ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA MATHEMATICA 3, 1989

Jarosław Cel

ÜBER DIE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG $x^9 + y^9 = 2^n z^2$

In dieser Arbeit beweist man die Unmöglichkeit der diophantischen Gleichung $x^9 + y^9 = 2^n z^2$ in teilerfremden natürlichen Zahlen.

Es sei n eine beliebige nichtnegative ganze Zahl. Jede Lösung der Gleichung

$$x^9 + y^9 = 2^n z^2 \tag{1}$$

in ganzen teilerfremden Zahlen x, y, z, die der Bedingung $z = \pm 1$ oder $xyz = 0$ genügt, werden wir nicht in Betracht ziehen und trivial nennen. Es ist leicht solche Lösungen zu zeigen, zum Beispiel (x, y, z) : (0, 0, 0) (1, -1, 0) (-1, 1, 0) für alle Exponenten n, (x, y, z) : (0, 2, ± 1) (2, 0, ± 1) für n = 9 oder zuletzt $x = y = \pm z = 1$ für n = 1.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist den folgenden Satz zu beweisen.

Satz. Für beliebige nichtnegative ganze Zahl n besitzt die Gleichung (1) keine nichttriviale Lösung in ganzen Zahlen x, y, z mit (x, y) = 1.

Der gesamte Beweis dieses Hauptsatzes ist ziemlich lang, deshalb werden wir ihn durch drei Hilfssätze vorbereiten. Der erste stellt ein, schon seit Jahrhunderten als großer Fermatscher Satz (hier nur für kleinste Exponenten) bekanntes, Resultat dar.

Hilfssatz 1. Die diophantischen Gleichungen $x^4 \pm y^4 = z^2$ und $x^3 + y^3 = z^3$ sind in natürlichen Zahlen x, y, z unmöglich. (siehe z.B. sehr interessantes Büchlein [2]).

Hilfssatz 2. Die diophantische Gleichung $x^3 + y^3 = 2z^3$ ist in ganzen Zahlen x, y, z unter Bedingung $x \neq \pm y$ unmöglich. (siehe z.B. [3] s. 129-130).

Der Beweis dieses klassischen Satzes von A. W a k u l i c z in [4] gegeben ist zwar einfach aber sehr lang, weil er auf Grund einer umständlich bewiesenen Unlösbarkeit diophantischer Gleichung $x^4 + 9x^2y^2 + 27y^4 = z^2$ geführt wird. In [1] habe ich diesen letzten Beweis stark vereinfacht und verkürzt.

Hilfssatz 3. Die Gesamtheit der ganzzahligen Lösungen der diophantischen Gleichung $x^2 - 27y^2 = z^3$ mit $x, y > 0$, $(x, 3y) = 1$ ist durch

$$x = a(a^2 + 9b^2) \quad y = b(a^2 + b^2) \quad z = a^2 - 3b^2$$

gegeben, wobei $(a, 3b) = 1$ und $2|ab$ für natürliche a, b gilt.

Beweis. Es sei (x, y, z) eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $x^2 - 27y^2 = z^3$, die den Bedingungen unseres Hilfssatzes genügt. Hier werden wir sofort die Existenz der im Satz beschriebenen Zahlen a, b ausführen. Es kann nicht xy ungerade sein, denn sonst wäre $z^3 = x^2 - 27y^2 \equiv -2 \pmod 8$, was jedoch unmöglich ist Danach ist z ungerade und von den Zahlen x, y genau eine gerade. Man überprüft leicht, daß die Ideale $\langle x + 3\sqrt{3}y \rangle$ und $\langle x - 3\sqrt{3}y \rangle$ relativ prim sind, denn sonst existierte ein Ideal $\lambda \neq \langle 1 \rangle$, zu dem die beiden Zahlen 2x und $z^3 = x^2 - 27y^2$ gleichzeitig gehörten. Also würde für ein natürliches $h > 1 : h|2x$ und $h|z^3$, was mit den Voraussetzungen $x^2 - 27y^2 = z^3$, $(x, 3y) = 1$ und $2\nmid z$ den Widerspruch implizierte. Da jedes Ideal des Körpers $Q(\sqrt{3})$ sein Hauptideal ist, haben wir $x + 3\sqrt{3}y = \varepsilon(a + b\sqrt{3})^3$ für eine Einheit $\varepsilon = \xi + \eta\sqrt{3}$ dieses Körpers und ganze rationale Zahlen a, b. Selbstverständlich ist damals die Gleichung $\xi^2 - 3\eta^2 = \pm 1$ richtig. Seine kleinste Lösung bildet das Paar $\xi = 2$, $\eta = 1$, deshabl kann man schließlich

