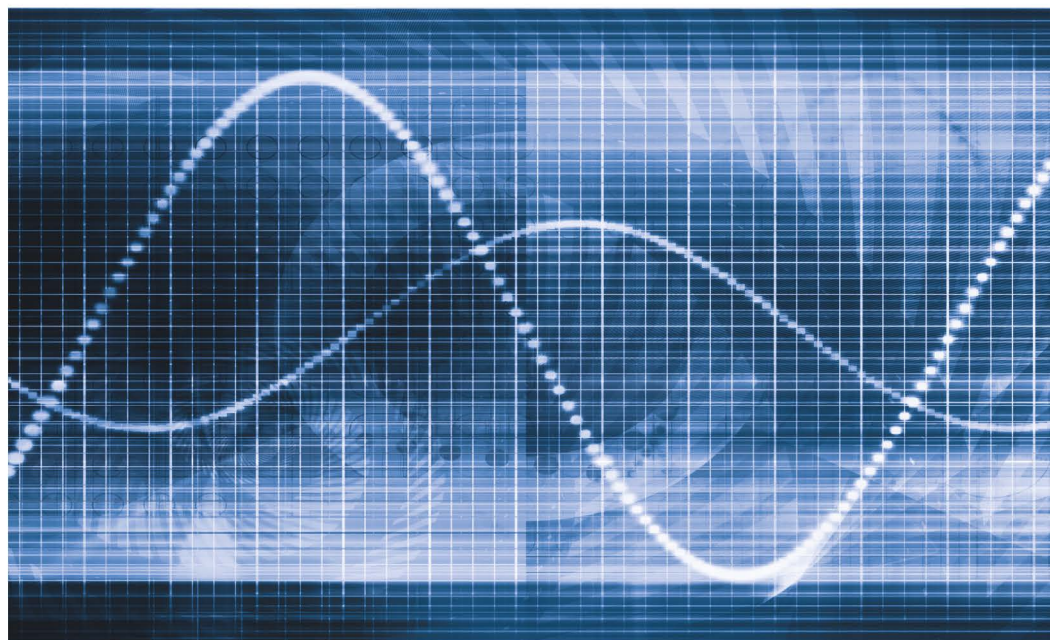


**Ekonomia**

# **Parametr wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości dla zmiennych losowych w badaniach ekonomicznych**

Aleksandra Baszczyńska



**Parametr wygładzania  
w estymacji jądrowej  
funkcji gęstości  
dla zmiennych losowych  
w badaniach ekonomicznych**



WYDAWNICTWO  
UNIWERSYTETU  
ŁÓDZKIEGO

**Ekonomia**

# **Parametr wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości dla zmiennych losowych w badaniach ekonomicznych**

Aleksandra Baszczyńska



WYDAWNICTWO  
UNIwersytetu  
ŁÓDZKIEGO

ŁÓDŹ 2016

Aleksandra Baszczyńska – Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny  
Katedra Metod Statystycznych, 90-255 Łódź, ul. POW 3/5

RECENZENT  
*Grzegorz Kończak*

REDAKTOR INICJUJĄCY  
*Monika Borowczyk*

OPRACOWANIE REDAKCYJNE  
*Małgorzata Szymańska*

SKŁAD I ŁAMANIE  
*Munda – Maciej Torz*

PROJEKT OKŁADKI  
*Stämpfli Polska Sp. z o.o.*  
Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Shutterstock.com

© Copyright by Aleksandra Baszczyńska, Łódź 2016  
© Copyright for this edition by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2016  
Publikacja jest udostępniona na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa-  
Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0 (CC BY-NC-ND)

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego  
Wydanie I. W.07511.16.0.M

Ark. 7,2; ark. druk. 12,5

ISBN 978-83-8088-279-9  
e-ISBN 978-83-8088-280-5  
<https://doi.org/10.18778/8088-280-5>  
Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego  
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8  
[www.wydawnictwo.uni.lodz.pl](http://www.wydawnictwo.uni.lodz.pl)  
e-mail: [ksiegarnia@uni.lodz.pl](mailto:ksiegarnia@uni.lodz.pl)  
tel. (42) 665 58 63

# Spis treści

Indeks oznaczeń i symboli	7
Wprowadzenie	11
Rozdział 1	
<b>Estymacja nieparametryczna funkcji gęstości</b>	<b>15</b>
1.1. Uwagi wstępne	15
1.2. Estymacja jądrowa funkcji gęstości	26
1.3. Miary precyzji estymacji jądrowej funkcji gęstości	38
1.4. Estymacja jądrowa pochodnych funkcji gęstości	42
Rozdział 2	
<b>Rodzaje funkcji jądra</b>	<b>47</b>
2.1. Uwagi wstępne	47
2.2. Klasyczne funkcje jądra	49
2.3. Funkcje jądra wyższych rzędów	55
2.4. Gładkie wielomianowe funkcje jądra	57
2.5. Funkcje jądra o najmniejszej wariancji	59
2.6. Funkcje jądra optymalne	61
2.7. Kanoniczne funkcje jądra	66
2.8. Asymetryczne sześciennne funkcje jądra	70
2.9. Funkcje jądra stosowane w estymacji funkcji gęstości z ograniczonym nośnikiem	71
Rozdział 3.	
<b>Metody wyboru parametru wygładzania</b>	<b>93</b>
3.1. Uwagi wstępne	93
3.2. Metody odwołania do rozkładu	100
3.3. Metody krosvalidacyjne	103
3.4. Metody podstawiania	111
3.5. Inne metody wyboru parametru wygładzania	113
3.6. Badanie własności wybranych metod wyboru parametru wygładzania	114
3.7. Zastosowanie metody wyboru parametru wygładzania opartej na uogólnionej średniej harmoniczej w estymacji jądrowej funkcji gęstości	149

## 6 Parametr wygładzania w estymacji jądrowej...

Rozdział 4.

### **Parametr wygładzania w estymacji jądrowej wielowymiarowej funkcji gęstości** **157**

4.1. Uwagi wstępne	157
4.2. Produktowa i radialna funkcja jądra	157
4.3. Wybór macierzy parametrów wygładzania	164

Rozdział 5.

### **Parametr wygładzania w zastosowaniach ekonomicznych estymacji jądrowej funkcji gęstości** **167**

5.1. Uwagi wstępne	167
5.2. Analiza kondycji przedsiębiorstw	168
5.3. Analiza wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych	172

Zakończenie 179

Literatura 183

Smoothing Parametr in Kernel Density Estimation for Random Variables in Economic Researches. Summary 191

Spis rysunków 195

Spis tablic 197

Od Redakcji 199

# Indeks oznaczeń i symboli

$X_1, X_2, \dots, X_n$	próba losowa
$x_1, x_2, \dots, x_n$	realizacja próby losowej
$f = f(x)$	funkcja gęstości
$F(x)$	dystrybuanta
$\hat{F}(x)$	dystrybuanta empiryczna
$I_A(x)$	funkcja charakterystyczna zbioru $A$ : $I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in A \\ 0 & \text{gdy } x \notin A \end{cases}$
$\hat{f}(x)$	estymator funkcji gęstości
$\hat{f}_H(x)$	histogram
$h_H$	szerokość klasy w histogramie
$\hat{f}_n(x) = \hat{f}(x)$	estymator jądrowy funkcji gęstości
$\hat{f}_n^{(v)}(x)$	estymator jądrowy $v$ -tej pochodnej funkcji gęstości
$K = K(u)$	funkcja jądra
$h = h(n)$	parametr wygładzania
$S_{v,k}^\mu$	klasa funkcji jądra o rzędzie $k$ i gładkości $\mu$
$E[\hat{f}(x)]$	wartość oczekiwana estymatora funkcji gęstości
$B[\hat{f}(x)]$	obciążenie estymatora funkcji gęstości
$D^2[\hat{f}(x)]$	wariancja estymatora funkcji gęstości
$\ \mathbf{x}\ _p$	$p$ -ta norma wektora $\mathbf{x}$ : $\ \mathbf{x}\ _p = \left( x_1 ^p +  x_2 ^p + \dots +  x_n ^p\right)^{\frac{1}{p}}$
$\hat{f}_{R_i}(x)$	estymator jądrowy funkcji gęstości z odbiciem, $i = L, P$

