

Wacław Sklinsmont*

MACIERZE WIELOWSKAŹNIKOWE W NAUKACH EKONOMICZNO-SPOŁECZNYCH

Streszczenie. Obecny zakres zastosowań metod ekonometrii przestrzennej jest ciągle niewystarczający, aby podejmować kompleksowe badania procesów rozwoju społeczno-gospodarczego. Ekonometria dużo korzysta z dorobku statystyki matematycznej zwłaszcza z jej wielozmiennych metod. Jednak przeszkodą w tym działaniu jest dwuwymiarowość obiektów algebraicznych, którymi obie dziedziny się posługują. Dlatego w pracy chcę wypromować instrument macierzy wielowskaźnikowych, który może w sposób znaczący przyspieszyć postęp w badaniach kompleksowych, procesów społeczno-gospodarczych. W pracy definiuje się macierze wielowskaźnikowe, działania na nich ze szczególnym akcentem na ich iloczyn, którego definicja obejmuje oprócz 5 znanych i stosowanych w praktyce, również 8 innych, których zastosowanie czeka na odkrycie. Przy pomocy pojęcia macierzy asocjatywnej definiuje się macierz (lsc)-nieosobliwą, (lsc)-kanoniczną, (lsc)-dodatnio określone, (lsc)-rząd, (lsc)-śląd, normę p-wskaźnikowej macierzy oraz inne niezbędne w algebrze macierzy kategorie pojęciowe. Praca zawiera również zastosowanie macierzy wielowskaźnikowych odbiegające od statystycznych metod ale mieszczących się w kategoriach badań ilościowych. Rozwiązuje zagadnienie oceny i uporządkowania jakości niemierzalnych składających się na obiekt, którego wartość łączną można ocenić mierzalnie.

1. WPROWADZENIE

Wielowymiarowa analiza struktur gospodarczych jest ważnym działaniem w kierunku poszukiwania prawidłowości rozwoju społeczno – gospodarczego. Definiowana przez Marciniaka¹ struktura gospodarcza obejmuje zarówno strukturę produkcyjną gospodarki, jak i formy organizacji produkcji, podziału i wymiany, a zatem cały system funkcjonowania gospodarki.

Struktura gospodarcza składa się z części, pozostających wobec siebie w określonych relacjach, przy czym każda część również stanowi strukturę. Każda struktura jest makrostrukturą wobec swoich części i mikrostrukturą wobec struktury, której jest częścią. Można więc mówić o działowej strukturze gospodarki narodowej, strukturze zatrudnienia, strukturze konsumpcji, strukturze nakładów inwestycyjnych, strukturze eksportu, strukturze słuchaczy szkół wyższych, strukturze wykształcenia społeczeństwa, strukturze spożycia w określonych grupach ludności, itp.

Bardzo ważnym jest prowadzenie analiz strukturalnych zarówno w aspekcie przeobrażeń w czasie jak i w przestrzeni. Ostatecznym efektem wielowymiarowych analiz porównawczych jest zrozumienie działań, optymalnych w danych warunkach, prowadzących do takich zmian strukturalnych, które zapewnią przyspieszony i zrównoważony rozwój społeczno - gospodar-

* Dr, Katedra Informatyki i Ekonometrii, Wyższa Szkoła Informatyki i Ekonomii Towarzystwa Wiedzy Powszechnej w Olsztynie.

¹ Patrz: W. Sklinsmont, M. Częścik, [1970], *Macierze wielowskaźnikowe w wielowymiarowej analizie porównawczej*, PWN, Warszawa.

czy. Podstawowym problemem we wszelkich analizach porównawczych, w tym również międzyregionalnych, jest zdefiniowanie wielowymiarowej przestrzeni, w której badane jest podobieństwo obiektów gospodarczych np. województw, czy krajów.

W dotychczasowych badaniach osie takiej przestrzeni stanowiły zazwyczaj rzeczywiste zmienne makroekonomiczne, natomiast sama taksonometryczna analiza krajów dotyczyła osiągniętego poziomu rozwoju regionalnego.

Omawiana przestrzeń może być przy tym podzielona na kilka podprzestrzeni, podsystemów $A=[A1, A2, A3, A4]$, gdzie np.: A1 – rozwój społeczny, A2 – rozwój infrastruktury technicznej, A3 – stan i ochrona środowiska przyrodniczego, A4 – rozwój infrastruktury finansowej, różniących się przyjętym zestawem zmiennych diagnostycznych, długością okresu objętego badaniem, itp. Analiza może dotyczyć bardziej zdezagregowanych problemów, jak ochrona zdrowia, wyżywienie, infrastruktura społeczna, a ponadto może być prowadzona z punktu widzenia zarówno mierników poziomu rozwoju, jak i czynników rozwoju, co znacznie poszerza jej zakres, stwarza jednak problemy przy hierarchizacji badanych województw, krajów.

2. METODOLOGIA

W pracy zbiorowej pod red. A. Zeliasia² zrezygnowano z nadmiaru wielowymiarowości, stwierdzając że „w ogólnym przypadku dane można ująć w postaci czterowymiarowej macierzy $X=[x_{ijqp}]$ ”. Stwierdzono również, że marginalne znaczenie mają inne możliwe typy struktur danych, w których uwzględniany jest typologiczny aspekt struktur gospodarczych. Zauważono ponadto że „odrębny problem stanowi redukcja wymiarów macierzy danych (przy zachowaniu liczby jej elementów) poprzez utworzenie zbiorów „mieszanych”, stanowiących iloczyn kartezjański dwóch lub więcej zbiorów składowych struktury: cech, typów, obiektów i okresów”. Takie podejście wskazuje na konieczność poruszania się w materii macierzy wielowskaźnikowych, a zatem wykonywania działań w algebrze tych macierzy.

Do dzisiaj nie udało się wdrożyć komputerowego programu rachunków algebraicznych na macierzach wielowskaźnikowych, zwłaszcza ich iloczynów. Jak wykazałem w pracy³ jest ich 13 typów, spośród których zaledwie 5 jest w powszechnym użytku. Przyjęcie tego faktu do wiadomości, dopuszcza możliwość rozpatrywania różnych wielowymiarowych struktur ekonomicznych takich jak: rodzajowych, typologicznych, przestrzennych, czasowych, a przy tym każda z nich może być rozważana w różnym aspekcie. Wymaga to jednak zdefiniowania na nowo pojęć algebry macierzy wielowskaźnikowych tak aby można było je wykorzystać w wielozmiennych metodach statystycznych i ekonometrii przestrzennej.

² Patrz: A. Zeliś i in., [1991], *Ekonometria przestrzenna*. PWE Warszawa.

³ W. Sklinsmont i in., [1985], *Macierze wielowskaźnikowe. Podstawowe pojęcia i działania*. Zeszyty naukowe ART w Olsztynie, nr 15.

Podstawowe pojęcia

Niech $J_\alpha = \{1, 2, \dots, n_\alpha\}$, ($\alpha = 1, 2, \dots, p$) będą skończonymi podzbiorami zbioru liczb naturalnych, zaś R , zbiorem liczb rzeczywistych.

