

*Czesław Domański**

WŁASNOŚCI TESTÓW WIELOWYMIAROWEJ NORMALNOŚCI OPARTYCH NA MIARACH KSZTAŁTU

1. WPROWADZENIE

Dla baz danych liczbowych pochodzących z eksperymentu lub badanego zjawiska, często przyjmuje się założenie, że są one pewną realizacją ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie normalnym. Założenie to dla aktualnych obserwacji liczbowych nie zawsze będzie spełnione. Oznacza to wtedy, że dane liczbowe stanowią realizację ciągu niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie innym niż rozkład normalny. Sprawdzenie zgodności rozkładu empirycznego opisanego danymi liczbowymi z rozkładem normalnym przeprowadza się testami nieparametrycznymi, zwanymi testami normalności. Jeżeli badanie zgodności obejmuje jedną zmienną, wtedy stosujemy testy jednowymiarowej normalności, gdy natomiast uwzględnia się jednocześnie wiele zmiennych, wtedy stosujemy testy wielowymiarowej normalności. Testy jednowymiarowej normalności zostały szeroko omówione w literaturze statystycznej m.in. przez Shapiro i in. (1968), Mardii (1980), a także Wagnera (1982).

Założenie wielowymiarowej normalności leży u podstaw standardowej metodologii wielowymiarowej statystyki matematycznej. Powszechność stosowania wielowymiarowego rozkładu normalnego wynika przede wszystkim z własności jakimi charakteryzuje się ten rozkład w porównaniu z innymi wielowymiarowymi rozkładami. Własności te można ująć następująco:

1. Wielowymiarowy rozkład normalny jest bezpośrednim uogólnieniem jednowymiarowego rozkładu normalnego, a wielowymiarowa analiza jest najczęściej równolegle prowadzona z odpowiednią analizą opartą na jednowymiarowej normalności, czego nie można stwierdzić dla innych wielowymiarowych rozkładów (np. istnieje wiele możliwych rozszerzonych rozkładów: gamma, Poissona, czy wykładniczy na przypadek wielowymiarowy);

* Prof. dr hab., Uniwersytet Łódzki.

2. Wymiarowy rozkład normalny jest całkowicie określony przez swoje pierwsze i drugie momenty w liczbie $p(p+3)/2$ parametrów, gdzie p jest liczbą zmiennych losowych, co w porównaniu np. z wielowymiarowym rozkładem dwumianowym, który jest określany przez $2^p - 1$ parametrów, znacznie upraszcza problem estymacji tych parametrów;

3. W wielowymiarowym rozkładzie normalnym zerowa korelacja między zmiennymi implikuje niezależność, a niezależność między parami zmiennych implikuje łączną niezależność, co nie koniecznie zachodzi dla innych rozkładów;

4. Dla wielowymiarowego rozkładu normalnego liniowa funkcja składowa wektora losowego jest jednowymiarową zmienną losową o rozkładzie normalnym, co umożliwia przenieść wiele innych własności z przypadku jednowymiarowego na wielowymiarowy i znowu własność ta nie musi zachodzić dla innych rozkładów np. liniowa funkcja składowych wektora losowego o wielowymiarowym rozkładzie binarnym nie jest zmienną losową o rozkładzie binarnym;

5. Jeżeli wektory losowe nie mają wielowymiarowego rozkładu normalnego to przez zastosowanie centralnych twierdzeń granicznych można wykazać, że pewne funkcje np. wektor średnich próbkowych, ma rozkład normalny.

Badanie wpływu odstępstwa od normalności na stosowane metody konstrukcji przedziałów ufności i rozmaite procedury testujące hipotezy parametryczne nie jest łatwe ani dotychczas dostatecznie rozwiązane. Dla analizowania wielowymiarowych danych liczbowych odporne metody statystyczne na odstępstwa od rozkładu normalnego są wciąż jeszcze na wczesnym stadium rozwoju. Użytecznym jest dysponowanie procedurami testowymi sprawdzenia rozsądnych założeń wielowymiarowej normalności dla danego zbioru obserwowanych wektorów losowych, szczególnie dla pochodzących z układów doświadczalnych, bądź szeregów czasowych.

W szczególności założenie wielowymiarowej normalności występuje jako podstawowe założenie dla konstrukcji szeregu metod wielozmiennej analizy wariancji. Metody te stają się wówczas odpowiednie do wnioskowania o wielowymiarowych obserwacjach strukturalnych, których struktura jest wyrażona przez znany typ układu eksperymentalnego.

Stosowane procedury sprawdzenia wielowymiarowej normalności powinny pomóc w prowadzeniu dalszej analizy danych, wskazać konieczność przekształcenia, bądź dokonania odpowiedniej modyfikacji wcześniej uwzględnionego modelu i metod analizy danych.

Przy wielowymiarowych danych strukturalnych możliwości odstępstwa od łącznej normalności są wielorakie i różnorodne. Implikuje to potrzebę posiadania rozmaitych technik o różnych czułościach na rozmaite typy odstępstwa. Poszukiwanie jednej najlepszej metody nie wydaje się być ani sensowne pragmatycznie, ani konieczne.

Potrzeba posiadania rozmaitych technik w przypadku wielowymiarowym wyraża się stopniem powiązania zmiennych, jaki odnosimy do układu współrzędnych obserwacji wielowymiarowych. Osiąga się to z jednej strony przez ograniczenie się do zaobserwowanych współrzędnych, tzn. do rozkładów brzegowych poszczególnych zmiennych, bądź rozkładów warunkowych niektórych z nich, przy zadanych pozostałych. Z drugiej strony skupiamy się na współrzędnych oryginalnych, jak i ich możliwych przekształceniach liniowych, włączając w to wymagania afinicznej niezmienniczości. Poza powyższymi przekształceniami nieliniowe (być może każdej współrzędnej oddzielnie) są wykorzystywane także, aby otrzymać prostsze modele i techniki dla oceny wielowymiarowej normalności. Innym ważnym problemem wielowymiarowych technik jest, by obok złożoności, były one oszczędne pod względem numerycznym. Łatwość wykonywania obszernych obliczeń – dzięki nowoczesnym komputerom nie oznacza, że każda technika jest uzasadniona ekonomicznie.

