2)] + (1 - \gamma) \ln(1 - \gamma) \}, \quad (21)$$

czyli:

$$EU = \pi_1 \gamma \ln[\gamma w_1 (1 - t_1)] + \pi_2 \gamma \ln[\gamma w_2 (1 - t_2)] + (1 - \gamma) \ln(1 - \gamma). \quad (22)$$

Przekształcając dalej powyższe równanie otrzymuje się:

$$EU = \pi_1 \gamma [\ln \gamma + \ln w_1 + \ln(1 - t_1)] + \pi_2 \gamma [\ln \gamma + \ln w_2 + \ln(1 - t_2)] + \ln(1 - \gamma)^{1-\gamma}, \quad (23)$$

czyli:

$$EU = \gamma \pi_1 \ln w_1 + \gamma \pi_1 \ln(1 - t_1) + \gamma \pi_2 \ln w_2 + \gamma \pi_2 \ln(1 - t_2) + \ln \gamma^\gamma + \ln(1 - \gamma)^{1-\gamma}. \quad (24)$$

Przyjmując oznaczenie:

$$\ln \gamma^\gamma + \ln(1 - \gamma)^{1-\gamma} = A, \quad (25)$$

równanie (24) można zapisać w postaci:

$$EU = \gamma [\pi_1 \ln w_1 + \pi_1 \ln(1 - t_1) + \pi_2 \ln w_2 + \pi_2 \ln(1 - t_2)] + A. \quad (26)$$

Państwo wybiera takie stopy podatkowe t_1 i t_2 , aby maksymalizować użyteczność oczekiwaną określoną równaniem (26).

Aby uzyskać wpływy z podatków T , państwo musi od każdego gospodarstwa ściągnąć podatek o wartości oczekiwanej równej T/N . By oczekiwane wpływy podatkowe uzyskane od każdego gospodarstwa domowego wynosiły T/N , stopy podatkowe t_1 i t_2 muszą spełniać warunek:

$$\pi_1 t_1 w_1 L_1 + \pi_1 t_2 w_2 L_2 = \frac{T}{N}, \quad (27)$$

czyli:

$$t_2 = \frac{T}{N} \frac{1}{\pi_2 w_2 L_2} - t_1 \frac{\pi_1 w_1 L_1}{\pi_2 w_2 L_2}. \quad (28)$$

Wstawiając do powyższego równania określony równaniem (14) wzór na liczbę przepracowanych godzin w gospodarstwie domowym, gdy stawka płac

wynosi w_1 , oraz określony równaniem (17) wzór na liczbę przepracowanych godzin w gospodarstwie domowym, gdy stawka płac wynosi w_2 , otrzymuje się:

$$t_2 = \frac{T}{N} \frac{1}{\pi_2 w_2 \gamma} - t_1 \frac{\pi_1 w_1}{\pi_2 w_2}. \quad (29)$$

Wstawiając ograniczenie określone powyższym równaniem do równania (26) określającego użyteczność oczekiwaną gospodarstwa domowego, otrzymuje się:

$$EU = \gamma \left[\pi_1 \ln w_1 + \pi_1 \ln(1 - t_1) + \pi_2 \ln w_2 + \pi_2 \ln \left(1 - \frac{T}{N} \frac{1}{\pi_2 w_2 \gamma} + t_1 \frac{\pi_1 w_1}{\pi_2 w_2} \right) \right] + A. \quad (30)$$

Funkcja użyteczności oczekiwanej określona równaniem (30) osiąga maksimum dla takiej stopy podatkowej t_1 , dla której spełnione są warunki:

$$\frac{\partial EU}{\partial t_1} = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2 EU}{\partial t_1^2} < 0. \quad (32)$$

Na podstawie warunku koniecznego maksymalizacji (określonego równaniem (31)) otrzymuje się:

$$\gamma \left[\pi_1 \frac{1}{1 - t_1} (-1) + \pi_2 \frac{1}{1 - \frac{T}{N} \frac{1}{\pi_2 w_2 \gamma} + t_1 \frac{\pi_1 w_1}{\pi_2 w_2}} \left(\frac{\pi_1 w_1}{\pi_2 w_2} \right) \right] = 0, \quad (33)$$

czyli:

$$\pi_2 \frac{\frac{\pi_1 w_1}{\pi_2 w_2}}{1 - \frac{T}{N} \frac{1}{\pi_2 w_2 \gamma} + t_1 \frac{\pi_1 w_1}{\pi_2 w_2}} = \pi_1 \frac{1}{1 - t_1}. \quad (34)$$

