

Kazimiera Guraj-Kaczmarek*

O TEŚCIE JONCKHEEREA-TERPSTRY

1. Wprowadzenie

Metody analizy wariancji pozwalają na jednoczesne porównanie kilku populacji ze względu na jedną cechę. Do weryfikacji hipotezy o równości nadziei matematycznych można korzystać zarówno z testów parametrycznych, jak i nieparametrycznych.

Sprawdzanie hipotez, w przypadku testów parametrycznych, odbywa się poprzez porównanie poszczególnych składników wariancji ogólnej za pomocą statystyki F-Snedecora. Statystyka ta wymaga, aby obserwacje były niezależne, a ich rozkłady normalne. W tym przypadku należy najpierw sprawdzić, czy analizowana zmienna losowa podlega w każdej subpopulacji rozkładowi normalnemu o tej samej wariancji. Uchylenie założenia o niejednorodności wariancji jest większym niebezpieczeństwem dla populacji generalnej niż stosowanie testów parametrycznych do obserwacji, które rozkładowi normalnemu nie podlegają.

Z uwagi na to wygodniej jest stosować testy nieparametryczne, które nie wymagają weryfikacji wspomnianych założeń. W zależności od ilości czynników kształtujących realizacje zmiennych losowych wyróżnia się analizy wariancyjne jedno-, dwu- i wieloczynnikowe.

Jednoczynnikowa nieparametryczna analiza wariancji, jak każda teoria, opiera się na pewnych założeniach, które teraz przedstawimy.

Danych jest k populacji generalnych o dowolnych rozkładach z ciągłymi dystrybutantami $F_1(u)$, $F_2(u)$, ..., $F_k(u)$. Populacje te

* Dr, adiunkt w Instytucie Ekonometrii i Statystyki UŁ.

są rozróżnialne ze względu na poziom j $j = 1, 2, \dots, k$ pewnego czynnika A. Z każdej z tych populacji pobrano próbę odpowiednio $n_1, n_2, \dots, n_k$ elementową. Niech X_{ij} oznacza realizację zmiennej losowej X , gdzie i - liczba porządkowa elementu w j populacji.

Założmy, że:

$$(1) \quad X_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n_j; \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

gdzie: μ - nieznana średnia ogólna, τ_j - nieznany efekt j poziomu czynnika A

$$\sum_{j=1}^k \tau_j = 0;$$

- (2) wszystkie błędy losowe e_{ij} są wzajemnie niezależne;
 (3) wszystkie błędy losowe pochodzą z jednej i tej samej populacji, w której określona jest ciągła zmienna losowa.

Z przyjętych założeń wynika, że odzwierciedleniem "zerowego" wpływu czynnika A w każdej subpopulacji byłyby jednakowe średnie poziomy zmiennej losowej X w każdej z k zbiorowości.

Spostrzeżenie to objaśnia postać hipotezy zerowej w jednoczynnikowej analizie wariancji (por. m. in. B r z e z i ń s k i, S t a c h o w s k i [2]):

$$(4) \quad H_0 : F_1(u) = F_2(u) = \dots = F_k(u).$$

Do weryfikacji tak sformułowanej hipotezy zerowej badacze wykorzystują najczęściej test Kruskala-Wallisa, który jest również omawiany w literaturze polskojęzycznej. W tym opracowaniu prezentujemy pewne własności testu Jonckheere-Terpstra, który jest także testem pozwalającym weryfikować hipotezę zerową (4), a nie był dotychczas stosowany przez polskich specjalistów przedmiotu.

2. Podstawowe własności testu Jonckheere-Terpstry

Test Jonckheere-Terpstry został zaproponowany przez T e r p s t r a [15] i J o n c k h e e r e a [7], ale w literaturze najczęściej występuje jako test Jonckheere.

Zakładamy spełnienie założeń (1)-(3) jednoczynnikowej analizy wariancji, a hipotezę zerową określa wzór (4), czyli

$$H_0 : F_1(u) = F_2(u) = \dots = F_k(u)$$

wobec hipotezy alternatywnej:

$$(5) \quad H_1 : F_1(u) \leq F_2(u) \leq \dots \leq F_k(u),$$

gdzie chociaż jedna z nierówności jest ostra.