Jednym z zasadniczych celów branych pod uwagę przy opracowaniu metod badania wielowymiarowej normalności od strony numerycznej jest to, aby były one racjonalnie ekonomiczne i skuteczne.

Istnieje wiele testów wielowymiarowej normalności. Wielkość ich wynika z przydatności do badania rozmaitych odstępstw od wielowymiarowej normalności. Ponieważ takich odstępstw jest wiele, więc zasygnalizujemy ogólną ich naturę.

Dokonyjemy podziału przestrzeni wielowymiarowej na rozłączne „kostki” (wielowymiarowe przedziały klasowe zależne od aktualnych danych). Dla każdej z wyróżnionych kostek wyznaczamy empiryczne liczebności klasowe (lub częstości klasowe), a także liczebności brzegowe dla każdej zmiennej lub dla grupy zmiennych. Odstępstwo od wielowymiarowej normalności możemy dla aktualnie badanego wielowymiarowego rozkładu empirycznego (reprezentowanego przez tablicę wielodzielczą) badać na podstawie rozmieszczenia liczebności empirycznych w wielowymiarowych kostkach. Ten rodzaj analizy jest szczególnie prosty, gdy kostki są wyznaczone tak, aby zaklasyfikowanie wielowymiarowych obserwacji dla poszczególnych kostek było jednakowo prawdopodobne. Wówczas odstępstwa od wielowymiarowej normalności będzie wskazane przez: (1) nadmierne obsadzenie niektórych kostek (tzw. „szczytowość”), (2) zbyt duże liczebności wśród kostek brzegowych (tzw. „ciężkie ogony”), (3) rozmieszczenie się liczebności wśród kostek w pewnym ustalonym kierunku (tzw. „długie ramiona”). W różny sposób mogą być badane wskazane tutaj odstępstwa od wielowymiarowej normalności.

W praktyce pełna statystyczna analiza obserwowalnych wektorów losowych jest rzadko wystarczająca i prawie zawsze wymaga uzupełnienia analizą podzbiorów zmiennych, wliczając analizę każdej zmiennej. Normalność brzegowa nie implikuje łącznej normalności, a obecność wielu typów odstępstwa od nor-

malności jest odzwierciedlona w rozkładach brzegowych. Naturalnym, prostym i wstępnym krokiem oceny wielowymiarowej normalności obserwowalnych wektorów losowych jest racjonalne badanie normalności brzegowej dla obserwacji każdej zmiennej. Stosuje się wówczas testy jednowymiarowej normalności, o których wspominaliśmy wyżej. Niemniej istnieje jednak potrzeba zbudowania testów, które wyraźnie wykorzystywałyby wielowymiarową naturę danych liczbowych, aby – miejmy nadzieję – wykazać się większą czułością. Wiele metod prowadzi do tego celu.

Rozwój teorii testów wielowymiarowej normalności datuje się od ukazania pracy Wagle'a „Multivariate Beta Distribution and a Test for Multivariate Normality” w roku 1968. Przedstawiono w niej zasadę randomizacji Durбина redukującą zagadnienie weryfikacji hipotezy, iż próba wektorów obserwacji pochodzi z populacji o wielowymiarowym rozkładzie normalnym do hipotezy, iż próba jednowymiarowych obserwacji pochodzi z populacji o jednowymiarowym rozkładzie normalnym.

Kolejny etap rozwoju wielowymiarowej normalności związany jest z pracami Mardii (1970, 1974, 1980). Wprowadził on miary wielowymiarowej asymetrii i kurtozy będących uogólnionymi miarami kształtu Pearsona, na których skonstruowano wiele testów wielowymiarowej normalności.

Testy omnibus i kierunkowe wykorzystujące wspomniane miary były rozwijane m. in. w pracach Mardia i Foster (1983) oraz Bera i John (1983).

Odmienne podejście do konstrukcji testów wielowymiarowej normalności zaprezentowali Malkovich i Afifi (1973), którzy korzystając z zasady unii i przekroju Roy'a, podali miary kształtu na przypadek wielowymiarowy w oparciu o twierdzenie Crámera-Wolda. Wspomniana zasada umożliwiła uogólnić testy jednowymiarowej normalności z klasy testów typu: Shapiro-Wilka, Kołmogorowa-Smirnowa oraz Cramera-von Misesa, a także standaryzowany trzeci i czwarty moment centralny z próby na przypadek wielowymiarowy (np. Domański i Wagner 1984). Idee testu Shapiro-Wilka były rozwijane przez Roystona (1983).

Praca Healy'a (1968) wprowadzająca wielowymiarowy normalny wykres probabilistyczny spowodowała zwrot w badaniach nad testami wielowymiarowej normalności. Doprowadziło to do wykorzystania elementów geometrii wielowymiarowej, w szczególności przekształceń afinicznych oraz metod graficznych uwzględniających badanie uporządkowanych niemalejąco odległości Mahalanobisa na chi-kwadrat lub beta wykresie probabilistycznym (Small 1980; Gnanadesikan 1977). Wszelkie odchylenia od liniowości na takim wykresie wskazują na odstępstwo od wielowymiarowej normalności. Wiele pochodnych technik od metod graficznych było użytych do konstrukcji testów wielowymiarowej normalności. I tak Andrews i in. (1971, 1973) zaproponowali test najmniejszej odległości oparty na pojęciach analizy skupień oraz rzutowania na osie współrzędnych.

Jednym z kierunków badań nad łączną wielowymiarową normalnością wektora losowego było wykorzystanie do jego składowych transformacji potęgowej (Box i Cox 1964; Gnanadesikan 1977).

Obok prac poświęconych konstrukcji testów wielowymiarowej normalności, jest również wiele poświęconych badaniu mocy testów uzasadniających własności testów. Wyniki w tym zakresie nie są pełne, ta dziedzina jest nadal rozwijana (por. prace Henze i Zirklera (1990), Horswella i Looney (1992), Mecklina i Mundfroma (2004).

