

U N I W E R S Y T E T Ł Ó D Z K I
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

KATEDRA FUNKCJI ANALITYCZNYCH I RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH
KATEDRA GEOMETRII ALGEBRAICZNEJ I INFORMATYKI
TEORETYCZNEJ

MATERIAŁY
NA XXXVII KONFERENCJĘ I WARSZTATY
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ



WYDAWNICTWO
UNIwersytetu
ŁÓDZKIEGO

U N I W E R S Y T E T Ł Ó D Z K I
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

KATEDRA FUNKCJI ANALITYCZNYCH I RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH
KATEDRA GEOMETRII ALGEBRAICZNEJ I INFORMATYKI
TEORETYCZNEJ

MATERIAŁY
NA XXXVII KONFERENCJĘ I WARSZTATY
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ



WYDAWNICTWO
UNIwersytetu
ŁÓDZKIEGO
ŁÓDŹ 2016

Stanisław Spodzieja, Grzegorz Skalski – Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki
Katedra Funkcji Analitycznych i Równań Różniczkowych, 90-238 Łódź, ul. Banacha 22

Tadeusz Krasieński – Uniwersytet Łódzki, Wydział Matematyki i Informatyki
Katedra Geometrii Algebraicznej i Informatyki Teoretycznej, 90-238 Łódź, ul. Banacha 22

ZESPÓŁ REDAKCYJNY

*Jacek Chądzyński, Zbigniew Jelonek, Tadeusz Krasieński, Wojciech Kucharz, Krzysztof Kurdyka
Andrzej Nowicki, Adam Parusiński, Arkadiusz Płoski, Kamil Rusek, Stanisław Spodzieja
Piotr Tworzewski, Tadeusz Winiarski, Henryk Żołądek*

REDAKCJA TECHNICZNA I SKŁAD KOMPUTEROWY

Stanisław Spodzieja, Grzegorz Skalski

PROJEKT OKŁADKI

Joanna Skopińska

Wydrukowano z gotowych materiałów dostarczonych do Wydawnictwa UŁ
przez Katedrę Funkcji Analitycznych i Równań Różniczkowych

Publikacja dofinansowana grantu
nr 504/110359, B1311600000510000, MPK 21625

© Copyright by Authors, Łódź 2016
© Copyright by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2016

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.07250.15.0.I

Ark. druk. 3,0

ISBN 978-83-7969-973-5

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63

PRZEDMOWA

Obecna konferencja jest organizowana przez Katedrę Funkcji Analitycznych i Równań Różniczkowych i Katedrę Geometrii Analitycznej i Informatyki Teoretycznej Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego. Kierownikiem konferencji jest dr hab. Stanisław Spodzieja, sekretarzami zaś: dr Szymon Brzostowski, dr Maria Frontczak, dr Grzegorz Oleksik, dr Beata Osińska-Ulrych, dr Grzegorz Skalski i dr Justyna Walewska. Kierownikiem naukowym konferencji jest prof. dr hab. Tadeusz Krasieński.

W tomie zamieszczono materiały na XXXVII Konferencję (Łódź, 11–15 stycznia 2016) oraz spis wykładów wygłoszonych na XXXVI Konferencji. Materiały i spisy uczestników wcześniejszych konferencji można znaleźć na stronie internetowej konferencji : <http://konfrogi.math.uni.lodz.pl>

Materiały do druku pod względem edytorskim przygotowali dr hab. Stanisław Spodzieja i dr Grzegorz Skalski.

Stanisław Spodzieja, Grzegorz Skalski

Łódź, w grudniu 2015 r.

ZASADY PRZYJMOWANIA PRAC DO OPUBLIKOWANIA W MATERIAŁACH KONFERENCJI

Prace do publikacji w materiałach konferencji przedstawiają członkowie Zespołu Redakcyjnego.

Autorzy winni dostarczyć na dyskietkach prace przepisane w $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - TEX -u lub $\text{L}\text{a}\text{T}\text{E}\text{X}$ -u. Prace w języku polskim winny zawierać tytuł i streszczenie w języku angielskim, natomiast prace w języku angielskim – tytuł i streszczenie w języku polskim. Rysunki zamieszczane w tekście powinny być zapisane w formacie .jpg lub .pdf.

SPIS TREŚCI

Przedmowa	3
Zasady przyjmowania prac do opublikowania w materiałach Konferencji.....	4
Spis wykładów na XXXVI Konferencji	6
Lista uczestników XXXVI Konferencji	7
S. BRZOSTOWSKI, T. KRASIŃSKI, Isolated homogeneous and semi-homogeneous hypersurface singularities	9
A. LENARCIK, O klasach ekwisingularności osobliwości krzywych płaskich wyznaczonych przez jacobianowy wielokąt Newtona	23
A. PŁOSKI, O liczbie Milnora osobliwości krzywych algebraicznych w charakterystyce skończonej	29
M. SZUREK, Geometria kwadryki - od XIX do XXI wieku	35

SPIS WYKŁADÓW NA XXXVI KONFERENCJI
(Łódź, 5–9 stycznia 2015)

- S. BRZOSTOWSKI, Wykładnik Łojasiewicza w pierścieniach przemiennych.
- Z. JELONEK, Odwzorowania holomorficzne i wielomianowe właściwe.
- P. JĘDRZEJEWICZ, Odpowiedniki warunków jakobianowych dla podpierzścieni.
- M. KLEPCZAREK, O punktach bifurkacyjnych funkcji na powierzchniach.
- T. KRASIŃSKI, Diagramy Enriquesa.
- W. KUCHARZ, Kryteria równoważności szeregów potęgowych i wielomianów.
- K. KURDYKA, Charakteryzacja ciągów Nuija.
- A. LENARCIK, Gałęzie, miotły, jakobianowy wielokąt Newtona i ekwisingularność.
- P. MORMUL, Problem gładkości geodezyjnych w geometrii sub-riemannowskiej.
- G. OLESIK, O wykładniku Łojasiewicza w nieskończoności wielomianów quasi-jednorodnych.
- A. PŁOSKI, Twierdzenie Abhyankara-Moha ma czterdzieści lat.
- T. RODAK, Redukcja rodziny ideałów.
- A. RÓŻYCKI, Efektywna formuła na lokalny wykładnik Łojasiewicza.
- K. RUSEK, Algebry polaryzacyjne.
- S. SPODZIEJA, Aproksymacje sumami kwadratów.
- J. STRELCYN, O równaniach Lie-Poissona.

LISTA UCZESTNIKÓW XXXVI KONFERENCJI

(Łódź, 5–9 stycznia 2015)

1. Dr Marcin Bilski (Uniwersytet Jagielloński)
2. Dr Szymon Brzostowski (Uniwersytet Łódzki)
3. Prof. dr hab. Jacek Chądzyński (Uniwersytet Łódzki)
4. Dr Maria Frontczak (Uniwersytet Łódzki)
5. Mgr Aleksandra Gala-Jaskórzyska (Uniwersytet Łódzki)
6. Dr hab. Janusz Gwoździewicz (Kraków - Uniwersytet Pedagogiczny)
7. Prof. dr hab. Zbigniew Jelonek (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk)
8. Dr Piotr Jędrzejewicz (Uniwersytet Mikołaja Kopernika)
9. Dr Ludwika Kaczmarek (Uniwersytet Łódzki)
10. Dr hab. Marek Karaś (Uniwersytet Jagielloński)
11. Mgr Michał Klepczarek (Uniwersytet Łódzki)
12. Prof. dr hab. Tadeusz Krasiński (Uniwersytet Łódzki)
13. Prof. dr hab. Wojciech Kucharz (Uniwersytet Jagielloński)
14. Prof. dr hab. Krzysztof Kurdyka (Université de Savoie)
15. Mgr Katarzyna Kuta (Uniwersytet Łódzki)
16. Dr Andrzej Lenarcik (Politechnika Świętokrzyska)
17. Dr Maria Michalska (Uniwersytet Łódzki)
18. Mgr Piotr Migus (Uniwersytet Łódzki)
19. Prof. dr hab. Piotr Mormul (Uniwersytet Warszawski)
20. Mgr Agnieszka Najberg (Uniwersytet Łódzki)
21. Dr Grzegorz Oleksik (Uniwersytet Łódzki)
22. Dr Beata Osińska-Ulrych (Uniwersytet Łódzki)
23. Prof. dr hab. Arkadiusz Płoski (Politechnika Świętokrzyska)
24. Dr Tomasz Rodak (Uniwersytet Łódzki)
25. Dr Adam Różycki (Uniwersytet Łódzki)
26. Prof. dr hab. Kamil Rusek (Kraków - Uniwersytet Pedagogiczny)
27. Dr Przemysław Skibiński (Uniwersytet Łódzki)
28. Prof. dr hab. Stanisław Spodzieja (Uniwersytet Łódzki)
29. Mgr Izabela Stępnia (Uniwersytet Łódzki)
30. Prof. dr hab. Jan Strelcyn (Université Paris 13)
31. Mgr Anna Szlachcińska (Uniwersytet Łódzki)
32. Dr Justyna Walewska (Uniwersytet Łódzki)

ISOLATED HOMOGENEOUS
AND SEMI-HOMOGENEOUS
HYPERSURFACE SINGULARITIES

Szymon Brzostowski and Tadeusz Krasiński¹ (Łódź)

Abstract

We show how Zuo and Yau's characterizations of homogeneous and semi-homogeneous hypersurface singularities easily follow from the standard theorems of multidimensional complex analysis.

1 Introduction

Homogeneous and weighted homogeneous (isolated) singularities play an important role in singularity theory (see [Bri66], [Pha65]). Accordingly, the question of finding possible characterizations of various „kinds” of these singularities is both an important and interesting problem from the point of view of singularity theory. An interesting characterization of weighted homogeneous singularities was given by Saito in 1971 (see Section 3). Characterizations of homogeneous and semi-homogeneous singularities in terms of some invariants were given in a series

¹This research was partially supported by OPUS Grant No 2012/07/B/ST1/03293 (Poland).

of papers by Xu, Yau, Lin and Zuo, the first of which appeared already in 1993. The final general result was proved by Yau and Zuo in 2015 [YZ15] (details are in Section 3). Another proof of their result was recently presented by Abderrahmane [Abd15]. The aim of this paper is to indicate that these characterizations are immediate corollaries from a well-known theorem of multidimensional complex analysis (more specifically from multiplicity theory of mappings) given by Zariski, Tsikh and Yuzhakov. Section 2 is devoted to clarification of the notion of weighted homogeneous polynomials (known also as quasihomogeneous) as there are various definitions of this concept. In Section 3 we describe the history of known characterizations of homogeneous and semi-homogeneous isolated singularities. In Section 4 we cite the aforementioned theorem on multiplicity of finite holomorphic maps between spaces of the same dimensions. In Section 5 we obtain characterizations of homogeneous and semi-homogeneous isolated singularities (given by Yau and Zuo) as simple consequences of the result of Section 4. Moreover, we obtain a stronger version of this characterization.

2 Weighted homogeneous polynomials

In this section we collect basic information on weighted homogeneous (or quasihomogeneous) polynomials. Since in literature there are various definitions of these, we fix the following.

Definition 1 *A polynomial $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ is weighted homogeneous if there exist positive rational numbers $w_1, \dots, w_n$ (weights) such that for each monomial $z_1^{i_1} \cdot \dots \cdot z_n^{i_n}$ appearing in P with a non-zero coefficient it holds*

$$w_1 \cdot i_1 + \dots + w_n \cdot i_n = 1.$$

Notice that if for a variable z_k we have $i_k \neq 0$ (so that P effectively depends on z_k), then $w_k \leq 1$. Therefore, we will always assume that $w_k \leq 1$ ($k = 1, \dots, n$).

Remark We work over $\mathbb{C}$ here, because we only want to apply the results of this section to complex singularities. For the most part, there is no essential difference in the treatment if one replaces $\mathbb{C}$ with a field $\mathbb{K}$.

If a weight satisfies the inequality

$$0 < w_i \leq \frac{1}{2},$$

we call it a strong weight. Otherwise, if

$$\frac{1}{2} < w_i \leq 1,$$

then this weight w_i is called weak. If at least one weight is weak we say that the weights of P are weak.

If P is homogeneous, then P is weighted homogeneous with weights $w_1 = \dots = w_n = \frac{1}{\deg P}$. More generally, any polynomial (or a power series even) can be represented as a sum of weighted homogeneous polynomials. In order to be able to refer to this representation in a natural way, it is desirable to introduce the notion of a *weighted degree*. This leads to the following, more flexible definition of the concept of weighted homogeneous polynomials.

Definition 2 *A polynomial $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ is weighted homogeneous of degree d if there exist positive integers $\omega_1, \dots, \omega_n$ (weights) and d (degree) such that $\gcd(\omega_1, \dots, \omega_n) = 1$ and for each monomial $z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$ appearing in P with a non-zero coefficient it holds*

$$\omega_1 \cdot i_1 + \dots + \omega_n \cdot i_n = d.$$

The integer d is called the weighted degree of P with respect to the system of weights $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ and is denoted by $\deg_\omega P$.

It is not hard to see that both definitions introduce one and the same concept, and can be used interchangeably, depending on one's needs. Namely, if P is weighted homogeneous of degree d with weights $\omega_1, \dots, \omega_n$ (in the sense of Definition 2), then P is also weighted homogeneous with weights $w_i := \frac{\omega_i}{d}$ in the sense of Definition 1. On the other hand, if $w_1, \dots, w_n$ are the weights of P as in Definition 1 and we write $w_i = \frac{a_i}{b_i}$, where a_i and b_i are co-prime positive integers, then upon putting $d := \text{lcm}(b_1, \dots, b_n)$ and $\omega_i := \frac{a_i}{b_i} d$ ($i = 1, \dots, n$) we can interpret P as being weighted homogeneous of degree d , in the sense of the second definition. Note also that in this correspondence we have $w_i \leq 1/2 \Leftrightarrow \omega_i \leq d/2$ and $w_i \leq 1 \Leftrightarrow \omega_i \leq d$. Consequently, to be consistent with the agreement that we made before, we will also *always assume that $\omega_i \leq d$* .

