matematyka

materiały metodyczne

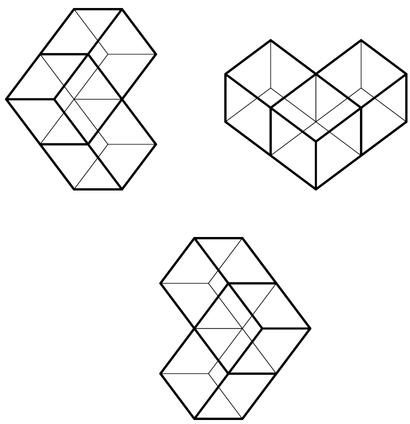
2,7182818284590452353602874713526624977572470936999595749669676277240766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290435729003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190115738341879307021540891499348841675092447614606680822648001684774118537423454424371075390777449920695517027618386062613313845830

redakcja
Ryszard J. Pawlak
Zofia Walczak

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

IX

Geometria w praktyce



Opracowanie

Maciej Czarnecki

ROZDZIAŁ 1

Konstrukcje geometryczne

1.1. Podstawy konstrukcji

Stwierdzenie 1. Okrąg $o(O, r)$ z prostą l

- nie ma punktów wspólnych, gdy $d(O, l) > r$,
- ma dokładnie jeden punkt wspólny, gdy $d(O, l) = r$,
- ma dokładnie dwa punkty wspólne, gdy $d(O, l) < r$.

Stwierdzenie 2. Niech dane będą okręgi $o(O_1, r_1)$ i $o(O_2, r_2)$ oraz niech $d = |O_1O_2| > 0$. Wówczas okręgi te

- nie mają punktów wspólnych, gdy $d < |r_1 - r_2|$ lub $d > r_1 + r_2$,
- mają dokładnie jeden punkt wspólny, gdy $d = |r_1 - r_2|$ lub $d = r_1 + r_2$,
- mają dokładnie dwa punkty wspólne, gdy $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$.

Ponadto, jeżeli $O_1 = O_2$, to okręgi są rozłączne, gdy $r_1 \neq r_2$, a pokrywają się, gdy $r_1 = r_2$.

Definicja 1. *Konstrukcją za pomocą cyrkla i linijki* nazywamy procedurę będącą ciągiem skończonym złożonym z operacji następujących dwóch typów:

- kreślenie prostej przez dwa różne punkty,

- kreślenie okręgu o środku w danym punkcie i promieniu równym danemu odcinkowi.

Uwaga 1. Wykonalność konstrukcji za pomocą cyrkla i linijki jest uzależniona od rozwiązalności tzw. grupy Galois związanej z tą konstrukcją. Znane przykłady konstrukcji **niewykonalnych** za pomocą cyrkla i linijki to:

1. *Kwadratura koła* – wyznaczenie boku kwadratu, którego pole równa się polu danego koła.
2. *Podwojenie sześcianu* – wyznaczenie krawędzi sześcianu, którego objętość jest dwa razy większa od objętości danego sześcianu.
3. *Trysekcja kąta* – podział danego kąta na trzy kąty parami przystające.

Stwierdzenie 3 (Konstrukcje pierwotne)**.** Za pomocą cyrkla i linijki można przeprowadzić konstrukcje następujących obiektów:

- Odcinek położony na danej prostej, o danym początku i równy danemu odcinkowi.
- Suma i różnica danych odcinków położona na danej prostej.
- Okrąg o danym środku i promieniu równym promieniowi danego okręgu.
- Kąt płaski (także skierowany) o danym ramieniu i mierze równej mierze danego kąta płaskiego.

Stwierdzenie 4 (Konstrukcje podstawowe)**.** Za pomocą cyrkla i linijki można przeprowadzić konstrukcje następujących obiektów:

1. Symetralna danego odcinka.
2. Dwusieczna danego kąta płaskiego.
3. Prosta prostopadła do danej prostej i przechodząca przez dany punkt.
4. Prosta równoległą do danej prostej i przechodząca przez dany punkt.
5. Prosta równoległa do danej prostej i odległa od niej o długość danego odcinka.

6. Odcinek równy n–tej części danego odcinka, $n \in \mathbb{N}$.
7. Odcinek *czwarty proporcjonalny* do danych trzech odcinków (czyli odcinek o długości $x = \frac{ab}{c}$, gdzie a, b, c są długościami danych odcinków).
8. Prosta styczna do danego okręgu poprowadzona przez dany punkt leżący na zewnątrz tego okręgu.
9. Obraz danego punktu w rzucie równoległym na daną prostą w kierunku innej danej prostej (nierównoległej do pierwszej prostej).
10. Obraz danego punktu w przesunięciu równoległym o dany wektor.
11. Obraz danego punktu w symetrii osiowej względem danej prostej.
12. Obraz danego punktu w symetrii środkowej względem danego punktu.
13. Obraz danego punktu w obrocie dookoła innego danego punktu, przy czym kąt obrotu jest równy danemu skierowanemu kątowi płaskiemu.
14. Obraz danego punktu w jednokładności o skali równej stosunkowi dwóch odcinków opatrzonemu znakiem lub o skali będącej liczbą wymierną.