Funkcję $f: J_1 \times J_2 \times \dots \times J_p \rightarrow R$ nazywamy p -wskaźnikową macierzą o wartościach w zbiorze R . Liczbę $f(i_1 i_2 \dots i_p) = \mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}$, gdzie $i_\alpha \in J_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$ nazywamy elementem p -wskaźnikowej macierzy odpowiadającym współrzędnym $(i_1 i_2 \dots i_p)$.

Zbiór wszystkich wartości tej funkcji nazywamy obrazem p -wskaźnikowej macierzy i oznaczamy: $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}]$, $i_\alpha \leq n_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, przy czym n_α jest stopniem wskaźnika i_α lub jego rozmiarem.

W przypadku, gdy $n_1 = \dots = n_p = n$, dla $n > 1$, macierz $\mathbf{A}$ nazywamy p -wskaźnikową macierzą n -tego stopnia. Gdy $n = 1$, macierz degeneruje się do skalaru.

Nie wynika stąd jeszcze, w jaki sposób można wypisywać wszystkie elementy $\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}$, w formie konkretnej macierzy wielowskaźnikowej. W związku z tym wprowadzimy dalsze ustalenia.

Sposób rozmieszczenia elementów typu współrzędnych $(i_1 i_2 \dots i_p)$ w obrazie macierzy nazywać będziemy strukturą zapisu, której graf – notujemy obok, po prawej stronie obrazu macierzy.

Ze względów praktycznych ograniczymy się jedynie do struktury zapisu dwuwymiarowego.

Uporządkowany w określony sposób zbiór elementów $(i_1 i_2 \dots i_p)$ nazywamy macierzą wskaźników (indeksów) lub matrycą macierzy, i oznaczamy przez $\mathbf{E}$.

Wobec powyższych ustaleń, jeśli w miejsce elementu $(i_1 i_2 \dots i_p)$ matrycy $\mathbf{E}$, podstawimy przyporządkowany funkcją f , element $\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ to otrzymany, uporządkowany według struktury zapisu $\mathbf{E}$, obraz zbioru elementów $\{\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}\}$, nazywamy macierzą $\mathbf{A}$ o strukturze zapisu $\mathbf{E}$ i oznaczamy symbolem $\mathbf{A}|\mathbf{E}$.

Macierz p -wskaźnikową, której wszystkie elementy są zerami nazywamy p -wskaźnikową macierzą zerową i oznaczamy symbolem $\mathbf{0}$.

$(p-1)$ -wskaźnikową macierz $[\mathbf{a}_{i_1 \dots i_{\alpha-1} \dots i_p}]$, o ustalonej wartości $\bar{i}_\alpha$ współrzędnej i_α , nazywamy przekrojem prostym o orientacji (i_α) . Przekrój ten ma rozmiary: $n_1, n_2, \dots, n_{\alpha-1}, n_{\alpha+1}, \dots, n_p$ $(p-m)$ -wskaźnikową macierz o ustalonych wartościach $\bar{i}_{\alpha_1}, \bar{i}_{\alpha_2}, \dots, \bar{i}_{\alpha_m}$ indeksów $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \dots, i_{\alpha_m}$ ($1 \leq m \leq p-1$) nazywamy m -krotnym przekrojem o orientacji $(i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \dots, i_{\alpha_m})$.

Posługując się $(p-1)$ -, lub $(p-2)$ -krotnymi przekrojami, tzn. macierzami jedno- lub dwuwskaźnikowymi, można macierz p -wskaźnikową zapisać w postaci prostokątnej tablicy, przy czym przekroje te oddzielamy liniami pionowymi i poziomymi, a informację o zakresie i kierunku przebiegu poszczególnych indeksów podajemy w formie grafu strzałkowego.

Dla macierzy $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{i_1 i_2 i_3 i_4}]$, $i_\alpha \leq n_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, gdzie $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=2$, $n_4=3$, macierz wskaźników $\mathbf{E}$ może przyjąć postać:

$$E_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1111 & 1211 & 1112 & 1212 & 1113 & 1213 \\ 2111 & 2211 & 2112 & 2212 & 2113 & 2213 \\ 3111 & 3211 & 3112 & 3212 & 3113 & 3213 \\ \hline 1121 & 1221 & 1122 & 1222 & 1123 & 1223 \\ 2121 & 2221 & 2222 & 2222 & 2123 & 2223 \\ 3121 & 3221 & 3122 & 3222 & 3123 & 3223 \end{array} \right] \cdot \begin{array}{l} \xrightarrow{i_4 \leq 3} \\ \xrightarrow{i_2 \leq 2} \\ \downarrow i_3 \leq 2 \quad \downarrow i_1 \leq 3 \end{array}$$

Macierz powyższa jest reprezentacją macierzy wskaźników E zapisaną za pomocą dwukrotnych przekrojów o orientacji (i_3, i_4) . Macierz E , zapisana za pomocą dwukrotnych przekrojów orientacji (i_4, i_1) , ma reprezentację postaci:

$$E_2 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1111 & 1121 & 2111 & 2121 & 3111 & 3121 \\ 1211 & 1221 & 2211 & 2221 & 3211 & 3221 \\ \hline 1112 & 1122 & 2112 & 2122 & 3112 & 3122 \\ 1212 & 1222 & 2212 & 2222 & 3212 & 3222 \\ \hline 1113 & 1123 & 2113 & 2123 & 3113 & 3123 \\ 1213 & 1223 & 2213 & 2223 & 3213 & 3223 \end{array} \right] \cdot \begin{array}{l} \xrightarrow{i_1 \leq 3} \\ \xrightarrow{i_3 \leq 2} \\ \downarrow i_4 \leq 3 \quad \downarrow i_2 \leq 2 \end{array}$$

Zgodnie z definicją macierzy wielowskaźnikowej, przyporządkowując każdemu elementowi macierzy E_1 i E_2 pewien element ciała R , otrzymujemy 4-wskaźnikową macierz A zapisaną za pomocą 2-krotnych przekrojów orientacji (i_3, i_4) , (i_4, i_1) , np.:

$$A/E_1 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 3 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right], \quad A/E_2 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 4 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \cdot$$

Trzeba tu zauważyć, że każdy sposób zapisu macierzy przy określonej orientacji daje wystarczającą informację do tego, by można było tę macierz zapisać w postaci przekrojów o innej orientacji. Z potrzebą takich zmian zapisów, spotykamy się w praktyce.

Wielowskaźnikowe macierze nazwiemy symetrycznymi względem wybranych wskaźników, jeśli ich stopnie są równe, a elementy, których współrzędne różnią się tylko permutacją tych wskaźników są takie same. Jeżeli macierz jest symetryczna względem wszystkich wskaźników, to nazywamy ją macierzą symetryczną.

Macierz wielowskaźnikową nazywamy skośnosymetryczną względem wybranych wskaźników, jeżeli ich stopnie są równe, a elementy których współrzędne różnią się tylko permutacją tych wskaźników, mają wartości przeciwne.