Equipped with this improved language, we may now easily express any formal power series $f \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ as a formal sum of weighted homogeneous polynomials of distinct increasing degrees,

$$f = f_{d_1} + f_{d_2} + \dots, \quad d_1 < d_2 < \dots;$$

namely we just collect the terms of same weighted ω -degree into polynomials f_d . This is always possible, for: (1) only finitely many n -tuples of non-negative integers $(i_1, \dots, i_n)$ satisfy the relation $\omega_1 \cdot i_1 + \dots + \omega_n \cdot i_n = d$, (2) these tuples have the property that $\|(i_1, \dots, i_n)\|_\infty \rightarrow \infty$ with $d \rightarrow \infty$. Some of these f_d 's may be zero and then we can safely exclude them from the representation of f , but in order to make such a representation truly unique we would have to assume that $f_{d_j} \neq 0$ for all $j \geq 0$, which is sometimes inconvenient. Anyways, if $f_{d_1} \neq 0$ then we call this polynomial the initial part of f with respect to the weights $\omega_1, \dots, \omega_n$ and we denote it $\text{in}_\omega f$. We can also use the notation $\text{in}_w f$, where $w_i = \frac{\omega_i}{d}$ are the corresponding rational weights. In particular, by this definition, we always have $\text{in}_w f = \text{in}_\omega f \neq 0$ if $f \neq 0$.

There is a clear geometric picture connected with weighted homogeneous polynomials. Namely, let $w_1, \dots, w_n$ be the rational weights of P and let

$$\text{supp } P := \{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n : z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n} \text{ appears in } P \text{ with a non-zero coeff.}\}$$

be the support of P . Then all the points of $\text{supp } P$ lie in the hyperplane in $\mathbb{R}^n$ defined by the equation

$$w_1 \cdot x_1 + \dots + w_n \cdot x_n = 1,$$

and this hyperplane intersects the respective coordinate axes exactly at distances $1/w_1, \dots, 1/w_n$ from the origin.

Now, let us consider the problem of uniqueness of the (rational) weights of a given weighted homogeneous polynomial P . Simple examples show that in general P does not determine its weights. For instance, let $P(z_1, z_2) := z_1 \cdot z_2$. There are many possible choices for weights of P , e.g. $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ or $w_1 = \frac{1}{3}, w_2 = \frac{2}{3}$. However, if we assume that P defines an isolated singularity at the origin, then one can prove a simple criterion for the uniqueness of the weights. To this end, let us first recall the notion of an isolated singularity.

A holomorphic function-germ $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ (the local ring of all such germs at 0 will be denoted by $\mathcal{O}_n$) is called an isolated singularity (or defines an isolated singularity) if f has an isolated critical point at 0 i.e.

1. $\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)$ vanishes at 0,
2. $\nabla f(\mathbf{z}) \neq 0$ for small $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} \neq 0$.

If $f(\mathbf{z}) := \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}_0^n} a_{\mathbf{i}} z^{\mathbf{i}}$, where $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ and $z^{\mathbf{i}} := z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n}$, then its support $\text{supp } f = \{\mathbf{i} \in \mathbb{N}_0^n : a_{\mathbf{i}} \neq 0\}$ has a simple feature.

Lemma 1 *If $f \in \mathcal{O}_n$ is an isolated singularity, then for each $k = 1, \dots, n$ a monomial of the form $z_k^{i_k}$, where $i_k \geq 2$, or $z_k^{i_k} z_j$, where $i_k \geq 1$, $k \neq j$, appears with a non-zero coefficient in the power series expansion of f .*

Proof Immediate, for otherwise all the partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ would vanish along the axis Oz_k . $\square$

Proposition 1 *If a weighted homogeneous polynomial $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ defines an isolated singularity at 0 and $\text{ord } P \geq 3$, then its weights are unique and strong. Moreover, $w_i < \frac{1}{2}$ ($i = 1, \dots, n$).*

Proof Consider one of the weights; let this be w_1 for simplicity. Because of Lemma 1 and since $\text{ord } P \geq 3$, in the expansion of P there appears a monomial of the form $z_1^{i_1}$, where $i_1 \geq 3$, or $z_1^{i_1} z_j$, where $i_1 \geq 2$, $1 \neq j$. In the first case we get $w_1 = \frac{1}{i_1} < \frac{1}{2}$,

so then this weight is uniquely determined by P itself. In the opposite case, upon rearranging the variables, we may assume that $z_1^{i_1} z_2$ appears in P with a non-zero coefficient. Repeating the above reasoning for the variable z_2 we infer that either $w_2 = \frac{1}{i_2} < \frac{1}{2}$ for some $i_2 \geq 3$, and then we also get $w_1 = \frac{1-w_2}{i_1} < \frac{1}{2}$ so that the weight w_1 is uniquely determined, or in P there appears a monomial $z_2^{i_2} z_j$, where $i_2 \geq 2$, $2 \neq j$, with a non-zero coefficient. In this second case it may happen that $j \neq 1$. Then, again, we may assume that $j = 3$. Continuing this procedure, after a finite number of steps either we will find that actually w_1 is uniquely determined by P or we will find „a cycle” of monomials appearing in P with non-zero coefficients:

$$z_1^{i_1} z_2, z_2^{i_2} z_3, \dots, z_k^{i_k} z_j, \text{ where } i_1, \dots, i_k \geq 2, j \in \{1, \dots, k-1\}, k \geq 2.$$

This leads to the following linear system of equations in $w_1, \dots, w_k$:

$$\begin{cases} i_1 w_1 + w_2 &= 1 \\ i_2 w_2 + w_3 &= 1 \\ \vdots &\vdots \\ i_k w_k + w_j &= 1 \end{cases}.$$

It is easy to check that the determinant of this system is equal to $i_1 \dots i_{j-1} (i_j \dots i_k + (-1)^{k+j})$, so it is non-zero because $i_k \geq 2$. Hence, the weights $w_1, \dots, w_k$ are uniquely determined. Moreover, using the first equation, we see that $w_1 = \frac{1-w_2}{i_1} < \frac{1}{2}$. Since w_1 was an arbitrarily fixed weight of P , the result follows. $\square$

Remark Note that in the proof of Proposition 1 we actually showed that the weights w_i have to be rational, even if one allowed w_i to be real in Definition 1 (subject to the condition $0 < w_i \leq 1$). The same remark concerns Proposition 2 below.

Example 1 The above result does not hold for isolated singularities of order 2.

- Take $P(z_1, z_2) := z_1 z_2$. As we saw on page 12, the weights of P are not uniquely determined.
- Take $Q(z_1, z_2) := z_1 z_2 + z_2^3$. Then the weights of Q are indeed unique, but not strong.

A simple analysis of the proof of Proposition 1 leads to the following observation valid also for order 2 weighted homogeneous polynomials defining isolated singularities.

Proposition 2 ([Sai71, Korollar 1.7]) *If a weighted homogeneous polynomial $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ with strong weights defines an isolated singularity at 0, then there are no other strong weights for P .*

Proof We repeat the proof of Proposition 1 to get the „cycle” $z_1^{i_1} z_2, z_2^{i_2} z_3, \dots, z_k^{i_k} z_j$ of monomials appearing with non-zero coefficients in P and the corresponding linear system

$$\begin{cases} i_1 w_1 + w_2 &= 1 \\ i_2 w_2 + w_3 &= 1 \\ \vdots &\vdots \\ i_k w_k + w_j &= 1 \end{cases},$$

where this time we know only that $i_1, \dots, i_k \geq 1, j \in \{1, \dots, k-1\}, k \geq 2$. Hence, its determinant $i_1 \dots i_{j-1} (i_j \dots i_k + (-1)^{k+j})$ may be zero if $k+j \equiv 1 \pmod{2}$ and $i_j = \dots = i_k = 1$. But if this is the case, then in P there appear the monomials $z_j z_{j+1}, \dots, z_{k-1} z_k, z_k z_j$ with non-zero coefficients, implying $w_j = \dots = w_k = \frac{1}{2}$ as the weights are strong. Thus, we are left with the system $\{i_1 w_1 + w_2 = \dots = i_{j-1} w_{j-1} + w_j = 1, w_j = \frac{1}{2}\}$, which is a triangular one. Hence, the uniqueness of $w_1, \dots, w_n$ follows. $\square$

Without the assumption that the weights are strong, the following holds „in order 2”.

Proposition 3 (cf. [Sai71, the proof of Satz 1.3]) *If a weighted homogeneous polynomial $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ defines an isolated singularity at 0 and $\text{ord } P = 2$, then there exists a biholomorphic change of coordinates Φ of $\mathbb{C}^n$ such that $P \circ \Phi$ is still weighted homogeneous, but with unique and strong weights.*

Proof We apply induction with respect to the number n of variables. For $n = 1$ the assertion is obvious. Let now $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, $n \geq 2$, define a weighted homogeneous singularity. Let $w_1, \dots, w_n$ be the weights of P . Assume that in P there appears a monomial $z_j z_k$, for some $j, k \in \{1, \dots, n\}$, with a non-zero coefficient. If $j = k$ then clearly $w_j = \frac{1}{2}$; if $j \neq k$ with $w_j \leq \frac{1}{2}$ and $w_k \leq \frac{1}{2}$, then we also immediately conclude that $w_j = w_k = \frac{1}{2}$. Hence, in these two cases the weights w_j, w_k are already strong. Accordingly, assume now that $j \neq k$ and e.g. $w_j > \frac{1}{2}$. By a permutation of the variables, we may arrange things so that $j = 1, k = 2$. Since $w_1 > \frac{1}{2}$, P depends only linearly on z_1 and we may write

$$P(z_1, \dots, z_n) = z_1(a z_2 + P_0(z_3, \dots, z_n)) + P'(z_2, \dots, z_n), \quad a \neq 0.$$

Here, P_0 also does not depend on z_2 because P is weighted homogeneous; moreover $\text{ord } P_0 \geq 1$. If we change the coordinates in the following manner: $t_1 = z_1, t_2 = a z_2 + P_0(z_3, \dots, z_n), t_3 = z_3, \dots, t_n = z_n$, then we obtain a new weighted homogeneous polynomial Q having the same weights $w_1, \dots, w_n$ and of the form

$$Q(t_1, \dots, t_n) = t_1 t_2 + Q'(t_2, \dots, t_n).$$

Now, we have the representation

$$Q(t_1, \dots, t_n) = t_2(t_1 + Q_0(t_2, \dots, t_n)) + Q''(t_3, \dots, t_n)$$

and the substitution $u_1 = t_1 + Q_0(t_2, \dots, t_n)$, $u_2 = t_2, \dots, u_n = t_n$ leads to another weighted homogeneous polynomial R having the same weights $w_1, \dots, w_n$ and of the form

$$R(u_1, \dots, u_n) = u_1 u_2 + R'(u_3, \dots, u_n).$$

But now we can put $w'_1 := \frac{1}{2}$, $w'_2 := \frac{1}{2}$, and then both R and R' are weighted homogeneous with respect to $w'_1, w'_2, w_3, \dots, w_n$. Moreover, R' defines an isolated singularity in $\mathbb{C}^{n-2}$. If we change coordinates: $u_1 = s_1 - i s_2$, $u_2 = s_1 + i s_2$, $u_3 = s_3, \dots, u_n = s_n$ we obtain a weighted homogeneous polynomial

$$T(s_1, \dots, s_n) = s_1^2 + s_2^2 + R'(s_3, \dots, s_n)$$

for which the weights of the variables s_1 and s_2 are unique and strong. Induction finishes the proof. $\square$

Remark A careful analysis of the above proof shows that, in order to guarantee *the existence* of strong weights for P , one must only change these variables $z_{i_1}, \dots, z_{i_r}$ which appear in the quadratic form of P exclusively as $z_{i_j} z_{i_k}$, with $\max(w_{i_j}, w_{i_k}) > \frac{1}{2}$. However, to be able to deduce *the uniqueness* of the weights, one must work with all the variables appearing in the quadratic form of P . In both cases, all the other variables remain essentially uninfluenced by this procedure. Moreover, w_α ($\alpha \notin \{i_1, \dots, i_r\}$) are the same in all these coordinate systems.

We may sum up the above propositions in one theorem.

Theorem 1 *Let $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ be a weighted homogeneous polynomial defining an isolated singularity at 0.*

1. *If $\text{ord } P \geq 3$, then the weights of P are unique and strong (and, moreover, all $w_i < \frac{1}{2}$).*
2. *If $\text{ord } P = 2$, then there exists a biholomorphic change of coordinates of $\mathbb{C}^n$ such that P in these coordinates is weighted homogeneous with unique and strong weights (and might be brought to the form $P(s_1, \dots, s_n) = s_1^2 + \dots + s_k^2 + P'(s_{k+1}, \dots, s_n)$, $k \geq 0$, where P' is weighted homogeneous and $\text{ord } P' \geq 3$).*
3. *If P has strong weights, then they are the only strong weights for P .*

Remark Analyzing the proofs given, a careful reader might notice that Theorem 1 holds also for a weighted homogeneous polynomial with a non-isolated critical point at 0, as long as this polynomial satisfies the assertion of Lemma 1 (that is, if it is *nearly convenient*).

Example 2 As we saw in Example 1, the polynomial $Q(z_1, z_2) := z_1 z_2 + z_2^3$ has unique, but weak, weights. Putting $u_1 = z_1 + z_2^2$, $u_2 = z_2$ we transform Q into the form $u_1 u_2$. Another change: $s_1 = u_1 + u_2$, $s_2 = u_1 - u_2$ leads to $\frac{1}{4} s_1^2 - \frac{1}{4} s_2^2$, which is now a weighted homogeneous polynomial with unique and strong weights.

3 Characterization of homogeneous and weighted homogeneous isolated singularities

In this section we describe some known characterizations of homogeneous and semi-homogeneous isolated singularities. To make things precise, let us start the discussion with necessary definitions.

