

Piotr Wdowiński, Daniel Wrzeński***

ANALIZA DYNAMICZNA PORTFELI AKCJI

Streszczenie. W artykule podejmujemy próbę analizy porównawczej portfeli akcji notowanych na GPW w Warszawie, zbudowanych za pomocą modeli Markowitza i Sharpe'a. Przedmiotem zainteresowania są dynamiczne krótkookresowe prognozy portfeli o minimalnym ryzyku, oparte na szeregach statystycznych o zmiennej liczebności. Zastosowane podejście dynamiczne pozwala na wyznaczanie zmiennych w czasie parametrów macierzy wariancji-kowariancji stóp zwrotu w modelu Markowitza i parametrów beta w modelu Sharpe'a. Zrealizowane przeciętne stopy zwrotu portfeli dynamicznych porównujemy ze stopą zwrotu indeksu WIG20. Na podstawie uzyskanych wyników empirycznych wnioskujemy, że zastosowanie dynamicznej struktury udziałów akcji w portfelach zbudowanych na podstawie szeregów statystycznych z okresu nie przekraczającego miesiąca pozwala na osiągnięcie wyższej w stosunku do indeksu WIG20 przeciętnej stopy zwrotu z portfeli.

Słowa kluczowe: optymalizacja portfela akcji, model Markowitza, model Sharpe'a, prognozowanie dynamiczne, stabilność parametrów.

1. WPROWADZENIE

Teoria wyboru portfela od czasu jej opublikowania przez H. Markowitza w 1952 r. zyskała dużą popularność i powstało wiele modyfikacji podejścia klasycznego. Zastosowanie tej teorii pozwala na optymalną alokację kapitału między alternatywne papiery wartościowe przy wykorzystaniu zaawansowanych metod statystyki i ekonometrii. Metody ekonometryczne zyskują coraz większe znaczenie w analizie portfelowej, szczególnie w tych jej obszarach, w których zachodzi potrzeba wyjaśniania i prognozowania zjawisk gospodarczych. Modele ekonometryczne są szczególnie często stosowane w wycenie papierów wartościowych i analizie ich ryzyka. Natomiast wyniki badań nad wyceną i ryzykiem papierów wartościowych oraz instrumentów finansowych stanowią zasadnicze ogniwo analizy portfelowej. Stąd też

* Dr, adiunkt, Uniwersytet Łódzki.

** Mgr, absolwent Uniwersytetu Łódzkiego.

umiejętność wyznaczenia prognoz na podstawie historii zjawisk gospodarczych może przyczyniać się do skuteczniejszej dywersyfikacji w optymalnym wyborze portfela i do osiągania ponadprzeciętnych rezultatów inwestycyjnych.

Na temat analizy papierów wartościowych i teorii wyboru portfela istnieje bogata literatura. Wśród wielu interesujących pozycji literatury o charakterze monograficznym należy wymienić prace: Elton, Gruber (1998); Haugen (1996); Jajuga, Jajuga (1999); Jajuga (red.) (2000); Weron, Weron (1998).

W niniejszym artykule prezentujemy przykład zastosowania dwóch teorii wyboru portfela – klasycznej teorii Markowitza i teorii Sharpe'a. Przedmiotem zainteresowania będzie analiza porównawcza obu metod w krótkim horyzoncie inwestycyjnym przy zastosowaniu modeli o zmiennych w czasie parametrach dla akcji notowanych na GPW w Warszawie. W dalszej części artykułu jest podzielony na trzy paragrafy. W pierwszym przedstawiamy metodologię proponowanego podejścia, w drugim analizę wyników empirycznych alternatywnych portfeli akcji o zmiennej strukturze, natomiast w trzecim wnioski końcowe.

2. ALTERNATYWNE MODELE PORTFELI AKCJI

W artykule wykorzystaliśmy klasyczny model Markowitza (1952) i model Sharpe'a (1964), stanowiący uproszczenie podejścia klasycznego. Model klasyczny Markowitza, określony w postaci zadania programowania nieliniowego (NLP), można zapisać w notacji macierzowej w następujący sposób¹:

$$\min f(x) = x^T V x, \quad (1)$$

przy warunkach:

$$x^T \bar{P} \geq \bar{P}_p^d, \quad (2)$$

$$x^T i = 1, \quad (3)$$

$$x \geq 0, \quad (4)$$

gdzie:

$x^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k]$ – wektor udziałów k papierów wartościowych w portfelu;

$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1k} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{k1} & v_{k2} & \dots & v_{kk} \end{bmatrix}$ – symetryczna macierz wariancji-kowariancji

stóp zwrotu papierów wartościowych;

¹ Będziemy rozpatrywać przypadki bez możliwości dokonania tzw. „krótkiej sprzedaży” na rynku akcji.

$$\dot{\vec{P}} = \begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \vdots \\ \dot{P}_k \end{bmatrix} - \text{wektor średnich stóp zwrotu } k \text{ papierów wartościowych,}$$

$\dot{P}_p^d$ – żądana stopa zwrotu portfela papierów wartościowych oraz i to wektor jedynkowy stopnia k .