$\hat{f}_B(x)$	estymator jądrowy funkcji gęstości z brzegową funkcją jądra
$AE[\hat{f}(x)]$	błąd bezwzględny estymatora funkcji gęstości
$MAE[\hat{f}(x)]$	średni błąd bezwzględny estymatora funkcji gęstości
$IAE[\hat{f}(x)]$	scalkowany błąd bezwzględny estymatora funkcji gęstości
$MIAE[\hat{f}(x)]$	scalkowany średni błąd bezwzględny estymatora funkcji gęstości
$SE[\hat{f}(x)]$	błąd kwadratowy estymatora funkcji gęstości
$MSE[\hat{f}(x)]$	błąd średniokwadratowy estymatora funkcji gęstości
$ISE[\hat{f}(x)]$	scalkowany błąd kwadratowy estymatora funkcji gęstości
$MISE[\hat{f}(x)]$	scalkowany błąd średniokwadratowy estymatora funkcji gęstości

$\kappa = R(K)$       scalkowany kwadrat funkcji jądra:  $\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du$

$\kappa_k$        $k$ -ty moment zwykły funkcji jądra:  $\kappa_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k K(u) du$

$R(f^{(k)})$       scalkowany kwadrat  $k$ -tej pochodnej funkcji gęstości:  

$$R(f^{(k)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(k)}(x)]^2 dx$$

$K_J(u)$	jednostajna funkcja jądra
$K_T(u)$	trójkątna funkcja jądra
$K_E(u)$	funkcja jądra Epanecznikowa
$K_{DW}(u)$	dwuwagowa funkcja jądra
$K_{TW}(u)$	trójwagowa funkcja jądra
$K_G(u)$	gaussowska funkcja jądra
$K_C(u)$	kosinusowa funkcja jądra
$K_{ST}(u)$	funkcja jądra stopnia trzeciego

$K * K(u)$       splot funkcji jądra:  $K * K(u) = K^{(2)}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u-v)K(v)dv$

$n!!$       silnia podwójna:  $n!! = \begin{cases} 1 & \text{dla } n=0 \text{ lub } n=1 \\ n(n-2)!! & \text{dla } n \geq 2 \end{cases}$

$(a)_n$	symbol Pochhammera: $(a)_n = \prod_{j=0}^{n-1} (a + j)$
$\Gamma(z)$	funkcja gamma Eulera
$B(x, y)$	funkcja beta Eulera
$C_m^l(u)$	wielomian Gegenbauera: $C_m^l(u) = \frac{1}{\Gamma(l)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i \Gamma(l + m - i) (2u)^{m-2i}}{i!(m-2i)!}$
$P_k(x)$	wielomian Legendre'a stopnia $k$ : $P_k(x) = \sum_{r=0}^k p_r^k u^r$
$\phi(u)$	funkcja gęstości rozkładu normalnego standaryzowanego
$h_{ISE}$	parametr wygładzania minimalizujący <i>ISE</i>
$h_{MISE}$	parametr wygładzania minimalizujący <i>MISE</i>
$h_{AMISE}$	parametr wygładzania minimalizujący <i>AMISE</i>
$h_{RR\cdot}$	parametr wygładzania wyznaczony metodą odwołania do standardowego rozkładu
$h_{MS\cdot}$	parametr wygładzania wyznaczony za pomocą zasady maksymalnego wygładzania
$h_{LSCV}$	parametr wygładzania wyznaczony metodą kroswalidacyjną najmniejszych kwadratów
$h_{PLCV}$	parametr wygładzania wyznaczony metodą kroswalidacyjną pseudowiarygodności
$h_{BVC}$	parametr wygładzania wyznaczony metodą obciążoną kroswalidacyjną
$h_{SCV}$	parametr wygładzania wyznaczony metodą wygładzoną kroswalidacyjną
$h_{PM}$	parametr wygładzania wyznaczony metodą podstawiania
$h_{UH}$	parametr wygładzania wyznaczony metodą uogólnionej średniej harmonicznej
$\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{H})$	estymator jądrowy wielowymiarowej funkcji gęstości
$K^P(\mathbf{x})$	produktowa funkcja jądra
$K^R(\mathbf{x})$	radialna funkcja jądra
$\mathbf{H}$	macierz parametrów wygładzania
$ \mathbf{H} $	wyznacznik macierzy parametrów wygładzania



# Wprowadzenie

Uniwersalne a jednocześnie skuteczne procedury statystyczne stanowią jedno z podstawowych narzędzi w szeroko pojętych badaniach ekonomiczno-społecznych. Potrzeba stosowania takich procedur jest ściśle związana z charakterem zjawisk dotyczących wysoko rozwiniętego społeczeństwa, gdzie stopień różnorodności wszelkich aspektów jego funkcjonowania jest wysoki.

W analizach statystycznych związanych ze zjawiskami ekonomicznymi szczególną rolę odgrywają metody nieparametryczne. Zapewniają uniwersalność ze względu na brak konieczności przyjmowania dodatkowych założeń dotyczących rozkładów zmiennych losowych. Założenia takie nie zawsze bowiem są spełnione, co w wielu przypadkach jest wyrazem szczególnego charakteru analizowanych zmiennych ekonomicznych – ich wyjątkowości i niepowtarzalności. Zatem, niepowszedniość i incydentalność zmiennych ekonomicznych wymusza aplikację takich metod, dla których obserwowany jest szeroki zakres stosowalności, przy jednoczesnym braku konieczności przyjmowania, być może, wątpliwych założeń. Z drugiej strony dobre własności procedur nieparametrycznych stanowią gwarancję skuteczności metod nieparametrycznych.

Funkcja gęstości jest jedną z podstawowych charakterystyk zmiennej losowej, stąd nieparametryczne procedury związane z funkcją gęstości odgrywają coraz większą rolę w analizach zmiennych ekonomicznych. Nieparametryczna estymacja funkcji gęstości w wielu przypadkach jest nie tylko procedurą stanowiącą punkt wyjścia do dalszych szczegółowych analiz statystycznych dotyczących zmiennej losowej, ale stanowi również niezwykle zwartą i wyczerpującą procedurę dostarczającą określone spektrum informacji o własnościach zmiennej losowej. Różnorodność rodzajów tego podejścia oznacza, z jednej strony, wykorzystanie wyników estymacji funkcji gęstości do określenia w sposób jednoznaczny klasy procedur wykorzystywanych w dalszych badaniach i analizach statystycznych, z drugiej zaś może stanowić docelową i kompletną procedurę statystyczną. Jest zatem procedurą statystyczną o bardzo ogólnym charakterze, jednocześnie gwarantując szczegółowość wyników analiz.

Jądrowa estymacja funkcji gęstości jest procedurą stosowaną w analizach statystycznych nie tylko dotyczących zjawisk ekonomicznych, ale również przyrod-

niczych czy technicznych, jednak konieczność podjęcia decyzji o dwóch istotnych parametrach metody jądrowej, tj. funkcji jądra i parametru wygładzania, w dużym stopniu ogranicza stosowalność tej metody. Wielość propozycji metod dostępnych w literaturze, związanych z wyborem odpowiednich parametrów metody jądrowej, prowadzi do znacznego uproszczenia stosowalności metody jądrowej funkcji gęstości. W większości przypadków wykorzystywane są te metody wyboru parametrów metody jądrowej, które są łatwe do implementacji, co często oznacza niedoskonałość tych procedur.

Tematem niniejszej monografii są procedury wyboru parametrów metody jądrowej, ze szczególnym uwzględnieniem parametru wygładzania, gdyż w literaturze przedmiotu wskazuje się na mniejsze znaczenie wyboru funkcji jądra w estymacji jądrowej funkcji gęstości. Wybór tematyki jest naturalnym rozwinięciem i podsumowaniem wcześniejszych badań autorki w tym zakresie. Dotyczyły one, w szczególności, analiz związanych z wyborem funkcji jądra, wyborem parametru wygładzania, stosowalności procedur jądrowych w badaniach ekonomicznych, co wiązało się z odpowiednią modyfikacją klasycznych procedur jądrowej estymacji funkcji gęstości, uwzględniających charakter tych zmiennych.