2. HIPOTEZY WIELOWYMIAROWEJ NORMALNOŚCI

Niech $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$ będzie układem n obserwowalnych p -wymiarowych wektorów losowych będących niezależnymi realizacjami wektorów losowych $\underline{X}$. Rozkład $\mathcal{P}_p$ wektorów losowych $\underline{X}$ jest określony dystrybuantą $G_p(\underline{x}; \underline{\vartheta}) \equiv G_p(\underline{x})$, $\underline{x} \in R^p$, gdzie $\underline{\vartheta}$ jest wektorem parametrów należących do pewnej przestrzeni. Dystrybuanta $G_p(\underline{x})$ może być nieznana tak do postaci, jak i parametrów, choć zakładamy, że dla każdego $\underline{x} \in R^p$ jest funkcją ciągłą.

Oznaczmy przez $\mathcal{N}_p = \{ N_p(\underline{\mu}, \underline{\Sigma}) : \underline{\mu} \in R^p, \underline{\Sigma} \in \varphi_p^s, \beta_{1p} = 0, \beta_{2p} = p(p+2) \}$ rodzinę p -wymiarowych nieosobliwych rozkładów normalnych (normalną przestrzeń statystyczną), gdzie β_{1p} i β_{2p} są wielowymiarowymi miarami kształtu wektorów losowych $\underline{X}$ odpowiednio o postaci:

$$\beta_{1p} = E \left\{ [(\underline{x} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{x}_* - \underline{\mu})]^3 \right\},$$

$$\beta_{2p} = E \left\{ [(\underline{x} - \underline{\mu})' \underline{\Sigma}^{-1} (\underline{x}_* - \underline{\mu})]^2 \right\}$$

wyrażających wielowymiarową asymetrię i kurtozę, gdzie $\underline{x}$ i $\underline{x}_*$ są niezależne o identycznym rozkładzie. Dystrybuantę i gęstość rozkładów z $\mathcal{N}_p$ oznaczmy $F_p(\underline{x}; \underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ i $f_p(\underline{x}; \underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, $\underline{x} \in R^p$. Jeżeli $\mathcal{N}_p$ zawiera znane $\underline{\mu}$ lub $\underline{\Sigma}$, to symbole $\mathcal{N}_p(\underline{\mu}_0)$ lub $\mathcal{N}_p(\underline{\Sigma}_0)$ oznaczają, że w $\mathcal{N}_p$ znane są odpowiednie $\underline{\mu} = \underline{\mu}_0$ lub $\underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}_0$. Wprowadzamy jeszcze następujące oznaczenia. Rodzinę rozkładów z $\beta_{1p} \neq 0$ i $\beta_{2p} = p(p+2)$ oznaczamy przez $\mathcal{A}_1$ podobnie rodzinę rozkładów

z $\beta_{1p} = 0$ i $\beta_{2p} \neq p(p+2)$ przez $\mathcal{A}_2$ i w końcu z $\beta_{1p} \neq 0$ i $\beta_{2p} \neq p(p+2)$ przez $\mathcal{A}_3$. Rodzinę rozkładów nie zawierającą rozkładów normalnych oznaczamy $\mathcal{A}$, czyli $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$.

Mając do dyspozycji zaobserwowany układ wektorów $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$ zamierzamy badać zgodność dystrybuant $G_p(\underline{x})$ i $F_p(\underline{x}; \underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, tzn. pytamy się, czy można dystrybuantę $G_p(\underline{x})$ uznać za identyczną $F_p(\underline{x}; \underline{\mu}, \underline{\Sigma})$, albo też należy do rodziny $\mathcal{N}_p$, co zapisujemy $\mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p$. Przypuszczenie takie o słuszności którego chcemy decydować na podstawie wielowymiarowej próby $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$, wyrażamy złożoną nieparametryczną hipotezę zerową

$$H_0: \mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p,$$

przeciwko złożonej hipotezie alternatywnej

$$H_1: \mathcal{P}_p \notin \mathcal{N}_p, \text{ lub } H_1: \mathcal{P}_p \in \mathcal{A}.$$

Hipoteza H_1 może być zapisana w postaci sumy $H_1 = H_{11} \cup H_{12} \cup H_{13}$, a postawione wyżej zagadnienie może być sformułowane w jednej z niżej wymienionych sytuacji:

- a) $H_0: \mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p$, $H_{11}: \mathcal{P}_p \in \mathcal{A}_1$ (rodzina rozkładów asymetrycznych z kurtozą równą wielowymiarowej kurtocie normalnej);
- b) $H_0: \mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p$, $H_{12}: \mathcal{P}_p \in \mathcal{A}_2$ (rodzina rozkładów symetrycznych z kurtozą różną od normalnej).
- c) $H_0: \mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p$, $H_{13}: \mathcal{P}_p \in \mathcal{A}_3$ (rodzina rozkładów asymetrycznych i kurtozą różną od normalnej).

Hipotezy H_0 i H_1 są złożone, przy czym H_0 jest pewną klasą hipotez prostych.

Ponieważ o parametrach $\underline{\mu}$ i $\underline{\Sigma}$ posiadamy czasem wiedzę a priori więc w miejsce H_0 stosujemy symbole HSM (simple hypothesis multivariate normality) lub HCM (composite hypothesis multivariate normality) odpowiednio dla podkreślenia prostej lub złożonej hipotezy zerowej wielowymiarowej normalności. O ile wcześniej podaliśmy sformułowanie hipotez w sensie przynależności do danej klasy rozkładów, o tyle obecnie podajemy sformułowanie hipotez w sensie równości odpowiednich dystrybuant.

Wyróżniamy następujące typy hipotez zerowych:

1. HSM: $G_p(\underline{x}) = F_p(\underline{x}; \underline{\mu}_0, \underline{\Sigma}_0)$ – dystrybuanta $G_p(\underline{x})$ jest znana co do postaci, jak i parametrów $\underline{\mu}_0, \underline{\Sigma}_0$, które są znane, albo HSM: $\mathcal{P}_p \equiv \mathcal{N}_p(\underline{\mu}_0, \underline{\Sigma}_0)$ – rozkład $\mathcal{P}_p$ jest identyczny z rozkładem $N_p(\underline{\mu}_0, \underline{\Sigma}_0)$;
2. HSM*: $G_p(\underline{x}) = F_p(\underline{x}; \underline{0}, \underline{I})$ – dystrybuanta $G_p(\underline{x})$ odpowiada dystrybucji sferycznego p -wymiarowego rozkładu normalnego, albo HSM*: $\mathcal{P}_p \equiv \mathcal{N}_p(\underline{0}, \underline{I})$;
3. HCM: $G_p(\underline{x}) = F_p(\underline{x}; \underline{\mu}, \underline{\Sigma})$ – dystrybuanta $G_p(\underline{x})$ należy do klasy p -wymiarowych rozkładów normalnych z nieznanymi $\underline{\mu}$ i $\underline{\Sigma}$ albo HCM: $\mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p$;
4. HCM₁: $G_p(\underline{x}) = F_p(\underline{x}; \underline{\mu}, \underline{\Sigma}_0)$ – dystrybuanta $G_p(\underline{x})$ należy do klasy p -wymiarowych rozkładów normalnych z nieznanym $\underline{\mu}$ i znanym $\underline{\Sigma}_0$, albo $\mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p(\underline{\Sigma}_0)$;
5. HCM₂: $G_p(\underline{x}) = F_p(\underline{x}; \underline{\mu}_0, \underline{\Sigma})$ – dystrybuanta $G_p(\underline{x})$ należy do klasy p -wymiarowych rozkładów normalnych ze znanym $\underline{\mu}_0$ i nie znaną $\underline{\Sigma}$, albo $\mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p(\underline{\mu}_0)$.

Sprawdzenie hipotezy H_0 przeprowadzamy testami normalności. Statystykę testową tego testu oznaczamy $T = T(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n)$. Hipotezę H_0 odrzucamy na zadanym poziomie istotności $\alpha \Leftrightarrow T \geq T_\alpha$ lub $T \leq T_\alpha$, gdzie $P(T \geq T_\beta | H_0) = \alpha$ (lub $P(T_\alpha | H_0) = \alpha$). Większość testów wielowymiarowej normalności ma prawostronne obszary krytyczne. Wiele jest konkretnych testów statystycznych dla sprawdzenia podanej wyżej hipotezy w wielowymiarowej normalności. Najprostsza jest konstrukcja funkcji testowych dla HSM* i HSM. Niekiedy HCM, HCM₁ i HCM₂ można sprowadzić do równoważnej hipotezy HSM. Zauważmy, że HSM odpowiada równoważnej hipotezie, że ciąg np. zmiennych losowych stanowi próbę prostą o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$.

3. KLASYFIKACJA METOD KONSTRUKCJI TESTÓW WIELOWYMIAROWEJ NORMALNOŚCI

Testy wielowymiarowej normalności ujmuje się z jednej strony wszelkie odchylenia od symetrii rozkładu, a z drugiej natomiast uwzględniają naruszenie własności charakteryzacji rozkładu normalnego. Z tego powodu można przyjmować różne punkty widzenia na klasyfikację testów wielowymiarowej normalności.

Andrews i in. (1973) wyróżnili trzy grupy testów wielowymiarowej normalności z punktu widzenia technik wykorzystujących własności rozkładu normalnego:

- A Techniki jednowymiarowe dla szacowania normalności brzegowej.
- A1 Testy ilorazu wiarygodności związane z przekształceniem dla poprawienia jednowymiarowej normalności.
- A2 Testy związane z miarami skośności i spłaszczenia.
- A3 Testy omnibus.
- A4 Procedury graficzne korzystające z normalnego i półnormalnego wykresu probabilistycznego.
- B Techniki wielowymiarowe dla szacowania łącznej normalności:
- B1 Testy ilorazu wiarygodności związane z przekształceniem dla poprawienia łącznej normalności.
- B2 Testy zgodności, testy oparte na lokalnych gęstościach oraz testy najbliższej odległości.
- B3 Procedury graficzne korzystające z chi-kwadrat i beta wykresów probabilistycznych.
- C Techniki jednowymiarowe dla przeglądu wielowymiarowych danych:
- C1 Testy wykorzystujące własności charakteryzacji wielowymiarowego rozkładu normalnego.
- C2 Testy oparte na ukierunkowanej normalności.
- C3 Testy badające liniowość regresji każdej zmiennej od pozostałych zmiennych.

Mardia (1980) proponuje klasyfikację testów wielowymiarowej normalności także na trzy grupy, lecz bierze pod uwagę kryterium konstrukcji testów:

M1. Testy oparte na jednowymiarowych uogólnieniach obejmujące:

- a) skośność i spłaszczenie,
- b) zasadę unii i przekroju Roy'a,
- c) testy zgodności,
- d) transformację zmiennych.

M2. Testy oparte na procedurach ściśle wielowymiarowych obejmujące:

- a) ukierunkowaną normalność,
- b) promienie i kąty Mahalanobisa oraz techniki graficzne,

- c) skupienie między punktami,
- d) maksymalną krzywiznę regresji kwadratowej.

M3. Testy oparte na redukcji do jednowymiarowej normalności wykorzystujące zasadę randomizacji.

Obu podanych klasyfikacji nie można uznać za wyczerpujące, gdyż nie uwzględniają wielu szczególnych konstrukcji testów wielowymiarowej normalności. Teoria w tym kierunku rozwinęła się bardzo szeroko w latach 1978–2005. Przyjmujemy dalej klasyfikację testów wielowymiarowej normalności związaną bezpośrednio ze stosowanymi technikami konstrukcji statystyk testowych. Proponujemy następującą klasyfikację testów wielowymiarowej normalności opartą na:

- P1. Uogólnieniu testu χ^2 – Pearsona,
- P2. Zasadzie randomizacji,
- P3. Miarach kształtu rozkładu,
- P4. Zasadzie unii i przekroju Roy'a,
- P5. Pojęciach geometrii wielowymiarowej,
- P6. Empirycznym procesie stacjonarnym,
- P7. Przekształceniu zmiennych,
- P8. Technikach graficznych.

Podajemy ogólną charakterystykę testów poszczególnych grup:

Grupa A. Korzysta się tutaj ze znanych testów jednowymiarowej normalności. Klasa możliwych testów jest bardzo duża. Wysoka moc wielu testów pozwala ściśle określić warunki w jakich okolicznościach najrozsądniej jest stosować taki czy inny test normalności. To odnosi się do testów (A1), (A2) i (A3). Przeprowadzenie formalnych badań nad jednowymiarową normalnością na wykresach probabilistycznych nie stwarza większych trudności, gdyż wyznaczenie niezbędnych kwantyli rozkładu $N(0,1)$ w zerze można przeprowadzić znanymi przybliżeniami.