Model Sharpe'a, wyrażony również w postaci zadania NLP, ma następującą postać:

$$\min g(x) = \sigma_M^2 x^T B x + x^T E x \quad (5)$$

przy warunkach:

$$x^T \alpha + \dot{\vec{P}}_M x^T \beta \geq \dot{P}_p^d \quad (6)$$

$$x^T i = 1 \quad (7)$$

$$x \geq 0 \quad (8)$$

gdzie:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \text{ i } \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} - \text{wektory współczynników linii regresji (charak-}$$

terystycznych) dla k papierów wartościowych;

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1^2 & \beta_1 \beta_2 & \cdots & \beta_1 \beta_k \\ \beta_2 \beta_1 & \beta_2^2 & \cdots & \beta_2 \beta_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_k \beta_1 & \beta_k \beta_2 & \cdots & \beta_k^2 \end{bmatrix} - \text{symetryczna macierz zbudowana ze współ-}$$

czynników β dla k papierów wartościowych;

$$E = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{e_1}^2 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \hat{\sigma}_{e_k}^2 \end{bmatrix} - \text{diagonalna macierz estymatorów wariancji reszt } e_i$$

z poszczególnych k równań charakterystycznych papierów wartościowych, a ponadto $\dot{\vec{P}}_M$ oznacza średnią stopę zwrotu indeksu giełdowego, natomiast σ_M^2 wariancję stopy zwrotu tego indeksu.

Parametry regresji α i β dla k papierów wartościowych szacuje się na podstawie równania Sharpe'a o postaci (por. np. Elton, Gruber 1998):

$$\dot{P}_{it} = \alpha_i + \beta_i \dot{P}_{Mt} + e_{it}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k, \quad t = 1, 2, \dots, T \quad (9)$$

gdzie $\dot{P}_{it}$ oznacza stopy zwrotu papieru wartościowego i , $\dot{P}_{Mt}$ to stopy zwrotu indeksu giełdowego, natomiast e_{it} to gaussowskie zakłócenia równania.

W równaniu (9) zakłada się, że zakłócenia e_i i e_j z poszczególnych równań nie są skorelowane, tj. $E(e_i e_j) = 0$ dla $i \neq j$. Oznacza to, że jedyną przyczyną wspólnych zmian stóp zwrotu papierów wartościowych jest ich reakcja na zmiany rynkowej stopy zwrotu (indeksu giełdowego). Stąd też macierz E wariancji reszt e_{it} jest macierzą diagonalną. Model jednowskażnikowy ma wówczas następujące cechy:

$$\dot{P}_i = \alpha_i + \beta_i \dot{P}_M \quad (10)$$

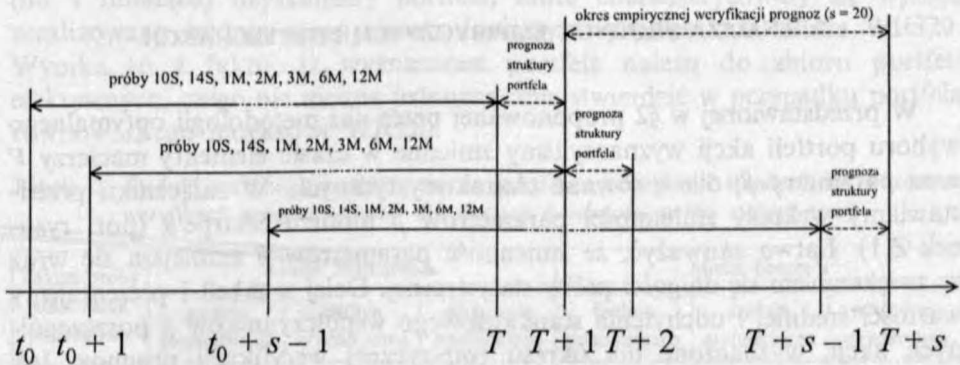
$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \hat{\sigma}_{e_i}^2 \quad (11)$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_M^2 \quad (12)$$

Zauważmy, że w wyrażeniu (11) całkowite ryzyko papieru wartościowego stanowi sumę ryzyka systematycznego związanego z parametrem β_i i ryzykiem indeksu giełdowego σ_M^2 oraz ryzyka niesystematycznego związanego z parametrem $\hat{\sigma}_{e_i}^2$. Widać ponadto, że kowariancja papierów wartościowych (12) zależy wyłącznie od ryzyka systematycznego. Jest to konsekwencją metody szacowania parametrów regresji liniowej, tj. metody najmniejszych kwadratów, i wynikającego z niej założenia o nieskorelowaniu zakłóceń równania ze zmiennymi objaśniającymi oraz założenia $E(e_i e_j) = 0$ o nieskorelowaniu składników losowych z poszczególnych równań o postaci (9).

W badaniu dokonaliśmy porównania obu zaprezentowanych metod wyznaczania optymalnego portfela papierów wartościowych stosując podejście dynamiczne. Podejście to polegało na tym, że pod uwagę wzięliśmy próby statystyczne o różnej liczebności, na podstawie których wyznaczaliśmy dynamiczne prognozy udziałów papierów wartościowych w portfelach. Analizie poddaliśmy portfele uzyskane na podstawie następujących ruchomych prób statystycznych: 10 sesji (10S), 14 sesji (14S), 1 miesiąc (1M), 2 miesiące (2M), 3 miesiące (3M), 6 miesięcy (6M) i 12 miesięcy (12M). Badaniu podlegały stopy zwrotu (typu *close-to-close*) pięciu walorów – Elektrim SA (ELE), KGHM SA (KGHM), PKN Orlen SA (PKN), PeKaO SA (PKO), Telekomunikacja Polska S.A. (TPSA) – wchodzących w skład indeksu WIG20 oraz stopy zwrotu indeksu WIG20. Wybrane spółki, w analizowanym okresie, charakteryzowały się wysokim udziałem w portfelu indeksu WIG20 oraz były głównymi reprezentantami różnych branż. Ponadto wybrane spółki wykazywały się wysoką płynnością, dzięki temu całkowicie eliminowano ryzyko przypadkowego kształtowania się kursu zamknięcia. W badaniu wykorzystano dzienne stopy zwrotu w okresie od 3.04.2000 r. do 2.05.2001 r., co dało łącznie próbę 268 obserwacji. Ostatnich 20 obserwacji, za okres od 2.04. do 2.05.2001 r., stanowiło okres empirycznej weryfikacji prognoz *ex post*.