Uwaga 2. Konstrukcje podstawowe można przeprowadzić przy dowolnych danych spełniających (dość oczywiste) założenia do tych konstrukcji. Należy pamiętać, że konstrukcja prostej równoległej odległej o daną odległość (nr 5) daje dwie proste.

1.2. Zadania konstrukcyjne

Rozwiązanie każdego zadania konstrukcyjnego składa się z następujących czterech części:

I. *Analiza* – poświęcona przetłumaczeniu zawartych w zadaniu własności na język prostych i okręgów.

II. *Opis konstrukcji* – zawierający etapy wykonania konstrukcji.

III. *Dowód poprawności* – potwierdzający, że otrzymany na drodze konstrukcji obiekt(y) spełnia(ją) warunki zadania.

IV. *Dyskusja* – oceniająca etapy konstrukcji pod kątem ich wykonalności i liczby otrzymanych rozwiązań w zależności od danych.

Analiza wymaga często wniknięcia wgłąb zagadnienia geometrycznego i skorzystania z różnych własności, których opis w języku prostych i okręgów nie musi być łatwy. W opisie konstrukcji staramy się stosować konstrukcje podstawowe, co sprzyja jego przejrzystości. Starannie przeprowadzona analiza dość często pozwala na łatwe udowodnienie poprawności konstrukcji. Dyskusja jest integralną częścią zadania, różne rozwiązania należy porównać w celu wykrycia tych przystających, a szczególną uwagę zwrócić możliwość wykonania kolejnych etapów przy użyciu obiektów skonstruowanych na poprzednich etapach konstrukcji.

Ćwiczenia 1–5 zamieszczone poniżej pochodzą ze zbioru [3].

Ćwiczenie 1. Zbudować trójkąt dysponując danymi jak w kolejnych cechach przystawania trójkątów.

Ćwiczenie 2. Zbudować okrąg opisany na danym trójkącie i wpisany w dany trójkąt.

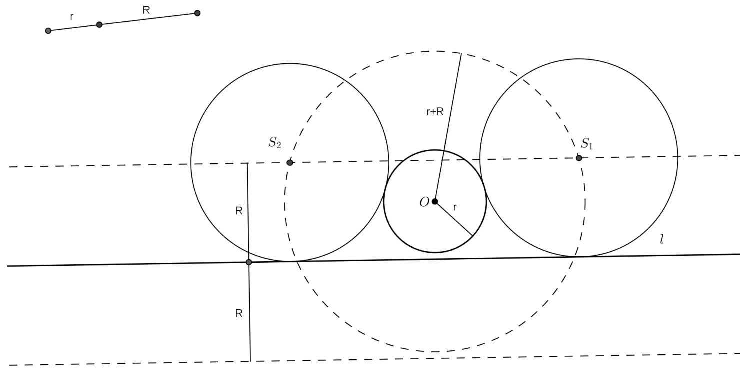
Ćwiczenie 3. Zbudować prostą styczną jednocześnie do dwóch danych okręgów. Rozpocząć od przypadku okręgów zewnętrznie stycznych.

Ćwiczenie 4. Zbudować okrąg styczny do ramion danego kąta płaskiego i przechodzący przez dany punkt wewnątrz tego kąta.

Ćwiczenie 5. Zbudować trójkąt prostokątny mając daną jego przeciwprostokątną i jedną z przyprostokątnych.

Przykład 1. Dla danego okręgu $o(O, r)$, danej prostej l i danego odcinka o długości R zbudować okrąg o promieniu R styczny zewnętrznie do okręgu $o(O, r)$ i styczny do prostej l.
I. *Analiza.* Jeżeli $o(S, R)$ jest szukanym okręgiem, to $|OS| = r + R$ z warunku zewnętrznej styczności okręgów oraz $d(S, l) = R$ z warunku styczności

prostej do okręgu. Innymi słowy, $S \in o(O, r + R)$ oraz $S \in k$, gdzie $k \parallel l$ i $d(k, l) = R$. Ostatecznie $S \in o(O, r + R) \cap k$.



II. *Opis konstrukcji*

1. Suma odcinków r oraz R;

2. $o(O, r + R)$;

3. $k \parallel l$, $d(k, l) = R$;

4. $S \in o(O, r + R) \cap k$;

5. $o(S, R)$.

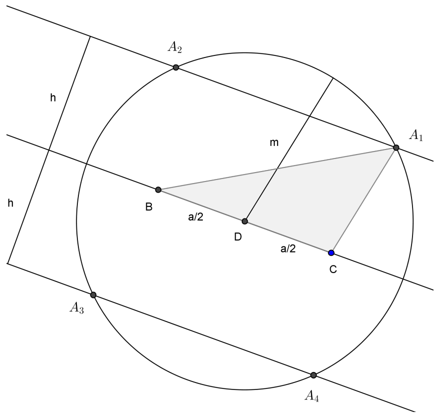
III. *Dowód poprawności.* W tym przypadku stanowi bezpośrednie odwrócenie analizy.