Statystyka testu Jonckheere-Terpstra J jest sumą $\frac{1}{2}k(k-1)$ statystyk Manna-Whitneya, co możemy zapisać:

$$(6) \quad J = \sum_{u < v}^k U_{uv} = \sum_{u=1}^{k-1} \sum_{v=u+1}^k U_{uv},$$

gdzie: U_{uv} - statystyka Manna-Whitneya.

Przypomnijmy, że gdy $u < v$, to statystyka Manna-Whitneya jest definiowana następująco:

$$(7) \quad U_{uv} = \sum_{j=1}^{n_u} \sum_{j=1}^{n_v} \varphi(x_{iu}, x_{jv}),$$

przy czym

$$\varphi(x_{iu}, x_{jv}) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x_{iu} < x_{jv} \\ 1/2, & \text{jeśli } x_{iu} = x_{jv} \\ 0, & \text{jeśli } x_{iu} > x_{jv} \end{cases}$$

Duża liczba par $x_{iu} < x_{jv}$ świadczy na rzecz hipotezy alternatywnej (5), zatem obszar krytyczny w tym teście budujemy prawostronnie. Dokładny rozkład statystyki J jest skomplikowany. H o l l a n d e r, W o l f e [5] zamieścili w swojej pracy tablice wartości krytycznych $j(\alpha, k, (n_1, \dots, n_k))$ spełniających równania:

$$(8) \quad P(J > j(\alpha, k, (n_1, \dots, n_k))) = \alpha$$

tylko dla pewnych wartości k i n_j , a mianowicie dla $k = 3$ i

$n_1, n_2, n_3 = 2, 3, \dots, 8$, przy czym $n_1 \leq n_2 \leq n_3$, oraz $k = 4, 5, 6$ i $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 2, 3, \dots, 6$. Wartości α są podane z dokładnością 10^{-4} .

Oto kilka własności statystyki J :

a) jeśli $\min(n_1, n_2, \dots, n_k) \rightarrow \infty$ i hipoteza zerowa jest prawdziwa, to statystyka J podlega rozkładowi asymptotycznie normalnemu o parametrach:

$$(9) \quad E(J) = \frac{1}{4} \left(N^2 - \sum_{j=1}^k n_j^2 \right), \quad N = \sum_{j=1}^k n_j;$$

$$(10) \quad D^2(J) = \frac{1}{72} \left\{ N^2(2N + 3) - \sum_{j=1}^k n_j^2 (2n_j + 3) \right\},$$

czyli:

$$J' = \frac{J - E(J)}{D(J)} \sim \text{asN}(0, 1);$$

b) korzystając ze statystyki J' odrzucamy hipotezę zerową (4), gdy $J' > u_\alpha$, a u_α oznacza wartość dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego;

c) jeśli oczekiwany kierunek relacji między nadziejami matematycznymi nie jest zgodny z istniejącym uporządkowaniem dla hipotezy alternatywnej

$$F_1(u) \leq F_2(u) \leq \dots \leq F_k(u),$$

to grupy należy przenieść;

d) jeśli $k = 2$, to korzystamy z jednostronnego testu Manna-Whitneya-Wilcozona;

e) wartość statystyki J można wyznaczyć również wówczas, gdy zamiast X_{ij} znamy ich rangi (łączne rangowanie wszystkich

$$N = \sum_{j=1}^k n_j$$

obserwacji);

f) wartość statystyki J zmienia się wraz z przestawieniem grup;

g) jeśli k i n_j małe (np. $k = 3, n_j = 2, j = 1, 2, 3$) i hipoteza H_0 jest prawdziwa, to dokładny rozkład statystyki J mo-

zemy otrzymać wykorzystując fakt, że wszystkie

$$\left(\frac{N!}{\prod n_j!} \right)$$

zbiory rang mają jednakowe prawdopodobieństwo realizacji;

h) z uwagi na własność symetrii rozkładu statystyki J wartości krytyczne $j(\alpha, j, (n_1, n_2, n_3))$ zamieszczone w tablicach Hollandera i Wolfe'a [5] możemy odczytać nawet wówczas, gdy nie spełniona jest nierówność $n_1 \leq n_2 \leq n_3$.