Dla tego okresu wyznaczyliśmy zrealizowane dzienne stopy zwrotu alternatywnych portfeli skonstruowanych różnymi metodami na podstawie prób statystycznych o zmiennej liczbie, przy czym obserwacje należące do okresu prognozowanego były również brane pod uwagę przy wyznaczaniu optymalnych portfeli. Graficzny schemat podejścia przedstawiamy na rysunku 1.



Rys. 1. Metoda wyznaczania prognoz struktury portfeli akcji
Źródło: opracowanie własne

Dokonałymi też uproszczenia podejść klasycznych, które polegało na wyłączeniu z analizy warunku (2) i (6) osiągnięcia żądanej stopy zwrotu, aby w ten sposób poszukiwać portfeli o minimalnej wariancji stóp zwrotu (ryzyku). Podstawą decyzji inwestycyjnej była optymalna struktura portfela o minimalnym ryzyku, chociaż skala tego ryzyka nie stanowiła przedmiotu zainteresowania i nie miała wpływu na decyzję. Uzyskane w tej procedurze udziały poszczególnych akcji w portfelu w okresie T stanowiły prognozy udziałów na okres $T + 1$ dla okresu empirycznej weryfikacji prognoz. Pozwoliło to na wyznaczenie zrealizowanych w okresie $T + 1$ stóp zwrotu portfeli. Mieliśmy wówczas:

$$\hat{x}_{T+1} = x_T \quad (13)$$

$$\dot{P}_{p, T+1} = \hat{x}_{T+1}^T \dot{P}_{T+1} \quad (14)$$

gdzie $\dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dots \\ \dot{P}_k \end{bmatrix}$ to wektor empirycznych stóp zwrotu k akcji.

Zatem przy konstruowaniu portfeli za pomocą modelu Markowitza braliśmy pod uwagę macierz wariancji-kowariancji V o zmiennych w czasie parametrach oszacowanych na podstawie poszczególnych ruchomych prób

przedstawia rysunek Z.2, zamieszczony w załączniku. Częste zmiany udziałów akcji w portfelach mogą z jednej strony komplikować proces inwestycyjny, z drugiej zaś umożliwiają uzyskanie średniej stopy zwrotu, wyraźnie przewyższającej średnią stopę zwrotu indeksu WIG20. W długich okresach próby zmiany udziałów poszczególnych walorów w portfelach są nieznaczące.

W tabeli 3 przedstawiamy dane dotyczące relacji geometrycznych stóp zwrotu poszczególnych portfeli względem stopy zwrotu indeksu WIG20, tj. zależność $\bar{P}_p / \bar{P}_M$.

Tabela 3. Relacja stóp zwrotu portfeli akcji i stopy zwrotu indeksu WIG20

Zakres próby szacowania parametrów	Model Markowitza	Model Sharpe'a
10S	1,012	1,086
14S	1,552	1,452
1M	1,271	1,398
2M	0,591	0,599
3M	0,767	0,682
6M	0,351	0,352
12M	0,450	0,427