IV. *Dyskusja.* Punkty 1, 2, 5 są wykonalne jednoznacznie z dostarczonych przez ewentualne wcześniejsze etapy danych. W punkcie 3 otrzymujemy dwie proste k_1, k_2. Każda z nich przecina $o(O, r+R)$ odpowiednio w dwóch punktach o ile $d(O, k) < r + R$, w jednym, gdy $d(O, k) = r + R$ lub nie przecina tego okręgu, gdy $d(O, k) > r + R$.

Jeżeli oznaczymy $e = d(O, l)$, a przez k_1 tę prostą równoległą do l i odległą od niej o R, która jest nie dalsza od O, otrzymamy $d(O, k_1) = |e - R|$, $d(O, k_2) = e + R$. Zatem $o(O, r + R)$ przecina k_2 w 2, 1, 0 punktach odpowiednio, gdy $e < r$, $e = r$, $e > r$. Z kolei prosta k_1 przecina $o(O, r + R)$ w 2, 1, 0 punktach odpowiednio, gdy $e < r + 2R$, $e = r + 2R$, $e > r + 2R$.

Ostatecznie mamy 4 rozwiązania dla $e < r$, 3 rozwiązania dla $e = r$, 2 dla $r < e < r + 2R$, 1 dla $e = r + 2R$ oraz brak rozwiązań, gdy $e > r + 2R$.

Przykład 2. Zbudować trójkąt mając dany jego jeden bok a, wysokość h opuszczoną na ten bok i środkową m tego boku.



Wskazówka. Załóżmy, że punkty B i C są końcami odcinka o długości a. Wtedy wysokość h jest opuszczona z wierzchołka A, a środkowa m łączy punkt A ze środkiem D odcinka $\overline{BC}$. Stąd $A \in o(D, m)$ oraz $A \in k$, gdzie k jest prostą równoległą do prostej BC i odległą od niej o h. Ze względu na położenie punktu D na prostej BC rozwiązanie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $h \leqslant m$.

Zadanie 1. Zbudować czworokąt mając dane jego kolejne boki a, b, c, d i wiedząc, że przekątna wychodząca z kąta utworzonego przez boki a oraz d jest dwusieczną tego kąta.

Zadanie 2. Zbudować okrąg o danym promieniu r styczny do danej prostej l i przechodzący przez dany punkt A.

Zadanie 3. Zbudować trójkąt mając dane jego kąty i odległość pomiędzy środkiem okręgu opisanego i wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 4. Zbudować trójkąt mając dany jego bok a, leżący naprzeciw niego kąt α oraz wysokość h poprowadzoną z wierzchołka innego kąta.

ROZDZIAŁ 2

Wielościany

2.1. Wielokąty

Definicja 1. *Odcinkiem* o końcach A i B, gdzie $A \neq B$, nazywamy zbiór

$$\overline{AB} = \{aA + bB \ ; \ a, b \geqslant 0, a + b = 1\}$$

Definicja 2. *Trójkątem* o wierzchołkach A,B,C, gdzie gdzie punkty A, B, C są niewspółliniowe, nazywamy zbiór

$$\begin{aligned} \triangle ABC =& \{aA + bB + cC \ ; \ a, b, c \geqslant 0, a + b + c = 1\} \\ =& \{A + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \ ; \ b, c \geqslant 0, b + c \leqslant 1\} \end{aligned}$$

Definicja 3. *Polem trójkąta* $\triangle ABC$ rozpiętego na wektorach $v = \overrightarrow{AB}$ i $w = \overrightarrow{AC}$ nazywamy liczbę

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{\det G(v, w)} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{vmatrix}}$$

Definicja 4. *Równoległobokiem* o wierzchołku A rozpiętym przez nierównoległe wektory v i w, nazywamy zbiór

$$\mathbb{P}(A; v, w) = \{A + sv + tw \ ; \ s, t \in [0, 1]\}$$

Definicja 5. *Wielokątem* nazywamy zbiór, który jest sumą mnogościową trójkątów takich, że każde dwa z nich mają wspólny bok albo wspólny wierzchołek albo są rozłączne.

Mówimy, że wielokąt jest *wypukły*, jeżeli dowolne dwa jego punkty łączy odcinek zawarty w tym wielokącie.

Definicja 6. *Wierzchołkiem wielokąta* nazywamy punkt, który w każdej triangulacji jest wierzchołkiem czworościanu tej triangulacji.
Bok wielokąta to odcinek łączący jego wierzchołki, który w każdej triangulacji **zawiera** bok pewnego trójkąta triangulacji.

Ćwiczenie 1. Pokazać, że równoległobok jest wielokątem. Opisać dwa trójkąty stanowiące jego triangulację.

Stwierdzenie 1.

$$\mathcal{A}(\mathbb{P}(A; v, w)) = \sqrt{\det G(v, w)} = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle v, v \rangle & \langle v, w \rangle \\ \langle w, v \rangle & \langle w, w \rangle \end{vmatrix}}$$

Definicja 7. Wielokąt nazywamy *n–kątem foremnym* (lub, gdy liczba boków jest znana, *wielokątem foremnym*), jeżeli wszystkie jego boki mają równą długość, a wszystkie kąty wewnętrzne tę samą miarę.