Definition 3 *A function-germ $f \in \mathcal{O}_n$ is called a homogeneous (resp. weighted homogeneous) isolated singularity if f is a homogeneous (resp. weighted homogeneous) polynomial defining an isolated singularity at $0 \in \mathbb{C}^n$. Such germ f is called a semi-homogeneous (resp. semi-weighted-homogeneous) singularity if $f = f_0 + f'$, where f_0 (the principal part of f) is a homogeneous (resp. weighted homogeneous) isolated singularity and every monomial appearing in f' with a non-zero coefficient has its degree (resp. weighted degree) greater than the degree (resp. weighted degree) of f_0 .*

The most impressive description of the class of weighted homogeneous isolated singularities was given by K. Saito in 1971.

Theorem 2 ([Sai71, Satz 4.1]) *An isolated singularity $f \in \mathcal{O}_n$ is weighted homogeneous in some system of coordinates if, and only if, $f \in (\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n})\mathcal{O}_n$.*

We remark that the „only if” part of this theorem is easy and follows directly from Euler’s formula for weighted homogeneous polynomials.

In singularity theory there are many numerical invariants in terms of which various properties of isolated singularities (e.g. of topological, geometric or holomorphic nature) can be expressed. The most important of these are perhaps: the multiplicity $m(f)$, the Milnor number $\mu(f)$ and the Tjurina number $\tau(f)$. They can be defined as follows:

$$\begin{aligned} m(f) &= \text{ord}(f), \\ \mu(f) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / (\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n})\mathcal{O}_n, \\ \tau(f) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / (f, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n})\mathcal{O}_n. \end{aligned}$$

Using these invariants, we may reformulate Saito theorem.

Theorem 2’ *An isolated singularity $f \in \mathcal{O}_n$ is weighted homogeneous in some system of coordinates if, and only if, $\mu(f) = \tau(f)$.*

This result justifies the hope for, and inspires the search for, a possible characterization of homogeneous and semi-homogeneous isolated singularities, one that should also be expressed only in terms of the above-mentioned numerical invariants. In recent years a number of papers concerning this topic have appeared. Xu and

Yau in 1993 [XY93] managed to solve this problem for 2-dimensional isolated singularities, after that Lin and Yau [LY04], and Chen et al. [CLYZ11] extended the first result to 3- and 4-dimensional isolated singularities, respectively. Since these characterizations were similar, in 2006 Yau formulated the following conjecture (see [LWYL06]):

Conjecture *Let $f \in \mathcal{O}_n$ be an arbitrary isolated singularity. Then*

1. $\mu(f) \geq (m(f) - 1)^n$, with equality if, and only if, f is semi-homogeneous.

Assume additionally that f is a weighted homogeneous isolated singularity. Then

2. $\mu(f) = (m(f) - 1)^n$ if, and only if, there is a biholomorphic change of coordinates in $\mathbb{C}^n$ which transforms f into a homogeneous polynomial (so that f becomes a homogeneous isolated singularity in these new coordinates).

The first part of this general conjecture was proved by Yau and Zuo in [YZ12], and the second part by the same authors in [YZ15]. Quite recently, Abderrahmane [Abd15] gave another proof of this conjecture.

The aim of this elaboration is to indicate that the conjecture is a simple corollary to a well-known theorem of multidimensional complex analysis (more specifically – multiplicity theory of mappings). Moreover, we will give a more precise version of the second part of the conjecture. In a similar way one can prove the result of Furuya and Tomari [FT04] on the characterization of semi-weighted-homogeneous isolated singularities.

Let us prepare the ground first.

4 Elements of multiplicity theory

Let $F = (F_1, \dots, F_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ be a holomorphic map having an isolated zero at $0 \in \mathbb{C}^n$. In such a case F is a branched analytic cover, so for all y in a dense open subset of a suitable neighbourhood of 0 the number of points in $F^{-1}(y)$ is finite and independent of y . Hence, one may define the covering multiplicity of F at 0 by

$$\mu_c(F) := \# \{F^{-1}(y) : y - \text{generic}\}.$$

A standard result in complex analytic geometry (see [Pal67], [Orl77, Thm. I.5.13], [Tsi92, p. 148]) states that

$$\mu_c(F) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / (F_1, \dots, F_n) \mathcal{O}_n.$$

Hence, in the case where $F = \nabla f$ for an isolated singularity f , this gives (cf. page 16)

$$\mu(f) = \mu_c(\nabla f).$$

Another well-known result on multiplicity is the following, dating back at least to O. Zariski [Zar37], who proved it for polynomials (not a restrictive assumption) using properties of multipolynomial resultants.

Theorem 3 ([TY78], [Tsi92, p.146], [AY83, p.181], [Chi89, p.112], [ATY94, p. 37]) *Let $F = (F_1, \dots, F_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ be a holomorphic map with an isolated zero at $0 \in \mathbb{C}^n$. Let $\text{in } F = (\text{in } F_1, \dots, \text{in } F_n)$ be the vector of the initial forms of the mapping F , of degrees $d_1, \dots, d_n$, respectively. Then*

1. $\mu_c(F) \geq d_1 \cdot \dots \cdot d_n$.
2. *The equality in 1. holds if, and only if, 0 is an isolated zero of the system $\text{in } F$.*

Theorem 3 admits a simple generalization.

Theorem 4 ([TY78], [AY83, p. 184], [Chi89, p. 114]) *Let $F = (F_1, \dots, F_n) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ be a holomorphic map with an isolated zero at $0 \in \mathbb{C}^n$. Let $\omega_1, \dots, \omega_n$ be some fixed natural weights. Let $\text{in}_\omega F = (\text{in}_\omega F_1, \dots, \text{in}_\omega F_n)$ be the vector of the weighted initial forms of the mapping F , of weighted degrees $d_1, \dots, d_n$, respectively. Then*

1. $\mu_c(F) \geq d_1 \cdot \dots \cdot d_n$.
2. *The equality in 1. holds if, and only if, 0 is an isolated zero of the system $\text{in}_\omega F$.*

Let us remark that Theorem 4 follows from Theorem 3 by means of the simple substitution $\Phi : \mathbb{Z} \mapsto (z_1^{\omega_1}, \dots, z_n^{\omega_n})$, which transforms the weighted $\text{in}_\omega F$ into the homogeneous $\text{in } \Phi^* F$.

5 Corollaries

Let us relate the theorems from the previous section to the Conjecture.

- I. Conjecture, item 1, follows immediately from Theorem 3.
- II. Conjecture, item 2 also follows from Theorem 3, and in a more precise form, as we are about to see.

Theorem 5 *Let $f \in \mathcal{O}_n$ be a weighted homogeneous isolated singularity. Then $\mu(f) = (m(f) - 1)^n$ if, and only if, there is a biholomorphic change of coordinates in $\mathbb{C}^n$ which transforms f into a homogeneous polynomial. Moreover, such change of coordinates may be needed only when $\text{ord } f = 2$ and all possible systems of weights for f are weak.*

Proof If the equality holds, then, according to Theorem 3, f is semi-homogeneous. Let $m = m(f)$, then $f = f_m + f_{m+1} + \dots$ where each f_i is homogeneous of degree i , and f_m is an isolated singularity. Since f is weighted homogeneous, f_m also is, with respect to the same weights. Now, if the weights of f are strong, then from Proposition 2 applied to f_m we infer that these weights must be $\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}$. Hence, $f_{m+1} = f_{m+2} = \dots = 0$ and $f = f_m$ is homogeneous. If the weights of f are weak, then Proposition 1 implies that $\text{ord } f = 2$, and Proposition 3 supplies us with a biholomorphic change of coordinates which makes f weighted homogeneous, with strong weights. Since both, the Milnor number, and the multiplicity are invariants of biholomorphisms, the equality still holds in this new system of coordinates. Hence, we may apply the first part of the proof to conclude that f is now homogeneous. $\square$

III. In 2004, in *Proc. AMS*, Furuya and Tomari [FT04] proved the following theorem, which is a direct consequence of Theorem 4.

Theorem 6 *Let $f \in \mathcal{O}_n$ be an isolated singularity and let $\omega_1, \dots, \omega_n$ be some fixed natural weights. With respect to these weights, write $f = f_d + f_{d+1} + \dots$, where f_i is a weighted homogeneous polynomial of weighted degree equal to i , and $f_d \neq 0$. Then*

$$1. \mu(f) \geq \left(\frac{d}{\omega_1} - 1\right) \dots \left(\frac{d}{\omega_n} - 1\right).$$

2. *The equality holds in the above if, and only if, f is semi-weighted-homogeneous with respect to the weights ω .*

References

- [Abd15] Ould M. Abderrahmane. A new proof of Yau's characterization of isolated homogeneous hypersurface singularities. *ArXiv e-prints*, arXiv: 1510.01590v2:1–5, oct 2015.
- [ATY94] Lev Abramovich Aizenberg, Avgust Karlovich Tsikh and Aleksandr Petrovich Yuzhakov. Multidimensional residues and applications. In G. M. Khenkin and A. G. Vitushkin, editors, *Several Complex Variables II: Function Theory in Classical Domains. Complex Potential Theory*, volume 8 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, pages 1–58. Springer Berlin Heidelberg, 1994.
- [AY83] Lev Abramovich Aizenberg and Aleksandr Petrovich Yuzhakov. *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis*, volume 58 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1983.
- [Bri66] Egbert Brieskorn. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. *Invent. Math.*, 2:1–14, 1966.

- [Chi89] Evgenii Mikhailovich Chirka. *Complex analytic sets*, volume 46 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
- [CLYZ11] Irene Chen, Ke-Pao Lin, Stephen Shing-Toung Yau and Huaiqing Zuo. Coordinate-free characterization of homogeneous polynomials with isolated singularities. *Comm. Anal. Geom.*, 19(4):661–704, 2011.
- [FT04] Masako Furuya and Masataka Tomari. A characterization of semi-quasi-homogeneous functions in terms of the Milnor number. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(7):1885–1890, 2004.
- [LY04] Ke-Pao Lin and Stephen Shing-Toung Yau. Classification of affine varieties being cones over nonsingular projective varieties: hypersurface case. *Comm. Anal. Geom.*, 12(5):1201–1219, 2004.
- [LWYL06] Ke-Pao Lin, Xi Wu, Stephen Shing-Toung Yau and Hing-Sun Luk. A remark on lower bound of Milnor number and characterization of homogeneous hypersurface singularities. *Comm. Anal. Geom.*, 14(4):625–632, 2006.
- [Orl77] Peter Orlik. The multiplicity of a holomorphic map at an isolated critical point. In *Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)*, pages 405–474. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [Pal67] Victor Pavlovitch Palamodov. The multiplicity of a holomorphic transformation. *Funkcional. Anal. i Priložen*, 1(3):54–65, 1967.
- [Pha65] Frédéric Pham. Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. *Bull. Soc. Math. France*, 93:333–367, 1965.
- [Sai71] Kyoji Saito. Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. *Invent. Math.*, 14:123–142, 1971.
- [Tsi92] Avgust Karlovich Tsikh. *Multidimensional residues and their applications*, volume 103 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
- [TY78] Avgust Karlovich Tsikh and Aleksandr Petrovich Yuzhakov. The multiplicity of zero of a system of holomorphic functions. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 19(3):693–697, 1978.
- [XY93] Yi-Jing Xu and Stephen Shing-Toung Yau. Durfee conjecture and coordinate free characterization of homogeneous singularities. *J. Differential Geom.*, 37(2):375–396, 1993.
- [YZ12] Stephen Shing-Toung Yau and Huaiqing Zuo. Lower estimate of Milnor number and characterization of isolated homogeneous hypersurface singularities. *Pacific J. Math.*, 260(1):245–255, 2012.

- [YZ15] Stephen Shing-Toung Yau and Huaiqing Zuo. Complete characterization of isolated homogeneous hypersurface singularities. *Pacific J. Math.*, 273(1):213–224, 2015.
- [Zar37] Oscar Zariski. Generalized weight properties of the resultant of $n + 1$ polynomials in n indeterminates. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41(2):249–265, 1937.

Szymon Brzostowski
 Faculty of Mathematics
 and Computer Science
 University of Łódź
 ul. Banacha 22,
 90-238 Łódź, Poland
 brzosts@math.uni.lodz.pl

Tadeusz Krasieński
 Faculty of Mathematics
 and Computer Science
 University of Łódź
 ul. Banacha 22,
 90-238 Łódź, Poland
 krasinsk@uni.lodz.pl

OSOBLIWOŚCI IZOLOWANE HIPERPOWIERZCHNI JEDNORODNYCH I SEMI-JEDNORODNYCH

Streszczenie Wskazujemy w jaki sposób twierdzenia charakteryzacyjne dla osobliwości izolowanych hiperpowierzchni jednorodnych i semi-jednorodnych, podane ostatnio przez Yau i Zuo, wywnioskować można niemal natychmiast ze standardowych twierdzeń wielowymiarowej analizy zespolonej.

Łódź, 11 – 15 stycznia 2016 r.

O KLASACH EKWISINGULARNOŚCI
OSOBLIWOŚCI KRZYWYCH PŁASKICH
WYZNACZONYCH PRZEZ
JAKOBIANOWY WIELOKĄT NEWTONA

Andrzej Lenarcik (Kielce)

Dla kielka zespolonej krzywej płaskiej z osobliwością izolowaną rozważamy (generyczny) jakobianowy wielokąt Newtona wprowadzony przez B. Teissiera. E. García-Barroso oraz J. Gwoździewicz pokazali, że na podstawie jakobianowego wielokąta Newtona można rozpoznać, że osobliwość jest gałęzią. Wtedy możliwe też jest określenie typu osobliwości gałęzi (Merle). Anonsujemy analogiczny rezultat dla niektórych osobliwości złożonych z wielu gałęzi. Osobliwości te nazywamy miotłami.

