

Bronisława Walczak

KANONICZNA ODPOWIEDNIOŚĆ MODUŁÓW RÓŻNICZKOWYCH I WIĄZEK WEKTOROWYCH

W pracy udowodnione są twierdzenia o kanonicznej równoważności produktów różniczkowych i wiązek wektorowych w przestrzeniach różniczkowych.*

I. WSTĘP

Pojęcie przestrzeni różniczkowej jak i modułu różniczkowego pochodzi od R. Sikorskiego. Definicje tych pojęć podał R. Sikorski w swoich wykładach z geometrii różniczkowej i opublikował w roku 1967 w pracy [3]. Przestrzeń różniczkowa jest uogólnieniem różniczkowości różniczkowej i jest blisko związana z pojęciem prerozmaitości różniczkowej w sensie Postnikowa. Niezależnie od R. Sikorskiego definicję przestrzeni różniczkowej podał MacLane [2].

Teoria wiązek pojawiła się w latach 1935-1940. Pierwsze ogólne pojęcie dotyczące wiązek podał Whitney. Jego prace, prace Hopfa i innych pokazały przydatność tej teorii do rozwiązywania topologicznych problemów w przestrzeni różniczkowej. W roku 1951 po raz pierwszy usystematyzowaną teorię wiązek w kategorii przestrzeni topologicznych podał N. Steenrod [6]. Szczegółowe opracowanie teorii wiązek wektorowych znajduje się w monografii Husemollera [1] opublikowanej w roku 1966.

Celem niniejszego artykułu jest ustalenie kanonicznej odpowiedniości między modułami różniczkowymi a wiązkami wektorowymi rozważanymi w pracy [7].

II. TERMINY I OZNACZENIA

Niech C będzie niepustym zbiorem funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze $\underline{M}$. Oznaczać będziemy za R. Sikorskim przez τ_C najściślszą topologię na $\underline{M}$ przy której ciągle są wszystkie funkcje α należące do C .

Mówimy, że zbiór funkcji C jest strukturą różniczkową na $\underline{M}$ jeśli:

(*) Zbiór C jest zamknięty ze względu na lokalizację, to znaczy $C = C_M$, gdzie C_M oznacza zbiór wszystkich funkcji $\alpha : \underline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że dla dowolnego punktu $p \in \underline{M}$ istnieje zbiór A otwarty w topologii τ_C , zawierający punkt p oraz istnieje funkcja $\hat{\alpha} \in C$ taka, że $\hat{\alpha}|_A = \alpha|_A$.

(**) Zbiór C jest zamknięty ze względu na superpozycję z funkcjami gładkimi, to znaczy spełniony jest warunek:

jeżeli $\omega \in \varepsilon_n$ oraz $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C$ to $\omega(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C$, gdzie ε_n jest zbiorem wszystkich gładkich funkcji rzeczywistych na przestrzeni euklidesowej E^n .

Definicja 1. Przestrznię różniczkową $\underline{M}$ nazywamy parę $(\underline{M}, \mathcal{F}(\underline{M}))$ gdzie $\mathcal{F}(\underline{M})$ jest strukturą różniczkową.

Niech $\underline{M}$ i $\underline{N}$ będą przestrznięmi różniczkowymi. Mówimy, że odwzorowanie $f : \underline{M} \rightarrow \underline{N}$ jest gładkie jeżeli $\alpha \circ f \in \mathcal{F}(\underline{M})$ dla dowolnej funkcji $\alpha \in \mathcal{F}(\underline{N})$.

Definicja 2. Niech $\underline{M}$ będzie przestrznięm różniczkową oraz niech $f : \underline{M} \rightarrow \underline{N}$. Zbiór $f^{*-1}(\mathcal{F}(\underline{M}))$ wszystkich funkcji $\alpha : \underline{N} \rightarrow \mathbb{R}$ takich, że $\alpha \circ f \in \mathcal{F}(\underline{M})$, jest strukturą różniczkową na $\underline{N}$ (zob. [8]); nazywamy ją strukturą koindukowaną przez odwzorowanie f z przestrznię różniczkowej $\underline{M}$. W pracy [8] dowodzi się, że jest to maksymalna struktura różniczkowa $\underline{D}$ na $\underline{N}$ przy której odwzorowanie:

$$f : (\underline{M}, \mathcal{F}(\underline{M})) \rightarrow (\underline{N}, \underline{D}) \quad (1)$$

jest gładkie.

Definicja 3. Niech $\underline{G} = (\underline{G}, \mathcal{F}(\underline{G}))$ będzie przestrznięm różniczkową oraz niech $(\underline{G}, \odot)$ będzie grupą. Dla dowolnych $g_1, g_2 \in \underline{G}$ również $g_1 \odot g_2 \in \underline{G}$, zatem możemy rozpatrywać odwzorowanie:

$$((g_1, g_2) \mapsto g_1 \odot g_2) : \underline{G} \times \underline{G} \rightarrow \underline{G} \quad (2)$$

oraz odwzorowanie

$$(g \mapsto g^{-1}) : \underline{G} \rightarrow \underline{G}. \quad (3)$$

Jeżeli odwzorowania (2) i (3) są gładkie tzn.

$$((g_1, g_2) \mapsto g_1 \odot g_2) : G \times G \rightarrow G$$

oraz

$$(g \mapsto g^{-1}) : G \rightarrow G$$

to zbiór $\underline{G}$ wraz ze strukturą różniczkową $\mathcal{F}(\underline{G})$ i strukturą grupy nazywa się uogólnioną grupą Liego.

Definicja 4. Niech G będzie uogólnioną grupą Liego a F przestrzenią różniczkową. Mówimy, że G jest grupą przekształceń przestrzeni F działającą gładko na F za pomocą η jeżeli:

$$\eta : G \times F \rightarrow F, \quad (4)$$

$$\eta(e, y) = y \text{ gdzie } e \text{ jest jednością grupy } G, \quad (5)$$

$$\eta(g_1 \odot g_2, y) = \eta(g_1, \eta(g_2, y)) \text{ dla } g_1, g_2 \in \underline{G}, y \in \underline{F}. \quad (6)$$

Oczywiste jest, że dla dowolnego ustalonego elementu g odwzorowanie

$$(y \mapsto \eta(g, y)) : F \rightarrow F$$

jest dyfeomorfizmem.

Mówimy, że grupa G działa efektywnie na F , jeżeli z równości $\eta(g, y) = y$ zachodzącej dla dowolnego $y \in F$ wynika że $g = e$. Wówczas grupa G jest izomorficzna z pewną grupą dyfeomorfizmów przestrzeni F na siebie. Dalej zamiast $\eta(g, y)$ pisać będziemy $g \cdot y$.