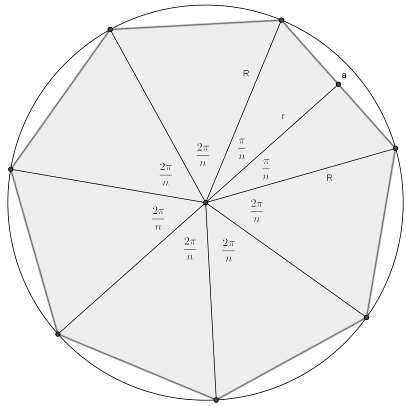
Stwierdzenie 2. Dla dowolnego $a > 0$ i dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieje (z dokładnością do izometrii) dokładnie jeden n–kąt foremny o boku długości a.

Przykład 1. Wierzchołkami pewnego n–kąta foremnego są zespolone pierwiastki n–tego stopnia z 1, czyli liczby

$$w_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

W zapisie rzeczywistym są to punkty na okręgu jednostkowym o współrzędnych

$$A_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n}, \sin\frac{2\pi k}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$



Zadanie 1. Dla n–kąta foremnego o boku długości a wyznaczyć:

1. Miarę kąta wewnętrznego.
2. Promień okręgu opisanego na tym wielokącie.
3. Promień okręgu wpisanego w ten wielokąt.

Otrzymane wyniki porównać z wzorami określającymi te wielkości w trójkącie równobocznym, kwadracie i sześciokącie foremnym.

2.2. Triangulacje wielościanów

Definicja 8. *Czworościanem* o wierzchołkach A,B,C,D, gdzie gdzie punkty A, B, C, D są niewspółpłaszczyznowe, nazywamy zbiór

$$\begin{aligned}\overline{\triangle}ABCD =&\{aA + bB + cC + dD \ ; \ a, b, c, d \geqslant 0, a + b + c + d = 1\}\\ =&\{A + b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} + d\overrightarrow{AD} \ ; \ b, c, d \geqslant 0, b + c + d \leqslant 1\}\end{aligned}$$

Definicja 9. *Objętością czworościanu* $\overline{\triangle}ABCD$ rozpiętego na wektorach $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$ i $w = \overrightarrow{AD}$ nazywamy liczbę

$$\mathcal{V}\left(\overline{\triangle}ABCD\right) = \frac{1}{6}\sqrt{\det G(u, v, w)} = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} \langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle & \langle u, w\rangle \\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle & \langle v, w\rangle \\ \langle w, u\rangle & \langle w, v\rangle & \langle w, w\rangle \end{vmatrix}}$$

Wniosek 1.

$$\mathcal{V}\left(\overline{\triangle}ABCD\right) = \frac{1}{3}\mathcal{A}\left(\triangle ABC\right) \cdot d(D, ABC)$$

Zadanie 2. Posiłkując się dowodem twierdzenia o środkowych w trójkącie udowodnić, że odcinki łączące wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości przeciwległych im ścian przecinają się w jednym punkcie, który dzieli te odcinki w stosunku $3:1$ licząc od wierzchołka do ściany.

Definicja 10. *Wielościanem* nazywamy zbiór, który jest sumą mnogościową czworościanów takich, że każde dwa z nich mają wspólną ścianę albo wspólną krawędź albo wspólny wierzchołek albo są rozłączne.

Mówimy, że wielościan jest *wypukły*, jeżeli dowolne dwa jego punkty łączy odcinek zawarty w tym wielościanie.

Ćwiczenie 2. Określić ścianę, wierzchołek i bok wielościanu.

Definicja 11. *Charakterystyką Eulera* wielościanu $\mathbb{P}$ nazywamy liczbę

$$\chi(\mathbb{P}) = F - E + V,$$

gdzie F oznacza liczbę ścian, E – liczbę krawędzi, a V – liczbę wierzchołków wielościanu $\mathbb{P}$.

Twierdzenie 1. *Charakterystyka Eulera wielościanu wypukłego wynosi* 2.

Definicja 12. Dla danego trójkąta $\triangle$ i danego wektora u nierównoległego do płaszczyzny tego trójkąta *pryzmą* (lub *graniastosłupem trójkątnym*) o podstawach $\triangle$ i $\triangle + u$, nazywamy zbiór

$$\mathbb{Q}(\triangle, u) = \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant 1} (\triangle + ru) = \{P + ru \ ; \ P \in \triangle, \ r \in [0,1]\}$$

Zadanie 3. Podać wszystkie wierzchołki pryzmy, znaleźć jej triangulację złożoną z trzech czworościanów i opisać wektory rozpinające te czworościany.