3. Moc testu Jonckheere-Terpstry

Najważniejszą własnością każdego testu jest jego moc. Przypomnijmy statystykę omawianego testu (6):

$$J = \sum_{u=1}^{k-1} \sum_{v=u+1}^k U_{uv} = \sum_{v=2}^k J_v,$$

gdzie: $J_v = \sum_{u=1}^{k-1} U_{uv}.$

Ponieważ $J = J_2 + J_3 + \dots + J_{k-1} + J_k$, to możemy zapisać, że

$$(11) \quad J = J^* + J_k,$$

gdzie: $J^* = \sum_{v=2}^{k-1} J_v.$

Hipoteza H_0 (4) będzie odrzucona, gdy

$$J > j\alpha, \quad \text{a} \quad j\alpha = j(\alpha, k, (n_1, \dots, n_k)).$$

Odeh [11] rozważa klasę hipotez alternatywnych H_λ postaci:

$$(12) \quad H_\lambda : F_1(u) = \dots = F_{k-1}(u); \quad F_k(u) = \left\{ F_1(u) \right\}^\lambda$$

przy $(\lambda > 1)$.

Hipoteza H_λ (12) dla $\lambda = 1$ brzmi tak samo, jak nasza hipoteza zerowa (4).

Obecnie będziemy się starali przy tak zdefiniowanej hipotezie (12):

a) znaleźć dokładny rozkład statystyki J , a tym samym obliczyć moc testu Jonckheere-Terpstry, gdy liczba wyróżnionych subpopulacji (k) oraz ich liczebność (n_j) jest mała (do kilkunastu elementów);

b) badać zbieżność statystyki J (rozkład statystyki J jest dyskretny) do rozkładu normalnego.

Często przy weryfikacji hipotezy, że dwie populacje z ciągłymi dystrybuantami $F(\cdot)$ i $G(\cdot)$ mają takie same rozkłady, tzn. $H_0: F(\cdot) = G(\cdot)$, formułuje się hipotezy alternatywne:

$$(13) \quad H'_1: G = F^\lambda \quad \text{dla} \quad \lambda > 0 \quad \text{i} \quad \lambda \neq 1,$$

$$H'_2: G = 1 - (1 - F)^\lambda \quad \text{dla} \quad \lambda > 0 \quad \text{i} \quad \lambda \neq 1$$

znane w literaturze jako alternatywy Lehmana.

Założmy, że mamy daną próbę losową n_1 elementową z ciągłą dystrybuantą $F(\cdot)$ oraz próbę losową n_2 elementową z ciągłą dystrybuantą $G(\cdot) = \{F(\cdot)\}^\lambda$.

Mann i Whitney [9] podali wzór rekurencyjny dla prawdopodobieństwa statystyki U_{uv} , która była analogiczna do określonej u nas wzorem (7), przy czym była ona sumą tylko zer i jedynek:

$$(14) \quad P(U_{12} = u, n_1, n_2) = \frac{n_2}{n_1 + n_2} P(U_{12} = u, n_1, n_2 - 1) + \\ + \frac{n_1}{n_1 + n_2} P(U_{12} = u - n_2, n_1 - 1, n_2)$$

oraz tablice rozkładu statystyki U_{12} dla $n_1, n_2 \leq 8$. Natomiast u Schoraka [13] znajdujemy wzór rekurencyjny dla prawdopodobieństw rozkładu statystyki $n_1 \cdot n_2 - U$, gdy hipoteza H'_1 i H'_2 jest prawdziwa

$$(15) \quad P(U_{12} = u, n_1, n_2) = \frac{n_1}{\lambda n_2 + n_1} P(U_{12} = u - n_2, n_1 - 1, n_2) +$$

$$+ \frac{\lambda n_2}{\lambda n_2 + n_1} P(U_{12} = u, n_1, n_2 - 1),$$

gdzie $G = F^\lambda$ i $\lambda > 0$.

Ponadto

$$(16) \quad P(U_{12} = u, n_1, n_2) = \frac{n_1}{\lambda n_2 + n_1} P(U = u, n_1 - 1, n_2) + \\ + \frac{\lambda n_2}{\lambda n_2 + n_1} P(U = u - n_1, n_1, n_2 - 1),$$

gdzie $G = 1 - (1 - F)^\lambda$ i $\lambda > 0$.