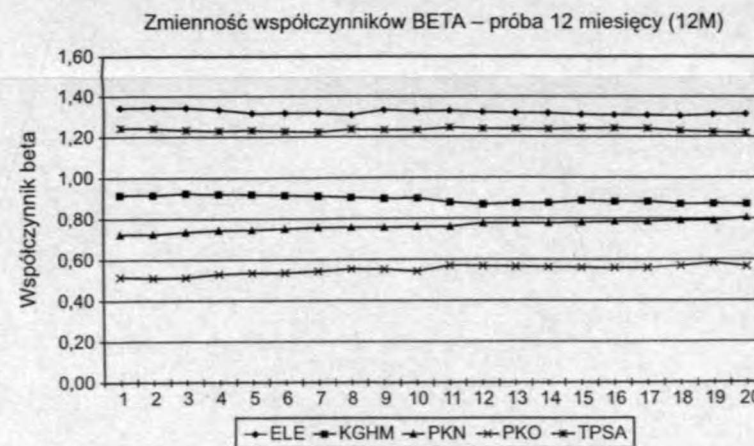
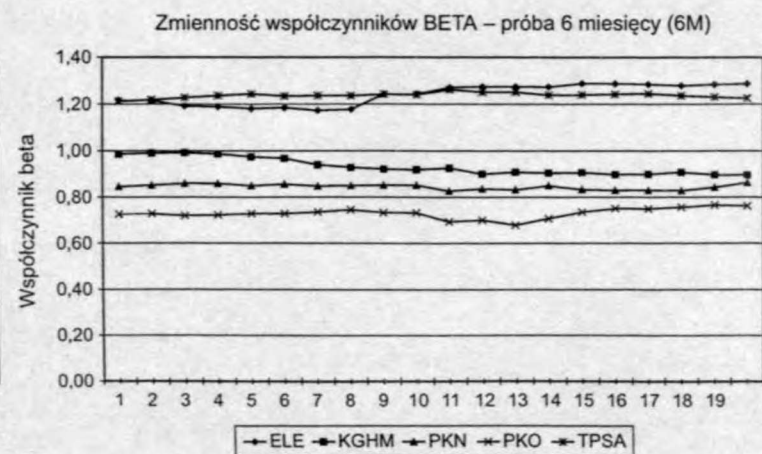
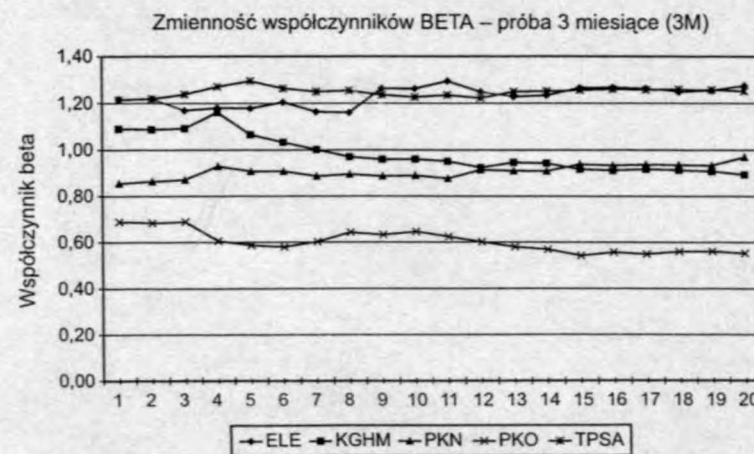
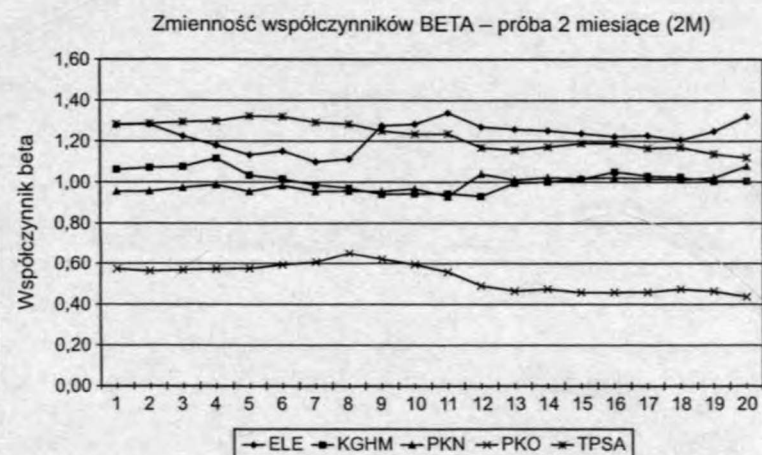
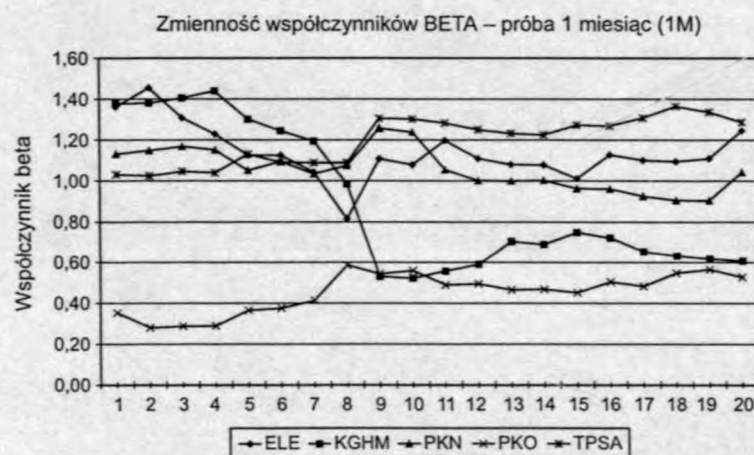
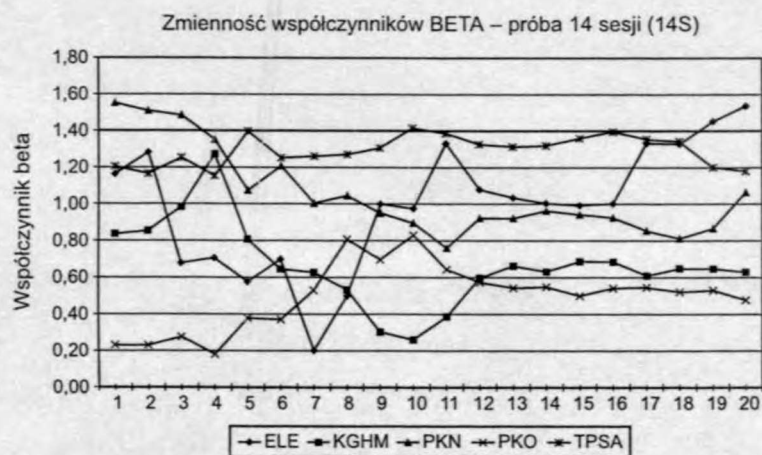
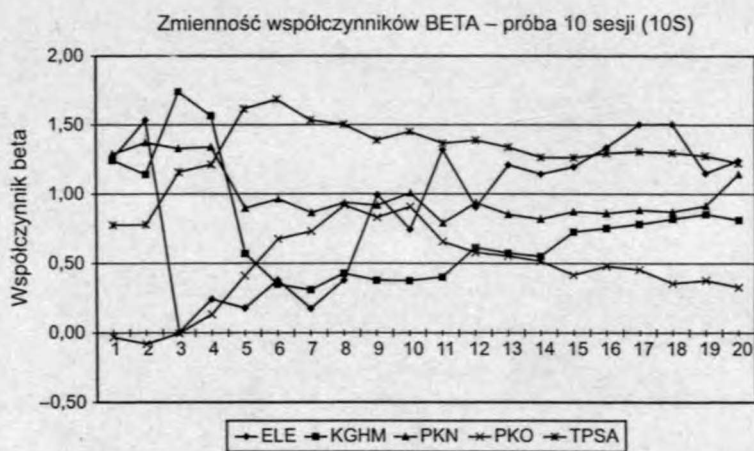
Źródło: opracowanie własne.

