matematyka

materiały metodyczne

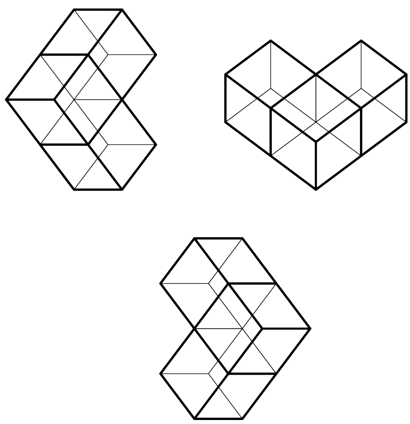
2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526059563073813232862794349076323382988075319525101901157383418793070215408914993488416750924476146066808226480016847741185374234544243710753907774499206955170276183860626133138458 30

redakcja
Ryszard J. Pawlak
Zofia Walczak

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

III

Praca z tekstem matematycznym w gimnazjum



Opracowanie

Ewa Korczak-Kubiak

Wstęp

Jeden z celów ogólnych kształcenia na III etapie edukacyjnym zapisanych w podstawie programowej brzmi następująco: „Uczeń interpretuje i tworzy teksty o charakterze matematycznym, używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników”. Wobec tego nauczyciele uczący w gimnazjach zobowiązani są pracować z tekstem matematycznym ze swoimi uczniami.

Umiejętność zwykłego czytania kształcona jest w pierwszych latach edukacji szkolnej. W toku tego procesu uczeń wypracowuje własne techniki dotyczące lektury tekstów. Okazuje się, że zazwyczaj nawyki te nie znajdują zastosowania w odniesieniu do tekstów o charakterze matematycznym. Tekst matematyczny wymaga od czytelnika dużo większego wysiłku w czasie lektury. W przypadku tekstów o charakterze niematematycznym jednokrotne pobieżne przeczytanie pozwala na wyodrębnienie, zrozumienie i zapamiętanie części informacji, podczas gdy przeczytany w ten sam sposób tekst matematyczny zazwyczaj pozostaje kompletnie niezrozumiały. Rolą nauczyciela jest wskazanie uczniom na czym polega specyfika tekstów matematycznych i w jaki sposób należy postępować, aby efektywnie z nich korzystać. Należy więc uświadamiać uczniom, że:

1. Czytanie tekstu matematycznego zawsze wymaga użycia kartki i ołówka;
2. W tekście matematycznym pominiętych jest wiele szczegółów – trzeba je samodzielnie uzupełnić;
3. Oprócz koncentracji na rozumieniu poszczególnych zdań tekstu, trzeba zwracać uwagę na związki logiczne między jego fragmentami.

Istnieje wiele form organizowania pracy uczniów z tekstem matematycznym. W tym opracowaniu przedstawione zostaną trzy metody wspomagające kształcenie umiejętności czytania takich tekstów:

1. Praca w oparciu o plan sterujący,
2. Praca z tekstem do uzupełniania,
3. Korekta błędów w tekście matematycznym.

ROZDZIAŁ 1

Praca w oparciu o plan sterujący

Praca w oparciu o *plan sterujący* rozwija umiejętność praktycznego korzystania z tekstu matematycznego (tzn. rozwiązywania problemów z wykorzystaniem wiadomości teoretycznych i przykładów dostępnych w postaci tekstu pisanego). Nauczyciel przygotowuje tekst matematyczny zawierający definicje i fakty matematyczne niezbędne do rozwiązania jakiegoś problemu. Następnie formułuje ten problem oraz opracowuje plan jego rozwiązania z wykorzystaniem przygotowanych materiałów (tzw. plan sterujący). Oprócz wskazówek dotyczących rozwiązania postawionego problemu, plan sterujący może pobudzać uczniów do dodatkowych refleksji związanych z czytanym tekstem, dzięki czemu kształcona jest także umiejętność stawiania pytań dotyczących poruszanych zagadnień oraz szukania na nie odpowiedzi.

1.1. Materiały do planu sterującego

Przypomnijmy sobie definicję liczby pierwszej i liczby złożonej.

Definicja. Liczbę naturalną większą od 1, która ma dokładnie dwa dzielniki, liczbę 1 i samą siebie, nazywamy *liczbą pierwszą*.

Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Definicja. Liczbę naturalną większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą nazywamy *liczbą złożoną*.

Wiemy także, że każdą liczbę naturalną większą od 1 można jednoznacznie *rozłożyć na czynniki pierwsze*, tzn. zapisać w postaci iloczynu liczb pierwszych.