Grupa B. Grupa ta zawiera tylko nieliczne testy dla sprawdzenia hipotezy HCM znane w pierwszych latach siedemdziesiątych. Metody przekształceń potęgowych zmiennych wprowadzone przez Box i Cox z powodzeniem przeniesiono na przypadek wielowymiarowy.

Nie jest tutaj możliwe zbadanie własności testów od strony mocy. Jeśli chodzi o grupę B2, to dobrze poznane zostały testy zgodności, korzystające ze znanych własności form kwadratowych wektorów losowych przy hipotezie HCM. Tak jak znane odpowiedniki w przypadku jednowymiarowym, tak i one charakteryzują się małą mocą. Pozwalają jednak badać rozmaite typy odstępstwa od wielowymiarowej normalności (np. uogólniony test χ^2).

Grupa C. Tutaj testy buduje się na podstawie własności przestrzeni afinicznych, co odnosi się szczególnie do testów (C2) i (C3). Rzutowanie w takich przestrzeniach na jedną z podprzestrzeni pozwala określić stopień odstępstwa rozkładów brzegowych od rozkładu normalnego.

Grupa M1. Znane techniki jednowymiarowe są modyfikowane i przeniesione na przypadek wielowymiarowy. Użyteczność testów jest bardzo duża. Pozwalają określić odstępstwo od stałych (O i $p(p+2)$), a także rozbieżność między dystrybucją rozkładu empirycznego i normalnego, wykorzystując własności normalnych form kwadratowych. Interesujące staje się tutaj zastosowanie testów typu Shapiro-Wilka poprzez rozważanie kombinacji liniowych obserwowalnych wektorów losowych.

Grupa M2. Odległości Mahalanobisa uwzględniające strukturę wzajemnego skorelowania zmiennych, pozwalają rozważyć konfiguracje w przestrzeni R^p . Badanie skupień tych punktów oraz ich rzutów na osie współrzędnych umożliwia rozważać rozkłady brzegowe. Kierunek odpowiedniego rzutowania pozwala uchwycić ewentualne występowanie obserwacji odstających, mogących wpływać na symetrię rozkładu.

W poszczególnych grupach P1–P8 nie dokonujemy dalszego podziału. Także nie bierzemy pod uwagę faktu, czy dany test jest bezpośrednim uogólnieniem z przypadku jednowymiarowego, czy też jest bezpośrednio użyteczny do badania łącznej normalności.

Szczegółowo zajmiemy się własnościami testów wielowymiarowej normalności opartych na miarach kształtu P_i .

4. WIELOWYMIAROWE MIARY KSZTAŁTU

Mardia (1970) uogólnił miary kształtu tzn. współczynników skośności i spłaszczenia dla rozkładów wielowymiarowych.

Statystyka z próby dla skośności wielowymiarowej określona jest następującym wzorem:

$$b_{1,p} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[(y_i - \bar{y})' s^{-1} (y_j - \bar{y}) \right]^3 \quad (1)$$

Analogicznie, statystyka z próby dla spłaszczenia przyjmuje postać:

$$b_{2,p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[(y_i - \bar{y})' s^{-1} (y_i - \bar{y}) \right]^2 \quad (2)$$

Zauważmy, że zarówno skośność jak i spłaszczenie Mardii są funkcjami odległości kwadratowych Mahalanobisa. Fakt ten powoduje, że miary te, a szczególnie miara spłaszczenia wielowymiarowego są przydatne do wykrywania wielowymiarowych wartości odstających. Wartości współczynnika spłaszczenia wielowymiarowego, w porównaniu do wartości oczekiwanej rozkładu normalnego wskazują na to, że jedna lub więcej obserwacji charakteryzują się dużą odległością Mahalanobisa i dlatego są one ułożone daleko od punktu przecięcia bryły geometrycznej (ewentualnie przekątnych trójkąta) zbioru obserwacji.

Charakterystyki rozkładu zmiennych b_{1p} i b_{2p} przedstawiają się następująco (Mardia 1970, 1974, Mardia i Foster 1983):

$$E(b_{1p}) = g[(n+1)(p+1) - 6]/(n+1)(n+3), \quad (3)$$

$$D^2(b_{1p}) = 72f/n^2, \quad (4)$$

gdzie $f = p(p+1)(p+2)/6$ i $g = p(p+2)$.

$$E(b_{2p}) = g(n-1)(n+1), \quad (5)$$

$$D^2(b_{2p}) = \frac{8g(n-3)(n-p-1)(n-p+1)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}, \quad (6)$$

$$E(b_{2p}^3) = g^3 - 12g^2(p+2)(p-1)/n + 2g(9p^4 + 12p^3 - 192p^2 - 328p + 256p)/n^2, \quad (7)$$

$$\mu_3(b_{2p}) = 64g(p+8)/n^2, \quad (8)$$

$$\text{cov}(b_{1p}, b_{2p}) = 12ph/n^2, \quad (9)$$

gdzie $h = 8p^2 - 13p + 23$

$$\varphi(b_{1p}, b_{2p}) = 3h8[6n(p+1)(p+2)^2]^{1/2} \quad (10)$$

$$E(\sqrt{b_{1p}}) = \sqrt{12}v(f)/n, \quad (11)$$

gdzie $v(f) = \Gamma((f+1)/2)/\Gamma(f/2)$

$$D^2(\sqrt{b_{1p}}) = [gf - 12v^2(f)]/n, \quad (12)$$

$$\text{Cov}(\sqrt{b_{1p}}, b_{2p}) = 6ph/\sqrt{n^3 f}, \quad (13)$$

$$\mu_3(\sqrt{b_{1p}}) = \sqrt{2}v(f)[1 - 2f + 4v^2(f)], \quad (14)$$

$$\beta_1(\sqrt{b_{1p}}) = \sqrt{2}v(f)[1 - 2f + 4v^2(f)]/f - 2v^2(f)]^{3/2}, \quad (15)$$

$$\varphi(\sqrt{b_{1p}}, b_{2p}) = \frac{\sqrt{6}ph/\sqrt{n^3 f}}{[8g(6f - 12v^2(f))/n^2]^{1/2}}, \quad (16)$$

ponieważ $\left\{ \left(\sqrt{\chi_f^2} \right)^k \right\} = \frac{2^{k/2} \Gamma((f+k)/2)}{\Gamma(f/2)}, k = 1, 2, \dots$

Wzory (3)–(16) na momenty statystyk b_{1p} i b_{2p} mają zastosowanie dla dużych n , a ich przybliżenia zostały podane z dokładnością rzędu $O(n^{-2})$.