$$x + 3\sqrt{3}y = \pm(2 \pm \sqrt{3})^n (a + b\sqrt{3})^3 = \pm(2 \pm \sqrt{3})^n (a^3 + 9ab^2 + 3a^2b\sqrt{3} + 3b^3\sqrt{3})$$

schreiben. Es genügt hier nur drei Möglichkeiten zu betrachten, nämlich n = 0, 1, 2. Eine leichte Rechnung zeigt, daß bei n = = 1, 2 x durch 3 teilbar ist. Man muß also n = 0 sein und ferner $x + 3\sqrt{3}y = \pm(a + b\sqrt{3})^3$, d.h. $x = \pm a(a^2 + 9b^2)$, $y = \pm b(a^2 + b^2)$. Da xy natürlich ist, sind die Zahlen a, b sämtlich von 0 verschieden. Wegen $x, y > 0$ ist es möglich diese zwei Formeln in Form $x = a(a^2 + 9b^2)$, $y = b(a^2 + b^2)$ darzustellen. Da $(x, 3y) = 1$ ist, muß also $(a, 3b) = 1$ und genau eine dieser zwei Zahlen gerade sein. Zum Schluß erster Teil des Beweises übersieht man ohne Schwierigkeiten die letzte Gleichung unseres Systems $z = a^2 - 3b^2$.

Andererseits überprüft man leicht, daß für natürliche Zahlen $a, b, (a, 3b) = 1, 2|ab$ die, durch die Formeln $x = a(a^2 + 9b^2)$, $3y = 3b(a^2 + b^2)$, $z = a^2 - 3b^2$ bestimmten Zahlen, $x, 3y, z$ paarweise teilerfremd sind und die Gleichung $x^2 - 3(3y)^2 = z^3$ erfüllen.

Dies vollendet ganzen Beweis.

Die oben erhaltenen Formeln sind beim Beweis des folgenden Satzes sehr behilflich.

Folgerung. Für $A = 27$ und 432 besitzt die diophantische Gleichung $x^2 - Ay^8 = z^3$ keine Lösung mit natürlichen Zahlen x, y, in der x und Ay prim zu einander sind.

Es ist leicht zu beachten, daß man mit den folgenden Gleichungen $x^2 - 27(y^4)^2 = z^3$ und $x^2 - 27(4y^4)^2 = z^3$ zu tun hat. Die vorhergehenden Formeln führen damals zur in natürlichen Zahlen unmöglichen Gleichung $e^4 - f^4 = g^2$, was den Beweis klar tut.

Nach solcher Vorbereitung können wir endlich zur Betrachtung der Gleichung (1) übergehen. Die Beweismethode besteht darin, daß man von einer hypothetischen nichttrivialen Lösung dieser Gleichung die nichttriviale Lösung einer der vorhergehenden Gleichungen bekommt, was jedoch zum Widerspruch führt.

Nehmen wir nämlich im Widerspruch mit der Behauptung an, daß eine Lösung (x, y, z) der Gleichung (1) in die Bedingungen $(x, y) = 1$, $xyz \neq 0$ und $z \neq \pm 1$ erfüllenden ganzen Zahlen existiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man hier in Betracht nur zwei Fälle $n = 0$ und $n = 1$ ziehen.

Es sei zuerst $n = 0$. Unsere Gleichung läßt sich dann auf die Form $u(u^2 + 3v^2) = 4z^2$ bringen, wo u, v entsprechend $x^3 + y^3$ und $x^3 - y^3$ bedeuten. Wegen $(x, y) = 1$ folgt $(u, v)|2$. Aus Bedingungen für die Lösung (x, y, z) ergibt sich leicht $uv \neq 0$, genügt es also nur die natürlichen Lösungen (u, v, z) letzter Gleichung zu suchen. Da $2x^3 = u + v$ ist, so hat man hier mit gleichzeitig ungeraden oder geraden Zahlen u, v zu tun. Wenn u, v die beiden ungeraden und $u, u^2 + 3v^2$ teilerfremden sind, zerfällt die Gleichung $u(u^2 + 3v^2) = 4z^2$ in zwei folgenden $u = r^2$, $u^2 + 3v^2 = 4s^2$, wobei $z = rs$ für natürliche ungerade ohne gemeinsamen Teiler Zahlen r, s ist. Hieraus resultiert sofort $3v^2 = (2s - r^2)(2s + r^2)$. Da die zwei Faktoren der rechten Seite dieser Gleichung relativ prim sind, kann man also setzen $2s + \varepsilon r^2 = t^2$, $2s - \varepsilon r^2 =$