Stwierdzenie 3. Jeżeli trójkąt $\triangle$ jest rozpięty na wektorach v i w

$$\mathcal{V}\left(\mathbb{Q}(\triangle, u)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\det G(u,v,w)} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle & \langle u,w\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle \\ \langle w,u\rangle & \langle w,v\rangle & \langle w,w\rangle \end{vmatrix}}$$

Definicja 13. *Równoległościanem* o wierzchołku A rozpiętym przez nierównoległe do jednej płaszczyzny wektory u,v,w, nazywamy zbiór

$$\mathbb{P}(A; u, v, w) = \{A + ru + sv + tw \ ; \ r, s, t \in [0, 1]\}$$

Zadanie 4. Podać wszystkie wierzchołki równoległościanu, znaleźć jego triangulację złożoną z sześciu czworościanów i opisać wektory rozpinające te czworościany.
Wskazówka: Przedstawić najpierw równoległościan jako sumę dwóch pryzm.

Stwierdzenie 4.

$$\mathcal{V}\left(\mathbb{P}(A; u, v, w)\right) = \sqrt{\det G(u,v,w)} = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle & \langle u,w\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle \\ \langle w,u\rangle & \langle w,v\rangle & \langle w,w\rangle \end{vmatrix}}$$

Uwaga 1. 1. Dla $v = (v_1, v_2)$, $w = (w_1, w_2)$

$$\det G(v, w) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}^2$$

2. Dla $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$

$$\det G(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}^2$$

Definicja 14. Dla danego wielokąta wypukłego Π i punktu P nie leżącego w płaszczyźnie tego wielokąta *ostrosłupem* o podstawie Π i wierzchołku (centralnym) P nazywamy otoczkę wypukłą wielokąta Π i punktu P

$$\operatorname{conv}(\Pi, P) = \{aA + bP \ ; \ A \in \Pi, \ a, b \geqslant 0, \ a + b = 1\}$$

Definicja 15. Dla danego wielokąta wypukłego Π i wektora u nierównoległego do płaszczyzny tego wielokąta *graniastosłupem* o podstawach Π oraz $\Pi + u$ nazywamy pryzmę nad tym wielokątem

$$\mathbb{Q}(\Pi, u) = \bigcup_{0 \leqslant r \leqslant 1} (\Pi + ru) = \{A + ru \ ; \ A \in \Pi, \ r \in [0,1]\}$$

Zadanie 5. Stosując triangulację podstawy uzasadnić znane wzory na objętość graniastosłupa i ostrosłupa.

2.3. Wielościany foremne

Definicja 16. *Wielościanem foremnym* nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i każdy wierzchołek tego wielościanu należy do tej samej liczby ścian.

Twierdzenie 2. *Z dokładnością do podobieństwa istnieje dokładnie pięć wielościanów foremnych:*

1. *Czworościan, ośmiościan i dwudziestościan o ścianach będących trójkątami równobocznymi.*
2. *Sześcian o ścianach będących kwadratami.*
3. *Dwunastościan o ścianach będących pięciokątami foremnymi.*

Przykład 2. Wielościany foremne mają następujące liczby ścian, krawędzi i wierzchołków:

Czworościan foremny: $F = 4$, $E = 6$, $V = 4$.

Ośmiościan foremny: $F = 8$, $E = 12$, $V = 6$.

Dwudziestościan foremny: $F = 20$, $E = 30$, $V = 12$.

Sześcian $F = 6$, $E = 12$, $V = 8$.

Dwunastościan foremny: $F = 12$, $E = 30$, $V = 20$.

Przykład 3. Wielościany foremne można określić podając wierzchołki w trójwymiarowym prostokątnym układzie współrzędnych:

Czworościan foremny: $(1, 0, 0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $(0, 0, \sqrt{2})$.

Ośmiościan foremny: $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$.

Dwudziestościan foremny: $(0, \pm 1, \pm\varphi)$, $(\pm 1, 0, \pm\varphi)$, $(\pm 1, \pm\varphi, 0)$, ($\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ i tym samym $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$)

Sześcian: $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Dwunastościan foremny: $(\pm 1, \pm 1, \pm 1), (0, \pm\frac{1}{\varphi}, \pm\varphi), (\pm\frac{1}{\varphi}, 0, \pm\varphi)$, $(\pm\frac{1}{\varphi}, \pm\varphi, 0)$, ($\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ i tym samym $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$).

Otrzymujemy wtedy jeden z możliwych (z dokładnością do podobieństwa) modeli tych wielościanów – niekoniecznie o krawędzi długości 1.

ROZDZIAŁ 3

GeoGebra i dowody przez eksperyment

3.1. Konstrukcje geometryczne w *GeoGebrze*

GeoGebra jest powszechnie dostępnym programem wspomagającym nauczanie i uczenie się matematyki oraz znajdującym zastosowania w pokrewnych dziedzinach. Cechą najbardziej przydatną w dydaktyce geometrii jest możliwość szybkiego i łatwego rysowania podstawowych figur geometrycznych wyrażonych równaniami stopnia 1 i 2, a także opis tych zależności w wybranym układzie współrzędnych. Tym samym tradycyjny podział na metody syntetyczne i analityczne w geometrii ulega zatarciu z korzyścią dla zrozumienia istoty pojęć.

Wersja instalacyjna pakietu *GeoGebra* dostępna jest na stronie `geogebra.org`. Programu można również używać poprzez dysk Google.