Rozkład normalny p -wymiarowy ma parametry kształtu rozkładu równe $\beta_{1p} = 0$ i $\beta_{2p} = p(p+2)$. Badając p -wymiarowy rozkład empiryczny za pomocą niezależnych obserwowalnych wektorów losowych $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$, pytamy się czy pochodzą one z wielowymiarowej populacji z $\beta_{1p} = 0$ lub $\beta_{2p} = p(p+2)$, albo jednocześnie $\beta_{1p} = 0$ i $\beta_{2p} = p(p+2)$.

Prowadzi to do określenia hipotez zerowych opartych na rodzinach rozkładów $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ lub $\mathcal{A}_3$. Wiele testów statystycznych dla sprawdzenia hipotezy $H_0: \mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p$ przeciwko hipotezom alternatywnym określonym przez klasę rozkładów $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ lub $\mathcal{A}_3$ opartych jest na statystykach b_{1p} i b_{2p} .

Wyróżniać będziemy testy kierunkowe i omnibus.

Testy statystyczne dla wskazanej klasy rozkładów alternatywnych nazywamy testami kierunkowymi.

Testy statystyczne najmocniejsze w klasie możliwych rozkładów alternatywnych nazywamy testami omnibus.

5. TESTY OPARTE NA MIARACH KSZTAŁTU

Przedstawiamy testy wielowymiarowej normalności ograniczając się jedynie do podania postaci odpowiednich statystyk testowych oraz ich rozkładów.

Testy dla hipotezy $H_0: \mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p$, przeciwko $H_1: \mathcal{P}_p \in \mathcal{A}_1$:

Test Mardia (1970),

$$M_1 = nb_{1p} / g \sim \chi_f^2 \quad (17)$$

Test Bera i Johna (1983),

$$C_1 = n \sum_{i=1}^p T_i^2 / 6 \sim \chi_p^2 \quad (18)$$

gdzie

$$T_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij}^3 / n, \quad i = 1, \dots, p$$

$$Y_j = (Y_{1j}, \dots, Y_{pj})' = S^{-1/2}(\underline{X}_j - \bar{\underline{X}}),$$

Test Mardia i Fostera (1983),

$$U(b_{1p}) = (b_{1p} - E(b_{1p})) / D(b_{1p}) = [b_{1p} - 6f/n] / [6(2f/n^2)^{1/2}] \sim N(0,1) \quad (19)$$

Testy dla hipotezy $H_0: \mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p$, przeciwko $H_1: \mathcal{P}_p \in \mathcal{A}_1$:

Test Mardia (1970)

$$M_2 = (b_{2p} - g)^2 / (8g/n) \sim \chi_1^2, \text{ przy czym } g = p(p+2) \quad (20)$$

Test Mardia i Fostera (1983)

$$U(b_{2p}) = [b_{2p} - g(n-1)/(n+1)] / (8g/n)^{1/2} \sim N(0,1) \quad (21)$$

Testy dla hipotezy $H_0: \mathcal{P}_p \in \mathcal{N}_p$, przeciwko $H_1: \mathcal{P}_p \in \mathcal{A}_1$:

Test Jarque i McKenzie (1982),

$$M_3 = M_1 + M_2 \quad (22)$$

Test Bera i Johna (1983),

$$C_4 = C_1 + C_2 \sim \chi_p^2, \text{ przy czym } (p+3)/2 \quad (23)$$

Test Mardia i Fostera (1983),

$$S_N^2 = U^2(b_{1p}) + U^2(b_{2p}) \sim \chi_2^2 \quad (24)$$

6. MOC TESTÓW OPARTYCH NA MIARACH KSZTAŁTU

Wielowymiarowe współczynniki skośności i spłaszczenia znajdują zastosowania zarówno jako statystyki charakteryzujące wielowymiarową próbę oraz jako podstawa dla testów normalności. Z tego też powodu przeprowadzone zostały badania testów wielowymiarowych opartych na miarach skośności i spłaszczenia.

W przeprowadzonym eksperymencie symulacyjnym metodą Monte Carlo zbadano moc ośmiu następnych testów: M_1 , C_1 , $U(b_{1p})$, M_2 , $U(b_{2p})$, M_3 , C_4 , S_N^2 .

W eksperymencie uwzględniono 50000 powtórzeń zarówno wielowymiarowego normalnego jak i rozkładów alternatywnych gamma o parametrach $\beta=10$, $\theta=2$ oraz $\beta=2$ i $\theta=2$ dla $n=20, 30, 40, 50, 100$; $p=2, 3, 4, 5$.

Otrzymane wyniki prezentowane są w tablicach 1., 2 i 3.

Na podstawie przeprowadzonych badań można sformułować następujące wnioski.

1. Na ogół testy przy założeniu prawdziwości hipotezy, że wielowymiarowy rozkład jest normalny, odbiegają od przyjętego poziomu istotności. Wskazany jest w tych przypadkach oprzeć się na kwantylach rozkładów statystycznych uzyskanych metodami Monte Carlo. (por. tabl. 1)

2. Testy Mardii (M_1), Mardii i Fostera ($U(b_{1p})$ i (S_N^2)) oraz Jarque i McKenzie (M_3) są najmocniejsze (por. tabl. 3). Testy te sprawdziły się lepiej również dla rozkładów symetrycznych (por. tabl. 2).

3. Moc testów wielowymiarowej normalności opartych na miarach kształtu dla $n \leq 30$ maleje wraz ze wzrostem p .

Tablica 1

Empiryczny poziom istotności wybranych testów dla wielowymiarowego rozkładu normalnego
i $\alpha = 0,1; 0,01$, $p = 2, 3, 4, 5$, $n = 20, 30, 40, 50, 100$.