Definicja 5. Wiązką nazywa się układ

$$\mathfrak{G} = (B, M, \pi, F, G, \cdot, (\varphi_i; i \in I))$$

składający się z:

1) przestrzeni różniczkowej B zwanej przestrzenią wiązki,

2) przestrzeni różniczkowej M zwanej przestrzenią bazową,

3) rzutowania $\pi : B \rightarrow M$,

4) włókna F ,

5) uogólnionej grupy Liego G działającej efektywnie na F za pomocą działania $\cdot$,

6) pokrycia otwartego przestrzeni $M(V_i; i \in I)$ oraz

7) rodziny dyfeomorfizmów $(\varphi_i; i \in I)$ spełniających warunki:

$$(a) \varphi_i : (V_i, \mathcal{F}(M)_{V_i}) \times F \rightarrow (\pi^{-1}(V_i), \mathcal{F}(B)_{\pi^{-1}(V_i)})$$

$$(b) \pi(\varphi_i(p, y)) = p \text{ dla } p \in V_i, y \in F$$

(c) jeżeli odwzorowanie $\varphi_{j,p} : F \rightarrow B_{\pi^{-1} - 1[\{p\}]}$ określone jest wzorem

$$\varphi_{j,p}(y) = \varphi_j(p, y) \quad (7)$$

to dla dowolnych elementów $i, j \in I$ oraz dowolnego $p \in V_i \cap V_j$ dyfeomorfizm

$$\varphi_{j,p}^{-1} \circ \varphi_{i,p} : F \rightarrow F$$

jest elementem grupy G (jedynym, gdyż grupa działa efektywnie).

(d) Dla dowolnych elementów $i, j \in I$ oraz $p \in V_i \cap V_j$ odwzorowanie określone wzorem

$$\varphi_{i,j}(p) = \varphi_{i,p}^{-1} \circ \varphi_{j,p}$$

jest gładkie, tzn.

$$\varphi_{i,j} : (V_i \cap V_j, \mathcal{F}(M)_{V_i \cap V_j}) \rightarrow G.$$

Z definicji funkcji $\varphi_{i,j}$ wynika natychmiast, że dla dowolnych $i, j, k \in I$ oraz $p \in V_i \cap V_j \cap V_k$

$$\varphi_{k,j}(p) \circ \varphi_{j,i}(p) = \varphi_{k,i}(p). \quad (8)$$

Kładąc $i = j = k$ otrzymujemy, że $\varphi_{ii}(p)$ jest jednością grupy. Kładąc we wzorze 8 $i = k$ mamy

$$\varphi_{j,k}(p) = (\varphi_{k,j}(p))^{-1}.$$

Definicja 6. Niech $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}'$ będą wiązkami z jednakowym włóknem F i grupą G , to znaczy

$$\mathfrak{B} = (B, \pi, M, F, G, \cdot, (\varphi_i; i \in I)) \text{ oraz}$$

$$\mathfrak{B}' = (B', \pi', M', F, G, \cdot, (\varphi'_i; i' \in I')).$$

Przez odwzorowanie włókniste

$$h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$$

rozumiemy będziemy gładkie odwzorowanie $h : B \rightarrow B'$ spełniające następujące warunki:

(i) istnieje odwzorowanie $\bar{h} : M \rightarrow M'$ takie, że

$$\pi' \circ h = \bar{h} \circ \pi$$

(ii) $h|_{\pi^{-1}(\{p\})} : B|_{\pi^{-1}(\{p\})} \xrightarrow{\sim} B'|_{\pi'^{-1}(\{p'\})}$, gdzie $p' = \bar{h}(p)$

(iii) jeżeli $p \in V_j \cap \bar{h}^{-1}[V'_k]$ to odwzorowanie $\bar{\varphi}_{kj}(p)$ określone za pomocą wzoru

$$\bar{\varphi}_{kj}(p) \cdot y = \varphi'^{-1}_{k,\bar{h}(p)} (h_p(\varphi_{j,p}(y))),$$

gdzie $h_p = h|_{\pi^{-1}(\{p\})}$, jest elementem grupy G , oraz

$$\bar{\varphi}_{kj} : M_{V_j \cap \bar{h}^{-1}(V'_k)} \rightarrow G.$$

Łatwo widzieć, że funkcje $\bar{\varphi}_{kj}$ spełniają warunki:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{kj}(p) \odot \bar{\varphi}_{ji}(p) &= \bar{\varphi}_{ki}(p) \\ \varphi'_{1k}(\bar{h}(p)) \odot \bar{\varphi}_{kj}(p) &= \bar{\varphi}_{1j}(p).\end{aligned}\quad (9)$$

Udowodnimy dwa lematy:

Lemat 1. Jeżeli dane są wiązki

$$\mathfrak{B} = (B, \pi, M, F, G, \cdot, (\varphi_i; i \in I)) \quad \text{i}$$

$\mathfrak{B}' = (B', \pi', M', F, G, \cdot, (\varphi'_i; i \in I))$, gładkie odwzorowanie $\bar{h} : M \rightarrow M'$ oraz rodzina funkcji $(\bar{\varphi}_{kj}; k, j \in I)$ takich, że $\bar{\varphi}_{kj} : M_{V_j} \cap \bar{h}^{-1}[V'_k] \rightarrow G$ i spełniających (9) to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie włókniste $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$.

D o w ó d. Niech b będzie dowolnym punktem należącym do B . Jeśli $\pi(b) = p \in V_i \cap V_j \cap \bar{h}^{-1}[V'_k \cap V'_l]$, wówczas mamy:

$$\begin{aligned}\varphi'_k(\bar{h}(p), \bar{\varphi}_{kj}(p) \cdot \varphi_{jp}^{-1}(b)) &= \varphi'_k(\bar{h}(p), \bar{\varphi}_{kj}(p) \odot \varphi_{ji}(p) \cdot \\ &\cdot \varphi_{jp}^{-1}(b)) = \varphi'_k(\bar{h}(p), \bar{\varphi}_{ki}(p) \cdot \varphi_{ip}^{-1}(b))\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\varphi'_k(\bar{h}(p), \bar{\varphi}_{kj}(p) \cdot \varphi_{jp}^{-1}(b)) &= \varphi'_i(\bar{h}(p), \varphi'_{1k}(\bar{h}(p)) \odot \bar{\varphi}_{ki}(p) \cdot \\ &\cdot \varphi_{ip}^{-1}(b)) = \varphi'_i(\bar{h}(p), \bar{\varphi}_{1i}(p) \cdot \varphi_{ip}^{-1}(b)).\end{aligned}$$