$= 3w^2$ mit $\varepsilon = \pm 1$ und natürlichen ungeraden und relativ primen t, w, $(3, t) = 1$. Dies gibt $v = wt$, $2\varepsilon r^2 = t^2 - 3w^2$, $\varepsilon = \pm 1$. Der Wert $\varepsilon = +1$ ist unmöglich, weil dann $3|r$ und $3|t$ sein muß. Es bleibt also nur eine Möglichkeit $u = r^2 = \frac{3w^2 - t^2}{2}$, die mit $v = wt$ zwei folgenden Gleichungen $x^3 = \frac{u + v}{2} = \frac{3w - t}{2} \cdot \frac{w + t}{2}$ und $y^3 = = \frac{3w + t}{2} \cdot \frac{w - t}{2}$ impliziert.

Man beachtet leicht, daß

$$\left(\frac{3w - t}{2}, \frac{w + t}{2}\right) \left(\frac{3w + t}{2}, \frac{w - t}{2}\right) = 2$$

ist, was unsere Gleichungen in vier andere zerfallen läßt, nämlich,

$$2c^3 = \frac{3w \pm t}{2} \qquad 2d^3 = \frac{w \mp t}{2} \qquad e^3 = \frac{3w \mp t}{2} \qquad f^3 = \frac{w \pm t}{2}$$

aus denen folgt die in verschiedenen von 0 ganzen Zahlen d, f, c unmögliche Gleichung $d^3 + f^3 = c^3$. Es bleibt uns nur diesen Fall zu betrachten, in dem u durch 3 teilbar ist, d.h. $(u, u^2 + 3v^2) = = 3$ und ferner $u = 3p^2$, $v^2 + 3p^4 = 4q^2$. Mithin $3p^4 = (2q - v) \cdot \cdot (2q + v)$. In dieser Gleichung sind die beiden Faktoren der rechten Seite prim zu einander und man hat $2q + \varepsilon v = 3a^4$, $2q - \varepsilon v = = b^4$ mit $\varepsilon = \pm 1$ und ganzen ungeraden Zahlen a, b. Hieraus erhält man schließlich

$$(-xy)^3 = -\frac{u^2 - v^2}{4} = \left(\frac{b^4 - 21a^4}{4}\right)^2 - 27a^8$$

was jedoch nach dem früher Bewiesenen unmöglich ist. Sind jetzt u, v die beiden geraden und setzt man in $u(u^2 + 3v^2) = 4z^2$, $v = 2v_1$, $z = 2z_1$, $u = 2u_1$, wo $(u_1, v_1) = 1$ ist, so zeigt der leichte Vernunftschluß, daß die Gleichung $u_1(u_1^2 + 3v_1^2) = 2z_1^2$ für $(u_1, u_1^2 + 3v_1^2) = 1$ unlösbar ist.

Also

$$(u_1, u_1^2 + 3v_1^2) = 3, \text{ d.h. } u_1 = 3u_2, \quad z_1 = 3z_2, \quad (3u_2, v_1) = 1$$

was unsere Gleichung in $u_2(3u_2^2 + v_1^2) = 2z_1^2$ überführt. Danach ist $u_2 = 2a^2$, $3u_2^2 + v_1^2 = b^2$ mit natürlichen teilerfremden ungeraden Zahlen b, v_1. Da $\left(\frac{b - v_1}{2}, \frac{b + v_1}{2}\right) = 1$ und $3a^4 = \frac{b - v_1}{2} \cdot \frac{b + v_1}{2}$

ist, folgt hieraus $b + \varepsilon v_1 = 6p^4$, $b - \varepsilon v_1 = 2q^4$, $a = pq$ mit $\varepsilon = \pm 1$ und sofort $u_1 = 6p^2q^2$, $\varepsilon v_1 = 3p^4 - q^4$. Aus der Gleichung $(xy)^3 = u_1^2 - v_1^2$ resultiert leicht $(-xy)^3 = (q^4 - 21p^4)^2 - 432p^8$, was gegen Folgerung verstößt und den Beweis für $n = 0$ beendet.