Macierz $A_E = [a_{i_1 i_2 i_3}]$ jest macierzą symetryczną względem pary wskaźników (i_1, i_2) , jeżeli ma postać:

$$\mathbf{A}/\mathbf{E} = \left[\begin{array}{c|c|c} \nabla & a & \nabla & b & \nabla & c \\ a & \nabla & b & \nabla & c & \nabla \end{array} \right].$$

W zapisie powyższym zaznaczono, które elementy są ze sobą związane relacją symetrii (oznaczone jednakową literą). Te, które mogą być całkowicie dowolne oznaczono „ ∇ ”.

Przykładem macierzy symetrycznej 3-wskaźnikowej 3-go stopnia tzn. symetrycznej względem wszystkich wskaźników jest macierz:

$$\mathbf{A}/\mathbf{E} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \alpha & a & b & a & c & d & b & d & g \\ a & c & d & c & \beta & h & d & h & f \\ b & d & g & d & h & f & g & f & \gamma \end{array} \right].$$

Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ jest dowolną permutacją liczb $1, 2, \dots, p$, to macierze:

$[\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}]$ i $[\mathbf{a}_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \dots i_{\alpha_p}}]$ są wzajemnie swoimi transpozycjami względem zmiany indeksów $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & \dots & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}$, gdy dla elementów tych macierzy zachodzi relacja:

$\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbf{a}_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \dots i_{\alpha_p}}$, którą zapisujemy za pomocą symbolu $\mathbf{A}^T$, gdzie:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & \dots & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = [\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}]^T = [\mathbf{a}_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \dots i_{\alpha_p}}].$$

Jak łatwo zauważyć, liczba wszystkich możliwych transpozycji macierzy p -wskaźnikowej, wliczając w to transpozycję tożsamościową, jest równa $p!$

Podstawowe działania na macierzach wielowskaźnikowych

Na wstępie zdefiniujemy relacje równości macierzy.

Macierze $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}]$ $\begin{matrix} i_\alpha \leq n_\alpha \\ \alpha = 1, 2, \dots, p \end{matrix}$ $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_{j_1 j_2 \dots j_q}]$ $\begin{matrix} j_\beta \leq m_\beta \\ \beta = 1, 2, \dots, q \end{matrix}$, nazywamy równymi, jeżeli $p = q$ ($\alpha = \beta \Rightarrow (n_\alpha = m_\beta)$):

$$\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbf{b}_{j_1 j_2 \dots j_q}, \text{ gdy } i_k = j_k \quad (k = 1, \dots, p).$$

Jeżeli macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ spełniają tylko dwa pierwsze warunki, to nazywamy je macierzami tego samego typu.

Sumą $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (macierzy tego samego typu):

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}] \begin{matrix} i_\alpha \leq n_\alpha \\ \alpha = 1, 2, \dots, p \end{matrix}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{b}_{i_1 i_2 \dots i_p}] \begin{matrix} i_\alpha \leq n_\alpha \\ \alpha = 1, 2, \dots, p \end{matrix},$$

nazywamy macierz tego samego typu $C = [c_{i_1 i_2 \dots i_p}]_{\alpha=1,2,\dots,p}^{i_\alpha \leq n_\alpha}$, której elementy spełniają zależność: $c_{i_1 i_2 \dots i_p} = a_{i_1 i_2 \dots i_p} + b_{i_1 i_2 \dots i_p}$. Iloczynem kA , liczby k przez macierz $A = [a_{i_1 i_2 \dots i_p}]_{\alpha=1,2,\dots,p}^{i_\alpha \leq n_\alpha}$ nazywamy macierz C tego samego typu co A , której elementy spełniają zależność $c_{i_1 i_2 \dots i_p} = k a_{i_1 i_2 \dots i_p}$.

Zamiast $A+(-1)B$ można napisać $A-B$ i nazywać różnicą macierzy A i B . Łatwo sprawdzić, że jeżeli dla danych macierzy wyżej określone działania są wykonalne, to:

$$\begin{aligned} A+B &= B+A \\ (A+B)+C &= A+(B+C) \\ A+0 &= A \\ k(A+B) &= kA+kB \\ (k+u)A &= kA+uA \\ k(uA) &= (ku)A \\ 0A &= 0 \end{aligned}$$

Iloczyn macierzy wielowskaźnikowych

W celu zdefiniowania iloczynu macierzy wielowskaźnikowych konieczne jest wstępne określenie pewnego postępowania przygotowawczego w stosunku do każdej z macierzy wymnażanych. Postępowanie to Sokołow⁴ nazywa rozbićiem zbioru indeksów. Weźmy dowolną p -wskaźnikową macierz $U = [u_{i_1 i_2 \dots i_p}]$, gdzie $i_\alpha \leq n_\alpha$, $\alpha=1, 2, \dots, p$.

Zbiór indeksów $\{i_1 i_2 \dots i_p\}$ podzielmy na trzy rozłączne podzbiory, odpowiednio o liczebności κ, λ, μ i utwórzmy z nich trzy ciągi $l=(l_1, \dots, l_\kappa)$, $s=(s_1, \dots, s_\lambda)$, $c=(c_1, \dots, c_\mu)$. Stanowią one w/w rozbićie zbioru indeksów.

Oczywiście, zachodzi przy tym warunek $\kappa+\lambda+\mu=p$. Macierz U może być wówczas zapisana w postaci pewnej swojej transpozycji: $U_{lsc} = [u_{l_1, \dots, l_\kappa, s_1, \dots, s_\lambda, c_1, \dots, c_\mu}]$, przy czym $(lsc)=(l_1, \dots, l_\kappa, s_1, \dots, s_\lambda, c_1, \dots, c_\mu)$ jest permutacją zbioru indeksów $\{i_1, \dots, i_p\}$.

Niech macierze A i B , odpowiednio p - i q -wskaźnikowe, mają postać:

$$\begin{aligned} A &= [a_{l_1, \dots, l_\kappa, s_1, \dots, s_\lambda, c_1, \dots, c_\mu}]_{\substack{l_\alpha \leq n_\alpha \quad \alpha=1,2,\dots,\kappa \\ s_\beta \leq n_\beta \quad \beta=1,2,\dots,\lambda \\ c_\gamma \leq n_\gamma \quad \gamma=1,2,\dots,\mu}} \\ B &= [b_{c_1, \dots, c_\kappa, s_1, \dots, s_\lambda, m_1, \dots, m_\nu}]_{\substack{c_\alpha \leq n_\alpha \quad \alpha=1,2,\dots,\kappa \\ s_\beta \leq n_\beta \quad \beta=1,2,\dots,\lambda \\ m_\delta \leq n_\delta \quad \delta=1,2,\dots,\nu}} \end{aligned}$$

⁴ N.P. Sokołow, [1972], *Vvedenie w teoriju mnogomernych matric*, Nauk, Dumka, Kijew.