Głównym celem badawczym autorki monografii jest analiza własności procedur wyboru parametru wygładzania w jądrowej estymacji funkcji gęstości, przy czym zasadniczym atrybutem brany pod uwagę przy analizach badań związanych z parametrem wygładzania był nie tylko aspekt metodologiczny, ale przede wszystkim możliwość zastosowania w badaniach zmiennych ekonomicznych. Analizie poddano zarówno klasyczne, jak i nieklasyczne procedury wyboru parametru wygładzania, wskazując w ten sposób na procedury optymalne w określonym zagadnieniu badawczym. Przedstawiono również wyniki badań dotyczących zaproponowanej autorskiej metody wyboru parametru wygładzania, uwzględniającej informacje dodatkowe związane z populacją.

Realizacja powyższego celu badawczego wymagała sprecyzowania celów szczegółowych, które są sformułowane następująco:

- określenie rodzajów funkcji jądra, ich szczegółowa prezentacja oraz wskazanie możliwości zastosowania określonej klasy funkcji jądra w konkretnej sytuacji badawczej, biorąc pod uwagę informacje dodatkowe dotyczące rozkładu zmiennej losowej,
- prezentacja metod wyboru wartości parametru wygładzania wraz z podaniem najważniejszych własności metod,
- porównanie wartości parametrów wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości, dokonane przy uwzględnieniu różnych postaci funkcji jądra, co prowadzi do wskazania najlepszych par parametrów metody jądrowej w estymacji funkcji gęstości,
- analiza własności autorskiej metody wyboru parametru wygładzania,
- określenie najlepszych metod wyboru parametru wygładzania dla estymacji funkcji gęstości zmiennej losowej w badaniach ekonomicznych.

W wyniku analiz związanych z badaniem własności metod wyboru parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości weryfikacji podlegały następujące hipotezy badawcze:

- wybór parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości zmiennej losowej w badaniach ekonomicznych jest ściśle uzależniony od informacji dodatkowych dotyczących podstawowych charakterystyk rozkładu, takich jak asymetryczność i wielomodalność,
- w określonych sytuacjach badawczych możliwe jest wskazanie optymalnych par parametrów metody jądrowej poprzez wskazanie najlepszej funkcji jądra dla określonej wartości parametru wygładzania,
- przy estymacji jądrowej funkcji gęstości zmiennej losowej w badaniach ekonomicznych informacje dodatkowe dotyczące jej rozkładu upraszczają procedurę wyboru optymalnych parametrów metody jądrowej z punktu widzenia określonego błędu,
- modyfikacje klasycznych procedur estymacji funkcji gęstości poprzez dobór nieklasycznych postaci funkcji jądra oraz zastosowanie nieklasycznych metod wyboru parametru wygładzania powodują polepszenie własności estymacji jądrowej zmiennej losowej w badaniach ekonomicznych.

Dla potrzeb realizacji celów dobrano odpowiednią strukturę pracy. W rozdziale pierwszym przedstawione są informacje związane z estymacją nieparametryczną, w szczególności z estymacją jądrową funkcji gęstości. Podane są własności estymatora klasycznego typu Rosenblatta-Parzena, jak również zaprezentowane są modyfikacje postaci klasycznej estymatora wynikające z wystąpienia ograniczonego nośnika zmiennej losowej, co w badaniach ekonomiczno-społecznych występuje dość często. W rozważaniach ogólnych dotyczących klasycznego podejścia w estymacji jądrowej szczególnego znaczenia nabiera szczegółowe określenie miary precyzji estymacji. W wielu metodach wyboru parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości minimalizacja określonej ściśle miary precyzji pozwala na wyznaczenie właściwej wartości parametru wygładzania. Rozwinięciem rozważań związanych z klasycznym podejściem jest prezentacja procedur dotyczących estymacji pochodnych określonego rzędu funkcji gęstości.

W rozdziale drugim podjęto próbę usystematyzowania informacji dotyczących funkcji jądra prezentowanych w literaturze przedmiotu. Wyodrębniono osiem rodzajów funkcji jądra, gdzie czynnikami klasyfikującymi odpowiednią funkcję jądra do określonej grupy była konstrukcja, zasady stosowania w analizach praktycznych, charakter zmiennych losowych, których funkcja gęstości jest objęta estymacją oraz optymalność funkcji jądra. Wyodrębnione w ten sposób klasy w wielu przypadkach nie są rozłączne.

Rozdział trzeci jest poświęcony metodom wyboru parametru wygładzania. Różnorodność prezentowanych w literaturze przedmiotu metod powoduje pewną nieokreśloność co do metody najlepszej. Stąd, w rozdziale tym przedstawiono zarówno te metody, które są traktowane przez badaczy jako proste i szybkie

(uwypuklając ich wady), jak i metody bardziej zaawansowane, które mimo trudności w implementacji powinny być stosowane w praktyce. Zaprezentowano również autorską metodę wyboru parametru wygładzania opartą na uogólnionej średniej harmonicznej. Uzupełnieniem tych rozważań jest porównanie wybranych metod wyboru parametru wygładzania, ze szczególnym uwzględnieniem zależności między funkcją jądra i parametrem wygładzania oraz przy uwzględnieniu, przy wyborze metody, informacji dodatkowej związanej ze zmienną losową.

W rozdziale czwartym omówiono metody estymacji wielowymiarowej funkcji gęstości oraz procedury wyboru macierzy parametrów wygładzania. Odmienność metod wyboru parametrów w estymacji funkcji gęstości, przedstawionych w tym rozdziale, wynika bezpośrednio z faktu, że procedury stosowane dla wielowymiarowej estymacji nie są jedynie prostym rozszerzeniem procedur jednowymiarowych.

W rozdziale piątym wyniki analiz zawartych w poprzednich rozdziałach zostały wykorzystane w zagadnieniach związanych z estymacją funkcji gęstości zmiennej losowej w badaniach ekonomicznych, uwzględniając w sposób szczególny informacje wstępne dotyczące charakteru rozważanej zmiennej losowej.

Przy przygotowywaniu publikacji opierano się głównie na literaturze anglojęzycznej, gdyż w literaturze polskiej jedynie kilka opracowań dotyczy problematyki nieparametrycznej estymacji jądrowej funkcji gęstości. Monografia zatem może stanowić uzupełnienie tej luki.

W części pracy związanej z zastosowaniem procedur oraz z analizami porównawczymi stosowano metody symulacyjne przy wykorzystaniu oprogramowania MATLAB firmy Mathworks, wersja R2012a i R2014a.

Autorka pragnie serdecznie podziękować Panu Profesorowi zw. dr. hab. Czesławowi Domańskiemu za życzliwość i wsparcie oraz Recenzentowi – Panu Profesorowi dr. hab. Grzegorzowi Kończakowi za cenne uwagi i sugestie zawarte w recenzji, które wpłynęły z pewnością na poprawę jakości publikacji.

## Rozdział 1

# Estymacja nieparametryczna funkcji gęstości

### 1.1. Uwagi wstępne

Termin „statystyka parametryczna” bezpośrednio i jednoznacznie wskazuje na procedury związane z charakterystyką (parametrem) populacji, które stosowane są na podstawie dostępnych danych, na przykład eksperymentalnych. Parametr może być rozumiany w dwojaki sposób: jako niesprecyzowana stała występująca w rodzinie rozkładów zmiennej losowej lub też, wykorzystując określenie w szerszym sensie, parametr może oznaczać prawie wszystkie metody opisu zmiennej losowej w określonej rodzinie rozkładu (Gibbons, Chakraborti, 2003). Uwzględniając powyższe określenie statystyki parametrycznej, statystyka nieparametryczna rozumiana może być jako zbiór procedur, albo ściśle nieparametrycznego rodzaju (na przykład test nieparametryczny oznaczający weryfikację hipotezy, która nie dotyczy wartości parametru), lub też procedury stanowiące analogię do klasycznego (parametrycznego, uwzględniającego arbitralne założenie postaci badanych funkcji) podejścia, gdzie określone założenia dotyczące rozkładu są zastąpione przez założenia o bardziej ogólnym charakterze niż w przypadku podejścia klasycznego. Mimo że procedury parametryczne charakteryzowane są prostotą teoretyczną i obliczeniową oraz powszechną znajomością i dostępnością w literaturze, nie są one wystarczalne w wielu sytuacjach badawczych.