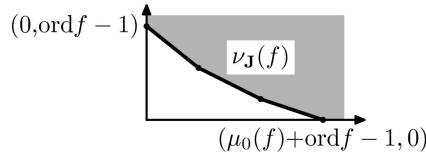
*

Niech $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ będzie niezerowym szeregiem bez stałego wyrazu definiującym kielkę $f = 0$ w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^2$. Zakładamy, że $f = 0$ ma osobliwość izolowaną w zerze. Zdefiniujemy (generyczny) jakobianowy wielokąt Newtona dla f . Za B. Teissierem rozważamy krzywą polarną $a(\partial f / \partial X) + b(\partial f / \partial Y)$ odpowiadającą generycznemu kierunkowi $(a : b) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ oraz rozkład tej krzywej

$a(\partial f/\partial X) + b(\partial f/\partial y) = h_1 \dots h_u$ na czynniki nierozkładalne w $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Definiujemy zbiór niezmienników polarnych

$$Q(f) = \left\{ \frac{(f, h_j)_0}{\text{ord } h_j} : j = 1, \dots, u \right\},$$

gdzie $(\ , \)_0$ jest krotnością przecięcia. Każdemu $q \in Q(f)$ odpowiada zbiór indeksów J_q złożony z $j \in \{1, \dots, u\}$, dla których $(f, h_j)_0/\text{ord } h_j = q$. Wówczas $m_q = \sum_{j \in J_q} \text{ord } h_j$ jest krotnością ilorazu polarnego q . Mamy $\sum m_q = \text{ord } f - 1$ oraz $\sum m_q q = \mu_0(f) + \text{ord } f - 1$, gdzie $\mu_0(f)$ jest liczbą Milnora. Informację o niezmiennikach polarnych i ich krotnościach przedstawiamy za Teissier'em w postaci jakobianowego wielokąta Newtona $\nu_{\mathbf{J}}(f)$.



Jest to nieograniczony wielokąt wypukły leżący w pierwszej ćwiartce. Od dołu ogranicza go łamana łącząca punkt $(\text{ord } f - 1, 0)$ na osi pionowej z punktem $(\mu_0(f) + \text{ord } f - 1, 0)$ na osi poziomej. Parami nierównoległym odcinkom łamanej odpowiadają różne niezmienniki polarne. Długość rzutu odcinka odpowiadającego danemu niezmiennikowi na oś pionową jest krotnością tego niezmiennika, zaś długość rzutu na oś poziomą jest równa iloczynowi wartości niezmiennika i jego krotności. Teissier [T1, T2] pokazał, że $\nu_{\mathbf{J}}(f)$ nie zależy od wyboru dostatecznie generycznego kierunku krzywej polarnej (w ogólniejszym przypadku dla osobliwości hiperpowierzchni).

Ekwisingularność kielków i niezmienniki ekwisingularności

Kielek $h = 0$ nazywamy gałęzią jeżeli szereg $h \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ jest nierozkładalny (nazwa gałąź używana jest też do szeregu). Definiujemy półgrupę gałęzi

$$\Gamma(h) = \{(h, g)_0 : g \in \mathbb{C}\{X, Y\}, h \text{ nie dzieli } g\} \subset \mathbb{N}.$$

Mamy $\Gamma(h) = \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy h jest gałęzią gładką ($\text{ord } h = 1$). Jakobianowy wielokąt Newtona gałęzi w terminach półgrupy opisał Merle [M]. Dwa kielki $f = 0$ i $g = 0$ nazywamy ekwisingularnymi, jeśli istnieją rozkłady $f = f_1 \dots f_r$ oraz $g = g_1 \dots g_s$ na gałęziach w $\mathbb{C}\{X, Y\}$ takie, że $r = s$, $\Gamma(f_i) = \Gamma(g_i)$ dla $i = 1, \dots, r$ oraz $(f_i, f_j)_0 = (g_i, g_j)_0$ dla $i, j = 1, \dots, r$. Relacja ekwisingularności definiuje klasy w zbiorze kielków. Funkcje stałe na tych klasach nazywamy niezmiennikami ekwisingularności. Z cytowanych prac Teissiera wynika, że $\nu_{\mathbf{J}}(f)$ jest niezmiennikiem ekwisingularności. Podczas jednego z seminariów Kielecko-Łódzkich A. Płoski zadał pytanie, które niezmienniki ekwisingularności mogą być rozpoznane na podstawie $\nu_{\mathbf{J}}(f)$ (w szczególności pytanie dotyczyło liczby gałęzi)? Do pozytywnych przykładów oprócz oczywistych $\text{ord } f$ i $\mu_0(f)$ należą także wykładnik Łojasiewicza

$\mathcal{L}_0(f)$ [T1], związany z maksymalnym niezmiennikiem polarnym, oraz wykładnik maksymalnego kontaktu Hironaki $\delta(f)$ ([LMP]), związany z minimalnym ilorazem polarnym. W tej ostatniej pracy powiązано też liczbę stycznych $t(f)$ z krotnością $\text{ord } f$ jako ilorazu polarnego. Przykład, że liczba gałęzi nie może być odczytana na podstawie jakobianowego wielokąta Newtona podany jest w [L1].

Wspomniany przykład był inspiracją dla autorów pracy [GB-G], którzy pokazali, że chociaż nie można rozpoznać liczby gałęzi na podstawie jakobianowego wielokąta Newtona, to jednak można rozpoznać, że gałąź jest jedna. Stosując wtedy wynik Merla można określić klasę ekwisingularności kielka.

DEFINICJA (*). Mówimy, że klasa ekwisingularności kielka $f = 0$ jest wyznaczona przez jakobianowy wielokąt Newtona, jeżeli dla dowolnego kielka $g = 0$ z równości $\nu_{\mathbf{J}}(f) = \nu_{\mathbf{J}}(g)$ wynika ekwisingularność kielków $f = 0$ i $g = 0$.

TWIERDZENIE 1. ([GB-G]) Klasa ekwisingularności dowolnej gałęzi jest wyznaczona przez jakobianowy wielokąt Newtona.

Można zapytać, czy klasa ekwisingularności kielków złożonych z wielu gałęzi może być wyznaczona przez jakobianowy wielokąt Newtona?

Definicja miotły (broom)

Przez $(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}})$ oznaczamy minimalny ciąg generatorów półgrupy gałęzi ($\mathbf{g} \geq 0$ oznacza tzw. liczbę par charakterystycznych; $\mathbf{g} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy gałąź jest gładka). Niech $\varepsilon_k = \text{NWP}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_k)$ będzie ciągiem dzielników ($k = 0, \dots, \mathbf{g}$). Niech $f = f_1 \dots f_r$ będzie rozkładem na czynniki nierozkładalne. Kieltek $f = 0$ nazywamy miotłą jeżeli $r = 1$ lub jeżeli $r \geq 2$ i wtedy istnieje stała c taka, że spełnione są warunki

$$(I) \quad \frac{(f_i, f_j)_0}{(\text{ord } f_i)(\text{ord } f_j)} = c \text{ dla } i \neq j,$$

(II) dla każdej gałęzi osobliwej, jeżeli $(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}})$ jest ciągiem generatorów jej półgrupy ($\mathbf{g} \geq 1$), to

$$\frac{\varepsilon_{k-1} \bar{\beta}_k}{(\bar{\beta}_0)^2} \leq c \text{ dla } k = 1, \dots, \mathbf{g}.$$

W pracy niniejszej anonsujemy następujące uogólnienie Twierdzenia 1.

TWIERDZENIE 2. Klasa ekwisingularności dowolnej miotły jest wyznaczona przez jakobianowy wielokąt Newtona.

Klasa ewisingularności miotły

Płoski [P1] pokazał, że wielkość $d(f, g) := (f, g)_0 / ((\text{ord } f)(\text{ord } g))$ (tzw. rząd kontaktu), występująca w (I) jest dystansem logarytmicznym w zbiorze gałęzi. W szczególności zachodzi silna nierówność trójkąta $d(f, g) \geq \min\{d(f, h), d(g, h)\}$ dla dowolnych gałęzi f, g, h . Czyli można powiedzieć, że jeżeli miotła ma więcej niż

jedną gałąź, to każda para różnych gałęzi ma taki sam rząd kontaktu. Oznaczmy przez $\delta_k := (\varepsilon_{k-1}\bar{\beta}_k)/(\bar{\beta}_0)^2$, $k = 1, \dots, \mathbf{g}$, wielkości występujące w (II). Pojawiły się one np. w programie nakreślonym w [GB-P]. Można pokazać (np. [GB-P, L2]), że dla danej gałęzi osobliwej wielkość δ_k jest maksymalnym rzędem kontaktu tej gałęzi z gałęziami posiadającymi ostro mniej niż k par charakterystycznych; δ_k nazywamy charakterystycznym rzędem kontaktu ($k = 1, \dots, \mathbf{g}$). W szczególności δ_1 jest maksymalnym kontaktem Hironaki dla gałęzi. Z własności półgrupy gałęzi wynika nierówność $\delta_1 < \dots < \delta_{\mathbf{g}}$. Czyli (II) oznacza, że w przypadku, gdy miotła ma więcej niż jedną gałąź, to wszystkie charakterystyczne rzędy kontaktów gałęzi osobliwych są mniejsze lub równe c . W [L2] pokazujemy, że charakterystyczne rzędy kontaktów dwóch gałęzi, ostro mniejsze od ich wzajemnego rzędu kontaktu, pokrywają się. Wynika stąd, że albo wszystkie gałęzie miotły mają jednakową klasę ekwisingularności opisaną przez $(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}})$, albo mogą występować gałęzie z krótszą charakterystyką $(\bar{\beta}_0/\varepsilon_{\mathbf{g}-1}, \dots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}-1}/\varepsilon_{\mathbf{g}-1})$.

Wzory na $\nu_{\mathbf{J}}(f)$ dla krzywych z dowolną liczbą gałęzi podał Eggers [E]. Do zakodowania klasy ewisingularności zastosował drzewa nazywane dzisiaj drzewami Eggersa. Praca ta długo pozostawała nieznaną; została spopularyzowana w [GB]. Z własności drzew Eggersa wynika, że miotła może mieć co najwyżej jedną gałąź o krótszej charakterystyce. W pracach [L2, L3] konstruujemy wariant drzewa Eggersa za pomocą rzędu kontaktu gałęzi.

Uwagi i komentarze

Rozważmy słabszy wariant Definicji (*). Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną kielków.

DEFINICJA (**). Mówimy, że klasa ekwisingularności kielka $f = 0$ jest wyznaczona przez jacobianowy wielokąt Newtona w rodzinie $\mathcal{F}$, jeżeli dla kielków z $\mathcal{F}$ równość jacobianowych wielokątów Newtona implikuje ekwisingularność kielków.

Wynik Merla [M] oznacza, że gałęzie posiadają własność wyrażoną w Definicji (**). W pracy [L1] pokazaliśmy, że własność tę posiadają także kielki jednostyczne niezdegenerowane w sensie Kouchnirenki. Oba rezultaty są uogólnione w pracy [L3]. Wynik sformułowany jest w języku drzew Eggersa.

Literatura na temat jacobianowego wielokąta Newtona podana jest w [GLP].

Literatura

- [E] H. Eggers, *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten*, Bonner Math. Schriften 147, Universität Bonn, Bonn 1982
- [GB] E. García Barroso, *Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite*, Proc. London Math. Soc., III, 81,1 (2000), 1–28.
- [GB-G] E. García-Barroso, J. Gwoździewicz, *Characterization of jacobian Newton polygons of plane branches and new criteria of irreducibility*, Annales de l'Institut Fourier 60,2 (2010), 683–709.

- [GB-P] E. García-Barroso, A. Płoski, *Sur l'exposant de contact des courbes analytiques planes*, Octobre 2002, Travail en cours.
- [GLP] J. Gwoździejewicz, A. Lenarcik, A. Płoski, *Polar invariants of plane curve singularities: intersection theoretical approach*, Demonstratio Math. 43(2), (2010) 303–323.
- [L1] A. Lenarcik, *On the jacobian Newton polygon of plane curve singularities*, Manuscripta Math., 125 (2008), 309–324.
- [L2] A. Lenarcik, *On the Łojasiewicz exponent, special direction and maximal polar quotient*, arXiv:1112.5578v1, Dec 2011
- [L3] A. Lenarcik, *Eggers tree and jacobian Newton polygon*, Manuscripta Math. 142 (2013), 233–244.
- [LMP] A. Lenarcik, M. Masternak, A. Płoski, *Factorization of the polar curve and the Newton polygon*, Kodai Math. J., vol. 26, n. 3 (2003), 288–303.
- [M] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes*, Invent. Math. 41 (1977), 103–111.
- [P1] A. Płoski, *Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 33(11-12), (1985) 601–605.
- [T1] B. Teissier, *Variétés polaires*, Invent. Math. 40 (1977), 267–292.
- [T2] B. Teissier, *Polyèdre de Newton Jacobien et équisingularité*, in: Séminaire sur les Singularités, Publ. Math. Univ. Paris VII 7, 1980, 193–221.

ON THE EQUISINGULARITY CLASSES OF PLANE CURVE SINGULARITIES DETERMINED BY THE JACOBIAN NEWTON POLYGON

Summary. For a germ of a plane curve complex isolated singularity we consider the (generic) jacobian Newton polygon introduced by B. Teissier for hypersurfaces. E. García-Barroso and J. Gwoździejewicz observed that it is possible to recognize that the singularity has one branch by studying the jacobian Newton polygon. Then it is possible to determine the equisingularity class by using the result of Merle. We announce a generalization of this observation for wider class of singularities which admits more than one branch. We call these singularities “brooms”.

KATEDRA MATEMATYKI I FIZYKI
POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA
ALEJA TYSIĄCLECIA PAŃSTWA POLSKIEGO 7
25-314 KIELCE, POLAND
E-MAIL: ztpal@tu.kielce.pl

Łódź, 11 – 15 stycznia 2016 r.

O LICZBIE MILNORA
OSOBLIWOŚCI KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH
W CHARAKTERYSTYCE SKOŃCZONEJ

Arkadiusz Płoski (Kielce)

Celem tego opracowania jest przegląd prac o liczbie Milnora w charakterystyce skończonej [B-G-M], [D], [G-N], [GB-P bis], [H-R-S], [MH-W], [Ng], [P3]. Wszystkie potrzebne pojęcia i twierdzenia z lokalnej teorii krzywych algebraicznych Czytelnik znajdzie w [P1].

Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $p \geq 0$. Jeżeli $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$, to $\text{ord } f$ resp. $\text{in } f$ oznacza rząd (= krotność) resp. formę początkową szeregu f . Gdy $\text{ord } f = 1$, szereg f nazywamy parametrem regularnym. Gdy $f \neq 0$ oraz $\text{ord } f > 1$, to f nazywamy osobliwością. Krotność przecięcia szeregów f, g oznaczamy $i_0(f, g)$. Liczba Milnora $\mu(f)$ szeregu f bez stałego wyrazu określona jest wzorem

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[[x, y]] \left/ \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right.$$

Jest więc $\mu(f) = i_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$. Jeżeli Φ jest automorfizmem pierścienia $\mathbb{K}[[x, y]]$, to $\mu(f) = \mu(f \circ \Phi)$. Jeżeli $p = \text{char } \mathbb{K} > 0$, to możemy mieć $\mu(f) = +\infty$ ale $\mu(g) < +\infty$ dla $g = uf$, $u(0, 0) \neq 0$.

Przykład: $f = x^p + y^{p+1}$ ($p > 1$) oraz $u = 1 + x$.

1 Lemat Teissiera w charakterystyce p

Podstawowe własności liczby Milnora w charakterystyce 0 łatwo otrzymać stosując lemat Teissiera (cf. [CN-P]). Gdy charakterystyka jest dodatnia, lemat wymaga dodatkowych założeń.

Dla każdego zredukowanego szeregu $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$ (bez czynników wielokrotnych) i dla każdego parametru regularnego l definiujemy

$$P_l(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial l}{\partial x} \quad (\text{krzywa polarna } f \text{ względem } l) .$$

Gdy $l = -bx + ay$, to $P_l(f) = a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y}$. Dalej zakładamy, że l nie dzieli f .

Twierdzenie 1.1 ([P3], lemat Teissiera w charakterystyce p)

Założmy, że

- (i) $i_0(l, f) \not\equiv 0 \pmod{p}$,
- (ii) *dla każdego nierozkładalnego czynnika h szeregu $P_l(f)$: $i_0(l, h) \not\equiv 0 \pmod{p}$.*

Wtedy $i_0(f, P_l(f)) \leq \mu(f) + i_0(f, l) - 1$, przy czym równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy jest spełniony warunek

- (iii) *dla każdego nierozkładalnego czynnika h szeregu $P_l(h)$: $i_0(f, h) \not\equiv 0 \pmod{p}$.*

Wniosek 1.2 ([T], lemat Teissiera w charakterystyce 0)

Gdy $p = 0$, to $i_0(f, P_l(f)) = \mu(f) + i_0(f, l) - 1$.

2 Formuła Milnora

Dla każdego szeregu zredukowanego $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$ definiujemy

$$\mathcal{O} = \mathbb{K}[[x, y]] \Big/ (f) ,$$

$\mathcal{M}$ = pełny pierścień ułamków pierścienia $\mathcal{O}$,

$\hat{\mathcal{O}}$ = domknięcie całkowite pierścienia $\mathcal{O}$ w $\mathcal{M}$,

$\mathcal{C}$ = konduktor $\mathcal{O}$ w $\hat{\mathcal{O}}$,

$$\delta(f) = \dim_{\mathbb{K}} \hat{\mathcal{O}} \Big/ \mathcal{O} ,$$

$$c(f) = \dim_{\mathbb{K}} \hat{\mathcal{O}} \Big/ \mathcal{C} .$$

Jest $c(f) = 2\delta(f)$ (twierdzenie Gorensteina). Potrzebne informacje na temat na temat powyższych pojęć Czytelnik znajdzie w [P1] i [G-L-S].

Twierdzenie 2.1 (Formuła Milnora, [Mi], [R])

Zakładamy, że $\text{char}\mathbb{K} = 0$. Wtedy dla każdego szeregu zredukowanego $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$:

$$\mu(f) = 2\delta(f) - r(f) + 1,$$

gdzie $r(f)$ jest liczbą czynników nierozkładalnych f .

W charakterystyce skończonej formuła nie jest prawdziwa. Deligne w [D] udowodnił jednak

Twierdzenie 2.2 (Twierdzenie Deligne’a [D], [MH-W])

Dla każdego szeregu zredukowanego $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$ ($\mathbb{K}$ ciało dowolnej charakterystyki) zachodzi nierówność

$$\mu(f) \geq 2\delta(f) - r(f) + 1.$$

Ostatnio Greuel ze swoimi uczniami udowodnił

Twierdzenie 2.3 ([B-G-M]) Jeżeli $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$ jest osobliwością niezdegenerowaną w sensie Kouchnirenki, to

$$\mu(f) = 2\delta(f) - r(f) + 1.$$

Stosując lemat Teissiera (w dowolnej charakterystyce) i dobrze znane własności niezmienników $c(f)$, $\delta(f)$ (por. [P1]) można dowieść związku między lematem Teissiera i formułą Milnora.

Twierdzenie 2.4 ([P3]) Niech f będzie szeregiem zredukowanym oraz $f = f_1 \dots f_r$ jego rozkładem na czynniki pierwsze. Załóżmy, że istnieje parametr regularny l taki, że $i_0(f_i, l) \not\equiv 0 \pmod{p}$ dla $i = 1, \dots, r$. Wtedy następujące warunki są równoważne

$$(T) \quad i_0(f, P_l(f)) = \mu(f) + i_0(f, l) - 1,$$

$$(M) \quad \mu(f) = 2\delta(f) - r(f) + 1.$$

Z twierdzenia powyższego wynika łatwo formuła Milnora w charakterystyce 0. Innym łatwym wnioskiem jest

Twierdzenie 2.5 ([Ng]) Niech $p = \text{char}\mathbb{K} > 0$ i założmy, że istnieje parametr regularny l taki, że $i_0(f, l) = \text{ord } f$ oraz $i_0(f, P_l(f)) < p$. Wtedy $\mu(f) = 2\delta(f) - r(f) + 1$.

3 Liczba Milnora krzywych nierozkładalnych

Krzywą (lokalną) nierozkładalną nazywamy szereg nierozkładalny $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$. Półgrupa stowarzyszona z f , to podpółgrupa $\Gamma(f) \subset \mathbb{N}$ półgrupy addytywnej $\mathbb{N}$ złożona z liczb $i_0(f, g)$, gdzie $g \not\equiv 0 \pmod{f}$. Każda półgrupa $\Gamma(f)$ ma minimalny ciąg generatorów $\beta_0, \dots, \beta_g$ zdefiniowany następująco:

$$\begin{aligned}
& \cdot \bar{\beta}_0 = \min \Gamma(f) \setminus \{0\}, \\
& \cdots \bar{\beta}_k = \min \Gamma(f) \setminus (\mathbb{N}\bar{\beta}_0 + \dots + \mathbb{N}\bar{\beta}_{k-1}) \text{ dla } k = 1, \dots, \mathbf{g} \\
& \cdots \text{NWP}(\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}}) = 1.
\end{aligned}$$

Wykład podstawowych własności półgrup stowarzyszonych z krzywymi nierozkładalnymi Czytelnik znajdzie w [GB-P] (por. także [G-L-S]).

Dla krzywej nierozkładalnej f formuła Milnora przyjmuje postać $\mu(f) = 2\delta(f)$ lub równoważnie $\mu(f) = c(f)$. Nierówność Deligne’a stwierdza, że $\mu(f) \geq c(f)$ w dowolnej charakterystyce. W pracy [GB-P bis] autorzy sformułowali następującą hipotezę

Hipoteza 3.1 *Niech f będzie krzywą nierozkładalną, $\Gamma(f) = \mathbb{N}\bar{\beta}_0 + \dots + \mathbb{N}\bar{\beta}_{\mathbf{g}}$ półgrupą stowarzyszoną z f . Niech $p = \text{char}\mathbb{K}$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

- (i) $\bar{\beta}_k \not\equiv 0 \pmod{p}$ dla $k = 0, 1, \dots, \mathbf{g}$,
- (ii) $\mu(f) = c(f)$.

Również w pracy [GB-P bis] udowodniono Hipotezę 3.1 przy dodatkowym założeniu $p > \text{ord } f = \bar{\beta}_0$. W artykule [H-R-S] autorzy udowodnili implikację (i) $\Rightarrow$ (ii) bez dodatkowych założeń.

Literatura

- [B-G-M] Boubakri, Y., Greuel, G-M., Markwig, T. *Invariants of hypersurface singularities in positive characteristic*, Rev. Mat. Complut. (2010) 25, 61–85
- [CN-P] Cassou-Noguès, Pi., Płoski, A. *Invariants of plane curve singularities and Newton diagrams*, Univ. Iag. Acta Mathematica 49 (2011), 9–34
- [D] Deligne, P. *La formule de Milnor*, SGA 7 II, Exposé XVI, LNM 340 (1973), 197–211
- [G-L-S] Greuel, G-M., Lossen, C., Shustin, E. *Introduction to Singularities and Deformations*, Springer, Berlin 2007.
- [G-N] Greuel, G-M., Nguyen, H.D. *Some remarks on the planar Kouchnirenko’s theorem*, Rev. Mat. Complut. (2012) 25, 557–579
- [GB-P] García Barroso, E., Płoski, A. *An approach to plane algebroid branches*, Rev. Mat. Complut. (2015) 28, 227–252

- [GB-P bis] García Barroso, E., Płoski, A. *The Milnor number of plane irreducible singularities in positive characteristic*, arXiv:150507075v1[math.AG] to appear in Bull. London Math. Soc.
- [H-R-S] Hefez, A., Rodrigues, J. H. O., Salamao, R. *The Milnor number of a hypersurface singularity in arbitrary characteristic*, arXiv:1507.03179v1[math.AG] 12 Jul 2015
- [Mi] Milnor, J. W. *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press 1968.
- [MH-W] Melle-Hernández, A., Wall, C.T.C. *Pencil of curves on smooth surfaces*, Proc. London Math. Soc., III Ser. 83 (2), 2001, 257–278
- [Ng] Nguyen, H. D. *Invariants of plane singularities and Plücker formulas in positive characteristic*, arXiv:1412.5007v1[math.AG] 16 Dec 2014
- [P1] Płoski, A. *Plane algebroid branches after R. Apéry*, Łódź 2014, 34-44 konfrogen.math.uni.lodz.pl
- [P2] Płoski, A. *Introduction to the local theory of plane algebraic curves*. In: Analytic and Algebraic Geometry ed Krasinski, T., Spodzieja, St. Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódź, Łódź 2013
- [P3] Płoski, A. *On the Milnor formula*, in preparation
- [R] Risler, J. J. *Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane*, Bull. Soc. Math. Fr. 99 (4) (1971), 305–311
- [T] Teissier, B. *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Astérisque, 7-8 (1973), 285–362

ON THE MILNOR NUMBER OF PLANE CURVE SINGULARITIES IN FINITE CHARACTERISTIC

Summary. We survey recent results on the Milnor number of plane curve singularities in characteristic p .

KATEDRA MATEMATYKI I FIZYKI
POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA
AL. TYSIĄCLECIA PAŃSTWA POLSKIEGO 7
25-314 KIELCE, POLAND
E-MAIL: matap@tu.kielce.pl

Łódź, 11 – 15 stycznia 2016 r.

GEOMETRIA KWADRYKI - OD XIX DO XXI WIEKU

Michał Szurek (Warszawa)

1. Motywy, a raczej usprawiedliwienie. Nie pracuję naukowo od kilku lat i moja wiedza w zakresie specjalności, jaką była geometria algebraiczna, jest już nieco przedawniona. W artykule omawiam więc swoje wyniki z lat dziewięćdziesiątych. Ale nie te wyniki były motywacją do jego napisania, artykuł nie jest pracą naukową, a raczej esejem i odniesieniem do historii.

W latach dziewięćdziesiątych poprzedniego stulecia wszedłem na krótko, ale dość głęboko, w obszar historii matematyki. Nietypowo, było to związane z pracą badawczą o algebraicznych wiązkach wektorowych nad rozmaitościami Fano – do których należy i trójwymiarowa kwadryka $\mathbb{Q}_3$ w zespolonej przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}^4$. Okazało się, że moje (wspólne z Giorgio Ottavianim, [OSz]) wyniki z zakresu geometrii wiązek wektorowych dały się znacznie bardziej interesująco opisać, gdy „odkurzyliśmy” pewną pracę [Wil], dziś już osiemdziesięcioletnią. Napisałem wyżej, że to „nietypowe”, bo na ogół przecież matematykę uprawiamy ahistorycznie, tak samo jej nauczamy (niestety, ale sądzimy, że tak trzeba), a Thomas S. Kuhn w swojej głośnej niegdyś książce *Struktura rewolucji naukowych*, [Ku], podniósł to do rangi dogmatu, powołując się zresztą na Whiteheada:

Po co czić to, co dzięki najtrwalszym wysiłkom nauki udało się wyeliminować? Deprecjonowanie faktów historycznych jest głęboko i prawdopodobnie funkcjonalnie zakorzenione w ideologii zawodowej uczonych (...) Whitehead trafnie ujął to ahistoryczne nastawienie społeczności uczonych, kiedy pisał: „Nauka, która nie może się zdobyć na to, aby zapomnieć o swych założycielach, jest zgubiona”. Nie miał jednak do końca racji, gdyż nauka, podobnie jak inne sfery zawodowej aktywności, potrzebuje bohaterów i zachowuje w pamięci ich imiona. Na szczęście uczeni, zamiast zapominać o tych bohaterach, potrafili zapomnieć o ich pracach lub je rewidować.”

Pamiętajmy, że już Archimedes potrafił całkować – za pomocą metody wyczerpywania. Nie była to metoda dająca nadzieję na ogólność, ale być może następne pokolenia Starożytnych dałby sobie z tym radę..., gdyby istniało jakiegokolwiek zapotrzebowanie społeczne na tego typu badania, jak to się stało w na początku XVII wieku.