Widać wyraźnie, że w przypadku zakresu próby 10S, 14S i 1M zrealizowane stopy zwrotu portfeli przewyższają stopę zwrotu indeksu WIG20. Pod tym względem najskuteczniejsze okazały się dynamiczne portfele zbudowane metodą Markowitza na podstawie ruchomych podprób dla okresu 14 sesji giełdowych. Nieco słabsze wyniki osiągnięto dla modelu Sharpe'a. Jak się okazuje, pozostałe zakresy próby, tj. 2M, 3M, 6M i 12M, skutkowały niższą, na tle indeksu WIG20, stopą zwrotu portfeli.

Kolejnym czynnikiem, jaki poddaliśmy analizie, jest skuteczność prognoz. Zbadaliśmy, w jakiej części prognozy stóp zwrotu portfeli były „lepsze” od stóp zwrotu indeksu, tj. w ilu przypadkach stopy zwrotu portfela były wyższe od stóp zwrotu indeksu WIG20. Zestawienie prezentujemy w tabeli 4.

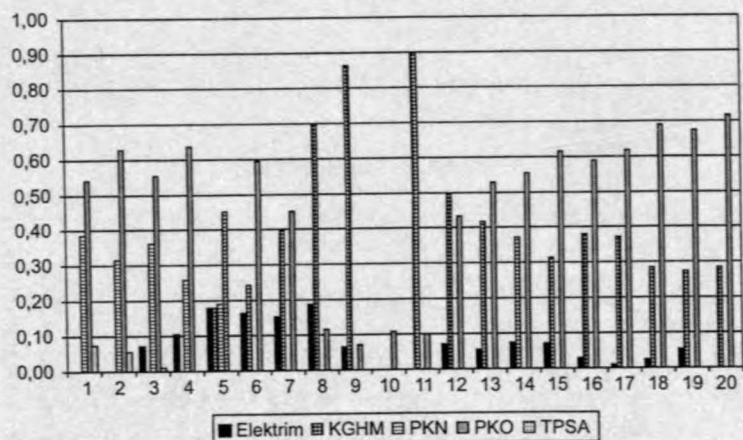
Udziały portfeli, których stopy zwrotu kształtują się korzystniej od stóp zwrotu indeksu WIG20, zachowują się analogicznie jak średnie stopy zwrotu z okresu prognozy (por. tabele 2 i 3). Można wyciągnąć wniosek, iż skuteczność prognozy ma ścisły związek ze średnią stopą zwrotu uzyskaną w całym okresie weryfikacji prognoz, gdyż to właśnie skuteczność prognoz determinuje uzyskaną średnią stopę zwrotu. Im większa jest skuteczność, tym więcej portfeli dla okresu prognozy jest „lepszych” od indeksu WIG20, co sprawia, iż uzyskana średnia stopa zwrotu portfeli również przewyższa średnią stopę zwrotu indeksu WIG20.

ZALĄCZNIKI

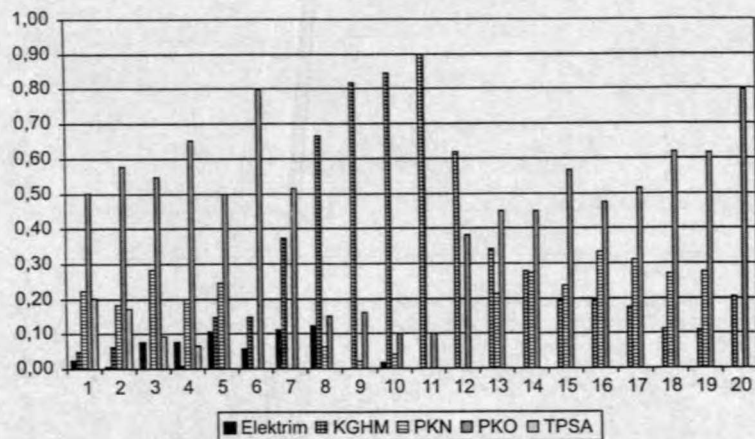


Rys. Z.1. Zmienność parametrów β w modelu Sharpe'a
Źródło: opracowanie własne

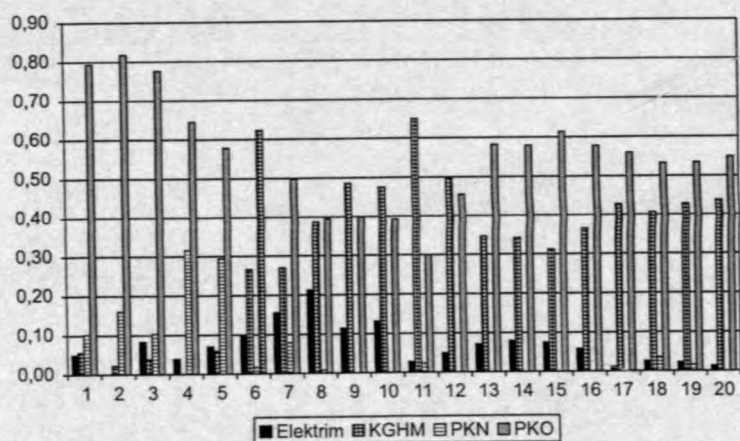
Model Markowitza (10S)