Procedury nieparametryczne są procedurami uniwersalnymi (Domański, 1979, 1990), w związku z czym mogą one być stosowane odnośnie do różnorodnych zagadnień poświęconych analizom populacji. Są wykorzystywane w celu identyfikacji rozkładu populacji, jak również służą do opracowania wniosków związanych ze szczegółową charakterystyką zmiennej losowej w populacji. Ich uniwersalność ma również odzwierciedlenie w możliwości stosowania procedur nieparametrycznych bez konieczności przyjmowania konkretnych założeń o populacjach, z których otrzymujemy dane rzeczywiste, co jest sytuacją wymuszoną w praktyce, gdy brak jest informacji wstępnej o rozkładzie badanej populacji lub istnieje duże ryzyko związane z przyjęciem założenia dotyczącego rozkładu

(Domański i in., 1998). W wielu przypadkach są one z jednej strony łatwiejsze do implementacji, a z drugiej charakteryzują się jedynie nieznacznie mniejszą skutecznością niż procedury parametryczne. Należy jednak podkreślić, że w wielu przypadkach procedury nieparametryczne, chociaż koncepcyjnie proste oraz przejrzyste w zakresie interpretacji, wymuszają konieczność zastosowania odpowiedniej techniki komputerowej, co stanowiło wyraźną barierę zarówno w badaniach teoretycznych, jak i aplikacyjnych.

Określenie „nieparametryczne metody statystyczne” zostało wprowadzone do terminologii statystycznej przez Wolfowitza w 1942 roku (Wolfowitz, 1942) i związane było z koniecznością rozszerzenia stosowalności metod statystycznych ponad zwyczajowo wówczas wykorzystywane metody parametryczne.

Należy zauważyć, że propozycje teoretyczne dotyczące metod nieparametrycznych oraz próby aplikacji pojawiały się już na początku XVIII wieku. John Arbuthnot, w pracy wykorzystującej ewidencję chrztów dzieci w Londynie w latach 1629–1710, z podziałem na płeć (Arbuthnot, 1710), analizował źródło zaobserwowanych regularności i upatrywał je w opatrności boskiej (Ostasiewicz, 2012). Jednocześnie była to pierwsza próba zastosowania testu znaków, co przez niektórych statystyków (Noether, 1984; Domański, 1986) traktowane jest również jako prezentacja pierwszego testu statystycznego weryfikującego hipotezy statystyczne. Idea „wszechobecnego bóstwa”, zapewniającego określone wartości średniej statystycznej, jest utożsamiana z podwalinami rozwoju osiemnastowiecznej statystyki.

Jednak to prace z początku XX wieku są traktowane jako właściwe początki dziedziny znanej jako statystyka nieparametryczna, w szczególności prace Pearsona (1900, 1911) dotyczące zgodności rozkładów, praca Hotellinga i Pabsty z 1936 roku dotycząca korelacji rang (Hotelling, Pabst, 1936) oraz praca Wilcoxon (1945) poświęcona testom Wilcoxon dla jednej i dwóch prób.

Akceptacja terminologii wprowadzonej przez Wolfowitza dotycząca statystyki nieparametrycznej nie była powszechna. Działo się to pomimo tego, że Wolfowitz, obok konieczności prowadzenia badań w tym nowym wówczas obszarze statystyki, prezentował również próbę zastosowania zasady ilorazu wiarygodności w przypadku nieparametrycznym, którą Neyman i Pearson zaproponowali już 10 lat wcześniej dla przypadku parametrycznego. W latach 40. XX wieku jedynie nieliczni statystycy z Uniwersytetu Columbia oraz Uniwersytetu Princeton wykorzystywali to określenie w publikacjach w „Annals of Mathematical Statistics”. Natomiast w „Journal of the American Statistical Associations” po raz pierwszy termin nieparametryczny pojawił się dopiero w 1949 roku.

Praca Scheffego (1943) jest próbą nie tylko przedstawienia teoretycznych podstaw do rozwoju statystyki nieparametrycznej, ale przede wszystkim jest pierwszą publikacją prezentującą w kompletny sposób istniejące dotychczas nieparametryczne metody statystyczne, w tym nieparametryczne metody weryfikacji hipotez statystycznych (testy zgodności, testy losowości, testy dla dwóch prób, testy niezależności i testy analizy wariancji). Praca ta jest traktowana jako pionierska

w zakresie zdefiniowana estymacji nieparametrycznej, uwypuklając potencjalne problemy związane z terminologią. Scheffè, w celu uniknięcia niejednoznaczności związanej z nazewnictwem, proponuje  $\theta$  (będące parametrem rozkładu) nie nazywać parametrem, lecz jedynie liczbą rzeczywistą określoną przez rozkład. W zagadnieniach związanych z estymacją punktową wskazana została jedynie równoważność estymatorów parametrycznych i nieparametrycznych w zakresie nieobciążoności i zgodności. Problemy estymacji przedziałowej przedstawione w równie wąskim zakresie związane były jedynie z przedziałami ufności dla mediany, dla różnicy dwóch median oraz przedziałami ufności dla nieznannej dystrybuanty.

Pierwsze próby estymacji charakterystyk funkcyjnych zostały sformalizowane i przedstawione w pracy Walda i Wolfowitza (1939), a dotyczyły one obszaru ufności dla dystrybuanty.

Rozwój metod nieparametrycznych w ostatnich czterdziestu latach jest ściśle związany z rozwojem technik obliczeniowych. Zwiększenie mocy obliczeniowej współczesnych komputerów umożliwiło szybki rozwój metod nieparametrycznych, w tym zwiększenie liczby propozycji modyfikacji, mających na celu poprawę efektywności rozważanych metod.

Procedury nieparametryczne dotyczące charakterystyk funkcyjnych zmienionych losowych, na przykład estymacja funkcji gęstości, uwzględniają fakt, że zbiór funkcji określonych na zbiorze liczb rzeczywistych  $R$  jest nieporównywalnie liczniejszy od  $R$  niż w przypadku na przykład estymacji liczby rzeczywistej lub wektora (Gajek, Kałuska, 1996). Może zatem wystąpić sytuacja, że nawet po zawężeniu klasy możliwych funkcji gęstości do zbioru funkcji  $i$ -krotnie różniczkowalnych ( $i \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}$  oznacza zbiór liczb naturalnych), nie istnieje estymator nieobciążony funkcji.