Przykład rozkładu liczby na czynniki pierwsze

	248	2
Pierwszy iloraz	124	2
Drugi iloraz	62	2
Trzeci iloraz	31	31
Czwarty iloraz	1	

$$248 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 31$$

Komentarz. Po lewej stronie kreski piszemy daną liczbę, a po prawej najmniejszą liczbę pierwszą, która jest dzielnikiem tej liczby. Wykonujemy dzielenie, a iloraz zapisujemy pod daną liczbą. Otrzymaliśmy pierwszy iloraz. Z pierwszym ilorazem postępujemy tak samo i otrzymujemy drugi iloraz. Postępujemy tak dotąd aż ostatni iloraz będzie równy 1. Liczby po prawej stronie kreski są rozkładem danej liczby na czynniki pierwsze.

Definicja. Największym wspólnym dzielnikiem (NWD) dwóch liczb naturalnych nazywamy największą liczbę, która jest dzielnikiem obu tych liczb.

Przykład obliczania NWD dwóch liczb naturalnych

1. Rozkładamy obie liczby na czynniki pierwsze.
2. Wybieramy czynniki wspólne w obu rozkładach i mnożymy je.
3. Otrzymany iloczyn to największy wspólny dzielnik tych liczb.

Obliczymy teraz NWD liczb 528 i 300 ([6], [7]).

528	**2**
264	**2**
132	2
66	2
33	**3**
11	11
1	

300	**2**
150	**2**
75	**3**
25	5
5	5
1	

$$NWD(528, 300) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

1.2. Plan sterujący

Polecenie

Korzystając z załączonych materiałów oblicz największy wspólny dzielnik liczb 840 i 4500.

Wskazówki

1. Odszukaj w tekście definicję największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych.
2. Wyjaśnij pojęcie dzielnika liczby naturalnej.
3. Wypisz wszystkie dzielniki liczby 30. Który z nich jest największy?
4. Wypisz wszystkie dzielniki liczby 20. Który z nich jest największy?
5. Wypisz wszystkie wspólne dzielniki liczb 30 i 20. Który z nich jest największy?
6. Jak myślisz, czy dla dużych liczb (np. takich jak w poleceniu) łatwo jest znaleźć największy wspólny dzielnik tą metodą?
7. Odszukaj w tekście inny sposób obliczania największego wspólnego dzielnika dwóch liczb naturalnych.
8. Wypisz i wyjaśnij wszystkie pojęcia matematyczne, które występują w tym fragmencie tekstu. Jeśli ich nie znasz lub nie pamiętasz, odszukaj je w załączonych materiałach.
9. Przeanalizuj zamieszczony w materiałach przykład obliczania NWD liczb 528 i 300.
10. Wzorując się na tym przykładzie wypisz czynności, jakie musisz wykonać, aby obliczyć NWD liczb podanych w poleceniu. Wykonaj te czynności.
11. Sformułuj odpowiedź końcową do polecenia.

Zadanie domowe dla chętnych

Odszukaj w internecie algorytm Euklidesa obliczania NWD dwóch liczb naturalnych i zastosuj go do liczb podanych w poleceniu.

ROZDZIAŁ 2

Praca z tekstem do uzupełnienia

Kolejna metoda to praca z *tekstem do uzupełniania*. Nauczyciel przygotowuje tekst, w którym pewne elementy są „wykropkowane”. Miejsca te wymagają dokładniejszego rozpisania lub uzasadnienia, powołania się na twierdzenie itp. Tekst taki można przygotować w oparciu o fragment podręcznika umiejętnie dobierając miejsca, które uczeń musi uzupełnić. Taka forma pracy kształtuje umiejętność i nawyk szukania związków logicznych między poszczególnymi zdaniami i częściami tekstu. Luki w tekście powinny być tak dobrane, aby ich wypełnienie było możliwe dzięki dostrzeżeniu zależności między analizowanym zdaniem, a fragmentami bezpośrednio go poprzedzającymi lub bezpośrednio po nim następującymi. W ten sposób uczeń oswaja się z faktem, że tekst matematyczny wymaga zupełnie innych technik czytania. Przyzwyczaja się, że pewne fragmenty tekstu wymagają dodatkowych uzupełnień oraz dostrzega potrzebę stosowania kartki i ołówka. Z czasem można wycofać się ze stosowania „wykropkowań” tak, aby uczeń zdobył umiejętność samodzielnego dostrzegania miejsc, które wymagają bardziej dogłębnej analizy i dokładniejszego wyjaśnienia.