Możemy więc określić poprawnie odwzorowanie h przestrzeni B w przestrzeni B' kładąc

$$h(b) = \varphi'_k(h(p), \bar{\varphi}_{kj}(p) \cdot \varphi_{j,p}^{-1}(b)). \quad (10)$$

Z definicji odwzorowania h wynika, że $h : B \rightarrow B'$ oraz

$$h|_{\pi^{-1}[\{p\}]} : B_{\pi^{-1}[\{p\}]} \xrightarrow{\sim} B'_{\pi'^{-1}[\{p'\}]}$$

Oczywista jest tożsamość

$$\pi'(h(b)) = \bar{h}(\pi(b)).$$

Dla $b \in \pi^{-1}[\{p\}]$ zgodnie z (iii) i (10) mamy:

$$\varphi'_{k,\bar{h}(p)}(h_p(\varphi_{jp}(y))) = \varphi'_{k,\bar{h}(p)}(\varphi'_k(\bar{h}(p)),$$

$$\bar{\varphi}_{kj}(p) \cdot \varphi_{jp}^{-1}(\varphi_{jp}(y))) = \bar{\varphi}_{kj}(p) \cdot y.$$

Stąd i definicji odwzorowania h wynika teza.

Lemat 2. Niech będą dane wiązki

$$\mathfrak{B} = (B, \pi, M, F, G, \cdot, (\varphi_i; i \in I)) \text{ oraz}$$

$\mathfrak{B}' = (B', \pi', M', F, G, \cdot, (\varphi'_i; i \in I))$, odwzorowanie włókniste $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ takie, że odpowiadające mu odwzorowanie $\bar{h} : M \rightarrow M'$ jest dyfeomorfizmem. Istnieje wówczas odwzorowanie $h^{-1} : B' \rightarrow B$ takie, że $h^{-1} : \mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}$.

D o w ó d. Łatwo widać, że odwzorowanie $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ określone wzorem (10) jest jednoznaczne. Dla $p' \in V'_k \cap \bar{h}[V_j]$ położymy:

$$\check{\varphi}_{jk}(p') \cdot y = \varphi_{j,p}^{-1}(h_p^{-1}(\varphi'_{k,p'}(y)))$$

$$\text{gdzie } p = \bar{h}^{-1}(p'), \quad h_p = h|_{\pi^{-1}[\{p\}]}$$

Zgodnie z (iii) mamy:

$$\check{\varphi}_{jk}(p') = (\bar{\varphi}_{kj}(p))^{-1}.$$

Stąd, że G jest uogólnioną grupą Liego oraz stąd, że $\bar{\varphi}_{kj} : M_{V_k} \cap V_j \rightarrow G$ wynika, że

$$\check{\varphi}_{jk} : M_{V'_j} \cap V'_k \rightarrow G.$$

Wówczas $h^{-1} : B' \rightarrow B$ określone jest wzorem

$$h^{-1}(b') = \varphi_j(\bar{h}^{-1}(p')), \quad \check{\varphi}_{jk}(p') \cdot \varphi'^{-1}_{kp'}(b') \quad (11)$$

Z definicji odwzorowania h^{-1} wynika, że:

$$h^{-1}|_{\pi'^{-1}[V'_k \cap \bar{h}[V_j]]} : B'_{\pi'^{-1}[V'_k \cap \bar{h}[V_j]]} \xrightarrow{\cong} B_{\pi^{-1}[h^{-1}[V'_k] \cap V_j]}$$

Zatem h^{-1} jest odwzorowaniem włóknistym wiązki $\mathfrak{B}'$ w $\mathfrak{B}$.

Jeżeli dane są dwie wiązki $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}'$, i jeżeli istnieje odwzorowanie włókniste $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ oraz odwzorowanie włókniste $h^{-1} : \mathfrak{B}' \rightarrow \mathfrak{B}$, to wiązki $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}'$ nazywają się izomorficzne.

Z lematu 2 wynika:

Uwaga 1. Jeżeli dane są wiązki

$$\mathfrak{B} = (B, \pi, M, F, G, \cdot, (\varphi_i; i \in I)) \text{ i}$$

$\mathfrak{B}' = (B', \pi', M, F, G, \cdot, (\varphi'_i; i \in I))$ oraz istnieje odwzorowanie włókniste $h : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}'$ to wiązki te są izomorficzne. Łatwo

zauważyć, że odwzorowanie $\text{id} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ jest w tym znaczeniu odwzorowaniem włóknistym wiązki $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ oraz, że jeżeli $h_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_1$ oraz $h_2 : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ to $h_2 \circ h_1 : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_2$.

Definicja 6. Zdefiniujemy teraz pojęcie C-modułu różniczkowego i przestrzeni różniczkowej modułu różniczkowego. Niech $M = (\underline{M}, \mathcal{F}(M))$ będzie przestrzenią różniczkową. Strukturę różniczkową $\mathcal{F}(M)$ oznaczaj dalej będziemy literą C. Oznaczmy przez W odwzorowanie określone na $\underline{M}$, które każdemu punktowi $p \in \underline{M}$ przyporządkowujemy będziemy element pewnej przestrzeni liniowej $\Phi(p)$. Odwzorowania tego typu nazywać będziemy Φ -polami liniowymi. Zbiór $\mathcal{W}$ wszystkich Φ -pól liniowych ze zwykłymi działaniami dodawania

$$(V + W)(p) = V(p) + W(p) \quad \text{dla } p \in \underline{M} \text{ i } V, W \in \mathcal{W}$$

oraz mnożenia

$$(\alpha \cdot W)(p) = \alpha(p) \cdot W(p) \quad \text{dla } p \in \underline{M} \text{ i } \alpha \in C$$

jest C-modułem, czyli $\mathcal{W} = (\mathcal{W}, +, \cdot)$ jest C-modułem. Dla dowolnego zbioru $A \subset \underline{M}$ symbol $\mathcal{W}_A$ oznacza zbiór wszystkich gładkich $\Phi|_A$ -pól V o tej własności, że dla każdego punktu $p \in A$ istnieje takie otoczenie $B \in \tau_C$ i takie Φ -pole $W \in \mathcal{W}$, że $W|_{A \cap B} = V|_{A \cap B}$. Dowodzi się (zob. [6]), że $\mathcal{W}_A$ jest C_A -modułem.