Przy czym $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ - są liczbami całkowitymi nieujemnymi, spełniającymi warunki $\kappa + \lambda + \mu = p$, $\lambda + \mu + \nu = q$, wówczas iloczynem macierzy **A** przez **B** nazywamy macierz **C**, $(\kappa + \lambda + \nu)$ - wskaźnikową postaci:

$$\left[\sum_{c_1=1}^{m_1} \sum_{c_2=1}^{n_2} \dots \sum_{c_\mu=1}^{n_\mu} \mathbf{a}_{l_1, \dots, l_\kappa, s_1, \dots, s_\lambda, c_1, \dots, c_\mu} \cdot \mathbf{b}_{c_1, \dots, c_\kappa, s_1, \dots, s_\lambda, m_1, \dots, m_\nu} \right] = [\mathbf{c}_{l_1, \dots, l_\kappa, s_1, \dots, s_\lambda, m_1, \dots, m_\nu}] = \mathbf{AB} = \mathbf{C}.$$

Korzystając z oznaczeń użytych do skróconego zapisu rozbitcia zbiorów indeksów obu macierzy na podciągi odpowiednio l, s, c ; c, s, m można iloczyn powyższy zapisać w formie skróconej:

$$\mathbf{A}_{lsc} \mathbf{B}_{csm} = \left[\sum_c \mathbf{a}_{lsc} \mathbf{b}_{csm} \right] = [\mathbf{c}_{lsm}], \text{ gdzie } \sum_c = \sum_{c_1=1}^{m_1} \sum_{c_2=1}^{n_2} \dots \sum_{c_\mu=1}^{n_\mu}.$$

Tab. 1. Stopnie indeksów

Stopnie indeksów	Liczba indeksów stopnia $Z_K, K=1..R$		MIN (P_K, Q_K) $K=1, 2, \dots, R$
	Macierzy A	Macierzy B	
Z_1	P_1	Q_1	W_1
Z_2	P_2	Q_2	W_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Z_R	P_R	Q_R	W_R
	$\sum_{k=1}^r p_k = p$	$\sum_{k=1}^r q_k = q$	$\sum_{k=1}^r w_k = w$

Źródło: opracowanie własne.

Wskaźniki należące do ciągów oznaczonych przez l i m nazywamy indeksami wolnymi, należące do ciągu s indeksami splatającymi, zaś należące do c sumującymi.

Wykonalność iloczynu macierzy wielowskaźnikowych jest uwarunkowana możliwością zakwalifikowania indeksów wymnażanych macierzy do klasy takich, które spełniać będą rolę splatających, sumujących bądź wolnych. Nie ma przy tym znaczenia to, w jaki sposób będą uporządkowane wskaźniki zakwalifikowane do poszczególnych ciągów rozbitcia. Wynika to z faktu, że zawsze można przejść do określonego uporządkowania drogą transpozycji wymnażanych macierzy. Należy jeszcze podkreślić, że do klasy wskaźników splatających lub sumujących mogą należeć indeksy macierzy, spełniające warunek: $(\alpha \neq \beta) \Rightarrow (n_\alpha \neq m_\beta)$.

Zauważmy też, że liczba takich podziałów na l, s, c, m zależy od liczby jednakowych stopni indeksów w zbiorze wskaźników obu macierzy wymnażanych. Jeżeli r oznacza liczbę różnych wartości $z_1, z_2, \dots, z_r$ stopni indeksów w zbiorze $p+q$ indeksów macierzy **A** i **B**, wówczas liczba możliwych rozbić przedstawia tabela.

Spełnione są przy tym nierówności $0 \leq \lambda + \mu \leq w$, gdzie $0 \leq w \leq \min(p, q)$. Gdy któreś z liczb $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ w określeniach macierzy **A** i **B** są zerami, oznacza to, że w macierzach tych nie występują odpowiadające im ciągi wskaźników, a w skróconym zapisie macierzy $\mathbf{A}_{lsc} \mathbf{B}_{csm}$ nie wystąpią odpowiadające im litery spośród l, s, c, m .

W związku z tym mogą zachodzić następujące szczególne przypadki zdefiniowanego wcześniej iloczynu macierzy wielowskaźnikowych:

Tab. 2. Szczegółowe przypadki iloczynu $A_{lsc} B_{csm}$

Lp.	Szczegółne przypadki iloczynu $A_{lsc} B_{csm}$	Nazwy iloczynów spotykane w literaturze
1.	$\lambda = 0$ $\mu = 0$ $A_l B_m = C_{lm}$	1. Iloczyn tensorowy 2. Iloczyn kroneckerowski 3. Iloczyn zewnętrzny (kolumn) 4. Iloczyn zewnętrzny (wierszy)
2.	$\kappa = 0$ $\mu = 0$ $A_s B_s = C_s$ $\nu = 0$	1. Iloczyn Hadamarda 2. Iloczyn Schura
3.	$\kappa = 0$ $\lambda = 0$ $A_c B_c = \text{skalar}$ $\nu = 0$	Iloczyn skalar NY
4.	$\mu = 0$ $A_{ls} B_{sm} = C_{lsm}$	Iloczyn khatri-rao (dla bloków o tych samych rozmiarach)
5.	$\lambda = 0$ $A_{lc} B_{cm} = C_{lm}$	1. Zwykły iloczyn macierzy 2. Iloczyn Krakowianowy 3. Iloczyn kroneckerowski p -tego stopnia
6.	$\kappa = 0$ $\nu = 0$ $A_{sc} B_{cs} = C_s$	
7.	$\mu = 0$ $\nu = 0$ $A_{lc} B_s = C_{ls}$	
8.	$\lambda = 0$ $\nu = 0$ $A_{lc} B_c = C_l$	
9.	$\kappa = 0$ $\nu = 0$ $A_s B_{sm} = C_{sm}$	
10.	$\kappa = 0$ $\lambda = 0$ $A_c B_{cm} = C_m$	
11.	$\kappa = 0$ $A_{sc} B_{csm} = C_{sm}$	
12.	$\nu = 0$ $A_{lsc} B_{cs} = C_{ls}$	
13.	$A_{lsc} B_{csm} = C_{lsm}$	

Źródło: opracowanie własne.

Jak widać z definicji iloczynu, mnożenie macierzy dwuwskaznikowych może prowadzić również do przypadków gdy w wyniku otrzymuje się macierz 3-, a nawet 4-wskaznikową. Z braku określenia sposobu zapisu macierzy więcej niż dwuwskaznikowych, uciekano się do każdorazowego definiowania iloczynu nawet wówczas, gdy różniły się one jedynie formą zapisu rezultatu mnożenia. Przykładem tego są iloczyn tensorowy i zewnętrzny oraz iloczyn kroneckerowski lewo- i prawostronny, będące faktycznie tym samym iloczynem typu $A_l B_m = C_{lm}$. Różnica między nimi polega na zapisie macierzy C_{lm} za pomocą przekrojów dwukrotnych o innych orientacjach. Ponieważ istnieją jeszcze inne możliwości zapisu macierzy C_{lm} za pomocą przekrojów o jeszcze innych orientacjach, można by oczekiwać dalszych definicji nowych iloczynów.

Wszystkie one jednak wraz z wyżej wymienionymi iloczynami są, jak już powiedzieliśmy, jednym i tym samym iloczynem macierzy wielowskaźnikowych przez nas zdefiniowanym. Powyższe uwagi zostały zilustrowane przykładami w pracy⁵.