2. Powrót do przeszłości. Najtrudniej jest oczywiście odtworzyć sposób myślenia naszych wielkich poprzedników i rzutować na teraźniejszość. Czy to jest w ogóle wykonalne? Pasjonująca lektura rozprawy doktorskiej (1883) Corrado Segre (1863-1924), [S], dała mi wiele do myślenia na ten temat.

Najpierw kilka definicji, współcześnie ujętych. Kwadryką $\mathbb{Q}_n$ będzie dla nas hiperpowierzchnia wymiaru n i stopnia 2, określona przez formę kwadratową symetryczną q_{ij} , a więc opisaną przez zera funkcji $\sum_{i,j=0}^{n+1} q_{ij}x_ix_j$ w przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}^{n+1}$ – nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Interesuje nas w zasadzie kwadryka gładka (nieosobliwa). Nad ciałem algebraicznie domkniętym (charakterystyki różnej od 2) każda nieosobliwa kwadryka jest liniowo równoważna ze zbiorem postaci $\sum_{i=0}^{n+1} x_i^2 = 0$. W podstawowym kursie geometrii na studiach spotykamy się z kwadrykami w przestrzeni rzeczywistej, są to elipsoidy, paraboloidy i hiperboloidy. Jak zobaczymy dalej, bardziej właściwą analogią wielowymiarową jest nie sfera, a hiperboloida jednopowłokowa.

Przenieśmy się do lat osiemdziesiątych dziewiętnastego wieku. Zdajmy sobie sprawę, że po pierwsze, nie było jeszcze wtedy teorii mnogości (w dzisiejszym sensie). Nie istniała algebra liniowa (taka, jak ją znamy dzisiaj) – jej powstanie (ok. 1900 roku) przypisują sobie zarówno Niemcy, jak i Włosi. Mało tego, „nie było” zasady indukcji matematycznej, tej jedynej reguły logicznej, która nieznana była średniowiecznym uczonym. Dzisiejszy formalizm (początek indukcji, założenie, krok indukcyjny) zastępowano prostym „i tak dalej”. I jakoś szło. Niemal równieśnikiem Corrado Segrego (dokładniej: od dwa lata starszy) był Alfred Whitehead, a Bertrand Russell był o osiem lat młodszy. Na ich *Principia Mathematica* czekać przyszło jeszcze ćwierć wieku. Nikomu nie przychodziło do głowy, by definiować matematykę jako naukę o zdaniach postaci $a \Rightarrow b$. Pewniki Euklidesa znano oczywiście od dwóch tysiącleci, ale aksjomatyczne ujęcie matematyki jeszcze się nie upowszechniło. Sądzę, że żaden wykładowca nie był wtedy w stanie zażartować tak, jak ja to niekiedy robię na wykładzie algebry: jeżeli w zbiorze krzeseł na sali określę odpowiednio działania, to ten zbiór może być ciałem (a pierścieniem na pewno) – to wszystko jest kwestią spełnienia odpowiednich aksjomatów.

Z przykrością odkrywam, że obserwowany spadek obecnego poziomu nauczania matematyki objawia się również i w tym, że studenci studiów typu politechnicznego (z którymi mam do czynienia od 15 lat) coraz gorzej przyswajają sobie pojęcia abstrakcyjne. Bardzo trudno jest im pojąć liczby zespolone, aksjomatykę przestrzeni liniowej, grup itp. Co gorsza, nie rozumieją pojęcia dowodu matematycznego. Ale wracamy do geometrii kwadryki.

3. Czy Corrado Segre zdałby dzisiaj egzamin z algebry liniowej? Ten przydługi wstęp był po to, by łatwiej zrozumieć trudności, jakie miał 20-letni Corrado z samym określeniem przestrzeni liniowej (a potem: rzutowej). W moim (M.Sz.) przekładzie brzmi ono tak:

Mówimy, że zbiór ciągły dowolnych jednostek, których liczba jest równa m razy nieskończoność (to znaczy, ogólnie, wśród których znajduje się skończona ich liczba spełniających m prostych warunków) tworzy przestrzeń wymiaru m , a obiekty te nazywamy elementami.

A następnie: *Dowolną przestrzeń wymiaru m nazwiemy liniową, gdy można każdemu jej elementowi przypisać wartości liczbowe (rzeczywiste lub zespolone) w ten sposób, że, bez żadnego wyjątku, dowolnej grupie wartości o których mowa odpowiada jedyny element rzeczonyj przestrzeni i vice versa, każdemu elementowi odpowiada jedyna taka grupa wartości. Te wartości odpowiadające elementom nazywamy współrzędnymi.*

Nic dziwnego, że określenia te zaopatrzone zostały notą redakcyjną, że mają *carattere critico*, ale – i to ciekawe – że jest to bez znaczenia, bo w dalszym ciągu pracy te określenia są w zasadzie nie używane. Szczególnie pierwsze określenie, przestrzeni wymiaru m wydaje się bardzo niedoskonałe (coż są to „proste warunki” ?) a nawet błędne. Wydaje się jednak, że w zdaniu w nawiasie Segre próbuje oddać istotę dzisiejszego pojęcia bazy przestępniej. Nieprzywiedlny zbiór algebraiczny X jest wymiaru m nad ciałem K , gdy ciało funkcji wymiernych $K(X)$ jest skończonym rozszerzeniem ciała funkcji wymiernych m zmiennych $K(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Na przykład zbiór określony równaniem $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ w przestrzeni afinicznej jest wymiaru 3, bo są na nim trzy i tylko trzy niezależne algebraicznie funkcje np. x_1, x_2, x_3 . W świetle późniejszego (1926) twierdzenia Emmy Noether o normalizacji jest to prawidłowa definicja.

Zatem... nie zmylił się mistrz taki [KJ]. Matematyka w pracy Segrego jest dojrzała, nawet w świetle naszych, obecnych standardów. On po prostu rozumiał pojęcia i wiedział, co jest matematyką ... i nie musiał precyzować definicji. Jak doskonale wiemy, w rozwoju matematyki zdarzało się wiele razy, że dobrze rozumiano pewne teorie, zanim ktoś uporządkował ich logiczne podstawy (teoria liczb zespolonych, rachunek różniczkowy). Warto też przytoczyć fragment, w którym autor (tzn. Corrado Segre) jak gdyby tłumaczy silnie akcentowaną potem przez Bertranda Russella, a dla nas dziś oczywistą opinię, że badaniach matematycznych nie jest ważna natura badanych obiektów, a tylko jakie zachodzą między nimi relacje:

Rozważmy dowolną przestrzeń (...). Nazwiemy punktem każdy z jej elementów, niezależnie od tego, jaką ma naturę (która jest dla nas zupełnie nieważna).

Pierwszą historycznie książką, w której można znaleźć ślady pojęcia przestrzeni liniowej jest książka Bernarda Bolzano *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* (1804). Dobrze rozumiał to pojęcie Hermann Grassmann (1809-1877), którego idee wyprzedzały jego czas i zostały docenione dopiero po wielu latach [D]. Obecna definicja przestrzeni liniowej pochodzi, jak się wydaje, od Giuseppe Peano [P]. Około 1900 roku można już mówić o ugruntowaniu się teorii przestrzeni liniowych w sensie znanym nam dzisiaj.

4. Matematyka bez teorii mnogości? Segre używał terminu *insieme* (zbiór), rozumiejąc go w „naturalny”, intuicyjny sposób, jak wszyscy aż do zmiany paradygmatu, dokonanego za sprawą Cantora. Nie podejrzewano, że istnieje wiele rodzajów nieskończoności a symbol taki, jak ∞^2 , podwójna nieskończoność, był dla każdego zrozumiały. Tytuł jednej z późniejszych prac Segrego: *Introduzione alla geometria sopra una ente algebrico semplicemente infinito*, (Annali di matematica pura e applicata, 1894, serie II, tomo XXII, s. 41-142) będzie niezrozumiały, dopóki nie przeczytamy, że *una varieta semplicemente infinita* (rozmaitość nieskończona w sposób prosty) to po prostu krzywa (*curva*), zaś *doppiamente infinita* (czyli podwójnie nieskończona) to powierzchnia. Segre pisze wiele razy „znajdźmy liczbę przestrzeni o takich a takich własnościach” i podaje odpowiedź w postaci: ∞^k – niekiedy to oznaczenie da się zobaczyć i dziś na wykładzie włoskiego matematyka. Wreszcie – rzecz ciekawa, polem (ciałem), nad którym wszystkie rozmaitości były określone, nie było bynajmniej $\mathbb{C}$, ale zbiór liczb algebraicznych. Liczbami przestępnymi nikt się specjalnie nie przejmował – ważna była algebraiczna domkniętość ciała. Jak pamiętamy, dopiero w 1844 roku Joseph Liouville odkrył istnienie liczb przestępnych, przestępnosć π udowodnił Ferdinand von Lindemann w 38 lat później, to jest w 1882 r., a metody holomorficzne w geometrii algebraicznej to rzecz znacznie późniejsza.

5. Zapomniany trop. Segre używa z pozoru dziwnego oznaczenia S'_n na przestrzeń liniową (rozumianą tu jako „coś płaskiego”: prostą rzutową, płaszczyznę, itd., a więc zanurzone $\mathbf{P}^k$.) Oznaczenie to wydaje się być śladem dawnego, zapomnianego podejścia do definicji $\mathbf{P}^n(K)$. Jak doskonale wiemy, przestrzenią rzutową (wymiaru n) nad ciałem K nazywamy w algebrze zbiór ciągów $(n+1)$ -elementowych tego ciała, z pominięciem ciągu zerowego i z utożsamieniem ciągów proporcjonalnych. Przy takim podejściu zapominamy o „pochodzeniu” tego pojęcia: punkty w nieskończoności przestrzeni rzutowej odpowiadają kierunkom linii prostych przestrzeni afinicznej. Natomiast zapomniana jest dzisiaj inna „algebraiczna” interpretacja przestrzeni rzutowej, wykorzystywana w „złotym okresie” włoskiej geometrii algebraicznej, który zaczął się około 1875 roku. Mianowicie: $\mathbf{P}^n = S^n(\mathbf{P}^1)$. Przestrzeń rzutowa wymiaru n jest n -tą potęgą symetryczną prostej. Co to znaczy? Rozpatrzmy najpierw nieuporządkowaną n -tkę punktów prostej afinicznej $\mathbb{C}^1$, tj. liczb $a_1, a_2, \dots, a_n$. Utwórzmy wielomian

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdot \dots \cdot (x - a_n) = \\ = x^n - \sigma_1(a_1, a_2, \dots, a_n)x^{n-1} + \sigma_2(a_1, a_2, \dots, a_n)x^{n-2} + \dots \pm \sigma_n(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

gdzie $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ są bazowymi wielomianami symetrycznymi n zmiennych. Odwrotnie, mając wielomian, rozłożymy go na czynniki i wyznaczymy nieuporządkowaną n -tkę liczb, czyli punktów prostej. W nieskomplikowany sposób poradzimy sobie teraz z dołączeniem ∞ , to znaczy z prostą $\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \infty$. Na przykład układowi 1, 2, 3, ∞ odpowiada wielomian $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ – można mu przypisać punkt $\{0, 1, -6, 11, -6\}$ w zwykłym układzie współrzędnych jednorodnych. Inaczej mówiąc, możemy traktować przestrzeń rzutową $\mathbf{P}^n$ jako zbiór

n -tek punktów na prostej oraz jako zbiór wielomianów (jednej zmiennej) stopnia n . Wielomiany stopni mniejszych niż n odpowiadają wówczas punktom w nieskończoności a równoważność tego modelu ze standardowym zapewniają wzory Viete'a (i zasadnicze twierdzenie algebry!) Zamiast wielomianów jednej zmiennej różnych stopni możemy oczywiście używać wielomianów jednorodnych dwóch zmiennych i „jednorodnej” wersji zasadniczego twierdzenia algebry: każdy wielomian jednorodny dwóch zmiennych x, y (dodatniego stopnia) jest iloczynem wielomianów liniowych $ax + by$.

6. Spazi lineari contenuti in una quadrica o tangenti ad essa. Prześnienie liniowe zawarte w kwadryce lub styczne do niej. Najciekawszym rozdziałem pracy doktorskiej (diploma di laurea) 20-letniego Corrado Segrego jest fragment o prostokreślności kwadryki, czyli o tym, ile k -płaszczyzn (tj. rzutowych $\mathbf{P}^k$ jest zawartych w nieosobliwej kwadryce $\mathbb{Q}_n$. Zaczniemy od zrozumienia sytuacji na rzeczywistej hiperboloidzie jednopowłokowej. Ma ona dwa systemy tworzących: różne proste jednego z tych systemów nie przecinają się, natomiast dwie proste należące do różnych systemów mają jeden punkt wspólny. Jeżeli przez ℓ i ℓ' oznaczymy ogólne proste tych systemów, to na kwadryce $\mathbb{Q}_2$ mamy relacje: $\ell^2 = \ell'^2 = 0, \ell \cdot \ell' = 1$. Dzisiaj widzimy to jako strukturę pierścienia Chow lub pierścienia kohomologii kwadryki trójwymiarowej, $H^*(\mathbb{Q}_3, \mathbb{Z})$. Chodzi o formułę, jak przecinają się podrozmaitości danej rozmaitości. Na kwadryce dwuwymiarowej jest tak, jak na hiperboloidzie jednopowłokowej: proste z jednego systemu tworzących nie przecinają się ze sobą, proste z różnych systemów mają jeden punkt wspólny.