Podójście nieparametryczne w estymacji charakterystyk funkcyjnych zmiennej losowej umożliwia przyjęcie zdecydowanie słabszych założeń dotyczących postaci funkcyjnej charakterystyki podlegającej estymacji w porównaniu z przyjmowanymi założeniami w metodach parametrycznych. W podejściu parametrycznym wymagane jest przyjęcie założenia, że znana jest rodzina funkcji gęstości, z której pochodzą obserwacje, na przykład w estymacji funkcji gęstości model parametryczny zakłada, że funkcja gęstości jest znana co do skończonej liczby parametrów. Istnienie informacji wstępnej (określane jako „boskie spostrzeżenie”) o postaci funkcyjnej charakterystyki podlegającej estymacji powinno być wykorzystane i wówczas zastosowanie procedur parametrycznych traktowane jest jako wskazane. Gdy natomiast takich informacji wstępnych brak i założenie związane z badaną charakterystyką funkcyjną oparte jest jedynie na niedostatecznych przesłankach lub brak jest takich przesłanek, procedura estymacji parametrycznej może prowadzić do nieprawidłowych wyników dotyczących charakterystyk funkcyjnych podlegających wnioskowaniu. Opierając estymację na założeniu, że funkcja gęstości jest określonym elementem ze znanej rodziny parametrycznej, badacz

musi brać pod uwagę możliwość błędnej specyfikacji modelu, co może oznaczać, że model nie jest zgodny z populacją, z której dane zostały pobrane. W szczególności gdy przyjmowane jest założenie o normalności, w rzeczywistości narzucona jest grupa całkiem restrykcyjnych założeń, na przykład dotyczących symetryczności, jednomodalności, określonej monotoniczności poza wartością modalną. Jeśli rzeczywista funkcja gęstości jest asymetryczna lub posiada wiele wartości modalnych, wówczas założenie o normalności może prowadzić do niewłaściwej charakterystyki funkcji gęstości i może skutkować fałszywymi wynikami estymacji oraz błędnym wnioskowaniem. Oczywiście możliwe jest postępowanie polegające na testowaniu, czy zakładany rozkład jest zgodny z rzeczywistością. Ale odrzucenie założenia dotyczącego rozkładu, niestety, nie skutkuje określeniem rozkładu alternatywnego, na przykład odrzucenie hipotezy o normalności sprawia, że badacz nie otrzymuje informacji o innym możliwym rozkładzie, zmuszony jest wrócić do punktu wyjścia.

Podejście nieparametryczne oznacza uniknięcie problemów związanych z koniecznością specyfikacji parametrycznej postaci funkcyjnej przed dokonaniem procedur estymacyjnych. Przyjmowane są jedynie założenia, że spełnione są pewne warunki regularności, takie jak gładkość i różniczkowalność. A to są zdecydowanie słabsze założenia dotyczące struktury postaci funkcyjnej funkcji gęstości niż w przypadku metod parametrycznych. Na przykład, w estymacji rozkładu dochodów zamiast przyjmowania założenia, że funkcja gęstości należy do rodziny rozkładów normalnych lub lognormalnych, przyjmuje się jedynie założenie, że funkcja gęstości jest dwukrotnie lub trzykrotnie różniczkowalna. Przyjęcie słabszych założeń dotyczących struktury postaci funkcyjnej gęstości, niestety, powoduje konieczność posiadania większej liczby danych by otrzymać ten sam stopień dokładności, co właściwie wyspecyfikowany model parametryczny. Podejście nieparametryczne może oznaczać zatem konieczność zwiększenia liczby obserwacji w procedurach nieparametrycznych, by osiągnąć taki sam poziom precyzji, jak odnośnie do dobrze wyspecyfikowanego modelu parametrycznego. Z drugiej jednak strony podejście nieparametryczne pozwala na większą elastyczność w stosowaniu procedur statystycznych, ponieważ wymagane jest jedynie założenie, że nieznaną funkcję gęstości należy do pewnego nieskończonego zbioru krzywych.

Nieparametryczna estymacja funkcji gęstości w wielu przypadkach traktowana jest jako wstępny etap w analizie lub też jako analiza dotycząca dokładnie określonej charakterystyki funkcyjnej zmiennej losowej.

Hansen (2009) określa podejście parametryczne jako podejście o skończonej wymiarowości, podczas gdy podejście nieparametryczne to podejście o nieskończonej wymiarowości.

Zasadnicza różnica związana z procedurami estymacji dotyczy szybkości zbieżności. Podczas gdy w podejściu parametrycznym, właściwie wyspecyfikowanym, dla liczebności próby  $n$ , szybkość zbieżności jest rzędu  $n^{-1/2}$ , to w przypadku podejścia nieparametrycznego tempo to jest wolniejsze niż  $n^{-1/2}$ . Przy czym, w odróż-

nieniu od parametrycznego podejścia, tempo zbieżności jest zazwyczaj odwrotnie proporcjonalne do liczby zmiennych, co jest znane w literaturze jako „przekleństwo wymiarowości”. Jest ono traktowane jako jedno z najważniejszych utrudnień pojawiających się w procedurach nieparametrycznych (Stone, 1994; Pagan, Ullah, 1999). Stosowanie prawie każdej procedury statystycznej jest powiązane, mniej lub bardziej, z przekleństwem wymiarowości, w podejściu nieparametrycznym oznacza ono jednak konieczność stosowania bardzo dużych prób w celu zapewnienia dokładności na odpowiednim poziomie. Metody nieparametryczne są zatem zalecane szczególnie wtedy, gdy liczba zmiennych jest mała, natomiast zbiór danych duży (Silverman, 1986). Stosownie metod nieparametrycznych oznacza konieczność rozważenia odpowiednio dużej liczebności próby w porównaniu z liczbą zmiennych.

Ponadto w podejściu parametrycznym nie istnieje rozróżnienie między prawdziwym modelem występującym w rzeczywistości a modelem wykorzystywanym w procedurze estymacji, natomiast w podejściu nieparametrycznym taka różnica między modelami istnieje.

Metody nieparametryczne powodują wyższy stopień skomplikowania modelu dopasowywanego w zależności od próby. Im więcej informacji w próbie (co może oznaczać większą liczebność próby), tym większy stopień złożoności modelu. Wymaga to odrębnych twierdzeń dotyczących rozkładów.

W podejściu nieparametrycznym modele dopasowywane są traktowane jako aproksymacje i dlatego też są z góry skazane na błędną specyfikację, a to implikuje obciążenie estymatora. Zazwyczaj wzrost złożoności dopasowywanego modelu powoduje zmniejszenie obciążenia, ale oznacza jednocześnie wzrost wariancji estymacji. Stosowanie metod nieparametrycznych oznacza zatem konieczność uwzględniania tego kompromisu, co powoduje ustalenie takiego stopnia złożoności modelu, by zminimalizować ogólne miary dopasowania, na przykład błąd średniokwadratowy ( $MSE$ ).

Nieparametryczne procedury mogą dotyczyć, między innymi, funkcji gęstości (jednowymiarowej i wielowymiarowej), pochodnych funkcji gęstości, warunkowych funkcji gęstości, dystrybuanty, funkcji regresji, parametrów położenia, w tym mediany i kwantyli, parametrów skali, w tym wariancji. Nieparametryczna estymacja charakterystyk funkcyjnych może być głównym celem podjętych badań, ale może również stanowić punkt wyjściowy będący warunkiem, którego spełnienie umożliwi dalsze drugoetapowe zagadnienia estymacji lub weryfikacji hipotez statystycznych. Jeżeli problem rozważany w drugim etapie dotyczy parametrów (skończonego wymiaru), wówczas estymacja traktowana jest jako semi-parametryczna. Badacz nie specyfikuje postaci funkcyjnej dla pewnych zakresów danych, ale dla niektórych zakresów założenia parametryczne są konieczne.

Nieparametryczne metody obejmują pewien rodzaj aproksymacji oraz metody wygładzania (jądrowe, szeregów, splajnów). Nieparametryczne metody są indeksowane poprzez parametr wygładzania (parametr dostrajania), który określa

stopień złożoności. Wybór tego parametru wygładzania jest najczęściej zagadnieniem kluczowym w zastosowaniach metod w praktyce. Oznacza to, że metody określania parametru wygładzania oparte na danych są traktowane jako istotne w nieparametrycznych metodach. Natomiast konieczność ich określenia jest często uważana za wadę metod nieparametrycznych. Metody nieparametryczne, które wymagają parametru wygładzania, ale nie mają określonej zależności od danych reguły wyboru parametru wygładzania, są traktowane jako niekompletne (Hansen, 2009). Niestety, takie podejście występuje dość często, co jest związane z trudnościami w rozwijaniu szczegółowych zasad i reguł wyboru parametru wygładzania. Jest to pewien kompromis, gdyż parametr wygładzania jest wybierany w oparciu o odpowiedni problem statystyczny.