Jeżeli $\mathcal{W} = \mathcal{W}_M$ to mówimy, że zbiór $\mathcal{W}$ jest zamknięty ze względu na lokalizację. Mówimy, że skończony ciąg

$$W_1 \dots W_m \tag{12}$$

jest bazą wektorową pewnego C-modułu Φ -pól liniowych, jeśli

(e) dla każdego punktu $p \in \underline{M}$ ciąg $W_1(p) \dots W_m(p)$ jest bazą liniową przestrzeni $\Phi(p)$.

(f) $W_1 \dots W_m$ jest C-bazą C-modułu $\mathcal{W}$.

R. S i k o r s k i udowodnił [6], że jeżeli C-moduł $\mathcal{W}$ Φ -pól liniowych na M ma bazę wektorową, to jest zamknięty ze względu na lokalizację tzn.

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_M \tag{13}$$

W dalszym ciągu rozważać będziemy jedynie te C-moduły Φ -pól liniowych, które są zamknięte ze względu na lokalizację tzn. zachodzi (13) oraz mają lokalnie w każdym punkcie bazę wektorową złożoną z m pól, tzn. każdy punkt $p \in \underline{M}$ ma takie otoczenie $A \in \tau_C$, że istnieje baza wektorowa $W_1 \dots W_m$ na A modułu $\mathcal{W}$. Moduły o powyższych własnościach nazywają się modułami różniczkowymi, naturalna liczba m ich wymiarem, a ich elementy W gładkimi Φ -polami.

Definicja 7. Niech $\mathcal{W}$ będzie pewnym n wymiarowym modułem różniczkowym Φ -pól liniowych na przestrzeni różniczkowej (M, C) . Niech Q oznacza zbiór wszystkich par (p, w) gdzie $p \in \underline{M}$ i $w \in \Phi(p)$ to znaczy $Q = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \Phi(p)$. Przez rzut przestrzeni Q na M rozumiemy będziemy odwzorowanie $\pi : Q \rightarrow M$ zdefiniowane wzorem

$$\pi(p, w) = p \quad \text{dla} \quad (p, w) \in Q.$$

Jeśli V_i jest podzbiorem otwartym przestrzeni M oraz $W_{i1} \dots W_{in}$ jest bazą wektorową modułu $\mathcal{W}$ na V_i to wzór

$$\bar{W}_i(p, q) = (p, q^k \cdot w_{ik}(p)) \quad \text{dla} \quad p \in V_i \text{ i } q = (q^1 \dots q^n) \in E^n \quad (14)$$

definiuje pewne odwzorowanie $\bar{W}_i : V_i \times E^n \rightarrow Q$. Odwzorowania $\bar{W}_i$ postaci (14) nazywają się podstawowymi.

Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich rzeczywistych funkcji $\alpha : Q \rightarrow \underline{E}$ takich, że dla dowolnego odwzorowania podstawowego (9) superpozycja $\alpha \circ W_i$ jest funkcją gładką na produkcie $(V_i \times E^n, C_{V_i} \times E_n)$, to znaczy $\alpha \circ W_i \in C_{V_i} \times E_n$.

W pracy [6] udowodniono, że zbiór $\mathcal{F}$ jest strukturą różniczkową. Przestrzeń różniczkowa $(Q, \mathcal{F})$ nazywa się przestrzenią różniczkową modułu różniczkowego $\mathcal{W}$.

Łatwo widzieć, że odwzorowanie π jest gładkie, tzn.

$$\pi : (Q, \mathcal{F}) \rightarrow (M, C).$$

Odwzorowanie $\bar{W}_i$ [zob. 7] jest dyfeomorfizmem przestrzeni różniczkowej $(V_i \times E^n, C_{V_i} \times E_n)$ na przestrzeń różniczkową $(\pi^{-1}[V_i], \mathcal{F}^{-1}[V_i])$.

III. ODPWIEDNIOŚĆ KANONICZNA MIĘDZY MODUŁAMI RÓŻNICZKOWYMI A ZWIĄZKAMI WEKTOROWYMI

Poniżej udowodniono cztery twierdzenia ustalające kanoniczną odpowiedniość między modułami różniczkowymi a związkami wektorowymi.

Przez wiązkę wektorową rozumiemy wiązkę, której włóknom jest przestrzeń różniczkowa $E^n = (\underline{E}^n, E_n)$ a grupą strukturalną jest pełna grupa liniowa $GL(n)$ składająca się ze wszystkich liniowych automorfizmów przestrzeni R^n . Niech dana będzie wiązka wektorowa

$$\mathfrak{B} = (B, \pi, M, E^n, \text{Gl}(n), \cdot, (\varphi_i; i \in I)) \quad (15)$$

Udowodnimy następujące:

Twierdzenie 1. Dla danej wiązki wektorowej $\mathfrak{B}$ postaci (15) istnieje n wymiarowy moduł różniczkowy

$$\mathcal{W} = (\mathcal{W}, +, \cdot), (M \ni p + \pi^{-1}[\{p\}], (\psi_i; i \in I)) \quad (16)$$

gdzie $W_i = (W_{i1} \dots W_{in})$ dla $i \in I$.

D o w ó d. Oznaczmy $\pi^{-1}[\{p\}] = \Phi(p)$.

Dla dowolnego $p \in V_i$ określimy $+_i$ oraz $\cdot_i$ w następujący sposób:

$$b_1 +_i b_2 = \varphi_{ip}(\varphi_{ip}^{-1}(b_1) + \varphi_{ip}^{-1}(b_2)) \quad (17)$$

$$\text{dla } b_1, b_2 \in \Phi(p)$$

$$t \cdot_i b = \varphi_{ip}(t \cdot \varphi_{ip}^{-1}(b)) \quad (18)$$

$$\text{dla } b \in \Phi(p)$$

$$\text{oraz } t \in E$$

gdzie φ_{ip} określona jest wzorem (7).