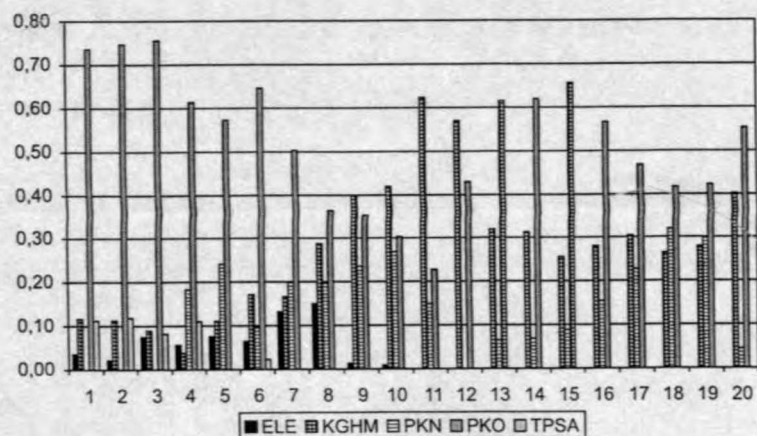
Model Sharpe'a (10S)



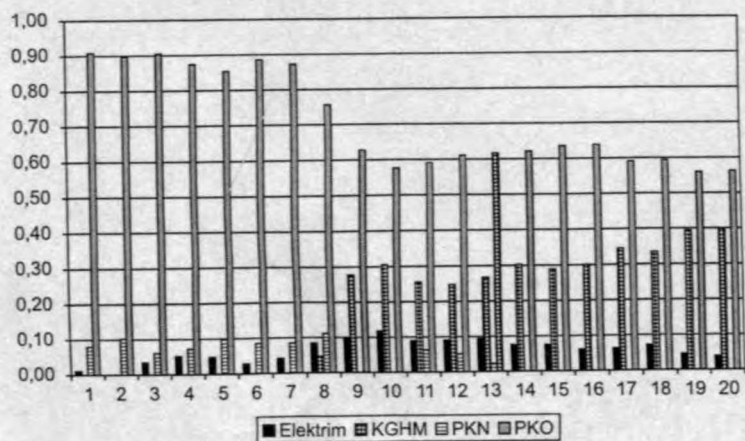
Model Markowitza (14S)



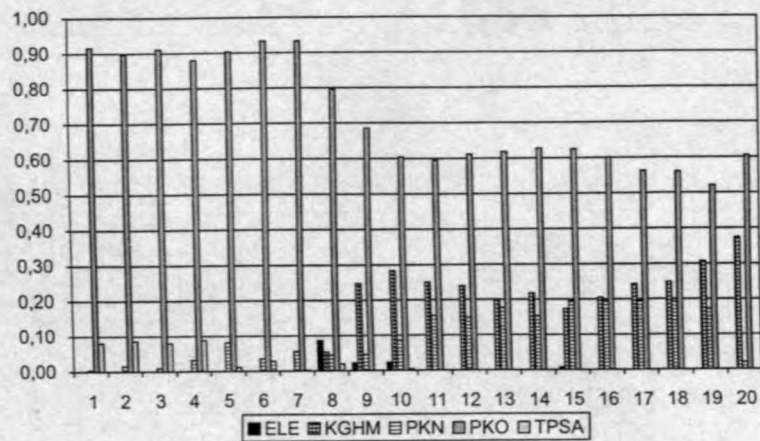
Model Sharpe'a (14S)



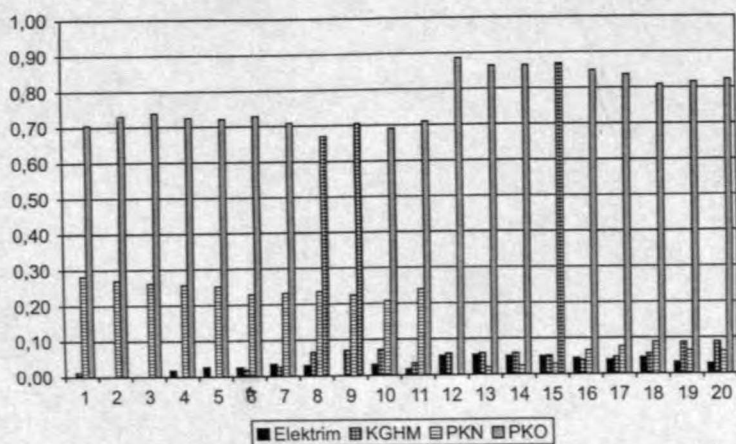
Model Markowitza (1M)



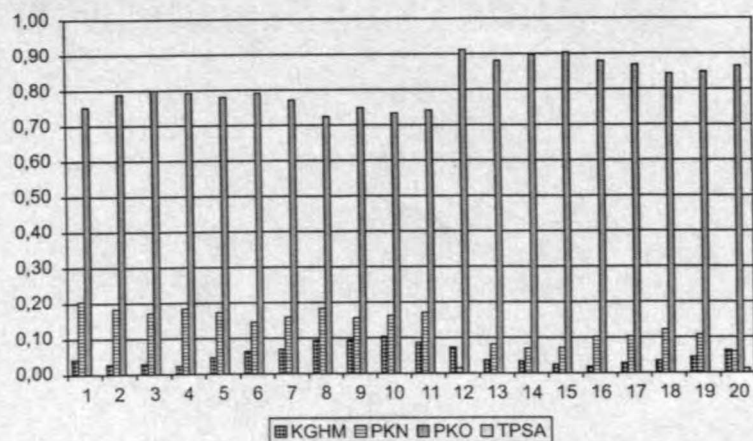
Model Sharpe'a (1M)