Funkcja gęstości jest jedną z podstawowych charakterystyk funkcyjnych zmiennej losowej. Warto pokreślić zarówno jej znaczenie teoretyczne, jak i wykorzystanie do praktycznych obliczeń i ilustracji wyników wieloaspektowych analiz (Kulczycki, 2005). Funkcja gęstości jest stosowana między innymi do wyznaczenia prawdopodobieństwa, że zmienna losowa przyjmuje wartość z ustalonego zbioru, natomiast jej prezentacja graficzna stanowi wygodne i intuicyjne narzędzie wstępnej analizy danych. W modelowaniu statystycznym funkcja gęstości stanowi opis schematu losowej zmienności danych, które nie są wyjaśnione przez inne strukturalne charakterystyki w modelu (Bowman, Azzalini, 2004). W praktycznych zagadnieniach funkcja gęstości najczęściej nie jest znana i musi być oszacowana na podstawie danych pochodzących z próby.

Estymacja funkcji gęstości umożliwi wyjaśnienie i ocenę, czy potencjalny model jest dopasowany do danych rzeczywistych. Pagan i Ullah (1999) zwracają uwagę na znaczenie estymatora funkcji gęstości w analizach Monte Carlo dotyczących estymatorów podlegających analizie. Nieparametryczny estymator funkcji gęstości dostarcza całościowy obraz rozkładu estymatora i dlatego jest stosowany jako wygodna forma prezentacji wyników eksperymentów Monte Carlo. Przykładowo, estymator funkcji gęstości jest konieczny, gdy parametryczny estymator ma rozkład asymptotyczny, który zależy od gęstości szacowanej w określonym punkcie.

Estymacja funkcji gęstości może być wykorzystywana jako zasadniczy i podstawowy etap w analizie danych, o ile celem analizy statystycznej jest otrzymanie, na przykład, dogodnej formy prezentacji struktury danych. Może to być związane z analizą wartości modalnych, co prowadzi do wskazania odmiennych aspektów rozważanego zagadnienia, a następnie umożliwia dekompozycję przedmiotową. Analiza ogonów estymatora funkcji gęstości, rozważanych, na przykład, w procesach produkcyjnych, gdzie „lekki” ogon wskazuje na zwykły rozrzut technologiczny, „ciężki” ogon – na zużycie sprzętu i konieczność wymiany konkretnych podzespołów (Kulczycki, 2005), również ma znaczenie praktyczne. W przypadku zmiennej losowej wielowymiarowej estymator jądrowy wielowymiarowej funkcji gęstości umożliwia analizę struktury danych w zakresie zależności między poszczególnymi współzrędnymi tej zmiennej.

Estymacja nieparametryczna funkcji gęstości może być również wykorzystywana w procedurach analizy dyskryminacyjnej, systemach uczących się, klasyfikacji danych, analizie skupień, w estymacji funkcjonałów gęstości (na przykład funkcji hazardu).

Nieparametrycznymi estymatorami funkcji gęstości są, między innymi, histogram, estymator najbliższego sąsiedztwa, estymator oparty na rozwinięciu funkcji gęstości w szereg Fouriera, estymator wykorzystujący funkcje sklepane (splajny) oraz teorię falek, estymator oparty na szeregach ortogonalnych, estymator rzutu, estymator oparty na największej wiarogodności z karą za nadmierne dopasowanie do próby oraz estymator jądrowy. Odrębną procedurą nieparametrycznej estymacji funkcji gęstości jest procedura polegająca na przyjęciu za estymator nieznanej funkcji gęstości jednej z funkcji należących do zbioru 12 funkcji Pearsona, wykorzystując niektóre charakterystyki liczbowe wyznaczone w oparciu o próbę. Metoda ta omówiona jest szeroko w pracy Domańskiego i in. (1998).

Podejście nieparametryczne w estymacji funkcji gęstości stanowi wygodne narzędzie w badaniach rozkładów płac i dochodów (Kot, 2008). Nieparametryczna analiza polaryzacji ekonomicznej, rozumianej jako zanik klasy średniej, obejmuje obserwacje zmian w czasie kształtu funkcji gęstości rozkładów dochodów, w szczególności wykrywanie bimodalności czy wielomodalności. W pracy Kota przedstawione są, między innymi, rozkłady dochodów za pomocą empirycznych funkcji gęstości, na przykład histogramów. W tym przypadku opis polaryzacji ekonomicznej sprowadza się do oszacowania empirycznych funkcji gęstości, rozpiętych na trzech klasach dochodowych, osobno dla każdego momentu czasu. Kot zwraca jednak uwagę na problemy związane z ustaleniem granic trzech klas dochodowych (mogą to być ustalone arbitralnie granica ubóstwa oraz granica bogactwa), jak również na problemy związane z ustaleniem, czy te granice powinny być stałe czy zmienne w różnych okresach czasu.

Niech  $f = f(x)$  oznacza ciągłą funkcję gęstości zmiennej losowej  $X$ , z którą utożsamiana jest badana populacja, natomiast  $F(x)$  jej dystrybuantę. Ponadto, niech  $x_1, x_2, \dots, x_n$  będzie ciągiem obserwacji pobranych z populacji, czyli wartościami próby losowej  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Estymatorem dystrybuanty rozkładu prawdopodobieństwa  $F(x)$  jest dystrybuanta empiryczna postaci:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } X_{1:n} > x, \\ \frac{s}{n} & \text{dla } X_{s:n} \leq x < X_{(s+1):n}, \\ 1 & \text{dla } X_{n:n} \leq x, \end{cases} \quad (1.1)$$

gdzie  $X_{s:n}$  jest wartością  $s$ -tej statystyki pozycyjnej określoną dla próby losowej  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Oznacza to, że  $X_{s:n}$  jest  $s$ -tym elementem próby uporządkowanej od

wartości najmniejszej do największej. W literaturze występują inne zapisy dystrybuanty empirycznej, między innymi (Koronacki, Ćwik, 2005):

$$\hat{F}(x) = \frac{\text{card}\{i: X_i \leq x\}}{n}, \quad (1.2)$$

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x), \quad (1.3)$$

$$\hat{F}(x) = \frac{K_n(-\infty, x]}{n}, \quad (1.4)$$

gdzie  $\text{card}\{i: a < X_i \leq b\} = K_n(a, b]$  oznacza liczbę elementów próby, których realizacje znalazły się w przedziale  $(a, b]$ , dla  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , natomiast  $I(A)$  przyjmuje wartość 1 gdy spełniony jest warunek  $A$ , a wartość 0 w przeciwnym przypadku.

Estymator dystrybuanty zmiennej losowej nie jest wykorzystywany w praktyce ze względu na jego wady, w szczególności monotoniczność, powodującą ograniczone wykrywanie podstawowych cech zmiennej losowej oraz ze względu na problemy estymacji w przypadku wielowymiarowej zmiennej losowej.

Jedno z podejść estymacji wykorzystujące dystrybuantę empiryczną polega na zastosowaniu jej dyskretnej pochodnej.

Niech estymator gęstości w ustalonym punkcie  $x$  ma postać  $\hat{f}(x) = \frac{\hat{F}(x+h) - \hat{F}(x-h)}{2h}$  dla pewnych małych wartości  $h > 0$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n I(x-h < X_i \leq x+h) = \\ &= \frac{1}{2nh} \sum_{i=1}^n I\left(\left|\frac{X_i - x}{h}\right| \leq 1\right) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - x}{h}\right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

gdzie 
$$K(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } |u| \leq 1, \\ 0 & \text{dla } |u| > 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

jest funkcją gęstości rozkładu jednostajnego na przedziale  $[-1, 1]$ .

Estymator funkcji gęstości określony przez (1.5) jest szczególnym przypadkiem jądrowego estymatora funkcji gęstości.

Jedną z najstarszych metod estymacji funkcji gęstości jest histogram, stosowany w uproszczonej postaci już przez starożytnych Greków w V wieku przed naszą erą, jak opisuje to historyk Tukidydes (Müller, Petersen, 2016). Prace Pearsona (1895) i Sturgesa (1926) traktowane są jako fundamentalne w zakresie konstrukcji histogramu, natomiast twierdzenia dotyczące rozkładu asymptotycznego dla histogramu są przedstawione, między innymi, w pracy Van Ryzina i Bocka (1980). Mimo wad histogramu, do których zalicza się przede wszystkim brak ciągłości oraz problemy związane z wyborem szerokości klas, histogram jest często stosowany w praktyce, szczególnie na wstępnych etapach analizy danych.