Podstawowe funkcje *GeoGebry* pozwalają na rysowanie prostych i okręgów oraz znajdowanie ich punktów przecięcia, program może być więc używany do ilustrowania i zapisywania etapów konstrukcji. Dyskusja liczby rozwiązań oraz ich zależności jest także możliwa przez łatwe powielanie działań przy innych warunkach początkowych.

Wiele podstawowych konstrukcji jest zaimplementowanych w *GeoGebrze*, pozostałe można łatwo opracować samodzielnie. Korzystne jest dwutorowe wprowadzanie danych i przeprowadzanie operacji, a użycie zapisu symbolicznego – zamiast posługiwania się urządzeniem wskazującym – utrwala nawyk i przekonanie o możliwości zaprogramowania działań także w obszarze graficznym.

GeoGebra może przetwarzać dane w trzech podstawowych formach: graficznej (Widok grafiki), analitycznej (Widok algebry) i obliczeniowej (Widok arkusza); umożliwia także rejestrowanie etapów postępowania graficznego (Protokół konstrukcji). Wymiana danych pomiędzy tymi oknami jest dynamiczna co pozwala na szybkie zmiany warunków początkowych.

Ćwiczenie 1. W oparciu o narzędzia podstawowe przeprowadzić w programie *GeoGebra* konstrukcję symetralnej odcinka.

Ćwiczenie 2. W oparciu o narzędzia podstawowe przeprowadzić w programie *GeoGebra* konstrukcję dwusiecznej kąta.

Ćwiczenie 3. Przeprowadzić w programie *GeoGebra* konstrukcję odcinka czwartego proporcjonalnego.

Ćwiczenie 4. Przeprowadzić w programie *GeoGebra* konstrukcję okręgu opisanego na trójkącie w przypadku trójkąta ostrokątnego, prostokątnego i rozwartokątnego.

3.2. Dowody przez eksperyment

Dowody eksperymentalne są pierwszym krokiem w poznaniu głębszych zależności miarowych. Wprowadzając w *GeoGebrze* – a dokładniej w widoku arkusza – miary odcinków, kątów, pola wielokątów itp. jako zmienne, możemy po zapisaniu zależności symbolicznych sprawdzać równość wielkości złożonych w zależności od wielu różnych układów warunków początkowych poprzez łatwą manipulację graficzną.

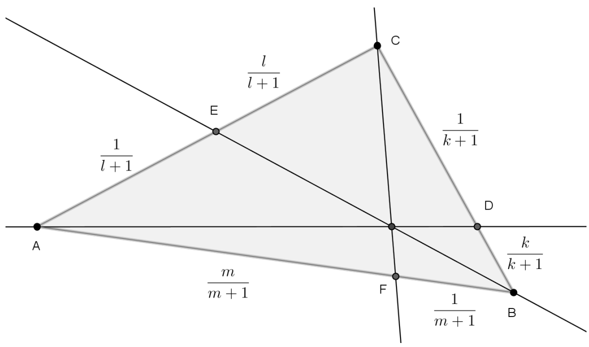
Ćwiczenie 5. Posługując się *GeoGebrą* udowodnić eksperymentalnie wzór Herona na pole trójkąta $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Ćwiczenie 6. Posługując się *GeoGebrą* udowodnić eksperymentalnie wzór na pole trójkąta używający promienia okręgu opisanego $P = \frac{abc}{4R}$.

Przykładami mocnych i ogólnych twierdzeń, których dowód można łatwo przybliżyć eksperymentalnie używając narzędzi informatycznych są znane twierdzenia z geometrii rzutowej: twierdzenie Menelausa i twierdzenie Cevy uzależniające odpowiednio współliniowość punktów i przecinanie się prostych w jednym punkcie za pomocą wektorowej (lub odległościowej) proporcji położenia pewnych punktów na prostych.

Niech dane będą trzy niewspółliniowe punkty A, B, C. Wybierzmy punkty D, E, F należące odpowiednio do prostych AB, BC, CA i różne od wierzchołków trójkąta $\triangle ABC$ poprzez wskazanie takich liczb $k, l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, że

$$\overrightarrow{AD} = k\,\overrightarrow{DB},\ \ \overrightarrow{BE} = l\,\overrightarrow{EC},\ \ \overrightarrow{CF} = m\,\overrightarrow{FA}.$$



Twierdzenie 1 (Cevy)**.** *Przy powyższych oznaczeniach warunek $klm = 1$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy proste AE, BF, CD przecinają się w dokładnie jednym punkcie lub są parami równoległe.*

Twierdzenie 2 (Menelausa)**.** *Przy powyższych oznaczeniach warunek $klm = -1$ jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy punkty D, E, F są współliniowe.*

Z twierdzenia Cevy wynika że środkowe (odpowiednio dwusieczne kątów wewnętrznych) przecinają się w jednym punkcie. Dotyczy to także prostych zawierających wysokości trójkąta; nie musi jednak dotyczyć samych wysokości, gdy trójkąt jest rozwartokątny.

Ćwiczenie 7. Udowodnić eksperymentalnie twierdzenie Menelausa i twierdzenie Cevy.