Jeżeli $p \in V_i \cap V_j$, wówczas:

$$\begin{aligned} b_1 +_j b_2 &= \varphi_{jp}(\varphi_{jp}^{-1}(b_1) + \varphi_{jp}^{-1}(b_2)) = \\ &= \varphi_{jp}(\varphi_{jp}^{-1}(\varphi_{ip}(\varphi_{ip}^{-1}(b_1))) + \varphi_{jp}^{-1}(\varphi_{ip}(\varphi_{ip}^{-1}(b_2)))) = \\ &= \varphi_{jp}(\varphi_{ji}(p) \cdot \varphi_{ip}^{-1}(b_1) + \varphi_{ji}(p) \cdot \varphi_{ip}^{-1}(b_2)) = \\ &= \varphi_{jp}(\varphi_{ji}(p) \cdot (\varphi_{ip}^{-1}(b_1) + \varphi_{ip}^{-1}(b_2))) = \\ &= \varphi_{jp}(\varphi_{jp}^{-1}(\varphi_{ip}(\varphi_{ip}^{-1}(b_1) + \varphi_{ip}^{-1}(b_2)))) = \\ &= \varphi_{ip}(\varphi_{ip}^{-1}(b_1) + \varphi_{ip}^{-1}(b_2)) = b_1 +_i b_2 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} t \cdot_j b &= \varphi_{jp}(t \cdot \varphi_{jp}^{-1}(b)) = \varphi_{jp}(t \cdot \varphi_{jp}^{-1}(\varphi_{ip}(\varphi_{ip}^{-1}(b)))) = \\ &= \varphi_{jp}(t \cdot \varphi_{ji}(p) \cdot \varphi_{ip}^{-1}(b)) = \varphi_{jp}(\varphi_{ji}(p) \cdot (t \cdot \varphi_{ip}^{-1}(b))) = \\ &= \varphi_{jp}(\varphi_{jp}^{-1}(\varphi_{ip}(t \cdot \varphi_{ip}^{-1}(b)))) = \varphi_{ip}(t \cdot \varphi_{ip}^{-1}(b)) = t \cdot_i b \end{aligned}$$

Można więc przyjąć definicje:

$$b_1 + b_2 = b_1 +_i b_2 \quad (19)$$

$$t \cdot b = t \cdot_i b \quad (20)$$

gdy $b, b_1, b_2 \in \Phi(p)$ oraz $t \in E$.

W ten sposób otrzymaliśmy przestrzeń liniową

$$\Phi(p) = (\pi^{-1}[\{p\}], +, \cdot) \quad (21)$$

izomorficzną z przestrzenią E^n .

Uwaga 2. Jeżeli układ $y_1 \dots y_n$ stanowi bazę wektorową przestrzeni E^n to układ $\varphi_{ip}(y_1) \dots \varphi_{ip}(y_n)$ stanowi bazę wektorową przestrzeni $\Phi(p)$.

Niech $\mathcal{W}$ oznacza zbiór wszystkich gładkich odwzorowań W w przestrzeni różniczkowej M w przestrzeń różniczkową B spełniających warunek $\pi \circ W = i_{d_M}$ to znaczy

$$\mathcal{W} = \{W; W : M \rightarrow B \wedge \pi \circ W = i_{d_M}\}.$$

Mamy więc

$$\pi(W(p)) = p \quad \text{dla} \quad p \in M.$$

Zatem dla każdego $p \in M$ $W(p) \in \Phi(p)$.

Jeżeli dla dowolnych W_1 i $W_2 \in \mathcal{W}$ oraz dowolnej funkcji $\alpha \in C$ określiśmy działania dodawania

$$(W_1 + W_2)(p) = W_1(p) + W_2(p)$$

i mnożenia

$$(\alpha \cdot W)(p) = \alpha(p) \cdot W(p)$$

to $\mathcal{W} = (\mathcal{W}, +, \cdot)$ jest C -modułem.

Niech

$$y_h = (\delta_h^1, \dots, \delta_h^n), \quad h = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

oraz dla dowolnego $p \in V_i$. Niech W_{ih} będzie odwzorowaniem określonym wzorem

$$W_{ih}(p) = \varphi_i(p, y_h) \quad \text{dla} \quad h = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

gdzie φ_i spełnia warunki (a), (b), (c), (d).

Z definicji odwzorowania W_{ih} wynika, że $W_{ih} : M_{V_i} \rightarrow B$ oraz, że $W_{ih}(p) \in \Phi(p)$. Z definicji tego odwzorowania oraz uwagi 2 wynika, że układ $W_{i1}(p), \dots, W_{in}(p)$ stanowi bazę wektorową przestrzeni $\Phi(p)$.

Niech $W \in \mathcal{W}$. Dla dowolnego $p \in V_i$ istnieją $\alpha^h(p) \in E$ takie, że

$$W(p) = \alpha^h(p) \cdot w_{ih}(p).$$

Czyli

$$\begin{aligned} W(p) &= \alpha^h(p) \cdot \varphi_{ip}(y_h) = \varphi_{ip}(\alpha^h(p) \cdot y_h) = \\ &= \varphi_i(p, \alpha^h(p) \cdot y_h) \end{aligned}$$

więc

$$\varphi_i^{-1}(W(p)) = (p, \alpha^h(p) \cdot y_h).$$

Zatem

$$\alpha^h(p) \cdot y_h = pr_2(\varphi_i^{-1} W(p)).$$

Oznaczmy

$$r^k(z_1 \dots z^n) = z^k \quad \text{dla } (z_1 \dots z^n) \in E^n.$$

Mamy wówczas

$$r^k(pr_2 \varphi_i^{-1}(W(p))) = r^k(\alpha^h(p) \cdot y_h) = \alpha^k(p); \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Zachodzi zatem tożsamość

$$\alpha^k = r^k \circ pr_2 \circ \varphi_i^{-1} \circ w|_{V_i}$$

α^k jako superpozycje funkcji gładkich jest gładka i $\alpha^k \in C_{V_i}$.

Mamy wobec tego

$$w|_{V_i} = \alpha^h \cdot w_{ih} \quad \text{gdzie } \alpha^h \in C_{V_i}. \quad (24)$$

Stąd, że układ $w_{i1}(p), \dots, w_{in}(p)$ stanowi bazę liniową przestrzeni $\Phi(p)$ wynika, że układ $w_{i1} \dots w_{in}$ stanowi bazę wektorową modułu na V_i . Wykażemy teraz, że zbiór $\mathcal{W}$ jest zamknięty ze względu na lokalizację tzn. $\mathcal{W} = \mathcal{W}_M$.

Ponieważ oczywista jest inkluzja $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_M$ wykażemy, że $\mathcal{W}_M \subset \mathcal{W}$.

Niech pole $w_1 \in \mathcal{W}_M$. Zatem dla dowolnego punktu $p \in M$ istnieje zbiór $A_p \in \tau_C$ oraz Φ -pole $w \in \mathcal{W}$ takie, że $p \in A_p$ i $w_1|_{A_p} = w|_{A_p}$. Stąd w szczególności $\pi(w_1(p)) = \pi(w(p)) = p$. Ponieważ $\bigcup_{p \in M} A_p = M$ oraz $w_1|_{A_p} : M_{A_p} \rightarrow B$ więc $w_1 : M \rightarrow B$. Zatem $w_1 \in \mathcal{W}$.