Jetzt sei $n = 1$. In der eventuellen Lösung der Gleichung (1) in ganzen verschiedenen von 0 Zahlen x, y, z, $(x, y) = 1$ müssen x und y beide ungerade sein, d.h. für manche teilerfremde ganze Zahlen u, v: $2u = x^3 + y^3$, $2v = x^3 - y^3$ ist. Hieraus folgt leicht die Gleichung $u(u^2 + 3v^2) = z^2$, worin u, v als natürliche Zahlen annehmen kann, von denen genau eine gerade ist. Zuerst sei $(u, u^2 + 3v^2) = 1$. In diesem Fall $u = r^2$, $r^4 + 3v^2 = s^2$, daher v-gerade, r, s-beide ungerade sein müssen.

Die Gleichung

$$3\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{s - r^2}{2} \cdot \frac{s + r^2}{2}$$

impliziert dann $s + \zeta r^2 = 6t^2$, $s - \zeta r^2 = 2w^2$, $v = 2wt$ mit manchem $\zeta = \pm 1$ und natürlichen teilerfremden t, w, mithin weiter $\zeta r^2 = 3t^2 - w^2$. Es ist hier klar, daß $\zeta = -1$ sein muß, woher $u = w^2 - 3t^2$, $v = 2wt$ und unverzüglich $x^3 = u + v = (w + 3t)(w - t)$, $y^3 = u - v = (w - 3t)(w + t)$ folgt. Da x, y ungerade sind, ist also $(w + 3t, w - t) = (w - 3t, w + t) = 1$, was ferner $w + 3t = c^3$, $w - t = d^3$, $w - 3t = e^3$, $w + t = f^3$ (mithin $f \geqslant 2$) bedingt. Dadurch der gewünschte Widerspruch erzeugt wird, weil man $c^3 + d^3 = 2f^3$ hat. Wir brauchen noch den Fall $(u, u^2 + 3v^2) = 3$ zu betrachten, d.h. $u = 3u_1$, $z = 3z_1$, $(u_1, z_1) = 1$. Aber dann $u_1(3u_1^2 + v^2) = z_1^2$ und leicht $u_1 = a^2$, $3a^4 + v^2 = b^2$, $(3a, b) = 1$. Wäre a ungerade, so mußte v gerade sein, d.h. $b^2 \equiv 3$ oder 7 (mod 8), was unmöglich ist. Daher ist a gerade, b, v beide ungerade und natürlich teilerfremd sind. Die letzte Gleichung kann man damals als $3\left(\frac{a^2}{2}\right)^2 = \frac{b - v}{2} \cdot \frac{b + v}{2}$ darstellen. Hieraus für natürliche teilerfremde Zahlen p, q, $2|pq$ gilt $b + \zeta v = 6p^2$, $b - \zeta v = 2q^2$, $a^2 = 2pq$ ($\zeta = \pm 1$), also $\zeta v = 3p^2 - q^2$, $a^2 = 2pq$. Wenn $p = 2p_1^2$, $q = q_1^2$ ist, bekommen wir sofort $(-xy)^3 = v^2 - u^2 = (q_1^4 - 84p_1^4)^2 - 27(2p_1)^8$ im Widerspruch zur Folgerung. Die zweite Möglichkeit $p = p_1^2$, $q = 2q_1^2$ führt auch zur in natürlichen teilerfremden Zahlen unmöglichen Gleichung $(-xy)^3 = (4q_1^4 - 21p_1^4)^2 - 432p_1^8$.

So wird die Richtigkeit unseres Satzes restlos bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] J. C e l, *O rozkładzie sześcianu na różnicę bikwadratów*, Matematyka 5(187) 1983, S. 308-310.

[2] J. I t a r d, *Arithmétique et théorie des nombres*, Presses Universitaires de France, Paris 1963.

[3] W. S i e r p i ń s k i, *Teoria liczb*, cz. II, Warszawa 1959.

[4] A. W a k u l i c z, *On the Equation $x^3 + y^3 = 2z^3$*, Coll. Math. 5(1958), S. 11-15.

Universität Łódź

Jarosław Cel

O RÓWNANIU DIOFANTYCZNYM $x^9 + y^9 = 2^n z^2$

W pracy udowodniono następujące twierdzenie: dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej n równanie $x^9 + y^9 = 2^n z^2$ nie posiada nietrywialnych rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z, gdzie (x, y) = 1.