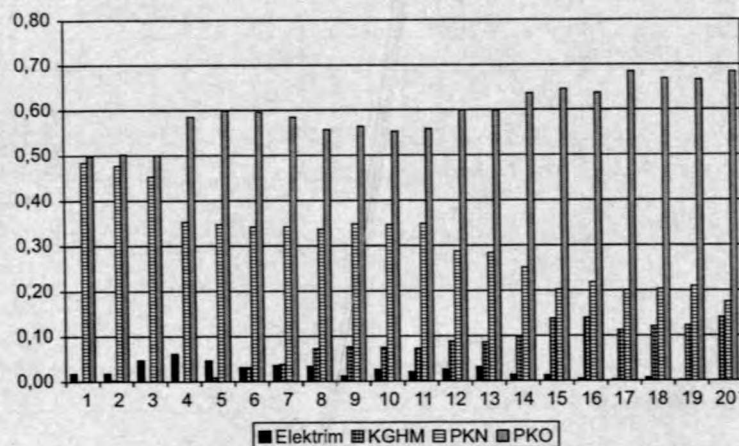
Model Markowitza (2M)



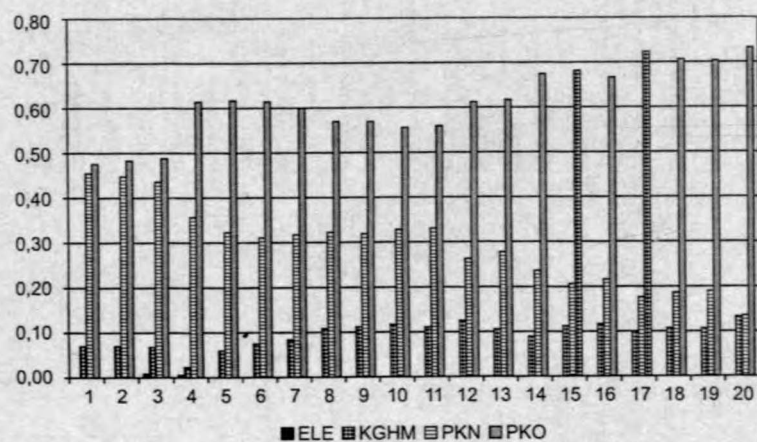
Model Sharpe'a (2M)



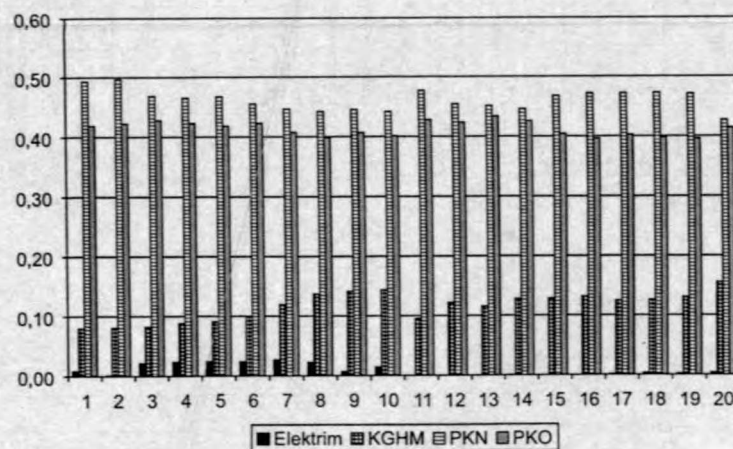
Model Markowitza (3M)



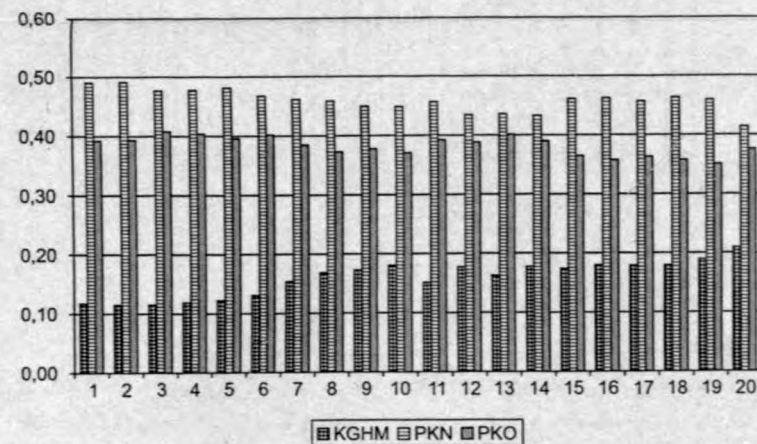
Model Sharpe'a (3M)



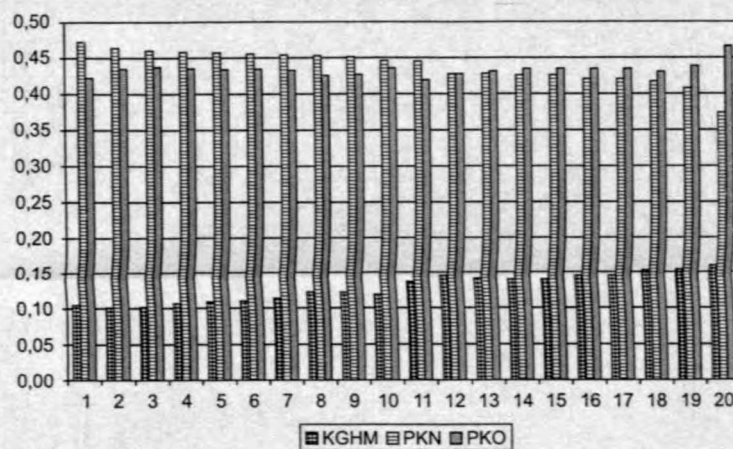
Model Markowitza (6M)