Twierdzenie. Gładka kwadryka $\mathbb{Q}_n$ wymiaru n nie zawiera podprzestrzeni liniowych wymiaru większego niż $\frac{n}{2}$. Wymiar rodziny wszystkich m -płaszczyzn zawartych w takiej kwadryce jest równy

$$d(n, m) = (m+1)(n-m+1) - \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Można łatwo zobaczyć podprzestrzenie możliwie największego wymiaru, tj. $[n]$. Przy okazji zrozumiemy drobną różnicę między kwadrykami parzystego i nieparzystego wymiaru. Równanie $\sum_{i=0}^{n+1} x_i^2 = 0$ może być oczywiście zmienione do jednej z postaci

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \dots x_nx_{n+1} = 0, \quad x_0^2 + x_1x_2 + \dots x_nx_{n+1} = 0,$$

w zależności od parzystości n . Gdy n jest liczbą parzystą, wtedy w pierwszym napisanym powyżej równaniu bierzemy $x_0 = x_2 = x_4 = \dots = x_n = 0$, pozostałe zmienne mogą przyjmować dowolne wartości, wypełniając zatem przestrzeń rzutową $\mathbf{P}^{n/2}$. Oczywiście i dualnie, możemy wziąć $x_1 = x_3 = x_5 = \dots = x_{n+1} = 0$, pozostałe zmienne przyjąć dowolnie. W przypadku nieparzystego n bierzemy oczywiście $x_0 = 0$ i potem zerujemy co drugą zmienną. Oczywiście nie są to wszystkie możliwe płaskie podprzestrzenie największego wymiaru.

Zanim jednak zobaczymy, jak się to interesująco dowodziło i dowodzi, pobawmy się funkcją $d(n, m)$, wykorzystując bezrozumne elektroniczne urządzenia liczące, które tak rozpanoszyły się w naszym dwudziestym pierwszym wieku. Rozpatrzmy kwadrykę wymiaru 33 (dlaczego taką? – a dlaczego nie?). Program *Mathematica* wyrzuci momentalnie

$$\text{In}[1] := n = 33; \text{Table}[d[n, m], m, 1, \text{Floor}[n]]$$

$$\text{Out}[1] = \{63, 90, 114, 135, 153, 168, 180, 189, 195, 198, 198, 195, 189, 180, 168, 153\}.$$

Co w tym nadzwyczajnego? No, może i nic. Ale popatrzmy na wymiary: od wymiaru 5 do 16 mamy dualność - podprzestrzeni liniowych wymiaru 5 na kwadryce 33-wymiarowej jest tyle samo ile 16-wymiarowych, sześciowymiarowych tyle, ile 15-wymiarowych i tak dalej. Tylko dla wymiarów kwadryki podzielnych przez 3 występuje coś podobnego. Nietrudno to sprawdzić, to jest zadanie na ekstremum funkcji kwadratowej! Warianty tego zadania mogą być chyba przydatne w OM. Ale taka koincydencja „musi” mieć podłoże geometryczne. Jakie? Nie jest to zadanie w stylu matematyki dwudziestego pierwszego wieku, ale po pierwsze: może i coś ciekawego tu się da zobaczyć, po drugie – odkryłem to naprawdę bawiąc się komputerem.

Zobaczmy, jak wzoru na liczbę podprzestrzeni dowodzi Segre i porównajmy z późniejszym o 85 lat tekstem [Griffiths, Harris, rozdz. 6.1]. Najpierw Segre (1883); S'_m będzie oznaczać taką m -płaszczyznę. Zachowajmy styl wypowiedzi i oznaczenia, które wydają się nam dzisiaj po prostu niewygodne, zaciemniające tok wywodu, ale oddające „ducha”. W szczególności n nie jest wymiarem kwadryki φ , a liczbą współrzędnych $x_1, x_2, \dots, x_n$ w stosownej przestrzeni rzutowej; kwadryka jest zatem wymiaru $n - 2$. Segre pisze mniej więcej tak (przekład mój, M.Sz.) :

Dla $m \leq (n - 2)/2$ łatwo jest zobaczyć, że kwadryka φ istotnie zawiera nieskończenie wiele S'_m . Weźmy dowolny punkt x należący do φ i dowolny punkt x' z przecięcia płaszczyzny stycznej z φ . Prosta S'_1 łącząca x' z x jest zawarta w φ . Płaszczyzna styczna do φ w punkcie x' przechodzi przez x i przecina płaszczyznę styczną w x wzdłuż c , zawierającej owo S'_1 ; następnie bierzemy poza nią nowy punkt x'' należący do φ i łączymy go za pomocą S'_1 z x' . Otrzymujemy S'_2 całkowicie zawarte w φ i przechodzące między innymi przez punkty x, x', x'' . Płaszczyzna styczna do φ w punkcie x'' przecina S'_{n-3} wzdłuż S'_{n-4} (przecięcie płaszczyzn stycznych w x, x', x'') zawierającej S'_2 . W części wspólnej takiej S'_{n-4} z φ , znajdujemy nowy punkt x''' poza S'_2 i łączymy go z S'_2 za pomocą S'_3 , która zawiera x, x', x'', x''' . Kontynuując, otrzymujemy przestrzenie liniowe zawarte w φ , rosnących wymiarów. Chcemy rozpatrywać, ogólnie, liczbę takich S'_m , które przechodzą przez daną S'_k zawartą w φ , oczywiście pod warunkiem, że $k < m$. Zauważmy, że w tej poprzedniej konstrukcji punkt x' możemy wybrać na ∞^{n-2} sposobów, punkt x'' z przecięcia z płaszczyzną styczną w x można wybrać na ∞^{n-3} sposobów, punkt x''' z przecięcia z płaszczyznami stycznymi w x i x' można wybrać na ∞^{n-4} sposobów, ... , punkt $x^{(k)}$ na ∞^{n-2-k} sposobów, ... , i wreszcie punkt $x^{(m)}$ na ∞^{n-2-m} sposobów.

Punkty $x, x', x'', \dots, x^{(k)}$ wyznaczają daną przestrzeń zawartą w φ , a zaś łącznie z punktami $x^{(k+1)}, \dots, x^{(m)}$ wyznaczają S'_m , zawartą całkowicie w φ i przechodzącą przez ową S'_k .

Pierwsze punkty można wybrać na

$$\infty^{n-2-k-1} \cdot \infty^{n-2-k-2} \cdot \infty^{n-2-m} = \infty^{(m-k)(2n-m-k-5)/2}$$

sposobów. Tę liczbę trzeba podzielić przez $\infty^{(m-k)m}$, ponieważ punkty $x^{(k+1)}, \dots, x^{(m)}$, jako dowolne punkty S'_m można wybrać na $\infty^{(m-k)m}$ sposobów.

Otrzymujemy wynik, że przez daną S'_k na kwadryce przechodzi

$$\infty^{(m-k)(2n-3m-k-5)/2}$$

zawartych w niej S'_m .

Bezpośrednio stąd wynika, że na całej kwadryce jest $\infty^{(m+1)(2n-3m-4)/2}$ takich S'_m , ponieważ jest ∞^{n-2} punktów x , z których ∞^m należą do S'_m .

Tu sprawa podwójnie ciekawa, Segre podaje jeszcze dwa inne dowody tego faktu – dzisiaj w pracy naukowej nikt by tak nie zrobił. Ponadto, czyni to po to, by „ostatecznie potwierdzić” uzyskany wynik – jak w sądzie: im więcej dowodów, tym mocniej ugruntowana teza. Zobaczmy jeden z tych dowodów (wzoru o liczbie podprzestrzeni liniowych w kwadryce). Przytoczony wyżej dowód Segre nazywa syntetycznym, poniższy: analitycznym. Oto tekst Segrego (w moim tłumaczeniu):

Możemy teraz znaleźć analitycznie liczbę przestrzeni S'_m zawartych w φ , co będzie służyć potwierdzeniu omawianych zagadnień. Niech $x, x', \dots, x^{(n)}$ będzie układem $n+1$ punktów, które wyznaczają S'_m . Aby cała ta przestrzeń była zawarta w φ , dla dowolnych wartości λ musi zachodzić

$$\varphi(\lambda x + \lambda' x' + \dots + \lambda^{(m)} x^{(m)}) = 0,$$

stąd

$$\lambda^2 \varphi(x) + \lambda'^2 \varphi(x') + \dots + \lambda^{(m)2} + 2\lambda \lambda' \varphi(x, x') + \dots = 0,$$

a zatem jest

$$\varphi(x) = \varphi(x') = \dots = \varphi(x^{(m)}) = \varphi(x, x') = \dots = \varphi(x^{(m-1)}, x^{(m)}) = 0.$$

Równania te występują w liczbie $(m+1)(m+2)/2$ i wyrażają fakt, że $m+1$ punktów $x, x', \dots, x^{(m)}$ leży na φ a także, że są parami sprzężone względem φ , czyli są w płaszczyznach stycznych do φ – zgodnie z rezultatami rozważań syntetycznych. Ponieważ punkty $x, x', \dots, x^{(m)}$ możemy wybrać w dowolny sposób na szukanej S'_m , musimy zatem nałożyć m warunków i w ten sposób mamy $(m+1)(m+2)/2 + m(m+1)$ równań, podczas, gdy liczbą niewiadomych (są nimi współrzędne punktów) jest $(m+1)(n+1)$. Zatem układ jest nieoznaczony

$$(m+1)((n-1) - (m+2)/2) = (m+1)(2n-3m-4)/2$$

razy, innymi słowy, kwadryka φ zawiera $\infty^{(m+1)(2n-3m-4)}$ przestrzeni S'_m , jak to już widzieliśmy wcześniej.

Tyle Segre. Współczesny recenzent chciałby to napisać inaczej. Najpierw obliczamy, że rozwiązania układu $(m+1)(m+2)/2$ równań z $(m+1)(n-1)$ niewiadomymi tworzą zbiór wymiaru równemu różnicy liczby niewiadomych i liczby równań – w Polsce nazywa się to arbitralnie twierdzeniem Kroneckera-Cappelli – a potem od tego trzeba odjąć wymiar grupy automorfizmów.

Uff! Jak tego dowodzą Griffiths i Harris (1978), [GH]? W ich rozumowaniu występują dwa charakterystyczne motywy: po pierwsze „uzmienniamy” nie tylko k -płaszczyznę na danej kwadryce, ale i całą kwadrykę. Rozpatrujemy zbiór wszystkich kwadryk $\mathbf{F}$. Widzimy wszystko dynamicznie, wszystko się rusza i zmienia. Wróćmy też do współczesnych oznaczeń, niech n będzie wymiarem kwadryki. Ponieważ wymiar przestrzeni form kwadratowych $n+2$ zmiennych jest równy

$$q_n = \frac{(n+2)(n+3)}{2},$$

zatem kwadryk w $\mathbf{P}^{n+1}$ jest $\dim \mathbf{F} = \frac{(n+2)(n+3)}{2} - 1$.

Drugim charakterystycznym motywem rozumowania jest rozpatrywanie *zbioru incydencji*. W naszym kontekście jest to zbiór złożony z par $(\mathbb{Q}, P)$, gdzie $\mathbb{Q} \in \mathbf{F}$ jest kwadryką, a $P \subset \mathbb{Q}$ jest k -płaszczyzną. Możemy traktować P jako element Grassmannianu $G = G(k, n+1)$. Musimy wiedzieć, że zbiór incydencji, jak i Grassmannian, ma strukturę algebraiczną i $\dim \text{Grass}(k, n+1) = (k+1)(n-k+1)$. Niech $\mathbf{I}$ będzie zbiorem incydencji. Mamy dwa naturalne rzutowania:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1 & \\ \mathbf{I} & \longrightarrow & \mathbf{F} \\ \pi_2 \downarrow & & \\ \mathbf{G} & & \end{array}.$$

Wymiar przestrzeni, o który nam chodzi, to wymiar włókna ogólnego odwzorowania π_1 . Obliczamy inne wymiary. Form kwadratowych $k+1$ zmiennych jest $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, zatem wymiar włókna rzutowania π_2 jest równy różnicy

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1.$$

Suma tej liczby i wymiaru bazy, na którą się rzutuje, to znaczy $\mathbf{G}$, jest wymiarem zbioru incydencji, tzn. $(k+1)(n-k+1) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1$. Poszukiwany wymiar rodziny wszystkich k -płaszczyzn na kwadryce wymiaru n jest zatem równy różnicy

$$\dim \mathbf{I} - \dim \mathbf{F} = (k+1)(n-k+1) - \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że wynik zgadza się z wcześniejszym wynikiem Segrego, a różnica polega tylko na oznaczeniach.

Oddajmy znowu głos Segremu – dowodzi on w jeszcze jeden sposób wzoru na liczbę płaskich podrozmaitości na kwadryce, a czynią to za pomocą wielce potem efektywnej metody rzutowania środkowego. Otóż wybierzmy (hiper)płaszczyznę H i punkt na kwadryce, ale poza H , $p \notin H$ i rzutujemy kwadrykę na H z tego punktu. Odzworowanie jest wzajemnie jednoznaczne poza przecięciem hiperpłaszczyzny stycznej do kwadryki, wyprowadzonej z punktu p , z tą kwadryką i to jest podstawą do rozumowań indukcyjnych.

7. Kwadryka Kleina po staremu i po nowemu. Jak mówi nie całkiem niepoważna *zasada Arnolda*, żadne pojęcie matematyczne nie jest nazwane nazwiskiem rzeczywistego odkrywcy. Nie inaczej jest ze współrzednymi Plückera, kwadryką Kleina itp. Wszystko to powinno być oddane Grassmannowi (Hermann Günther Grassmann, szczecinianin, 1809-1877). Zauważmy najpierw, że dzięki dualizmowi zawartemu w równaniu linii prostej na płaszczyźnie rzutowej

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

zbiór linii prostych zawartych w $\mathbf{P}^2$ ma naturalną strukturę rozmaitości algebraicznej, izomorficznej z tą samą płaszczyzną a zwanej w tym kontekście przestrzenią dualną do $\mathbf{P}^2$, oznaczaną jako $\mathbf{P}^{2*}$. Widzimy poza tym, że wybór izomorfizmu między płaszczyzną, a płaszczyzną do niej dualną jest wyznaczony przez wybór nieosobliwej formy kwadratowej, czyli stożkowej gładkiej.