Histogram definiowany jest w następujący sposób (por. Gajek, Kałużska, 1996; Sainudiin, Lee, 2011):

$$\hat{f}_H(x) = \frac{1}{nh_H} \sum_{i=1}^n I(x_i \in B(x)), \quad (1.7)$$

gdzie  $x_1, x_2, \dots, x_n$  są wartościami  $n$ -elementowej próby losowej z populacji o funkcji gęstości  $f$ ,  $B(x)$  jest klasą zawierającą  $x$ , należąca do zbioru klas  $\{B_1, \dots, B_m\}$ , każda o szerokości  $h_H$ .

W praktyce wybór szerokości klasy  $h_H$  oznacza zastosowanie na wstępnym etapie tak zwanych zasad wyboru szerokości klasy, a następnie na stosowaniu w konstrukcji histogramu odpowiednio zmodyfikowanych wartości  $h_H$ , pamiętając, że gdy szerokość klasy jest zbyt mała, klasy w histogramie mogą być puste lub zawierać mogą jedynie pojedyncze obserwacje, co oznaczać będzie otrzymanie estymatora funkcji gęstości niedostatecznie wygładzonego. Gdy szerokość klasy jest zbyt duża, histogram będzie estymatorem nadmiernie wygładzonym, prowadząc do utraty wielu szczegółów dotyczących rozkładu.

Najczęściej w praktyce stosowane są następujące zasady wyboru szerokości klas  $h_H$  (por. Scott, 2015):

1) zasada Sturgesa:

$$h_{H,St} = \frac{x_{n:n} - x_{1:n}}{[1 + \log_2 n]}, \quad (1.8)$$

gdzie  $[a] = \min\{z \in Z: z \geq a\}$  i  $Z$  jest zbiorem liczb całkowitych.

2) zasada Scotta odwołania do rozkładu normalnego:

$$h_{H,Sc} = 3,5 \hat{\sigma} n^{-\frac{1}{3}}, \quad (1.9)$$

gdzie  $\hat{\sigma}$  jest oszacowaniem odchylenia standardowego wyznaczonym na podstawie wartości próby losowej.

3) zasada Freedmana-Diaconisa:

$$h_{H,FD} = 2(\hat{q}_{0,75} - \hat{q}_{0,25})n^{-\frac{1}{3}}, \quad (1.10)$$

gdzie  $\hat{q}_p$  jest oszacowaniem kwantyla rzędu  $p$  wyznaczonym na podstawie próby  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Podstawą zasady Scotta jest taki wybór szerokości klasy  $h$ , by określona miara będąca miarą przeciętnego dopasowania estymatora do estymowanej funkcji, na przykład scałkowany błąd średniokwadratowy, była najmniejsza niezależnie od estymowanej gęstości. Dla dużych liczebności prób w klasie funkcji gęstości, składających się z funkcji całkowalnych w kwadracie, oraz dla których ich pierwsze pochodne również są całkowalne w kwadracie, szerokość przedziału minimalizująca błąd średniokwadratowy jest następująca:

$$h_0 \approx \sqrt[3]{\frac{6}{n \int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)]^2 dx}} = \frac{c}{\sqrt[3]{n}},$$

gdzie

$$c = \sqrt[3]{\frac{6}{\int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)]^2 dx}}.$$

Stała  $c$  zależy od nieznannej funkcji gęstości poprzez wyrażenie  $\int_{-\infty}^{+\infty} [f'(x)]^2 dx$ .

Przyjmując założenie, że  $f$  jest funkcją gęstości rozkładu normalnego o wariancji  $\sigma^2$ , stała  $c$  przyjmuje wartość  $2\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{\pi}\sigma \approx 3,486\sigma$ , gdzie  $\sigma$  może być estymowane na podstawie próby. Co prowadzi bezpośrednio do zasady Scotta (1.9). Założenie, że nieznaną funkcją gęstości jest funkcją gęstości rozkładu normalnego, nie ogranicza w dużym stopniu stosowalności tego wyrażenia do wyznaczenia szerokości przedziału histogramu. Nawet dla rozkładów populacji istotnie różniących się od rozkładu normalnego metoda ta daje dobre wyniki (Gajek, Kałuska, 1996).

Prostota zasad wyboru szerokości klasy powoduje, że są to metody zalecane już na etapie wstępnej obróbki danych jako skuteczne narzędzie, ale jedynie jako narzędzie ilustracyjne lub stanowiące punkt startowy.

Modyfikacja histogramu uwzględniająca likwidację podstawowych jego wad stała się punktem wyjścia do konstrukcji metod jądrowych estymacji funkcji gęstości.

Prawdopodobieństwo znalezienia się realizacji zmiennej losowej w dowolnym przedziale  $(a, b]$  może być oszacowane w następujący sposób:

$$P(a < X_i \leq b) = \int_a^b f(t) dt \cong \hat{F}(b) - \hat{F}(a) = \frac{K_n(a, b]}{n}. \quad (1.11)$$

Z twierdzenia o wartości średniej wynika, że dla ciągłej funkcji rzeczywistej  $f$  zmiennej rzeczywistej oraz dla  $-\infty < a < b < +\infty$  można określić taki punkt  $x \in (a, b)$ , że:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt. \quad (1.12)$$

Oznacza to, że dla małych długości przedziału  $(a, b)$  powyższa własność jest prawdziwa w przybliżeniu dla każdego punktu  $x$  z tego przedziału, a to daje:

$$f(x) \cong \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \cong \frac{1}{n(b-a)} K_n(a, b]. \quad (1.13)$$

Przybliżenie powyższe prowadzi do konstrukcji histogramu z przedziałem o szerokości  $h > 0$ , będącego funkcją argumentu  $x \in \mathbb{R}$ , przedziałami stałą i lewostronnie ciągłą o postaci:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} K_n(x_i(n), x_{i+1}(n)] = \frac{1}{h} [\hat{F}(x_{i+1}(n)) - \hat{F}(x_i(n))] \quad (1.14)$$

dla  $x \in (x_i(n), x_{i+1}(n)]$ ,

gdzie  $x_i(n)$ ,  $i = \pm 1, \pm 2, \dots$ , są punktami, takimi że  $\dots < x_{-1}(n) < x_0(n) < x_1(n) < \dots$  i tworzą one ustalony podwójnie nieskończony ciąg równoodległych punktów na prostej  $\mathbb{R}$ .

Modyfikacja histogramu może być traktowana jako wyznaczenie krzywej częstości łączącej środki odcinków histogramu. Możliwe jest również podejście polegające na przesuwaniu histogramu. Można zauważyć, że estymacja ciągłej nieznannej funkcji gęstości jest akceptowalna w środkach odcinków  $(x_i(n), x_{i+1}(n)]$  dla  $i = \pm 1, \pm 2, \dots$ , natomiast na krańcach odcinków estymacja ta jest zdecydowanie gorsza. W przesuniętym histogramie punkt  $x$ , gdzie dokonywana jest estymacja gęstości, jest środkiem odcinka histogramu. Następnie dokonywane jest zliczanie

obserwacji  $X_i$ , których realizacje znalazły się w otoczeniu punktu  $x$ . Prowadzi to do estymatora funkcji gęstości danego wzorem:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} K_n \left( x - \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{h} \left[ \hat{F} \left( x + \frac{h}{2} \right) - \hat{F} \left( x - \frac{h}{2} \right) \right]. \quad (1.15)$$

Co można zapisać jako:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K \left( \frac{x - X_i}{h} \right), \quad (1.16)$$

gdzie  $K(u)$  jest funkcją gęstości o postaci:

$$K(u) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |u| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{dla } |u| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Estymator (1.16) jest nieujemny dla każdej wartości  $x$  oraz  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) dx = 1$ , co wynika bezpośrednio z faktu, że funkcja  $K(u)$  jest funkcją gęstości. Nieciągłość funkcji  $\hat{f}(x)$  jest spowodowana tym, że jest to suma  $n$  funkcji nieciągłych  $K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$  argumentu  $x$ .