Wykazaliśmy więc, że moduł $\mathcal{W}$ jest modułem różniczkowym. W dalszych rozważaniach moduł różniczkowy $\mathcal{W}$ postaci (16) skonstruowany dla wiązki wektorowej $\mathcal{B}$ oznaczać będziemy symbolem $\text{mod } \mathcal{B}$.

Niech $\mathcal{W}$ będzie pewnym n wymiarowym modułem różniczkowym Φ -pól liniowych na przestrzeni różniczkowej $M = (M, C)$, gdzie Φ jest funkcją przyporządkowującą każdemu punktowi $p \in M$ pewną n wymiarową przestrzeń liniową $\Phi(p)$.

Udowodnimy następujące:

Twierdzenie 2. Dla danego n wymiarowego modułu różniczkowego $\mathcal{W}$ układ

$$\mathcal{B}(\mathcal{W}) = (Q, \pi, M, E^n, \text{Gl}(n), \cdot, (\bar{W}_i; i \in I)) \quad (25)$$

gdzie: Q jest przestrzenią różniczkową modułu różniczkowego $\pi: Q \rightarrow M$ zdefiniowane wzorem $\pi(p, w) = p$ dla $p \in \underline{M}$, $w \in \Phi(p)$,

$(\bar{W}_i; i \in I)$ jest rodziną odwzorowań podstawowych, jest wiązką wektorową.

D o w ó d. Niech $\mathcal{A} = (V_i; i \in I)$ będzie pokryciem otwartym przestrzeni $(\underline{M}, \tau_C)$ takim, że każdy punkt $p \in \underline{M}$ ma otoczenie $V_i \in \mathcal{A}$ na którym istnieje baza wektorowa $W_{i1}, \dots, W_{in}$ modułu $\mathcal{W}_{V_i}$.

Niech $\bar{W}_i$ będzie odwzorowaniem podstawowym modułu określonym wzorem $\bar{W}_i(p, q) = (p, q^k W_{ik}(p))$ dla $p \in V_i$, $q = (q^1, \dots, q^n) \in \underline{E}^n$, $k = 1, \dots, n$, tzn.

$$\bar{W}_i : (V_i, C_{V_i}) \times (\underline{E}^n, \underline{E}^n) \xrightarrow{\sim} (\pi^{-1}[V_i], \mathcal{F}^{-1}[V_i]), \quad (26)$$

gdzie

$$\mathcal{F} = \{ \alpha; \alpha : \bigcup_{p \in \underline{M}} \{p\} \times \Phi(p) \rightarrow E \wedge \bigwedge_{i \in I} (\alpha \circ \bar{W}_i \in C_{V_i} \times \underline{E}^n) \}$$

oraz

$$\pi^{-1}[V_i] = \bigcup_{p \in V_i} \{p\} \times \Phi(p).$$

Oczywiście dla dowolnego $p \in V_i$ i $q \in \underline{E}^n$ zachodzi związek

$$\pi(\bar{W}_i(p, q)) = p.$$

Niech $\bar{W}_{ip}$ oznacza funkcję określoną wzorem $\bar{W}_{ip}(q) = \bar{W}_i(p, q)$ dla $p \in V_i$, $q \in \underline{E}^n$.

Określimy teraz rodzinę funkcji φ_{ij} ; $i, j \in I$ w następujący sposób:

dla dowolnych $i, j \in I$

$$\varphi_{ij}(p) \cdot q = \bar{W}_{ip}^{-1}(\bar{W}_{jp}(q)) \quad \text{dla } p \in V_i \cap V_j, q \in \underline{E}^n. \quad (27)$$

Udowodnimy, że $\varphi_{ij} : (V_i \cap V_j, C_{V_i \cap V_j}) \rightarrow \text{Gl}(n)$. Połóżmy $z = \varphi_{ij}(p) \cdot q$, $z = (z^1, \dots, z^n)$, $q = (q^1, \dots, q^n)$.

Mamy wobec tego

$$\bar{W}_{ip}(z) = \bar{W}_{jp}(q).$$

Czyli $(p, z^h W_{ih}(p)) = (p, q^h W_{jh}(p))$, gdzie $W_{i1} \dots W_{in}$ oraz $W_{j1} \dots W_{jn}$ są odpowiednio bazami wektorowymi modułów $\mathcal{W}_{V_i}$ i $\mathcal{W}_{V_j}$.

Zatem

$$z^h w_{ih}(p) = q^h w_{jh}(p) \quad (28)$$

oraz istnieją funkcje $\varphi_{ij,h}^r \in C_{V_i \cap V_j}$ takie, że

$$w_{jh} = \varphi_{ij,h}^r \cdot w_{ir}, \quad h = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

Wobec tego dla dowolnego punktu $p \in V_i \cap V_j$ otrzymujemy równość

$$z^h w_{ih}(p) = q^h \varphi_{ij,h}^r(p) w_{ir}(p)$$

więc

$$z^r = q^h \varphi_{ij,h}^r(p)$$

czyli

$$z = (q^h \varphi_{ij,h}^r(p), \dots, q^h \varphi_{ij,h}^n(p)).$$

Zatem

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}(p) &= [\varphi_{ij,h}^r(p); r, h \leq n] \\ &\text{dla } p \in V_i \cap V_j. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\varphi_{ij,h}^r : (V_i \cap V_j, C_{V_i \cap V_j}) \rightarrow (E^1; \epsilon_1)$$

więc

$$\varphi_{ij} : (V_i \cap V_j, C_{V_i \cap V_j}) \rightarrow \text{Gl}(n). \quad (30)$$

Z definicji funkcji φ_{ij} wynika, że dla dowolnych $i, j, k \in I$ oraz $p \in V_i \cap V_j \cap V_k$

$$\varphi_{kj}(p) \odot \varphi_{ji}(p) = \varphi_{ki}(p).$$

Wykazaliśmy więc, że każdemu n -wymiarowemu modułowi różniczkowemu można przypisać pewną wiązkę wektorową, której włóknem jest przestrzeń E^n .