Definicja 1. *Inwersją względem okręgu* o środku S i promieniu $r > 0$ nazywamy przekształcenie przypisujące dowolnemu punktowi $X \neq S$ z płaszczyzny punkt X' taki, że $|SX|\,|SX'| = r^2$.

Inwersja (zwana czasem *potęgą punktu względem okręgu*) jest najprostszym przykładem przekształcenia zachowującego wszystkie kąty, ale nie zachowującego odległości. Inwersja przekształca proste na proste lub okręgi.

Ćwiczenie 8. Znaleźć obraz trójkąta w inwersji przekształcając jego wierzchołki i po jednym punkcie wewnętrznym każdego boku i następnie prowadząc okręgi przez obrazy trzech punktów danego odcinka.

Szczególnie ciekawe są przypadki, gdy środek okręgu inwersji jest blisko boków trójkąta.

Definicja 2.

1. Dla ustalonych punktów F_1 i F_2 i ustalonego $a > |F_1F_2|$ *elipsą* o ogniskach F_1 i F_2 oraz osi wielkiej $2a$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów X, dla których $|XF_1| + |XF_2| = 2a$.
2. Dla ustalonych punktów F_1 i F_2 i ustalonego $a < |F_1F_2|0$ *hiperbolą* o ogniskach F_1 i F_2 oraz osi rzeczywistej $2a$ nazywamy zbiór wszystkich takich punktów X, dla których $\big|\,|XF_1| - |XF_2|\,\big| = 2a$.
3. Dla ustalonego punktu F i ustalonej prostej k *parabolą* o ognisku F oraz kierownicy k nazywamy zbiór wszystkich punktów równo odległych od punktu F i prostej k.

Ćwiczenie 9. Sprawdzić eksperymentalnie własności ogniskowe elipsy, hiperboli i paraboli.

Ćwiczenie 10. Sprawdzić eksperymentalnie własności zwierciadła parabolicznego: wszystkie promienie równoległe do osi paraboli skupia w ognisku, a wszystkie promienie z ogniska odbijają się od zwierciadła tworząc wiązkę równoległą.

3.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania w *GeoGebrze*

1. Skonstruować proste styczne do dwóch okręgów zewnętrznie stycznych.
2. Skonstruować styczne zewnętrzne do dwóch okręgów, z których każdy leży na zewnątrz drugiego.
3. Skonstruować styczne wewnętrzne do dwóch okręgów, z których każdy leży na zewnątrz drugiego.
4. Skonstruować trójkąt prostokątny mając dane dowolne dwa jego boki.
5. Skonstruować trójkąt mając dany jego bok, wysokość opuszczoną na ten bok i środkową tego boku.
6. Skonstruować cięciwę danej długości w danym okręgu, równoległą do danej prostej.
7. Skonstruować czworokąt mając dane długości czterech jego kolejnych boków i wiedząc, że jego przekątna jest dwusieczną kąta utworzonego przez pierwsze dwa boki.
8. Skonstruować okrąg wpisany w dany trójkąt i okrąg dopisany do danego trójkąta po stronie danego boku.
9. Udowodnić eksperymentalnie, że dwa trójkąty o odpowiednio równych długościach boków można przekształcić na siebie przez złożenie co najwyżej trzech symetrii osiowych.
10. Udowodnić eksperymentalnie wzór na pole równoległoboku (dla obu wysokości).
11. Udowodnić eksperymentalnie wzór na pole trójkąta używający promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.
12. Udowodnić eksperymentalnie wzór na pole trójkąta używający promienia okręgu dopisanego do tego trójkąta.

13. Udowodnić eksperymentalnie twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego w trójkącie.
14. Udowodnić eksperymentalnie warunek opisania okręgu na czworokącie.
15. Udowodnić eksperymentalnie warunek wpisania okręgu w czworokąt.
16. Udowodnić eksperymentalnie twierdzenie o środkowych w trójkącie.

ROZDZIAŁ 4

Słownictwo angielskie w geometrii

Angielski język matematyczny ze względu na swoją czasownikowo zorientowaną strukturę jest dość prosty i pozwala na łatwe i precyzyjne wyrażanie treści matematycznych nawet bez gruntownej znajomości gramatyki. Różni go to zdecydowanie od języka polskiego, gdzie wielość konstrukcji rzeczownikowych wręcz wymusza ozdobny i opisowy styl wypowiedzi tak ustnej jak i pisemnej.

Szczególnie przydatna jest umiejętność poprawnego czytania tekstu, formułowanie myśli po angielsku w nauczaniu uczniów posługujących się językiem polskim nie jest konieczne. Bezpłatne zasoby internetowe, z których korzystać mogą uczniowie i nauczyciele w kwestiach szczegółowych często ograniczają do źródeł angielskojęzycznych. Pokonanie, niskiej w istocie, bariery językowej pozwala na ich efektywne używanie.

Jednym z bardzo ciekawych źródeł jest strona `herricks.org` zawierające różne materiały dydaktyczne, w szczególności obszerny, a jednocześnie dość elementarny podręcznik geometrii *AMSCO Geometry Book* dostępny pod adresem `http://www.herricks.org/highschool.cfm?subpage=11368`.