Własności iloczynu

Z określenia iloczynu macierzy wielowskaźnikowych **A** i **B** wynika, że nie jest on przemienny. Jest łączny, gdy wykonalne są iloczyny **AB** i **BC**, zaś żaden ze wskaźników sumujących *c* w iloczynie **AB** nie wystąpi wśród wskaźników sumujących *c* w iloczynie **BC**. Własność łączności iloczynu w zapisie symbolicznym ma kształt $(\mathbf{A}_{lsc} \mathbf{B}_{csm}) \mathbf{C}_{c's'm'} = \mathbf{A}_{lsc} (\mathbf{B}_{c's'c'} \mathbf{C}_{c's'm'})$ przy czym dla indeksów macierzy **B** zachodzi warunek $(sm) = (l's'c')$. Jeżeli **B** i **C** będą *q*-wskaźnikowymi macierzami, zaś **A** *p*-wskaźnikową, to jeżeli będą wykonalne działania, wówczas: $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$, $k(\mathbf{AB}) = (k\mathbf{A})$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$, $(\mathbf{AB})^{T_1} = \mathbf{B}^{T_3} \mathbf{A}^{T_2}$, gdzie:

$$T_1 = \begin{pmatrix} lms \\ msl \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} lsc \\ csl \end{pmatrix}, T_3 = \begin{pmatrix} csm \\ msc \end{pmatrix}.$$

Wielowskaźnikowe macierze jednostkowe

Wielowskaźnikową macierz **A** postaci:

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_\mu j_1 j_2 \dots j_\lambda k_1 k_2 \dots k_\mu} \right], \begin{matrix} i_\alpha \leq n_\alpha & \alpha = 1, 2, \dots, \mu \\ j_\beta \leq n_\beta & \beta = 1, 2, \dots, \lambda \\ k_\alpha \leq n_\alpha \end{matrix},$$

spełniającą warunek:

$$\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_\mu j_1 j_2 \dots j_\lambda k_1 k_2 \dots k_\mu} = \begin{cases} 1 & \text{gdy dla każdego } \alpha, i_\alpha = k_\alpha \\ 0 & \text{gdy dla każdego } \alpha, i_\alpha \neq k_\alpha \end{cases},$$

nazywamy macierzą jednostkową i oznaczamy symbolem **J**, z podaniem informacji o rozbiciu zbioru indeksów. Liczba jedynek w macierzy jednostkowej jest równa iloczynowi $L_\mu L_\lambda$, gdzie:

$$L_\mu = \begin{cases} \prod_{\alpha=1}^{\mu} n_\alpha & \text{dla } \mu > 0 \\ 1 & \text{dla } \mu = 0 \end{cases}, L_\lambda = \begin{cases} \prod_{\beta=1}^{\lambda} n_\beta & \text{dla } \lambda > 0 \\ 1 & \text{dla } \lambda = 1 \end{cases}.$$

Zauważmy przy tym, że zgodnie z przyjętą umową, jeżeli $\mu=0$, wszystkie elementy macierzy jednostkowej są jedynkami, zaś gdy $\mu=\lambda=0$ macierz jednostkowa redukuje się do skalaru równego 1 i oznaczamy ją przez **J**₀.

⁵ W. Sklinsmont i in., [1985].

Twierdzenie

Dla dowolnej macierzy $U = [u_{i_1 i_2 \dots i_p}]$ $i_\alpha \leq n$ dla której dokonano rozbicia zbioru indeksów na ciągi l, s, c , bądź c, s, m , istnieją odpowiednie wielowskaźnikowe macierze jednostkowe $J_{l'sc}$ lub J_{csm} takie, że $J_{l'sc} U_{csm} = U_{l'sm} = U_{csm}$ $U_{lsc} J_{csm} = U_{lsm} = U_{lsc}$.

Własności te wynikają zarówno bezpośrednio z definicji wielowskaźnikowej macierzy jednostkowej, jak i z definicji iloczynu macierzy wielowskaźnikowych. Powyższe własności zostały zilustrowane przykładami w pracy⁶

Macierze asocjatywne

W zagadnieniach statystycznych bardzo często spotyka się postępowanie, w którym za pomocą pewnego operatora zamienia się macierz na wektor lub wektor na macierz. Operatory te są zdefiniowane w różny sposób. Macierze asocjatywne stanowią pomost pomiędzy znaną techniką rachunkową na macierzach dwuwskaźnikowych, a rachunkiem macierzy wielowskaźnikowych. Stwarza to możliwość wykorzystania istniejących programów numerycznych, po pewnej ich adaptacji, do rachunku na macierzach wielowskaźnikowych. Macierze asocjatywne pozwalają również na zdefiniowanie szeregu podstawowych pojęć teorii macierzy wielowskaźnikowych takich, jak: kanoniczność, dodatnio określoność, nieosobliwość, rząd i ślad.

Rozważmy zbiór $I' = (I_1, I_2, \dots, I_p)$, gdzie $I_i = (1, 2, \dots, n_i)$, $i = 1 \dots p$, $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_p = I$, $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_\kappa = L$, $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_\lambda = S$, $C_1 \times C_2 \times \dots \times C_\mu = C$, o elementach odpowiednio:

$$(i_1 i_2 \dots i_p) \in I, (l_1 l_2 \dots l_\kappa) \in L, (s_1 s_2 \dots s_\lambda) \in S, (c_1 c_2 \dots c_\mu) \in C.$$

Dla skrócenia zapisu będziemy stosowali następujące oznaczenia:

$(l_1 l_2 \dots l_\kappa) = l$, $(s_1 s_2 \dots s_\lambda) = s$, $(c_1 c_2 \dots c_\mu) = c$, $(l_1 l_2 \dots l_\kappa s_1 s_2 \dots s_\lambda c_1 c_2 \dots c_\mu) = lsc$, przy czym $lsc \in (L \times S \times C)$ stanowi pewną permutację indeksów $i_1, i_2, \dots, i_p$. Tak więc dowolna permutacja indeksów $i_1, i_2, \dots, i_p$, z jednoczesnym zakwalifikowaniem pierwszych κ indeksów do l , następnych λ do s i ostatnich μ indeksów do c , jest równoważna utworzeniu $lsc \in (L \times S \times C)$.

Utworzenie w powyższym postępowaniu zbiorów L, S, C o elementach odpowiednio l, s, c , nosi nazwę rozbicia zbioru indeksów $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ na rozłączne klasy indeksów zwanych odpowiednio wolnymi, splatającymi i sumującymi. Jeżeli któryś ze zbiorów L, S , lub C jest pusty, to odpowiedni zbiór L, S , lub C jest także zbiorem pustym.