Statystyki testu		Liczność próby n									
		20		30		40		50		100	
		$\alpha=0,1$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,01$	$\alpha=0,1$	$\alpha=0,01$
		p=2									
M_1	(17)	.0310	.0021	.0519	.0059	.0608	.0087	.0698	.0092	.0815	.0113
C_1	(18)	.0405	.0034	.0526	.0053	.0655	.0081	.0735	.0086	.0820	.0115
$U(b_{1p})$	(19)	.0208	.0058	.0369	.0128	.0439	.0165	.0516	.0202	.0593	.0225
M_2	(20)	.0368	.0001	.0494	.0019	.0567	.0029	.0632	.0043	.0803	.0072
$U(b_{2p})$	(21)	.0075	.0005	.0178	.0034	.0292	.0052	.0371	.0068	.0597	.0086
M_3	(22)	.0354	.0047	.0608	.0104	.0739	.0152	.0875	.0187	.1144	.0228
C_4	(23)	.0228	.0066	.0396	.0123	.0487	.0155	.0562	.0194	.0673	.0222
S_N^2	(24)	.0160	.0118	.0313	.0119	.0378	.0166	.0462	.0196	.0599	.0232
p = 3											
M_1		.0189	.0013	.0399	.0047	.0533	.0079	.0630	.0089	.0821	.0116
C_1		.0314	.0037	.0514	.0060	.0611	.0081	.0668	.0071	.0817	.1111
$U(b_{1p})$		.0672	.0026	.0666	.0078	.0694	.0125	.0671	.0135	.0769	.0170
M_2		.1665	.0011	.1392	.0004	.1245	.0016	.1176	.0013	.1053	.0056
$U(b_{2p})$		.0045	.0001	.0196	.0013	.0338	.0026	.0422	.0029	.0686	.0061
M_3		.0197	.0019	.0440	.0067	.0604	.0109	.0729	.0125	.1000	.0180
C_4		.0219	.0067	.0416	.0156	.0510	.0183	.0592	.0200	.0758	.0236
S_N^2		.0354	.0020	.0476	.0074	.0549	.0114	.0566	.0130	.0739	.0180
p = 4											
M_1		.0090	.0007	.0307	.0038	.0415	.0055	.0528	.0061	.0788	.0115
C_1		.0261	.0030	.0498	.0063	.0550	.0073	.0634	.0083	.0824	.0104
$U(b_{1p})$		.1649	.0009	.1289	.0052	.1129	.0078	.1064	.0083	.0962	.0148
M_2		.0694	.0007	.2626	.0019	.2140	.0031	.1854	.0036	.1377	.0058
$U(b_{2p})$		.0084	.0001	.0275	.0005	.0438	.0012	.0533	.0013	.0750	.0054
M_3		.0100	.0007	.0324	.0043	.0456	.0070	.0604	.0074	.0911	.0155
C_4		.0199	.0055	.0437	.0162	.0514	.0185	.0660	.0200	.0835	.0266
S_N^2		.1107	.0012	.0983	.0048	.0884	.0082	.0918	.0082	.0885	.0166
p = 5											
M_1		.0035	.0001	.0194	.0023	.0308	.0044	.0432	.0060	.0710	.0110
C_1		.0255	.0018	.0468	.0057	.0546	.0063	.0601	.0079	.0827	.0095
$U(b_{1p})$		.2961	.0120	.1987	.0086	.1587	.0080	.1391	.0082	.1129	.0137
M_2		.5958	.0166	.4081	.0124	.3177	.0117	.2677	.0124	.1807	.0113
$U(b_{2p})$		.0257	.0008	.0464	.0002	.0580	.0005	.0668	.0012	.0850	.0038
M_3		.0036	.0011	.0199	.0026	.0327	.0049	.0462	.0068	.0810	.0141
C_4		.0171	.0040	.0393	.0152	.0496	.0173	.0580	.0203	.0775	.0253
S_N^2		.2212	.0110	.1625	.0098	.1348	.0100	.1225	.0101	.1054	.0164

Źródło: Obliczenia własne.

Tablica 2

Empiryczna moc testów normalności przy alternatywnym rozkładzie gamma o parametrach
 $\beta = 10$, $\theta = 2$ dla $p=2,3,4,5$ i $\alpha = 0,1$ w (%)

Statystyki testu	Liczność próby n				
	20	30	40	50	100
p = 2					
M_1	111	222	342	439	817
C_1	66	120	163	203	404
$U(b_{1p})$	88	185	286	382	772
M_2	48	81	111	143	257
$U(b_{2p})$	31	75	112	148	281
M_3	119	238	371	497	858
C_4	58	113	152	197	386
S_N^2	71	400	238	325	717
p = 3					
M_1	72	184	317	431	840
C_1	51	90	137	173	346
$U(b_{1p})$	81	160	264	356	795
M_2	138	115	124	137	243
$U(b_{2p})$	14	55	100	135	279
M_3	75	193	336	458	869
C_4	46	99	148	190	364
S_N^2	55	128	221	307	735
p = 4					
M_1	38	153	280	404	848
C_1	46	104	154	204	433
$U(b_{1p})$	120	148	239	343	801
M_2	290	184	146	149	223
$U(b_{2p})$	25	48	86	120	266
M_3	31	100	294	423	867
C_4	38	102	160	204	405
S_N^2	82	120	193	284	735
p = 5					
M_1	17	113	234	366	837
C_1	47	117	188	252	544
$U(b_{1p})$	207	143	205	312	782
M_2	494	271	187	167	202
$U(b_{2p})$	21	48	75	113	255
M_3	17	117	243	382	853
C_4	32	103	167	222	449
S_N^2	154	118	166	254	709

Źródło: Obliczenia własne.