Poniżej zamieszczamy tabele najpopularniejszego słownictwa geometrycznego, które – obok zupełnie elementarnej znajomości języka angielskiego – pozwalają zrozumieć większość tekstu powyższej książki, która jest zresztą bogato ilustrowana[1].

[1] Terminy angielskie z innych dziedzin matematyki można znaleźć na przykład w [4]

4.1. Słowniczek geometryczny angielsko–polski

Mathematical text	**Tekst matematyczny**
definition	definicja
theorem	twierdzenie
proposition	stwierdzenie
lemma	lemat
corollary	wniosek
remark	uwaga
proof	dowód
example	przykład
exercise	ćwiczenie
problem	zadanie
Sets	**Zbiory**
set	zbiór
subset	podzbiór
empty set	zbiór pusty
union	suma mnogościowa
intersection	część wspólna
complement	dopełnienie
Cartesian product	iloczyn kartezjański
belong	należeć
include	zawierać
consist of	składać się z
Linear set	**Zbiory liniowe**
point	punkt
(straight) line	prosta
plane	płaszczyzna
(3–dimensional) space	przestrzeń trójwymiarowa

ray	półprosta
segment	odcinek
midpoint	środek odcinka
Measures	**Miary**
length	długość
area	pole
volume	objętość
distance	odległość
Vectors	**Wektory**
vector	wektor
length	długość
direction	kierunek
orientation	zwrot
inner product	iloczyn skalarny
vector product	iloczyn wektorowy
Angles	**Kąty**
angle	kąt
acute	ostry
right	prosty
obtuse	rozwarty
supplementary	przyległy
vertical	wierzchołkowy
corresponding	odpowiadajacy
alternate	naprzemianległy
Polygons	**Wielokąty**
vertex / vertices	wierzchołek / wierzchołki
side	bok
circumference	obwód
regular polygon	wielokąt foremny

interior angle	kąt wewnętrzny
exterior angle	kąt zewnętrzny
diagonal	przekątna
triangle	trójkąt
qudrilateral	czworokąt
pentagon	pięciokąt
hexagon	sześciokąt
heptagon	siedmiokąt
octagon	ośmiokąt
circumscribed circle	okrąg opisany
inscribed circle	okrąg wpisany
Traingles	**Trójkąty**
equilateral	równoboczny
isosceles	równoramienny
perpendicular bisector	symetralna
(angle) bisector	dwusieczna
median	środkowa
height	wysokość (*odcinek*)
altitude	wysokość (*długość*)
law of cosines	twierdzenie cosinusów
law of sines	twierdzenie sinusów
Pythagorean theorem	twierdzenie Pitagorasa
SSS triangle congruence / similarity	I cecha przystawania / podobieństwa trójkątów
SAS triangle congruence / similarity	II cecha przystawania / podobieństwa trójkątów
ASA triangle congruence / AA triangle similarity	III cecha przystawania / podobieństwa trójkątów
Quadrilaterals	**Czworokąty**
adjacent side	bok przyległy

opposite side	bok przeciwległy
square	kwadrat
rectangle	prostokąt
rhombus	romb
parallelogram	równoległobok
trapezium (trapezoid)	trapez
kite	deltoid
Circles	**Okręgi**
circle	okrąg
circle / disc	koło
diameter	średnica
chord	cięciwa
central angle	kąt środkowy
inscribed angle	kąt wpisany
tangent	styczna
secant	sieczna
internally tangent	wewnętrznie styczny
externally tangent	zewnętrznie styczny
Polyhedrons	**Wielościany**
tetrahedron	czworościan
sześcian	cube
prostopadłościan	cuboid
parallelepiped	równoległościan
prism	graniastosłup
pyramid	ostrosłup
regular polyhedron	wielościan foremny
octahedron	ośmiościan
dodecahedron	dwunastościan
icosahedron	dwudziestościan

Rotational solids	**Bryły obrotowe**
ball	kula
sphere	sfera
cylinder	walec
cone	stożek
Transformations	**Przekształcenia**
isometry	izometria
similarity	podobieństwo
identity	tożsamość
symmetry	symetria
reflection in	symetria względem
central symmetry	symetria środkowa
axis symmetry	symetria osiowa
glide reflection	symetria z poślizgiem
rotation	obrót
translation	przesunięcie równoległe
homothety / dilation	jednokładność

Bibliografia

[1] I. Agricola, T. Friedrich, *Elementary Geometry*, American Mathematical Society, 2008.

[2] R. Doman, *Wykłady z geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, 2001.

[3] B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, WNT, 1999.

[4] Z. Jóźwiak, L. Kondrak, D. Wróbel, A. Zielińska, *Słownik polsko-angielsko-francusko-rosyjski podstawowych terminów matematycznych*, Wydawnictwo UŁ, 2008.

[5] M. Moszyńska, J. Święcicka, *Geometria z algebrą liniową*, PWN, 1997.

NOWOCZESNY
NAUCZYCIEL
MATEMATYKI

publikacja bezpłatna

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

ISBN 978-83-7969-490-7
9 788379 694907

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62