2.1. Przykład tekstu do uzupełnienia

Polecenie

Uzupełnij luki w tekście zamieszczonym poniżej. Podczas analizy tekstu wykonuj odpowiednie rysunki[1].

Załóżmy, że punkty A i B mają współrzędne $A = (1, 4)$, $B = (5, 1)$. Obliczmy odległość między tymi punktami. Oznaczmy literą C punkt o współrzędnych $(1, \dots)$ będący wierzchołkiem trójkąta prostokątnego ABC, w którym $\overline{AB}$ jest przeciwprostokątną. Wtedy

$$|AC| = \dots \text{ i } |BC| = \dots.$$

Na mocy twierdzenia ....

$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Rozważmy teraz punkty A i B, gdzie $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ oraz $a_1 \neq b_1$ i $a_2 \neq b_2$.
Niech punkt C ma współrzędne $(\dots, b_2)$. Wtedy trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym i odcinki $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ są jego ....
Zatem odległość punktów ... i ... jest długością przeciwprostokątnej, którą obliczamy stosując twierdzenie .... Mamy więc:

$$|AB|^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad = |b_2 - a_2|^2 + |b_1 - a_1|^2.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$|AB| = \sqrt{|b_2 - a_2|^2 + |b_1 - a_1|^2} = \sqrt{(\dots\dots\dots)^2 + (\dots\dots\dots)^2}.$$

[1] Tekst został opracowany na podstawie [3]

2.2. Przykłady uczestników szkolenia

Przykład 1.

Polecenie

Uzupełnij luki w tekście[2].

Wiedząc, że średnia arytmetyczna pewnej liczby i liczby o 7 większej od niej wynosi 20, wyznaczymy tę liczbę, układając i rozwiązując odpowiednie równanie.

Oznaczmy przez x szukaną liczbę. Wówczas liczba od niej o 7 większa będzie postaci ....
Suma tych dwóch liczb wynosić będzie:

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Ich średnia arytmetyczna będzie postaci:

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{2}$$

Wynosi ona 20, zatem możemy zapisać równanie:

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{2} = \dots\dots\dots$$

Rozwiązując równanie, będziemy starali się zapisywać coraz prostsze równania równoważne danemu. Taką metodę rozwiązywania równań nazywamy ....
Pomnóżmy obie strony, powyższego równania przez ....

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{2} = \dots\dots\dots \mid \cdot 2$$

Wówczas:

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 40$$

[2] Tekst został opracowany na podstawie [1]

Redukując wyrazy podobne, po lewej stronie równania, otrzymujemy:

$$\ldots\ldots\ldots + 7 = 40$$

Odejmując od obu stron równania liczbę $\ldots$, a następnie $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ obie strony otrzymanego równania przez 2, otrzymujemy kolejno:

$$\ldots\cdots = 33| \div 2$$

$$x = \ldots\ldots$$

Odpowiedź: Szukana liczba równa jest $\ldots\ldots\ldots$

Przykład 2.

Polecenie

Uzupełnij luki w tekście. Podczas analizy tekstu wykonuj odpowiednie rysunki[3].

Narysuj dowolny trójkąt ABC. Zaznacz jako D środek boku AC i poprowadź przez ten punkt prostą równoległą do boku AB przecinającą bok BC w punkcie E. Oblicz stosunek $\frac{|BC|}{|EC|}$ oraz $\frac{|AB|}{|DE|}$.

Dane: $|AD| = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $AB || \ldots\ldots\ldots\ldots$

Szukane: $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

W trójkątach ABC i CDE kąt przy wierzchołku C jest kątem wspólnym oraz

$$|\measuredangle BAC| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

gdyż są to kąty odpowiadające. Stąd $\triangle ABC \sim \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (cecha $\ldots$, $\ldots$, $\ldots$).
Z podobieństwa trójkątów wynika, że:

$$\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|\ldots|} = \frac{|\ldots|}{|DE|}.$$

[3] Tekst został opracowany na podstawie [2]

Ponieważ $|AD| = \ldots$, tak więc $|AC| = 2|\ldots|$, stąd $\frac{|AC|}{|\ldots.|} = 2$.
Zatem $\frac{|BC|}{|EC|} = \ldots$, co oznacza, że punkt E jest .... odcinka BC.
Także $\frac{|AB|}{|DE|} = \ldots$, tak więc odcinek DE łączący środki boków trójkąta .... jest .... razy .... od podstawy AB.