Rozważmy p -wskaźnikową macierz: $U = [u_{i_1 i_2 \dots i_p}]$, $i_k = 1, \dots, n_k$, $k = 1, \dots, p$. Jeżeli dokonamy rozbicia zbioru indeksów $(i_1, i_2, \dots, i_p)$ na rozłączne klasy l, s, c (w sensie zdefiniowanym powyżej), to przez macierz $U = [u_{lsc}]$ rozumiemy transpozycję macierzy U dla $T = \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ l, s, \dots, c \end{pmatrix}$. Należy przy tym zwrócić uwagę, że w wielu przypadkach zakwalifikowanie odpowiednich indeksów do l, s lub c odgrywa istotną rolę przy definio-

⁶ Tamże.

waniu szeregu pojęć lub działań. Niech dana będzie macierz $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}]$, $i_k = 1, \dots, n_k$, $k = 1, \dots, p$ z rozbiem zbioru indeksów $(i_1, i_2, \dots, i_p)$:

$$\begin{aligned} l &= (l_1 l_2 \dots l_\alpha), l_\alpha = 1 \dots n_\alpha^{(l)}, \alpha = 1 \dots \kappa, \\ s &= (s_1 s_2 \dots s_\beta), s_\beta = 1 \dots n_\beta^{(s)}, \beta = 1 \dots \lambda, \\ c &= (c_1 c_2 \dots c_\gamma), c_\gamma = 1 \dots n_\gamma^{(c)}, \gamma = 1 \dots \mu, \kappa + \lambda + \mu = p. \end{aligned}$$

Dokonajmy uporządkowania leksykograficznego elementów zbiorów l, s, c i oznaczmy je odpowiednio: $l^{(1)}, l^{(2)} \dots l^{(N_l)}, s^{(1)}, s^{(2)} \dots s^{(N_s)}, c^{(1)}, c^{(2)} \dots c^{(N_c)}$, gdzie:

$$N_l = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\kappa} n_i^{(l)} & \text{dla } \kappa > 0 \\ 1 & \text{dla } \kappa = 0 \end{cases}, N_s = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\lambda} n_i^{(s)} & \text{dla } \lambda > 0 \\ 1 & \text{dla } \lambda = 0 \end{cases}, N_c = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\mu} n_i^{(c)} & \text{dla } \mu > 0 \\ 1 & \text{dla } \mu = 0 \end{cases}.$$

Definicja 1

Dwuwskaźnikową macierz blokowo-diagonalną postaci:

$$\mathbf{A}^{lsc} = \begin{bmatrix} A_1^{lc} & & & & \\ & A_2^{lc} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{N_c}^{lc} \end{bmatrix} \begin{matrix} N_s \\ \\ \\ h=1 \end{matrix} = \mathbf{D} \mathbf{A}_h^{lc},$$

o wymiarach $(N_l \times N_s) \times (N_s \times N_c)$ nazywamy macierzą asocjatywną względem macierzy $\mathbf{A}_{lsc}$, przy tym $\mathbf{A}_h^{lc} = [\mathbf{a}_{ij}^{(h)}]$, h -ty blok o wymiarach $N_l \times N_c$, natomiast $\mathbf{a}_{ij}^{(h)} = \mathbf{a}_{l(i)s(h)c(j)}$, $i=1 \dots N_l$, $j=1 \dots N_c$, $h=1 \dots N_s$.

W przypadku, gdy któryś ze zbiorów $\mathbf{L}, \mathbf{S}$, lub $\mathbf{C}$ jest pusty, wówczas w zapisie macierzy asocjatywnej pomijając będziemy odpowiednią literę l, s lub c . Powyższe zagadnienie zostało zilustrowane przykładami w pracy⁷.

Definicja 2.

Macierz $\mathbf{A}_{lsc}$ nazywamy (lsc) -nieosobliwą, (lsc) -kanoniczną, (lsc) -dodatnio określoną, gdy bloki diagonalne macierzy asocjatywnej $\mathbf{A}^{lsc}$ są odpowiednio macierzami nieosobliwymi, kanonicznymi, dodatnio określonymi.

⁷ W. Sklinsmont i in., [1989], *Macierze wielowskaźnikowe. Macierze asocjatywne*, Zeszyty naukowe ART w Olsztynie, nr 19.

Rząd macierzy wielowskaźnikowej

Niech będzie dana p - wskaźnikowa macierz: $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}]$, $i_k = 1, \dots, n_k$, $k = 1, \dots, p$, gdzie $l_\alpha = 1 \dots n_\alpha$, $\alpha = 1 \dots \kappa$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_\lambda)$, $s_\beta = 1 \dots n_\beta^{(s)}$, $\beta = 1 \dots \lambda$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_\mu)$, $c_\gamma = 1 \dots n_\gamma^{(c)}$, $\gamma = 1 \dots \mu$ oraz $k + \gamma + \mu = p$, będzie ustalonym rozbiem jej zbioru indeksów. Dla powyższego rozbięcia utworzymy macierz oraz (lsc) -asocjatywną względem niej macierz $\mathbf{A}^{lsc}$.

Definicja 1

(lsc) -rzędem macierzy $\mathbf{A}$ będziemy nazywać ciąg rzędów bloków diagonalnych $\mathbf{A}_h^{lc}$ macierzy (lsc) -asocjatywnej z macierzą $\mathbf{A}_{lsc}$ i oznaczać:

$$r_{lsc}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}_{lsc}) = (r(\mathbf{A}_h^{lc})), \quad h = 1 \dots N_s, \quad \text{gdzie} \quad N_s = \begin{cases} \prod_{i=1}^{\lambda} n_i^{(s)} & \text{dla } \lambda > 0 \\ 1 & \text{dla } \lambda = 0 \end{cases}.$$

Ślad macierzy

Rozważmy p -wskaźnikową macierz $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}]$, $i_k = 1, \dots, n_k$, $k = 1, \dots, p$ i ustalmy dla niej rozbięcie zbioru indeksów tak jak poprzednio. Jeżeli dodatkowo rozbięcie to spełnia warunki:

1. $\kappa = \mu$;
2. $n_k^{(l)} = n_k^{(c)}$, dla każdego $k = 1 \dots p$, co notować będziemy krótko w postaci $c := l$, wówczas:

Definicja 2.

(lsc) -śladem macierzy $\mathbf{A}_{lsc}$ dla rozbięcia spełniającego powyższe warunki nazywamy sumę $\sum_s \sum_{l=c} \mathbf{a}_{lsc}$ i oznaczać będziemy $tr_{lsc}(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}_{lsc})$, gdzie $\sum_s = \sum_{s_1=1}^{n_1^{(s)}} \sum_{s_2=1}^{n_2^{(s)}} \dots \sum_{s_\lambda=1}^{n_\lambda^{(s)}}$ natomiast $\sum_{l=c} = \sum_{l_1=c_1} \sum_{l_2=c_2} \dots \sum_{l_\mu=c_\mu}$.

W szczególności, gdy $\kappa = \mu = 0$ wtedy $tr_s(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}_s) = \sum_s \mathbf{a}_s$. Natomiast, gdy $\lambda = 0$, wtedy $tr_{lc}(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}_{lc}) = \sum_{l=c} \mathbf{a}_s$.

Norma macierzy

W literaturze za normę macierzy $\mathbf{A}$ najczęściej przyjmuje się nieujemną liczbę $\|\mathbf{A}\|$ spełniającą następujące warunki:

1. $\mathbf{A} = 0 \Rightarrow \|\mathbf{A}\| = 0$;
2. $\|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|$, α -skalar;
3. $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$.