Przekształcając powyższe równanie, otrzymuje się:

$$1 - \frac{T}{N} \frac{1}{\pi_2 w_2 \gamma} + t_1 \frac{\pi_1 w_1}{\pi_2 w_2} = \frac{w_1}{w_2} (1 - t_1), \quad (35)$$

czyli:

$$t_1 = \frac{\frac{w_1}{w_2} + \frac{T}{N} \frac{1}{\pi_2 w_2 \gamma} - 1}{\frac{\pi_1 w_1}{\pi_2 w_2} + \frac{w_1}{w_2}}. \quad (36)$$

A zatem:

$$t_1 = \pi_2 \left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) + \frac{T}{N} \frac{1}{\gamma w_1}. \quad (37)$$

Powyższe równanie określa stopę podatkową maksymalizującą użyteczność w przypadku, gdy spełniony jest również warunek dostateczny maksymalizacji określony wzorem (32), czyli gdy zachodzi nierówność:

$$\gamma \left[-\pi_1 \frac{1}{(1-t_1)^2} - \pi_2 \frac{1}{\left(1 - \frac{T}{N} \frac{1}{\pi_2 w_2 \gamma} + t_1 \frac{\pi_1 w_1}{\pi_2 w_2}\right)^2} \left(\frac{\pi_1 w_1}{\pi_2 w_2}\right)^2 \right] < 0. \quad (38)$$

Ponieważ z założenia $\gamma, \pi_1, \pi_2 > 0$, zatem warunek dostateczny maksymalizacji jest spełniony. Oznacza to, że stopa podatkowa określona równaniem (37) jest stopą podatkową, dla której oczekiwana użyteczność gospodarstwa domowego jest najwyższa.

Podstawiając równanie (37) do równania (28), wyznaczyć można również stopę podatkową t_2 , otrzymując:

$$t_2 = \pi_1 \left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right) + \frac{T}{N} \frac{1}{\gamma w_2}. \quad (39)$$

Określając t jako przeciętną stopę podatkową w gospodarce, czyli:

$$t = \frac{\frac{T}{N}}{\pi_1 w_1 L_1 + \pi_2 w_2 L_2}, \quad (40)$$

dla wyznaczonych wcześniej wartości L_1 L_2 i otrzymuje się:

$$t = \frac{\frac{T}{N}}{\gamma(\pi_1 w_1 + \pi_2 w_2)}. \quad (41)$$

Zatem:

$$\frac{T}{N} = t\gamma(\pi_1 w_1 + \pi_2 w_2). \quad (42)$$

Wstawiając powyższe równanie do równania (37), otrzymuje się:

$$t_1 = \pi_2 \left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) + t\gamma(\pi_1 w_1 + \pi_2 w_2) \frac{1}{\gamma w_1}. \quad (43)$$

Wykonując analogiczne podstawienie dla stopy podatkowej t_2 określonej równaniem (39), uzyskuje się:

$$t_2 = \pi_1 \left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right) + t\gamma(\pi_1 w_1 + \pi_2 w_2) \frac{1}{\gamma w_2}. \quad (44)$$

Dokonując dalszych przekształceń równania (43), otrzymać można wzór na stopę podatkową t_1 postaci:

$$t_1 = \pi_2 \left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) + t \frac{\pi_1 w_1 + \pi_2 w_2}{w_1}. \quad (45)$$

Aby wyznaczyć, jak stopa podatkowa t_1 różni się od przeciętnej stopy podatkowej w gospodarce, powyższe równanie należy przekształcić do postaci:

$$t_1 = t + \pi_2 \left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) + t \frac{\pi_1 w_1 + \pi_2 w_2 - w_1}{w_1}, \quad (46)$$

otrzymując w rezultacie:

$$t_1 = t + \pi_2 \frac{w_1 - w_2}{w_1} (1 - t). \quad (47)$$

Wykonując analogiczne przekształcenia dla stopy podatkowej t_2 , otrzymuje się wzór na stopę podatkową t_2 postaci:

$$t_2 = t + \pi_1 \frac{w_2 - w_1}{w_2} (1 - t). \quad (48)$$

Oznaczając w jako średnią stawkę płac w gospodarce, czyli przyjmując że:

$$w = \frac{\pi_1 L_1 w_1 + \pi_2 L_2 w_2}{\pi_1 L_1 + \pi_2 L_2} \quad (49)$$

i podstawiając do powyższego równania wyznaczone wcześniej wielkości L_1 i L_2 , otrzymuje się:

$$w = \frac{\pi_1 \gamma w_1 + \pi_2 \gamma w_2}{\pi_1 \gamma + \pi_2 \gamma} \quad (50)$$