Odpowiedź: Stosunek $\frac{|BC|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|DE|} = \ldots.$

Wniosek: Odcinek łączący .... dwóch boków trójkąta jest .... do trzeciego boku tego trójkąta i równy jego ....

Przykład 3.

Polecenie

Na podstawie podanych oznaczeń uzupełnij treść zadania i zapisz odpowiednie równanie:

hiacynty:	x
żonkile:	$x + 10$
tulipany:	$3(x + 10)$
razem:	100

Rozwiązanie. Na rabatce rosną hiacynty, żonkile i tulipany. Najmniej jest .... Żonkili jest o .... więcej niż hiacyntów, a tulipanów jest .... niż żonkili. Razem jest 100 kwiatów.

Odpowiedź: Równanie ....

Przykład 4.

Polecenie

Na podstawie treści zadania uzupełnij oznaczenia i zapisz odpowiednie równania:

Pani Brygida hoduje psy, koty i rybki, razem 12 zwierząt. Rybek ma 3 razy więcej niż kotów, a psów ma o 2 więcej niż kotów. Ile psów, ile kotów i ile rybek hoduje pani Brygida?

1.

liczba kotów:	k
liczba psów:	....
liczba rybek:	....
razem:	....
równanie:	....

2.

liczba psów:	p
liczba kotów:	....
liczba rybek:	....
razem:	....
równanie:	....

3.

liczba rybek:	r
liczba kotów:	....
liczba psów:	....
razem:	....
równanie:	....

ROZDZIAŁ 3

Korekta błędów w rozumowaniu matematycznym

Trzecia metoda pracy wspierająca kształcenie umiejętności czytania tekstu matematycznego to *korekta błędów w rozumowaniu matematycznym*. Nauczyciel przygotowuje tekst, w którym znajdują się liczne błędy w rozumowaniu. Może to być np. rozwiązanie jakiegoś problemu lub dowód twierdzenia. Zadaniem ucznia jest znalezienie i poprawienie błędów. Taki rodzaj pracy z tekstem rozwija umiejętność dogłębnej analizy każdego sformułowania, które zamieszczone jest w tekście matematycznym oraz kształtuje zdolność dostrzegania związków logicznych. Ponadto wspomaga rozwój umiejętności redagowania tekstu matematycznego, gdyż uczeń poprawiając błędy musi samodzielnie zapisać właściwe rozumowanie.

Przygotowując tekst do korekty błędów nauczyciel powinien zadbać o to, żeby znalazły się w nim błędy różnej natury: rachunkowe, logiczne, merytoryczne a także np. błędy w odpowiedzi do zadania lub pominięcie fragmentu rozwiązania. Uczniowie powinni zostać poinformowani, że ich zadaniem nie jest napisanie nowego rozwiązania „po swojemu”. Muszą zachować ogólną strategię rozwiązania i sposób rozumowania poprawiając tylko te fragmenty, które są błędne.

3.1. Przykład tekstu do korekty błędów

Polecenie

Znajdź i popraw błędy w przedstawionym rozwiązaniu zadania. Podczas analizy tekstu wykonuj odpowiednie rysunki.

Zadanie. Dany jest punkt A o współrzędnych $(6, 6)$. Punkt B jest punktem symetrycznym do punktu A względem osi Ox. Punkt C ma odciętą o 5 większą niż punkt B, zaś rzędną taką samą jak punkt B. Oblicz obwód i pole trójkąta ABC.

Rozwiązanie

Ponieważ punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi Ox, więc jego współrzędne wynoszą $(-6, 6)$. Zgodnie z treścią zadania mamy $C = (-6, 6 + 5) = (-6, 11)$. Aby obliczyć obwód trójkąta ABC musimy znać długości wszystkich jego boków. Zauważmy, że bok AB jest równoległy do osi Ox. Stąd i z faktu, że punkty A i B leżą po przeciwnych stronach osi Oy wnioskujemy, że długość boku AB jest równa sumie odległości tych punktów od osi Oy. Odległość punktu A od osi Oy jest równa rzędnej tego punktu, czyli wynosi 6. Podobnie, odległość punktu B od osi Oy jest równa rzędnej tego punktu, więc wynosi 6. Zatem $|AB| = 6+6 = 12$. Obliczymy teraz długość boku BC, który jest równoległy do osi Oy. Długość boku BC jest równa sumie odległości tych punktów B i C od osi Ox. Odległość punktu B od osi Ox jest równa rzędnej tego punktu, czyli wynosi -6. Podobnie, odległość punktu C od osi Oy jest równa rzędnej tego punktu, więc wynosi 11. Zatem $|BC| = -6 + 11 = 5$. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym. Bok AC jest przyprostokątną tego trójkąta. Obliczymy jego długość stosując twierdzenie Pitagorasa: $|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2} = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = \sqrt{169} = 13$. Znamy już długości wszystkich boków trójkąta ABC, więc możemy obliczyć jego obwód: $|AB| + |BC| + |AC| = 12 + 5 + 13 = 30$.