Zauważmy, że:

$$P(U_{12} = u, n_1, n_2 | G = F^\lambda) = P(U_{12} = n_1 n_2 - u, n_1, n_2 | G = \\ = 1 - (1 - F)^\lambda),$$

$$P(U_{12} = u, n_1, n_2 | G = 1 - (1 - F)^\lambda) = P(U_{12} = n_1 n_2 - u, n_1, n_2 | G = \\ = 1 - (1 - F)^\lambda).$$

Dla przejrzystości zapisu przyjmijmy oznaczenie

$$(17) \quad P(U_{12} = u, n_1, n_2) = q_\lambda(n_1, n_2, u).$$

Przy założeniu, że hipoteza H_λ (12) jest prawdziwa, to

$$(18) \quad P(J = j) = p_\lambda(j, k, n),$$

gdzie: $j \in <0, \frac{1}{2}k(k-1)>$,

J określa wzór (6), k - liczba prób, z których każda jest n -elementowa ($n_j = n$).

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami dla $k = 2$

$$(19) \quad p_\lambda(j, 2, n) = q_\lambda(n, n, j).$$

Jeśli $k > 2$, to prawdziwy jest następujący wzór rekurencyjny:

$$(20) \quad P(J = j) = p_\lambda(j, k, n) = \\ = \sum_t p_1(t, k-1, n) q_\lambda(n, nk - n, j - t),$$

gdzie sumowanie jest rozciągnięte na wszystkie wartości t spełniające nierówność

$$(21) \quad \max\{0, j - n^2(k - 1)\} \leq t \leq \min\left\{j, \frac{1}{2}(k - 1)(k - 2)n^2\right\}.$$

Tak określone granice wartości t (21) powodują, że $p_1(\cdot)$ oraz $q_\lambda(\cdot)$ są dodatnie.

Jeśli statystykę J przedstawimy w postaci sumy dwóch składników (11) J^* i J_k , wówczas zgodnie z tzw. Terpstra [15] będą to niezależne zmienne losowe, a $p_\lambda(j, k, n)$ jest ich splotem. Funkcje $p_1(\cdot)$ można oszacować podstawiając $\lambda = 1$ do wzorów (19) i (20).

Wykorzystując fakt niezależności zmiennych losowych J^* i J_k (11) oraz wzory określające wielkości $E(J_k)$, $D^2(J_k)$, $E(J^*)$, $D^2(J^*)$ (por. Lehmann [8] i Jonckheere [7]) łatwo znaleźć $E(J)$ oraz $D^2(J)$.

Jeśli hipoteza H_λ (12) jest prawdziwa, to

$$E(J_k) = \frac{n^2(k - 1)\lambda}{1 + \lambda},$$

$$D^2(J_k) = \lambda^2 n^2(k - 1) \left\{ \frac{n(k - 1) - 1}{\lambda + 2} + \frac{\lambda(n - 1)}{2\lambda + 1} + 1 \right\} \frac{1}{(1 + \lambda)^2}.$$

Natomiast jeśli hipoteza H_0 (4) jest prawdziwa, to

$$E(J^*) = \frac{1}{4}n^2(k - 1)(k - 2),$$

$$D^2(J^*) = \frac{1}{72}n^2(k - 1)(k - 2)(2nk + 3).$$

Stąd otrzymujemy:

$$(22) \quad \begin{aligned} E(J) &= E(J_k + J^*) = E(J_k) + E(J^*) = \\ &= n^2(k - 1) \left(\frac{k - 2}{4} - \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right), \end{aligned}$$

$$(23) \quad D^2(J) = D^2(J_k + J^*) = D^2(J_k) + D^2(J^*) =$$

$$= n^2(k-1) \left[\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} \cdot \left\{ \frac{n(k-1)-1}{\lambda+2} + \frac{\lambda(n-1)}{2\lambda+1} + 1 \right\} + \frac{(k-2)(2nk+3)}{72} \right].$$

Wiadomo, że J^* i J_k podlegają rozkładowi asymptotycznie normalnemu, dlatego rozkład J będziemy aproksymować rozkładem normalnym ze średnią $E(J)$ wzór (22) i $D^2(J)$ wzór (23). Wówczas

$$(24) \quad P(J \geq j_\alpha) = 1 - \Phi\left(\frac{j_\alpha - E(J) - \frac{1}{2}}{D(J)}\right),$$

gdzie $\Phi(\cdot)$ jest dystrybucją rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

Występująca we wzorze (24) liczba $\frac{1}{2}$ jest związana z powszechnie stosowaną tzw. poprawką na ciągłość (por. np. J a c o b s o n [6]).