Zbiór linii prostych, leżących w $\mathbf{P}^3$ ma trochę bardziej skomplikowaną strukturę, ma naturalną strukturę kwadryki w przestrzeni pięciowymiarowej. Najprościej przekonać się o tym tak. Niech $a = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ i $b = [b_0, b_1, b_2, b_3]$ będą dwoma punktami przestrzeni. Wtedy zespół wyznaczników $P(a, b) =$

$$= \left[\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right]$$

wyznacza pewien punkt przestrzeni $\mathbf{P}^5$, niezależny od wyboru punktów a, b na ustalonej prostej $\ell \subset \mathbf{P}^3$. Jeżeli te wyznaczniki oznaczmy kolejno przez p_{ij} , to mamy zależność

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0.$$

A zatem zbiór linii prostych przestrzeni trójwymiarowej $\mathbf{P}^3$ ma naturalną strukturę czterowymiarowej kwadryki w $\mathbf{P}^5$. To wiedział już Grassmann, ale dzisiaj nazywamy ją („zasada Arnolda”!) kwadryką Kleina.

Czy wszyscy znają ten niesamowity dowód niewymierności liczby $\sqrt[n]{2}$ dla $n \geq 3$? Przypuśćmy, że $p^n = 2q^n$ przy całkowitych i niezerowych p, q . Napiszmy prawą stronę w postaci $q^n + q^n$ i skorzystajmy z WTF! Okropne, prawda? Nieco podobnie jest z współczesnym (choć jeszcze dwudziestowiecznym) dowodem tego, że zbiór linii prostych w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbf{P}^3$ ma naturalną strukturę kwadryki. Wybieramy w tym celu stabilną wiązkę wektorową $\mathcal{E}$ rangi 2 na $\mathbf{P}^3$ o klasach Cherna $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. Z teorii Mori (Shigefumi Mori, Fields 1990) wynika, że projektywizacja wiązki $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(1)$ ma dwa rzutowania: „pionowe” na bazową $\mathbf{P}^3$ i „poziome”

na $\mathbb{Q}_4$. Przy projektywizacji linie proste w $\mathbf{P}^3$ „podnoszą się” izomorficznie do linii prostych. Teoria Mori mówi, że co w pierwszym rzutowaniu jest podnoszone izomorficznie, przy drugim rzutowaniu jest ściągane do punktu. To daje omawianą odpowiedniość między punktami kwadryki a liniami prostymi w $\mathbf{P}^3$. Szczegóły są mocno skomplikowane i może porównanie z tym nieco kuglarskim (choć przecież logicznie poprawnym) dowodem niewymierności liczby $\sqrt[n]{2}$ nie jest właściwe.

I jeszcze jeden „powrót do przyszłości”. Systemem liniowym prostych w $\mathbf{P}^3$ nazywamy zbiór linii prostych odpowiadający części wspólnej kwadryki Kleina i hiperplaszczyny (wymiaru 4) w $\mathbf{P}^5$. Nietrudno podać pełną klasyfikację takich systemów. We współrzędnych Plückera równaniem systemu liniowego jest

$$\sum a_{ij}p_{ij} = 0,$$

gdzie $J = [a_{ij}]$ jest macierzą skośnie symetryczną. Systemy liniowe są rozróżnialne za pomocą współczynnika oznaczanego tradycyjnie przez Ω :

$$\Omega = 2(a_{01}a_{23} - a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12}).$$

Gdy $\Omega \neq 0$, to system nazywa się ogólny. Systemy mające $\Omega = 0$ są szczególne. Analiza systemów szczególnych nie jest wcale zamkniętą kartą. Ale przypatrzmy się ogólnym. Macierz skośnie symetryczna J o niezerowym wyznaczniku określa interesującą algebraiczną wiązkę wektorową, zwaną wiązką korelacji zerowej. Najpierw (ćwiczenie dla studentów pierwszego roku) przekonajmy się, że taka macierz musi mieć parzystą liczbę wierszy (i kolumn). Wiemy z kursu algebry liniowej, że nie ma naturalnego izomorfizmu przestrzeni na przestrzeń do niej dualną – zawsze czymś się trzeba podeprzeć, iloczynem skalarnym albo stożkową. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru 4, z której przez projektywizację powstaje trójwymiarowa przestrzeń rzutowa $\mathbf{P}^3$. Zauważmy najpierw, że:

Ogólny system liniowy wyznacza korelację zerową, tzn. izomorfizm $i: V \rightarrow V^*$ taki, że dla każdego $x \in \mathbb{Q}_4$ mamy $x \in i(x)$. Istotnie, $x^T J x = (x^T J x)^T = x^T J^T x = -x^T J x$, a zatem $x^T J x = 0$, czyli $x \in x^T J$.

Z kolei korelacja zerowa wyznacza interesującą wiązkę wektorową rangi 2 na przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}^3$, zwaną właśnie wiązką korelacji zerowej (null correlation bundle). Jej włóknem w punkcie x jest przestrzeń ilorazowa $V/i(x)$. Bardziej dokładne określenie tej wiązki jest następujące. Jeżeli Ω jest wiązką kostyczną na $\mathbf{P}^3$, to przekroje $\Omega \otimes \mathcal{O}(2)$ są w naturalnej odpowiedniości z macierzami antysymetrycznymi 4×4 – wybór macierzy nieosobliwej wyznacza zanurzenie wiązki trywialnej w $\Omega \otimes \mathcal{O}(2)$, a zatem mamy ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \Omega \otimes \mathcal{O}(2) \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0,$$

w którym $\mathcal{N} \otimes \mathcal{O}(-1)$ jest wiązką korelacji zer. Ta niepozornie wyglądająca wiązka wektorowa odgrywa ważną rolę przy klasyfikacji wiązek, ale wspominam o niej z innej okazji.

8. Gawęda o pewnych sprawach. Jerzy Browkin (1934 - 2015) powiedział kiedyś tak: „W dziewiętnastym wieku ludzie znali pewne liczby – obecnie znają je jako rzędy pewnych grup”. Parafrazując to, widzimy, że dawne, pochodzące z połowy dziewiętnastego wieku konstrukcje geometryczne, ukazują się nam teraz w innym świetle – są częścią teorii wiązek wektorowych, bardzo modnej w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych poprzedniego, czyli dwudziestego wieku. A drugie powiedzenie pochodzi od Andrzeja Grzegorczyka (1922 - 2014): „Matematyk ma dwie przyjemności: konstruowanie i dowodzenie”. Ja sądzę jednak, że tych przyjemności jest więcej – wśród nich i radość odkrywania na nowo starych rzeczy: mówiąc nieco pompatycznie, przywracania im dawnego blasku. *Ostrzegłem na początku, że artykuł ma formę eseju.* Otóż we wspólnej pracy z Giorgio Ottavianim w 1994 roku badaliśmy przestrzenie *moduli* wiązek wektorowych rangi 2 na kwadryce trójwymiarowej $\mathbb{Q}_3$. Udało się nam między innymi dokładnie opisać strukturę przestrzeni $\mathcal{M}(0, 2)$, złożoną z wiązek stabilnych o klasach Cherna $c_1 = 0$, $c_2 = 2$. Nie wchodząc w szczegóły, wiązki owe były klasyfikowane przez postaci Jordana macierzy AJ , gdzie A była macierzą symetryczną, zaś J – antysymetryczną. Inaczej rzecz ujmując, typ wiązki zależał od relacji między dwiema formami: symetryczną i antysymetryczną, albo jeszcze inaczej: od konfiguracji linii izotropowych względem formy J na kwadryce określonej przez A . Do opisu osobliwości użyliśmy programu Macalauy, powstałego ledwie kilka lat wcześniej. „Zaraz, zaraz” powiedział Gioorgio, „ja już gdzieś to widziałem”. Po dłuższej chwili przyniósł z biblioteki zakurzony tom z 1936 roku, w którym John Williamson poklasyfikował właśnie to, o co nam chodziło.

Geometria algebraiczna jest we Włoszech jak topologia w Polsce – dawna świetność. Dlatego mój współautor mógł się domyślić, że „to już było”. Ale obu nam było przyjemnie, że odkryliśmy coś, co łączy stare z nowym.

9. Jeszcze jeden stary rezultat w nowym świetle. Niekiedy zbiór linii prostych na rozmaitości algebraicznej X nazywa się rozmaitością Fano tej rozmaitości, $F(X)$, od nazwiska matematyka włoskiego Gino Fano (1871 - 1952). Jest zrozumiałe, że $F(Q_2) = P_1 \sqcup P_1$ (dwie kopie prostej rzutowej). Interesujące jest porównanie dwóch dowodów (starego i nowego) naatępującego faktu:

Każde zanurzenie kwadryki wymiaru 3 w kwadrykę wymiaru 4: $\mathbb{Q}_3 \hookrightarrow \mathbb{Q}_4$ wyznacza utożsamienie $F(\mathbb{Q}_3)$ z przestrzenią rzutową trójwymiarową $\mathbf{P}^3$.

Dowód I („dziewiętnastowieczny”). Niech V oznacza przestrzeń afiniczną (liniową), której projektywizacją jest $\mathbf{P}^3$. Przy zanurzeniu $\mathbb{Q}_3 \hookrightarrow \mathbb{Q}_4$ prosta L jest zawarta w dokładnie dwóch płaszczyznach $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, pochodzących z dwóch systemów tworzących na $\mathbb{Q}_4$; niech $\mathbf{P}_1 = \{\ell \subset \mathbf{P}^3 : x \in \ell\}$, $\mathbf{P}_2 = \{\ell \subset \mathbf{P}^3 : l \subset P\}$. Wówczas odpowiedniość $L \mapsto x$ określa izomorfizm $F(\mathbb{Q}_3)$ na $\mathbf{P}^3$, zaś odpowiedniość $L \mapsto P$ określa izomorfizm $F(\mathbb{Q}_3)$ na $\mathbf{P}^{3*}$.

Dowód „współczesny”, (szkic, szczegóły np. w [O] i [SzW]; tu chcę tylko pokazać zmianę stylu). Rozpatrzmy wiązkę spinorową S na $\mathbb{Q}_3$. Jest to obcięcie wiązki uniwersalnej z Grassmannianu $G(1, 4)$ i jest wiązką stabilną rangi 2, o klasach Cherna $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Na każdej prostej $L \subset \mathbb{Q}_3$ mamy $S|_L = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$.

Projektywizacja $\mathbf{P}(S)$ jest rozmaitością wymiaru 4. Można wykazać, że system liniowy ξ_S definiuje odwzorowanie (kontrakcję) $\mathbf{P}(S)$ w $\mathbf{P}^3$. Ponieważ $S|L = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$, więc w projektywizacji $\mathbf{P}(S) \rightarrow \mathbb{Q}_3$ istnieje krzywa ℓ , która jest ściągnięta do punktu przez odwzorowanie wyznaczone przez system liniowy.

10. Sprawa polska. Niedługo nadejdzie setna rocznica odzyskania niepodległości, a wraz z tą rocznicą 100 lat od słynnego artykułu Zygmunta Janiszewskiego z ideą, którą tak tu streszczę „stwórzmy własną, polską szkołę matematyczną, przyjdźmy do Europy z naszym własnym dorobkiem, na pewno się uda!” W piśmiennictwie polskim na ogół jest przemilczane (choć założyciele Polskiej Szkoły Matematycznej wcale się z tym nie kryli), że był to skopiowany pomysł Włochów, którzy po zjednoczeniu w 1870 roku też mieli biedny kraj, zniszczonym wojnami i wewnętrznymi swarami. Oni postawili na geometrię algebraiczną – Polacy na logikę, topologię i teorię mnogości; analiza funkcjonalna i podstawy geometrii wyskoczyły potem. Jak wiemy, udało się i im, i nam, chociaż Włosi mieli więcej szczęścia – ich geometria algebraiczna odżyła na nowo w latach pięćdziesiątych XX wieku. Topologia ogólna i teoria mnogości weszły do skarbnicy ogólnej wiedzy matematycznej, podstawy geometrii zostały wyeksploatowane jak kopalnie surowców w Tatrach.

Literatura

- [D] Jean Dieudonné, *The tragedy of Grassmann*, Linear and Multilinear Algebra 8 (1) (1979/80), 1-14.
- [GH] Phillip Griffiths, Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, 1978.
- [KJ] Koncert Jankiela, [w:] Adam Mickiewicz, *Pan Tadeusz, czyli ostatni zajazd na Litwie*. Paryż (1834), wyd. Aleksander Jełowicki i wydania późniejsze.
- [Ku] Thomas S. Kuhn *Struktura rewolucji naukowych*, (1962), wydanie polskie Aletheia, 2009, tłum. Helena Ostromecka)
- [O] Giorgio Ottaviani, *Spinor bundles on Quadrics*, Trans. Amer. Math. Soc. 307, 1, p. 301-316 (1988).
- [OSz] Giorgio Ottaviani, Michał Szurek, *On Moduli of Stable 2-Bundles with Small Chern Classes on $\mathbb{Q}_3$* . Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CLXVII (1994), pp. 191-241.
- [Pe] Giuseppe Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*. (1888)
- [S] Corrado Segre, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Memorie Acc. Sci. Torino (II) XXXVI (1883), 3-86.

- [Sz] Michał Szurek, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, t. 1-8, Gdańsk, 2006.
- [SSzW] Ignacio Sols, Michał Szurek, Jarosław A. Wiśniewski, *Rank-2 Fano bundles over a smooth quadric $\mathbb{Q}_3$* . Pacific J. Math., vol. 148, Number 1 (1991), 153-159.
- [Wil] J. Williamson, *On an algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems*, Amer. J. Math., 58 (1936), pp. 141-163

GEOMETRY OF QUADRICS IN PROJECTIVE SPACES, FROM 19TH TO THE 21TH CENTURY

Summary. The article, written in a form of an essay rather than scientific paper, deals with the geometry of a smooth quadric in the projective n -space over complex numbers. We compare old, 19th century methods (mostly by Corrado Segre) with contemporary approach to the same problems (Mori theory, geometry of vector bundles).

Łódź, 11 – 15 stycznia 2016 r.



WYDAWNICTWO
UNIwersytetu
ŁÓDZKIEGO

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62

ISBN 978-83-7969-973-5