Odpowiedź: Obwód trójkąta ABC wynosi 13.

Przykładowa korekta błędów w powyższym rozwiązaniu

Ponieważ punkt B jest symetryczny do punktu A względem osi Ox, więc jego współrzędne wynoszą $(6, -6)$. Zgodnie z treścią zadania mamy $C = (6 + 5, -6) = (11, -6)$. Aby obliczyć obwód trójkąta ABC musimy znać długości wszystkich jego boków. Zauważmy, że bok AB jest równoległy do osi Oy. Stąd i z faktu, że punkty A i B leżą po przeciwnych stronach osi Ox wnioskujemy, że długość boku AB jest równa sumie odległości tych punktów od osi Ox. Odległość punktu A od osi Ox jest równa wartości bezwzględnej rzędnej tego punktu, czyli wynosi 6. Podobnie, odległość punktu B od osi Ox jest równa wartości bezwzględnej rzędnej tego punktu, więc wynosi 6. Zatem $|AB| = 6 + 6 = 12$. Obliczymy teraz długość boku BC, który jest równoległy do osi Ox. Punkty B i C leżą po tej samej stronie osi Oy. Możemy obliczyć odległości każdego z tych punktów od osi Oy, a następnie od większej z otrzymanych liczb odjąć mniejszą. Otrzymana liczba będzie długością boku BC. Odległość punktu B od osi Oy jest równa wartości bezwzględnej odciętej tego punktu, czyli wynosi 6. Podobnie, odległość punktu C od osi Oy jest równa wartości bezwzględnej odciętej tego punktu, czyli wynosi 11. ~~Długość boku BC jest równa sumie odległości tych punktów B i C od osi Ox. Odległość punktu B od osi Ox jest równa rzędnej tego punktu, czyli wynosi -6. Podobnie, odległość punktu C od osi Oy jest równa rzędnej tego punktu, więc wynosi 11.~~ Zatem $|BC| = 11 - 6 = 5$. Trójkąt ABC jest trójkątem prostokątnym. Bok AC jest przeciwprostokątną tego trójkąta. Obliczymy jego długość stosując twierdzenie Pitagorasa: $|AC| = \sqrt{|AB|^2 + |BC|^2} = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = \sqrt{169} = 13$. Znamy już długości wszystkich boków trójkąta ABC, więc możemy obliczyć jego obwód: $|AB| + |BC| + |AC| = 12 + 5 + 13 = 30$. Pole trójkąta ABC możemy obliczyć następująco: $\frac{1}{2}|BC| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$.

Odpowiedź: Obwód trójkąta ABC wynosi 30 i jego pole również wynosi 30.

Bibliografia

[1] M. Dobrowolska (red.), *Matematyka 1, podręcznik dla gimnazjum*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2013.

[2] E. Duvnjak, E. Kokiernak-Jurkiewicz, M. Wójcicka, A. Drążek, *Matematyka wokół nas. Klasa 3*, podręcznik dla gimnazjum, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, 2011.

[3] J. Jędrzejewski, A. Vizváry, M. Ziółkowski, *Matematyka –świat liczb. Klasa 2*, podręcznik dla gimnazjum, Wydawnictwo Edukacyjne Res Polona, 2013.

[4] J. Konior, *Research into the construction of mathematical texts*, Educational Studies in Mathematics, 24 (1993), 251–256.

[5] J. Konior, *Budowa i lektura tekstu matematycznego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, 1998.

[6] A. Molęda *Matematyka krok po kroku. Przewodnik encyklopedyczny z tablicami matematycznymi. Gimnazjum*, Wydawnictwo Edukacyjne Res Polona, 2001.

[7] W. Waligóra *Matematyka. Powtórka i ćwiczenia dla nauczycieli i uczniów gimnazjum*, Agencja Wydawnicza Morex 1997, 1999.

NOWOCZESNY
NAUCZYCIEL
MATEMATYKI

publikacja bezpłatna

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

ISBN 978-83-7969-490-7
9 788379 694907

WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO

www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62