Z uwagi na fakt, że J jest dyskretną zmienną losową z tablic H o l l a n d e r a i W o l f e a [5] otrzymujemy, np. że:

$$P(J \geq 12) = 0,0111, \quad P(J \geq 11) = 0,0333,$$

$$P(J \geq 10) = 0,0889, \quad P(J \geq 9) = 0,1667,$$

a więc nie istnieje j_α spełniające równanie:

$$P(J \geq j_\alpha) = \alpha,$$

gdzie: α - zadany poziom istotności.

Wartości j_α i $j_\alpha + 1$ ustalamy tak, aby przy założeniu, że hipoteza zerowa jest prawdziwa była spełniona następująca nierówność:

$$(25) \quad P_1 = P(J \geq j_\alpha) \geq \alpha > P(J \geq j_\alpha + 1) = P_2.$$

Tablice O d e h a [10] i [11] zawierają wartości tych prawdopodobieństw i wartości krytycznych j_α albo $j_\alpha + 1$, w zależności które z prawdopodobieństw P_1 czy P_2 jest bliższe α . Porównanie dokładnych (20) i aproksymowanych wartości prawdopodobieństwo $P(J \geq j_\alpha)$ dla poziomów istotności $\alpha = 0,01$ i $0,02$ oraz $k = 3$ i 6 , $n = 2, 4, 6$ i $\lambda = 1$ przedstawiają liczby podane w tabl. 1.

Zauważamy, że błąd aproksymacji jest mały: 10^{-2} , a taka dokładność do celów praktycznych jest wystarczająca.

T a l i c a 1

Porównanie wartości $P(J > j'_{\alpha})$ dokładnych i aproksymowanych

λ	$\alpha = 0,01$						$\alpha = 0,20$						
	$k = 3$			$k = 6$			$k = 3$			$k = 6$			
	D	A	D-A	D	A	D-A	D	A	D-A	D	A	D-A	
$n = 2$	1	0,011	0,014	(-0,003)	0,009	0,011	(-0,002)	0,167	0,160	(0,007)	0,187	0,183	(0,004)
	6	0,075	0,078	(-0,003)	0,059	0,060	(-0,001)	0,590	0,576	(0,014)	0,546	0,542	(0,004)
	12	0,107	0,098	(0,011)	0,082	0,081	(0,001)	0,707	0,707	(-0,006)	0,633	0,634	(-0,001)
$n = 4$	1	0,010	0,012	(-0,002)	0,010	0,011	(-0,001)	0,216	0,210	(0,016)	0,205	0,203	(0,002)
	6	0,213	0,207	(0,006)	0,154	0,153	(0,001)	0,880	0,883	(-0,003)	0,767	0,767	(0,000)
	12	0,339	0,325	(0,014)	0,232	0,230	(0,002)	0,963	0,968	(-0,005)	0,863	0,865	(-0,002)
$n = 6$	1	0,010	0,011	(-0,001)	0,010	0,010	(0,000)	0,201	0,198	(0,003)	0,201	0,199	(0,002)
	6	0,393	0,378	(0,015)	0,264	0,264	(0,003)	0,948	0,955	(0,007)	0,868	0,870	(-0,002)
	12	0,611	0,600	(0,011)	0,401	0,399	(0,002)	0,992	0,995	(-0,003)	0,944	0,945	(-0,001)

U w a g a: D - wartości dokładne, A - wartości aproksymowane.

Ź r ó d ł o: O d e h [11], s. 470.

4. Uwagi końcowe

Nasze badania pozwalają sformułować pozytywny wniosek odnośnie do korzystania z rozkładu asymptotycznego statystyki omawianego testu, nawet przy mało licznych próbach. Przedstawione rozważania mają stanowić bazę dla dalszych badań koncentrujących się na wykorzystaniu nieparametrycznych testów analizy wariancji do pogłębionej analizy statystycznej nowożeńców. Zdajemy sobie w pełni sprawę, że przedstawione rozważania nie wyczerpują podjętego tematu.