Tablica 3

Empiryczna moc testów normalności przy alternatywnym wielowymiarowym rozkładzie gamma o parametrach $\beta = 2$, $\theta = 2$ dla $p = 2, 3, 4, 5$ i $\alpha = 0,1$ (w %)

Statystyki testu	Liczność próby n				
	20	30	40	50	100
p = 2					
M_1	443	754	914	969	1000
C_1	199	373	515	638	930
$U(b_{1p})$	384	707	889	956	1000
M_2	122	276	410	514	825
$U(b_{2p})$	155	325	463	563	847
M_3	460	786	937	983	1000
C_4	209	395	549	666	940
S_N^2	324	639	842	936	1000
p = 3					
M_1	390	753	925	983	1000
C_1	160	312	461	585	914
$U(b_{1p})$	331	701	899	974	1000
M_2	102	242	394	530	877
$U(b_{2p})$	113	309	473	602	902
M_3	400	774	940	989	1000
C_4	169	363	533	661	943
S_N^2	273	627	852	956	1000
p = 4					
M_1	297	730	934	987	1000
C_1	164	367	549	700	972
$U(b_{1p})$	246	666	904	981	1000
M_2	131	208	367	525	902
$U(b_{2p})$	64	280	467	626	932
M_3	306	744	944	990	1000
C_4	155	373	561	709	968
S_N^2	192	586	856	945	1000
p = 5					
M_1	190	688	919	985	1000
C_1	189	449	666	810	995
$U(b_{1p})$	180	619	886	975	1000
M_2	210	168	318	494	909
$U(b_{2p})$	30	237	446	612	943
M_3	205	703	930	989	1000
C_4	149	405	832	753	987
S_N^2	135	533	821	957	1000

Źródło: Obliczenia własne.

LITERATURA

- Andrews D. F., Gnanadesikan R., Warner J. L. (1971), *A note on the Selection of Data Transformations*, *Biometrika* 58, 249–254.
- Andrews D. F., Gnanadesikan R., Warner J.L. (1973), *Robust Estimation for Multiple Linear Regression Models*, *Bulletin of the International Statistical Institute*, 39th Session ISI, Wiedeń, 105–111.
- Bera A, John S. (1983), *Tests for multivariate normality with Pearson alternatives*, *Comm Statist.-Theory Methods*, 12, 103–117.
- Box C.E.P., Cox D.R. (1964), *An Analysis of Transformation*, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser B*, 26, 211–252.
- Domański Cz., Wagner W. (1984), *Testy wielowymiarowej normalności*, *Przegląd Statystyczny*, vol. 31, 3/4, pp. 259–270.
- Fattorini L. (1982), *Assessing Multivariate Normality on Beta Plots*, *Statistica* 42, 251–257.
- Gnanadesikan R. (1977), *Methods for tatistical Data Analysis for Multivariate Observations*, J. Wiley and Sons, New York.
- Healy M. J. R. (1968), *Multivariate normal plotting*, *Appl. Statist.*, 17, 157–161.
- Henze N., Zirkler, B. (1990), *A Class of Invariant Consistent Tests for Multivariate Normality*, *Comm. Statist. – Theory Methods*, 19, pp. 3595–3618.
- Horswell R. L., Looney S. W. (1992), *Diagnostic Limitations of Skewness Coefficients in Assessing Departures from Univariate and Multivariate Normality*, *Comm. Statist. Comp. Simulation*, 22, pp. 437–439.
- Jarque C.M., McKenzie C.R. (1995), *Testing for multivariate normality in simultaneous equations models*. *Math. Comput. Simulation*, 39, 323–328.
- Kozioł J. A. (1986), *Assessing Multivariate Normality: a Compendium*, *Comm. Statist. – Theory Methods*, 15, pp. 2763–2783.
- Malkovich J. F. & Afifi A. A. (1973), *On Tests for Multivariate Normality*, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 68, pp. 176–179.
- Mardia K. V. (1970), *Measures of multivariate skewness and kurtosis with applications*. *Biometrika*, 57, 519–530.
- Mardia K.V. (1974), *Applications of some measures of multivariate skewness and kurtosis for testing normality and robustness studies*. *Sankhya*, 36, 115–128.
- Mardia K. V. (1980), *Tests of Univariate and Multivariate Normality*, *Handbook of Statistics*, 1, Ed. P. R. Krishnaiah, Amstersam: Northh Holland, pp. 297–320.
- Mardia K.V., Foster K. (1983), *Omnibus tests of multinormality based on skewness and kurtosis*. *Commun.Statist.*, 12, 207–221.
- Mecklin C. J, Mundfrom D. J.(2004), *An Appraisal and Bibliography of Tests for Multivariate Normality*, *International Statistical Review*, 72, pp.123–138.
- Royston J. P. (1983), *Some Techniques for Assessing Multivariate Normality Based on the Shapiro-Wilk*, *W. Appl. Statist.*, 32, pp. 121–133.
- Shapiro S. S., Wilk M. B., Chen H. J., (1968), *A Comparative Study of Various Tests for Normality*, *Journal of the American Statistical Association* 63, 1343–1372.
- Snedecor, G. W., Cochran W. G. (1989), *Statistical Methods*, 8th ed. Ames, IA: Iowa State Uniwersity Press.

- Small N.J.H. (1980), *Marginal skewness and kurtosis in testing multivariate normality*. Appl Statist., 29, 85–87.
- Wagle B. (1968), *The multivariate beta distribution and a test for multivariate normality*. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 30, 511–515.
- Wagner W. (1982), *Testy zgodności z rozkładem normalnym dla próby prostej*, Listy Biometryczne 17, 393–401.
- Wagner W. (1990), *Test normalności wielowymiarowej Shapiro-Wilka i jego zastosowania w doświadczałnictwie rolniczym*, Rozprawy Naukowe AR w Poznaniu 197.
- Ward P. J. (1988), *Goodness-of-Fit Tests for Multivariate Normality*, Ph.D. Thesis, University of Alabama.

Czesław Domański

PROPERTIES OF MULTIVARIATE NORMALITY TESTS BASED ON MEASURES OF SHAPE

The assumption of multivariate normality is the basis of the standard methodology of multivariate mathematical statistics. The commonness of the use of the multivariate normal distribution is mainly implied by properties of this distribution in comparison with other multivariate distributions.

Investigating the influence of the departures from normality on the used methods of constructing confidence intervals and diverse testing procedures is neither easy nor successfully implemented. Statistical methods to analyze multivariate numerical data robust to departures from normality are still at their early stage of development. It is of great use to have procedures for testing reasonable assumptions of multivariate normality for a given set of observed random vectors, especially for the ones from laboratory testing designs or time series.

There are many tests of multivariate normality. Their number follows from their usefulness to investigate different departures from multivariate normality.

In the article the results concerning the power of tests based on the measures of shape, derived from both analytical and Monte Carlo investigations, are presented.

The multivariate coefficients of the measures of shape are also applied as statistics characterizing multivariate sample. That is why the research of the tests of multivariate normality based on the measures of skewness and kurtosis was carried out.