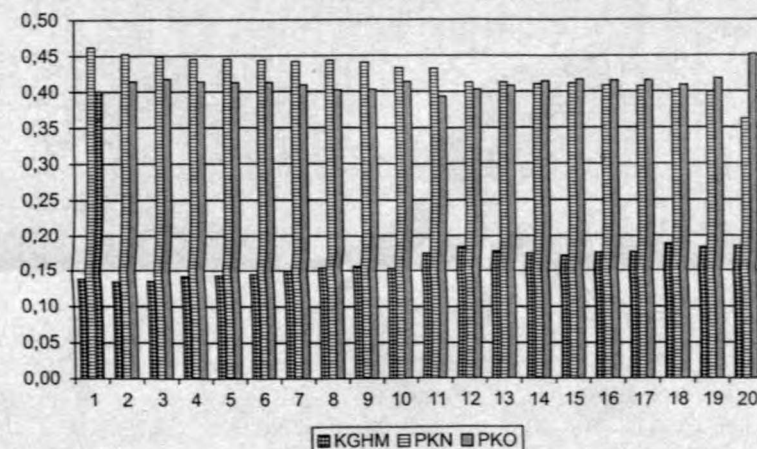
Model Sharpe'a (6M)



Model Markowitza (12M)



Model Sharpe'a (12M)



Rys. Z.2. Struktura portfeli w kolejnych okresach prognozy – model Markowitza i Sharpe'a
Źródło: opracowanie własne

Tabela 4. Odsetek portfeli „lepszyc” od indeksu WIG20 przy różnych zakresach próby (w %)

Zakresy próby szacowania parametrów	Model Markowitza	Model Sharpe'a
10S	55	50
14S	65	65
1M	50	55
2M	40	40
3M	50	45
6M	40	40
12M	40	40

Źródło: opracowanie własne.

4. WNIOSKI KOŃCOWE

Zaprezentowana metoda prognozowania, oparta na powszechnie znanej analizie portfelowej, pozwala wyznaczyć portfele, które charakteryzują się większą średnią stopą zwrotu w okresie prognozy niż średnia stopa zwrotu indeksu pełniącego funkcję wskaźnika sytuacji rynkowej. Wiarygodność zastosowanej metody budowy portfeli podkreśla fakt uzyskania porównywalnych wyników, zarówno przy zastosowaniu modelu Markowitza, jak i modelu Sharpe'a. Celem przeprowadzonego badania było wskazanie na możliwości wykorzystania modeli optymalizacyjnych i metod ekonometrycznych w dynamicznej analizie efektywnych portfeli akcji o zmiennych parametrach. Z przeprowadzonych badań wynika, że długość okresu próby stanowiącej podstawę szacowania parametrów modeli, przynosząca średnią stopę zwrotu portfeli przewyższającą stopę zwrotu indeksu giełdowego, obejmuje okresy o stosunkowo krótkim horyzoncie, tj. okresy do 1 miesiąca. Należy mieć jednak na uwadze możliwość ograniczonego zastosowania przedstawionej metody ze względu na to, że generowane w ten sposób portfele charakteryzują się dużą zmiennością udziałów, co przy restrukturyzacji portfeli może prowadzić do wysokich kosztów transakcyjnych. Metoda ta mogłaby znaleźć zastosowanie wśród inwestorów instytucjonalnych, którzy wszelkie wydatki związane z zawieraniem transakcji zaliczają do kosztów prowadzonej działalności. Można jednak zaobserwować stabilizowanie się udziałów poszczególnych składników portfeli w przypadku nieznacznego wzrostu długości okresu próby, co pozwala sądzić, że możliwe jest ograniczanie zakresu korekt struktury portfeli i jednocześnie osiąganie ponadprzeciętnych wyników inwestycyjnych.

LITERATURA

- Elton E. J., Gruber M. J. (1998), *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa.
- Haugen R. (1996), *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa.
- Jajuga K. (red.) (2000), *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, WAE, Wrocław.
- Jajuga K., Jajuga T. (1999), *Inwestycje*, PWN, Warszawa.
- Markowitz H. (1952), *Portfolio selection*, „Journal of Finance”, 7.
- Sharpe W. (1964), *Capital assets prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk*, „Journal of Finance”, 19.
- Weron A., Weron R. (1998), *Inżynieria finansowa*, WNT, Warszawa.

Piotr Wdowiński, Daniel Wrzesiński

A DYNAMIC ANALYSIS OF ASSET PORTFOLIO

Summary

In the paper we give a comparative analysis of stocks portfolios constructed according to Markowitz and Sharpe theories. We propose a dynamic short-term approach to building minimum variance portfolios under variable number of time series observations. The proposed dynamic approach allows for calculating time-varying parameters of variance-covariance matrix of returns in Markowitz model and beta parameters in Sharpe model. We compare empirical returns of dynamic portfolios with returns on index WIG20. The results show that introducing dynamic shares of assets in portfolios built with time series within a period not exceeding a month allows for outperforming returns on the index WIG20.