I tak należy wspomnieć o pracy Shoraka [14], który podaje wzór rekurencyjny służący do generowania rozkładu J przy założeniu, że hipoteza H_1 ma postać ogólniejszą niż przeprowadzane przez nas rozważania. Temat asymptotycznej mocy testu Jonckheera-Terpstry podejmowali również: Puri [12], Bartholomew [1] i Odell [10]. Prace te będą m. in. przedmiotem naszych dalszych badań.

Literatura

- [1] Bartholomew D. J. (1961): Ordered Tests in the Analysis of Variance, *Biometrika*, 48, 325-332.
- [2] Brzeziński J., Stachowski R. (1981): Zastosowanie analizy wariancji w eksperymentalnych badaniach psychologicznych, PWN, Warszawa.
- [3] Domański Cz. (1979): Statystyczne testy nieparametryczne, PWE, Warszawa.
- [4] Domański Cz. (1986): Teoretyczne podstawy testów nieparametrycznych i ich zastosowanie w naukach ekonomicznych, *Acta Universitatis Lodzensis, Folia oeconomica*.
- [5] Hollander M., Wolfe D. (1973): Nonparametric Statistical Methods, John Wiley and Sons, New York.
- [6] Jacobson J. E. (1963): The Wilcoxon Two - Sample Statistic: Tables and Bibliography, *IASA*, 58, 1086-1103.

- [7] Jonckheere A. R. (1954): A Distribution - Free k-Sample Test Against Ordered Alternatives, *Biometrika*, 41, 133-145.
- [8] Lehmann L. E. (1953): The Power of Rank Tests, AMS, 24, 23-43.
- [9] Mann H. B., Whitney D. R. (1947): On a Test of Whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger Than the Other, AMS, 18, 50-60.
- [10] Odeh R. (1971): On Jonckheere's k-Sample Test Against Ordered Alternatives, *Technometrics*, 13, 912-918.
- [11] Odeh R. (1972): On the Power of Jonckheere's k-Sample Test Against Ordered Alternatives, *Biometrika*, 59, 467-471.
- [12] Puri M. L. (1965): Some Distribution - Free k-Sample Rank Test of Homogeneity Against Ordered Alternatives, *Comm. Pure Appl. Math.* 18, 51-63.
- [13] Shorak R. A. (1966): Recursive Generation of the Distribution of the Mann-Whitney-Wilcoxon U - Statistic under Generalized Lehmann Alternatives, AMS, 37, 284-286.
- [14] Shorak R. A. (1968): Recursive Generation of the Distribution of Several Non-Parametric Test Statistics under Censoring, *IASA*, 63, 353-366.
- [15] Terpstra S. (1952): The Asymptotic Normality and Consistency of Kendall's Test Against Trend when Ties are Present in one Ranking, *Indag. Math.* 14, 327-333.

Kazimiera Guraj-Kaczmarek

ON THE JONCKHEERE-TERPSTRA TEST

The Jonckheere-Terpstra test is one of the one factor tests of non-parametric variance analysis. It was proposed by Terpstra [15] and Jonckheere [6] but most often it appears in the scientific literature as the Jonckheere's test. When fulfilling the assumptions 1.1 - 1.3 of the one factor analysis of variance the null hypothesis $H_0 : F_1(u) = F_2 = \dots = F_k(u)$ as against the alternative hypothesis $H_1 : F_1(u) \leq F_2(u) \leq \dots \leq F_k(u)$ where at least one of the inequalities is strict.

The statistic J of the Jonckheere-Terpstra test is a sum $\frac{1}{2}k(k-1)$ of the Mann-Whitney statistics (2.2).

The paper presents the examination of the test's properties, including the finding of the exact distribution of statistic J , when the more general hypothesis H_A is true (3.2) and the examination of convergence of the J statistics (the distribution of which is discrete) towards normal distribution (tab. 1). The approximation error of 10^{-2} may be considered rather small, thus the suggested approximation can be accepted as satisfying the practical objectives.