Niech $\mathcal{W}$ i $\mathcal{W}'$ będą n -wymiarowymi modułami różniczkowymi na przestrzeni różniczkowej M i M' odpowiednio, to znaczy

$$\mathcal{W} = ((\mathcal{W}, +, \cdot), (M, \underline{M} \ni p \mapsto \Phi(p)), (\bar{W}_i; i \in I)) \quad (31)$$

i

$$\mathcal{W}' = ((\mathcal{W}', +, \cdot), (M', \underline{M}' \ni p \mapsto \Phi'(p)), (\bar{W}'_i; i \in I'))$$

Na mocy twierdzenia 2 istnieją odpowiednio wiązki wektorowe $\mathcal{B}(\mathcal{W})$ i $\mathcal{B}(\mathcal{W}')$ takie, że

$$\mathcal{B}(\mathcal{W}) = (Q, \pi, M, E^n, Gl(n), \cdot, (\bar{w}_i; i \in I)) \quad (32)$$

oraz

$$\mathcal{B}(\mathcal{W}') = (Q', \pi', M', E^n, Gl(n), \cdot', (\bar{w}'_i; i' \in I'))$$

Udowodnimy następujące:

Twierdzenie 3. Dla dowolnych modułów różniczkowych $\mathcal{W}$ i $\mathcal{W}'$ jeżeli $\mathcal{B}(\mathcal{W}) = \mathcal{B}(\mathcal{W}')$, to $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$.

D o w ó d. Załóżmy, że moduły $\mathcal{W}$ i $\mathcal{W}'$ spełniają równość

$$\mathcal{B}(\mathcal{W}) = \mathcal{B}(\mathcal{W}')$$

Wówczas

$$(Q, \mathcal{F}) = (Q', \mathcal{F}') \quad (33)$$

i

$$(M, C) = (M', C') \quad \text{i} \quad \pi = \pi' \quad (34)$$

Na mocy równości (33) i (34) oraz twierdzenia (patrz R. Sikorski [7]) wynika, że pole $W \in \mathcal{W}'$ wtedy i tylko wtedy gdy funkcja $p \mapsto (p, W(p))$ gładko odwzorowuje przestrzeń różniczkową M' w przestrzeń różniczkową Q' lub, co jest temu równoważne, $W \in \mathcal{W}$. Czyli $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$.

Z równości

$$\Phi(p) = \Phi'(p) \quad \text{dla} \quad p \in M$$

wynika, że dla dowolnych W_1 i $W_2 \in \mathcal{W}$ oraz dowolnego $p \in M$

$$\begin{aligned} (W_1 + W_2)(p) &= W_1(p) +_p W_2(p) = W_1(p) +'_p W_2(p) \\ &= (W_1 +'_ W_2)(p) \end{aligned}$$

gdzie $+$ i $+$ ' oznacza dodawanie w modułach $\mathcal{W}$ i $\mathcal{W}'$, a $+_p$ i $+'_p$ oznacza dodawanie w przestrzeniach liniowych $\Phi(p)$ i $\Phi'(p)$, odpowiednio. Podobnie, dla dowolnej $\alpha \in C$ i dowolnego $W \in \mathcal{W}$ mamy:

$$(\alpha \cdot W)(p) = \alpha(p) \cdot_p W(p) = \alpha(p) \cdot'_p W(p) = (\alpha \cdot' W)(p).$$

Zatem $(\mathcal{W}, +, \cdot) = (\mathcal{W}', +', \cdot')$

Z równości $\bar{w}_i = \bar{w}'_i$ dla $i \in I$ wynikają oczywiście równości $W_i = W'_i$ dla $i \in I$. Zatem $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$.

Wykazaliśmy więc, że przyporządkowanie $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{W})$ jest różnowartościowe.

Niech dana będzie wiązka wektorowa $\mathcal{B}$ postaci (15) oraz moduł różniczkowy mod $\mathcal{B}$ dla niej skonstruowany, to znaczy:

$$\text{mod } \mathcal{B} = ((\mathcal{W}, +, \cdot), \quad M \ni p \mapsto \pi^{-1}[\{p\}], (W_i; i \in I))$$

gdzie

$$\mathcal{W} = \{W; W: M \rightarrow B \text{ } \pi \circ W = \text{id}_M\},$$

$$W_i = (W_{i1} \dots W_{in}) \quad \text{dla} \quad i \in I$$

oraz dla $h = 1, 2, \dots, n$, W_{ih} określone jest wzorem (23). Udowodnimy teraz następujące:

Twierdzenie 4. Dla danej wiązki wektorowej $\mathcal{B} = (B, \pi, M, E^n, \text{Gl}(n), \cdot, (\varphi_i; i \in I))$ wiązka $\mathcal{B}(\text{mod } \mathcal{B}) = (Q, \pi', M, E_n, \text{Gl}(n), \cdot, (W_i; i \in I))$ jest z nią izomorficzna.

D o w ó d. Niech $\mathcal{W}$ oznacza dalej moduł różniczkowy skonstruowany dla wiązki wektorowej $\mathcal{B}$, to znaczy $\mathcal{W} = \text{mod } \mathcal{B}$, oraz niech $(Q, \mathcal{F})$ gdzie $\mathcal{F} = \mathcal{F}(Q)$ będzie przestrzenią różniczkową modułu $\mathcal{W}$. Na mocy twierdzenia 3 modułowi $\mathcal{W}$ można jednoznacznie przyporządkować wiązkę $\mathcal{B}(\mathcal{W})$.

Niech h będzie odwzorowaniem określonym w następujący sposób

$$h(b) = (\pi(b), b) \quad \text{dla } b \in \underline{B}. \quad (36)$$

Dla dowolnego $b \in \underline{B}$ punkt $p = \pi(b)$ należy do $\underline{M}$. Więc $b \in \pi^{-1}[\{p\}]$. Wobec tego $h(b) = (p, b) \in p \times \pi^{-1}[\{p\}]$, ale $\pi^{-1}[\{p\}] = \Phi(p)$, zatem $h(b) \in \underline{Q}$. Funkcja h jest oczywiście równoważnościowa.

Niech q będzie dowolnym punktem należącym do $\underline{Q}$. Wobec tego $q = (p, b)$, gdzie $b \in \Phi(p)$ oraz $p \in \underline{M}$. Ponieważ $\Phi(p) = \pi^{-1}[\{p\}]$ więc $q = (\pi(b), b) = h(b)$. Wykazaliśmy, że funkcja h odwzorowuje jednojednoznacznie zbiór $\underline{B}$ na zbiór $\underline{Q}$. Dalej udowodnimy, że $h|_{\pi^{-1}[V_i]}$ odwzorowuje jednojednoznacznie zbiór $\pi^{-1}[V_i]$ na zbiór $\pi'^{-1}[V_i]$ dla dowolnego $i \in I$.

Niech b będzie dowolnym punktem należącym do $\pi^{-1}[V_i]$. Wobec tego $\pi(b) = p \in V_i$. Ponieważ $\pi'(h(b)) = \pi'(\pi(b), b) = \pi(b)$ oraz $\pi'(h(b)) \in V_i$, więc $h(b) \in \pi'^{-1}[V_i]$.