Definicja 3

Normę p -wskaźnikowej macierzy $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}]$, $i_k = 1, \dots, n_k$, $k = 1, \dots, p$ nazywamy liczbę

$\|\mathbf{A}\|$ określoną wzorem $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \dots \sum_{i_p=1}^{n_p} \mathbf{a}_{i_1 i_2 \dots i_p}^2}$ bądź krótko $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_c \mathbf{a}_c^2}$, gdzie:

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_p), c_k = i_k, k = 1, \dots, p, \mathbf{a}_{i..} = \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 \mathbf{a}_{ijk}, \mathbf{a}_{.j.} = \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^5 \mathbf{a}_{ijk}, \mathbf{a}_{..k} = \sum_{j=1}^5 \sum_{i=1}^5 \mathbf{a}_{ijk}.$$

Ocena składowych jakości niemierzalnych na podstawie oceny kompleksowej

Niech użytkownik dysponuje dostępem do zbiorów trzech rodzajów elementów, które stanowią istotne wyposażenie urządzenia i którego wartość motoryczna w największym stopniu od nich zależy. Poszczególne elementy różnią się w sposób niemierzalny jakością wykonania, materiałem a także stopniem zaufaniem do nich przez użytkowników. Niech np. będą to m-maszty, ł-łodzi, ż-żagle. Użytkownik chciałby wiedzieć jak dobrać najlepszy zestaw spośród dostępnych zbiorów masztów, łodzi i żagli. Wartość zestawu określa się miejscem uzyskanym w teście o charakterze wyścigu po prostej np. 2000m. Ze względu na praktycznie niemożliwe przebadanie wszystkich możliwych zestawów nawet dla stosunkowo niedużych zapasów poszczególnych zbiorów składowych elementów, a także z powodu zużywania się elementów podczas długotrwałych sprawdzianów metoda powinna uwzględniać te ograniczenia. Ze względów technicznych użytkownik ograniczył liczbę równocześnie testowanych zestawów do 5 łodzi. Ponadto w każdym teście starowała jeszcze jedna łódź wyposażona w stały zestaw masztu i żagla, a sternikiem był aktualnie najlepszy zawodnik kadry Polski. Z tych względów „sześciu” wartości zestawów będzie miał wymiary 5x5x5. Ograniczymy się tylko do przebadania 125 zestawów, w 25 próbach po 5 zestawów w każdej. Wyboru zestawów do każdego sprawdzianu dokonano wg klucza stanowiącego 3-wskaźnikową macierz stopnia 5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 25 & 21 & 22 & 23 & 24 & 19 & 20 & 16 & 17 & 18 & 13 & 14 & 15 & 11 & 12 & 7 & 8 & 9 & 10 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 24 & 25 & 21 & 22 & 23 & 18 & 19 & 20 & 16 & 17 & 12 & 13 & 14 & 15 & 11 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 23 & 24 & 25 & 21 & 22 & 17 & 18 & 19 & 20 & 16 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 15 & 11 & 12 & 13 & 14 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 22 & 23 & 24 & 25 & 21 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 20 & 16 & 17 & 18 & 19 & 14 & 15 & 11 & 12 & 13 & 8 & 9 & 10 & 6 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie jednakowe liczby pochodzą z tej samej transwersalni, a miejsca przez nie zajmowane w macierzy, mają współrzędne będące numerami elementów z jakich utworzony jest zestaw biorący udział w teście o numerze porządkowym transwersalni. Przez transwersalę trój wskaźnikowej macierzy stopnia 5 rozumiemy każdy ciąg:

$$\{\mathbf{a}_{i_1 s_1 c_1}, \mathbf{a}_{i_2 s_2 c_2}, \mathbf{a}_{i_3 s_3 c_3}, \mathbf{a}_{i_4 s_4 c_4}, \mathbf{a}_{i_5 s_5 c_5}\}$$

elementów tej macierzy, których wskaźniki spełniają warunki

$$l_v - 1 \equiv (i + v) \pmod{5}, s_v - 1 \equiv (j + v) \pmod{5}, c_v - 1 \equiv (k + v) \pmod{5}.$$

Po przeprowadzeniu 25 wyścigów po 5 zestawów w każdym otrzymane wyniki uzyskanych miejsc od 1 do 5, zapisujemy w formie takiej samej macierzy trój-wskaźnikowej 5x5x5 po transwersalach od 1 do 25.

Otrzymana w ten sposób macierz $[a_{ijk}]$ zestawów pobranych do badań, nosić będzie nazwę macierzy obserwacji. Dla struktury zapisu reprezentowanej przez macierz wskaźników:

$$\begin{bmatrix} 111 & 121 & 131 & 141 & 151 & 112 & 122 & 132 & 142 & 152 & 113 & 123 & 133 & 143 & 153 & 114 & 124 & 134 & 144 & 154 & 115 & 125 & 135 & 145 & 155 \\ 211 & 221 & 231 & 241 & 251 & 212 & 222 & 232 & 242 & 252 & 213 & 223 & 233 & 243 & 253 & 214 & 224 & 234 & 244 & 254 & 215 & 225 & 235 & 245 & 255 \\ 311 & 321 & 331 & 341 & 351 & 312 & 322 & 332 & 342 & 352 & 313 & 323 & 333 & 343 & 353 & 314 & 324 & 334 & 344 & 354 & 315 & 325 & 335 & 345 & 355 \\ 411 & 421 & 431 & 441 & 451 & 412 & 422 & 432 & 442 & 452 & 413 & 423 & 433 & 443 & 453 & 414 & 424 & 434 & 444 & 454 & 415 & 425 & 435 & 445 & 455 \\ 511 & 521 & 531 & 541 & 551 & 512 & 522 & 532 & 542 & 552 & 513 & 523 & 533 & 543 & 553 & 514 & 524 & 534 & 544 & 554 & 515 & 525 & 535 & 545 & 555 \end{bmatrix}$$

możemy macierz obserwacji uzyskanych po sprawdzianach zapisać w postaci macierzy 5-wskaźnikowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 & 1 & 5 & 3 & 3 & 3 & 2 & 5 & 5 & 4 & 1 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & 5 & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & 3 & 3 & 5 & 4 & 1 & 1 & 5 & 5 & 5 & 4 & 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 1 & 5 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 1 & 5 & 2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Każdy przekrój 2-krotny 3-wskaźnikowej macierzy obserwacji charakteryzuje wartość jednej z cech zestawu. Posługując się addytywną funkcją jakości możemy uporządkować zbiory masztów, łodzi i żagli. Sumaryczne oceny dla poszczególnych przekrojów 2-krotnych macierzy obserwacji wynoszą dla $i, j, k=1, \dots, 5$:

$$\mathbf{a}_{i..} = \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 \mathbf{a}_{ijk}, \quad \mathbf{a}_{.j.} = \sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^5 \mathbf{a}_{ijk}, \quad \mathbf{a}_{..k} = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \mathbf{a}_{ijk}$$

i wpisujemy w pierwszy wiersz tabeli algorytmu porządkowania.

Kierując się sumaryczną wartością przekrojów w każdym kierunku porządkujemy w następnym kroku numery cech według odpowiadających im rosnących wartości przekrojów (drugi krok algorytmu). Otrzymany porządek jest tylko częściowym, bowiem niektóre sumaryczne oceny przekrojów są równe. W związku z tym posłużymy się miarą, którą nazwiemy sumaryczną odległością sekwencyjną, mającą postać dla wskaźnikowej macierzy n -tego stopnia.