Równanie to uprościć można do postaci:

$$w = \pi_1 w_1 + \pi_2 w_2 \quad (51)$$

Równanie określające wysokość stopy podatkowej t_1 można zatem zapisać w następującej postaci:

$$t_1 = t + \frac{\pi_2 w_1 - \pi_2 w_2 - w + \pi_1 w_1 + \pi_2 w_2}{w_1} (1 - t), \quad (52)$$

otrzymując w rezultacie wzór na stopę podatkową t_1 postaci:

$$t_1 = t + \frac{w_1 - w}{w_1} (1 - t). \quad (53)$$

Wykonując analogiczne przekształcenia dla stopy podatkowej t_2 , otrzymuje się:

$$t_2 = t + \frac{w_2 - w}{w_2} (1 - t). \quad (54)$$

Z równania (53) oraz równania (54) wynika, że różnica między nałożoną na gospodarstwo domowe stopą podatkową a średnią stopą podatkową w gospodarce powinna być uzależniona od procentowego odchylenia dochodu danego gospodarstwa domowego od średniego dochodu gospodarstw domowych.

Przy przyjętych założeniach okazuje się zatem, że jeżeli gospodarstwo domowe funkcjonuje w warunkach niepewności (z prawdopodobieństwem π_1 otrzymuje stawkę płac w_1 , a z prawdopodobieństwem π_2 otrzymuje stawkę płac w_2), to w celu maksymalizacji użyteczności gospodarstw domowych państwo powinno ustalić

wyższą stopę podatkową w przypadku wyższych dochodów gospodarstwa domowego (wyższej stawki płac) i niższą stopę podatkową w przypadku niższych dochodów gospodarstwa domowego (niższej stawki płac)⁶.

4. PODSUMOWANIE

W artykule wyznaczone zostały stopy podatkowe maksymalizujące oczekiwaną użyteczność gospodarstw domowych w warunkach niepewności dotyczącej stawki płac. Przy przyjętych założeniach stwierdzono, że w warunkach niepewności dotyczącej stawki płac państwo powinno różnicować stopy podatkowe w zależności od poziomu dochodu gospodarstwa domowego. W celu maksymalizacji użyteczności gospodarstw domowych państwo powinno ustalić wyższą stopę podatkową w przypadku wyższych dochodów gospodarstwa domowego i niższą stopę podatkową w przypadku niższych dochodów gospodarstwa domowego.

Zatem w analizowanym modelu państwo winno stosować progresywny system podatkowy w celu maksymalizacji użyteczności gospodarstw domowych funkcjonujących w warunkach niepewności dotyczącej stawki płac. Przy przyjętych założeniach ustalono, że różnica między nałożoną na gospodarstwo domowe stopą podatkową a średnią stopą podatkową w gospodarce powinna być uzależniona od procentowego odchylenia dochodu danego gospodarstwa domowego od średniego dochodu gospodarstw domowych w gospodarce.

Piotr Krajewski

TAX RATES MAXIMISING THE UTILITY OF HOUSEHOLD UNDER WAGE RATE UNCERTAINTY

(Summary)

Tax rates maximising the households' utility under wage rate uncertainty are analyzed in the article. It is assumed in the article that each household with probability π_1 obtains wage rate w_1 and with probability π_1 obtains wage rate w_2 . It is also assumed that households obtain income only from wages. The aim of the article is to derive tax rates the government should put on wages to maximise households' utility. It is shown that the tax rate should be higher in case of higher wage rate. It means that under wage rate uncertainty the government should implement progressive tax system to maximise households' utility.

⁶ W analizowanym przypadku podaź pracy jest taka sama dla obydwu stawek płac i nie występują dochody pozapłacowe, a zatem dochody gospodarstwa domowego są proporcjonalne do stawki płac.