Niech q będzie dowolnym punktem należącym do $\pi'^{-1}[V_i]$. Stąd, że h jest odwzorowaniem zbioru $\underline{B}$ na zbiór $\underline{Q}$ wynika, że istnieje w zbiorze $\underline{B}$ taki punkt b , że $q = h(b)$. Ponieważ $\pi'(h(b)) \in V_i$ oraz $\pi'(h(b)) = \pi(b)$, więc $b \in \pi^{-1}[V_i]$, co dowodzi, że

$$h|_{\pi^{-1}[V_i]} : \pi^{-1}[V_i] \xrightarrow{\text{na}} \pi'^{-1}[V_i].$$

Dla dowolnego $b \in \underline{B}$ istnieje $i \in I$, $y \in E^n$, dyfeomorfizm φ_i takie, że $\pi(b) = p \in V_i$ oraz $b = \varphi_i(p, y)$, gdzie φ_i spełnia warunki (a), (b), (c), (d). Zatem dla dowolnego $b \in \pi^{-1}[V_i]$ mamy:

$$h(b) = (\pi(b), \varphi_i(\pi(b), y)). \quad (37)$$

Czyli

$$h(b) = ((\pi(b), a^h \varphi_i, \pi(b)(y_h)),$$

gdzie: $\varphi_i, \pi(b)$ określone jest wzorem (7) oraz $y_1, \dots, y_n$ określone są wzorem (22) i stanowią bazę wektorową przestrzeni E^n .

Na mocy twierdzenia 1 istnieją gładkie $\Phi|_{V_i}$ - pola określone wzorem (23) takie, że układ $W_{i1}(p) \dots W_{in}(p)$ stanowi bazę wektorową przestrzeni $\Phi(p) = \pi^{-1}([p])$ oraz układ $W_{i1} \dots W_{in}$ stanowi bazę wektorową modułu $\mathcal{W}$ na V_i .

Wobec tego mamy

$$h(b) = (\pi(b), a^h W_{ih}(\pi(b))) \quad (38)$$

lub inaczej

$$h(b) = \bar{W}_i(\pi(b), y), \quad (39)$$

gdzie $\bar{W}_i$ określone jest wzorem (14).

Zatem

$$h(b) = \bar{W}_i(\varphi_i^{-1}(b)). \quad (40)$$

Dla dowolnego $i \in I$ przemienny jest diagram

$$\begin{array}{ccc} B_{\pi^{-1}[V_i]} & \xrightarrow{h|_{\pi^{-1}[V_i]}} & Q_{\pi^{-1}[V_i]} \\ \uparrow \varphi_i & & \nearrow \bar{W}_i \\ (V_i \times E^n, C_{V_i} \times E^n) & & \end{array}$$

gdzie $C_{V_i} = \mathcal{F}(M)_{V_i}$, $E^n = \mathcal{F}(E^n)$.

Zauważmy, że rodzina $(\pi^{-1}[V_i])_{i \in I}$ stanowi otwarte pokrycie przestrzeni B , a rodzina $\pi^{-1}[V_i]_{i \in I}$ jest otwartym pokryciem przestrzeni Q , oraz dla dowolnego zbioru $\pi^{-1}[V_i] \in (\pi^{-1}[V_i])_{i \in I}$. Mamy więc dyfeomorfizm

$$h|_{\pi^{-1}[V_i]} : B_{\pi^{-1}[V_i]} \rightarrow Q_{\pi^{-1}[V_i]}. \quad (41)$$

Zatem h jest dyfeomorfizmem przestrzeni B na przestrzeń Q .

Niech h_p będzie dyfeomorfizmem odwzorowującym włókno nad punktem $p \in V_i$ w wiązce $\mathcal{B}$ na włókno nad punktem w w wiązce $\mathcal{B}$ mod $\mathcal{B}$, to znaczy

$$h_p = h|_{\pi^{-1}([p])}$$

czyli

$$h_p = \bar{w}_{ip} \circ \varphi_{ip}^{-1}. \quad (42)$$

Dla ustalonego $p \in V_i \cap V_j$ rozpatrzmy odwzorowanie $h_{ij}(p)$ określone wzorem:

$$h_{ij}(p)(Y) = \bar{w}_{ip}^{-1}(h_p(\varphi_{jp}(Y))). \quad (43)$$

Dla dowolnego $Y \in E^n$ mamy:

$$h_{ij}(p)(Y) = \bar{w}_{ip}^{-1}(\bar{w}_{ip}(\varphi_{ip}^{-1}(\varphi_{jp}(Y)))) = \varphi_{ip}^{-1}(\varphi_{jp}(Y)),$$

więc

$$h_{ij}(p)(Y) = \varphi_{ip}^{-1}(\varphi_{jp}(Y)),$$

czyli

$$h_{ij}(p)(Y) = \varphi_{ij}(p) \cdot Y. \quad (44)$$

Stąd, że $\varphi_{ij}(p) \cdot Y \in E^n$ wynika, że $h_{ij}(p)$ odwzorowuje włókno E^n w siebie. Dalej stąd, że $\varphi_{ij} : M_{V_i \cap V_j} \rightarrow Gl(n)$ wynika, że $h_{ij} : M_{V_i \cap V_j} \rightarrow Gl(n)$. Oczywisty jest również warunek

$$h_{kj}(p) = h_{ki}(p) \odot h_{ij}(p) \quad \text{dla } p \in V_i \cap V_k \cap V_j.$$

Zatem h ustala izomorfizm wiązek $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}$ mod $\mathcal{B}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. S i k o r s k i, *Abstract Covariant Derivative*, Coll. Math. 18, (1967).
- [2] S. M a c L a n e, *Differentiable Spaces*, Notes for Geometrical Mechanics Winter 1970 (unpublished).
- [3] N. S t e e n r o d, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton, New Jersey, 1951.
- [4] D. H u s e m o l l e r, *Fibre Bundles*, New York 1966.
- [5] W. W a l i s z e w s k i, *Regular and Coregular Mappings of Differential Spaces*, Ann. Pol. Math., XXX (1975).
- [6] R. S i k o r s k i, *Differential Modules*, Coll. Math. 24, (1972).
- [7] R. S i k o r s k i, *Wstęp do geometrii różniczkowej*, Warszawa 1972.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Łódzki

Bronisława Walczak

THE CANONICAL EQUIVALENT OF DIFFERENTIAL MODULES AND VECTOR BUNDLES

In the paper, some theorems on the canonical equivalent of differential modules and vector bundles are proved.