Dla $p=2$:

$$D^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{a}_{ij} - \mathbf{a}_{i+1,j})^2.$$

Minimalizacja sumarycznej odległości sekwencyjnej jest kryterium pomocniczym stosowanym wówczas, gdy sumy ocen przekrojów okażą się kryterium niewystarczająco porządkującym.

Tab. 3. Wartości zestawów w przekrojach

	Wartości zestawów w przekrojach			Wartość D^2
	68 73 73 80 81	57 77 79 79 83	72 74 74 74 81	
Lp.	Nr masztu	Nr łodzi	Nr żagla	
1	5 2 4 1 3	5 1 3 4 2	5 2 1 4 3	1182
2	5 2 4 1 3	5 1 3 4 2	5 2 4 1 3	1174
3	5 2 4 1 3	5 1 3 4 2	5 4 1 2 3	1192
4	5 2 4 1 3	5 1 3 4 2	5 4 2 1 3	1232
5	5 2 4 1 3	5 1 3 4 2	5 1 4 2 3	1174
6	5 2 4 1 3	5 1 3 4 2	5 1 2 4 3	1142
7	5 4 2 1 3	5 1 3 4 2	5 2 1 4 3	1190
8	5 4 2 1 3	5 1 3 4 2	5 2 4 1 3	1182
9	5 4 2 1 3	5 1 3 4 2	5 4 2 1 3	1200
10	5 4 2 1 3	5 1 3 4 2	5 4 1 2 3	1240
11	5 4 2 1 3	5 1 3 4 2	5 1 4 2 3	1182
12	5 4 2 1 3	5 1 3 4 2	5 1 2 4 3	1150
13	5 2 4 1 3	5 1 4 3 2	5 2 1 4 3	1156
14	5 2 4 1 3	5 1 4 3 2	5 2 4 1 3	1148
15	5 2 4 1 3	5 1 4 3 2	5 4 2 1 3	1166
16	5 2 4 1 3	5 1 4 3 2	5 4 1 2 3	1206
17	5 2 4 1 3	5 1 4 3 2	5 1 4 2 3	1148
18	5 2 4 1 3	5 1 4 3 2	5 1 2 4 5	1116
19	5 4 2 1 3	5 1 4 3 2	5 2 1 4 3	1164
20	5 4 2 1 3	5 1 4 3 2	5 2 4 1 3	1156
21	5 4 2 1 3	5 1 4 3 2	5 4 2 1 3	1174
22	5 4 2 1 3	5 1 4 3 2	5 4 1 2 3	1214
23	5 4 2 1 3	5 1 4 3 2	5 1 4 2 3	1156
24	5 4 2 1 3	5 1 4 3 2	5 1 2 4 3	1124
25	5 2 4 1 3	5 1 4 3 2	5 1 2 4 3	1116

Źródło: opracowanie własne.

Nawiązując do algorytmu porządkowania zauważmy, że w zbiorze sum przekrojów w kierunkach i oraz j mamy dwa przekroje o równych ocenach sumarycznych, natomiast w kierunku k , aż trzy przekroje mają taką samą wartość. Algorytm porządkowania musi zatem uwzględnić $2! \times 2! \times 3! = 24$ stany uporządkowania. Dla każdego z nich obliczamy D^2 (wartości te umieszczony w ostatniej kolumnie), a następnie spośród nich wybieramy takie uporządkowanie, którego D^2 osiąga wartość najmniejszą (por. wiersz 18 i 25). Pierwsze sześć wierszy w algorytmie porządkowania odpowiada $3!$ permutacją numerów cech w zbiorze żagli (kierunek k) przy ustalonych porządkach zbiorów masztów (kierunek i) oraz łodzi (kierunek j). Wiersze 7-12 to $3!$ permutacji w kierunku $[i]$ przy nie zmienionym porządku w kierunku $[j]$. Wiersze 13-18 oraz 19-24 odpowiadają permutacją w kierunkach $[i]$ oraz $[k]$ dla drugiego uporządkowania w kierunku $[j]$. Ostateczne uporządkowanie minimalizujące D^2 umieszczono w wierszu 25. Odpowiada to uporządkowaniu zbiorów elementów składowych:

$$\{m_5, m_2, m_4, m_1, m_3\}, \{l_5, l_1, l_4, l_3, l_2\}, \{\dot{z}_5, \dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_4, \dot{z}_3\},$$

dla których $D^2 = 1116$ i jest najmniejszą spośród wartości D^2 .

LITERATURA

- Mikołajczak J., [1989], *Macierze wielowskaźnikowe. III. Macierze asocjatywne*, Acta Acad. Agricult. Techn. Olszt., Geod. Ruris Regulat., 19.
- Mikołajczak J., [1989], *Macierze wielowskaźnikowe. IV. Rząd, ślad i norma*, Acta Acad. Agricult. Techn. Olszt., Geod. Ruris Regulat., 19.
- Sklinsmont W. i in., [1985], *Macierze wielowskaźnikowe. II. Wielowskaźnikowe macierze jednostkowe*, Zesz. Nauk. ART. Olszt., Geod. i Urz. Rolne, 15, s. 27-33.
- Sklinsmont W., Częścik M., [1970], *Macierze wielowskaźnikowe w wielowymiarowej analizie porównawczej*, PWN, Warszawa.
- Sklinsmont, W., Mikołajczak J., [1985], *Macierze wielowskaźnikowe I. Podstawowe pojęcia i działania*, Zesz. Nauk. ART. Olszt., Geod. i Urz. Rolne, 15, s. 3-25.
- Sokolov, N.P., [1972], *Vvedenie w teoriju mnogomernych matric*, Nauk. Dumka. Kijev.
- Zeliaś A. i in., [1991], *Ekonometria przestrzenna*, PWE Warszawa.

MULTI-INDEX MATRICES IN ECONOMIC AND SOCIAL SCIENCES

The present application of spatial econometrics is still insufficient to launch complex examinations of processes in social and economic development. Econometrics employs numerous achievements of mathematical statistics, particularly those connected with multi-variable methods. However, what makes an obstacle in such an operation is two-dimensionality of algebraic objects that both sciences use for their calculations. Therefore, I would like to promote in my work an instrument of multi-index matrices that may significantly accelerate the progress taking place in the research of complex social and economic processes. This work defined the multi-index matrices together with operations that may be carried out on them. Special consideration is given to their products, the definition of which includes not only 5 known and practically applied ones but also 8 others, the application of which is still to be discovered. Using the notion of the associative matrix the following have been defined: (*lsc*)-non-singular matrix, (*lsc*)-canonical matrix, (*lsc*)-equivalence, p-index standard matrix, (*lsc*)-trace and other notions indispensable for the matrix algebra. The work includes definition of generalized invertible multi-index matrix and theorems connected with that notion, including the existence criteria for H- and L-generalized invertible Alsc matrices as well as the Moore–Penrose inverse. The work includes also other applications of multi-index matrices differing from the statistical methods.