Estymator powyższy nazywany jest jednostajnym estymatorem jądrowym, estymatorem naiwnym lub adaptacyjnym.

## 1.2. Estymacja jądrowa funkcji gęstości

Metody estymacji jądrowej jako jedne z najbardziej znanych i efektywnych metod wygładzania charakteryzują się nie tylko prostotą konstrukcji, co powoduje, że metody te są stosunkowo łatwe do stosowania i interpretacji, ale również tym, że estymatory jądrowe posiadają wiele ważnych statystycznych własności.

Jądrowy estymator funkcji gęstości jest jednym z częściej stosowanych nieparametrycznych estymatorów funkcji gęstości. Analogicznie jak w przypadku innych metod jądrowych, estymacja jądrowa funkcji gęstości jest popularnym i wygod-

nym narzędziem w analizach empirycznych w wielu obszarach badawczych. Jądrowy estymator funkcji gęstości znajduje zastosowanie, na przykład, w naukach ekonomicznych w modelowaniu probabilistycznej oraz stochastycznej struktury danych. Jest wykorzystywany w badaniach rozkładów płac i dochodów (Kot, 2008), w analizach rozkładów stóp zwrotu z inwestycji na rynku kapitałowym (Czyżycki, 2013) oraz rozważaniach dotyczących innych wielkości ekonomicznych (Zambom, Dias, 2012), w naukach technicznych, w tym w analizach dotyczących niepewności procesu technologicznego (Kulczycki, 2005), jak również w procedurach, gdzie jądro estymator funkcji gęstości stanowi odrębny etap, często jeden z wielu, w konstrukcji określonych metod statystycznych, w tym w metodach generowania danych (Krzyśko i in., 2008; Kończak, 2013; Chmieleńska, 2014). Estymator jądro estymator funkcji gęstości może być również wykorzystywany w procedurach weryfikacji hipotez statystycznych; zastosowanie metody jądro estymator w weryfikacji hipotez jest przedstawione na przykład w pracach Śliwickiego (2012) oraz Domańskiego i in. (2014).

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będzie próbą prostą  $n$ -elementową pobraną z populacji o rozkładzie z nieznaną funkcją gęstości  $f$ . O funkcji gęstości  $f$  zakłada się, że spełnione są określone założenia dotyczące gładkości, najczęściej jest to przynajmniej dwukrotna różniczkowalność nieznannej funkcji gęstości  $f$ , co zapewnia dobre własności estymatorów jądro estymator funkcji gęstości (Zinde-Walsh, 2005).

Estymator jądro estymator funkcji gęstości uzależniony jest od czterech parametrów metody jądro estymator: liczebności próby  $n$ , funkcji wagowej zwanej funkcją jądra, parametru wygładzania (zwanego również szerokością pasma, szerokością okna, współczynnikiem gładkości lub współczynnikiem wygładzającym) decydującym o stopniu wygładzenia estymatora oraz od rzędu funkcji jądra, określonym jako zakładana z góry liczba pochodnych funkcji gęstości. Liczebność próby w wielu sytuacjach badawczych jest parametrem niepodlegającym zmianom. Stąd wybór odpowiedniej funkcji jądra i odpowiedniego parametru wygładzania stanowi o efektywności procedury estymacyjnej funkcji gęstości. Zmiana parametrów metody jądro estymator oznacza zmianę atrybutów i własności estymatora gęstości, dlatego też znalezienie optymalnych parametrów estymacji jądro estymator jest istotnym zagadnieniem w procesie konstrukcji dobrego estymatora funkcji gęstości. Zarówno wybór funkcji jądra, jak i parametru wygładzania są przedmiotem rozważań w następujących rozdziałach.

Klasa estymatorów jądro estymator jest określona w następujący sposób (Müller, 1984):

$$\hat{f}_{v,n}(x) = \frac{1}{nh^{v+1}} \sum_{i=1}^n W_{v,k} \left( \frac{x - X_i}{h} \right), \quad (1.17)$$

gdzie  $h$  jest parametrem wygładzania, spełniającym warunki:  $h = h(n) > 0$ ,  $h \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  oraz  $nh \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ; natomiast  $v \geq 0$  i  $k > v + 1$  są liczbami całkowitymi jednocześnie parzystymi lub nieparzystymi.

Funkcja wagowa  $W_{v,k}$  spełnia następujący warunek:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^j W_{v,k}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq j \leq k-1, j \neq v, \\ (-1)^v v! & \text{dla } j = v, \\ \kappa_k & \text{dla } j = k, \end{cases} \quad (1.18)$$

gdzie  $\kappa_k \neq 0$ .

Podstawową charakterystyką funkcji wagowej (1.18), zwanej funkcją jądra (w nawiązaniu do pojęcia jądra operatora całkowego), jest rząd  $k$  funkcji jądra, który jest związany zarówno z liczbą zerowych momentów funkcji jądra, jak również z liczbą istniejących pochodnych krzywej podlegającej estymacji. Dlatego też warunek (1.18) zwany jest również warunkiem dla momentów funkcji jądra.

Szczególnym przypadkiem estymatora (1.17) dla  $W_{v,k} = K^{(v)}$  jest jądrowy estymator  $v$ -tej pochodnej funkcji gęstości:

$$\hat{f}_n^{(v)}(x) = \frac{1}{nh^{v+1}} \sum_{i=1}^n K^{(v)}\left(\frac{x - X_i}{h}\right). \quad (1.19)$$

Dla  $v = 0$  otrzymujemy estymator Rosenblatta-Parzena:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x - X_i), \quad (1.20)$$

gdzie:  $K_h(\cdot) = \frac{1}{h} K\left(\frac{\cdot}{h}\right)$ ,  $K(u)$  jest funkcją jądra, zaś  $h > 0$  parametrem wygładzania.

W celu uproszczenia zapisu w dalszej części pracy stosowany będzie zapis  $\hat{f}_n(x) = \hat{f}(x)$ .

Ta klasa estymatorów została po raz pierwszy przedstawiona w pracy Rosenblatta (1956), natomiast w pracy Parzena (1962) podano podstawowe własności dla uchylonego założenia o nieujemności, w celu otrzymania estymatorów bardziej efektywnych. Różne postacie funkcji jądra są szeroko zaprezentowane w pracy Domańskiego i Pruskiej (2000).

Estymator Rosenblatta-Parzena wywodzi się z metodologii konstrukcji histogramu. Podstawowa idea polega na estymacji funkcji gęstości w punkcie  $x$ , wykorzystując obserwacje z sąsiedztwa tego punktu. W odróżnieniu od budowania estymatora zgodnie z krańcami podprzedziałów jak w histogramie, estymator jądrowy naiwny rozważany w punkcie 1.1 wykorzystuje każdy punkt jako środek podprzedziału o długości  $2h$ . Własności estymatora naiwnego, takie jak ciągłość czy różniczkowalność, są przenoszone z funkcji jądra. Stąd estymator nie jest ciągły i ma zerowe pochodne z wyjątkiem punktów  $X_i \pm h$ . Brak ciągłości funkcji jądra powoduje, że estymacja funkcji może sugerować informację o wielu mak-

simach lokalnych, podczas gdy te maksima lokalne mogą być jedynie szumem, niebędącym charakterystyczną cechą prawdziwej funkcji gęstości.

Najczęściej w praktyce stosuje się funkcje jądra, które są ciągłymi, jednomodalnymi i symetrycznymi względem zera funkcjami gęstości. Z tak określoną funkcją jądra, zwaną klasyczną funkcją jądra, jądrowy nieparametryczny estymator gęstości posiada własności charakterystyczne dla funkcji gęstości i ma łatwą interpretację.

Dla nieujemnej funkcji jądra:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) dx = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 = 1, \end{aligned} \quad (1.21)$$

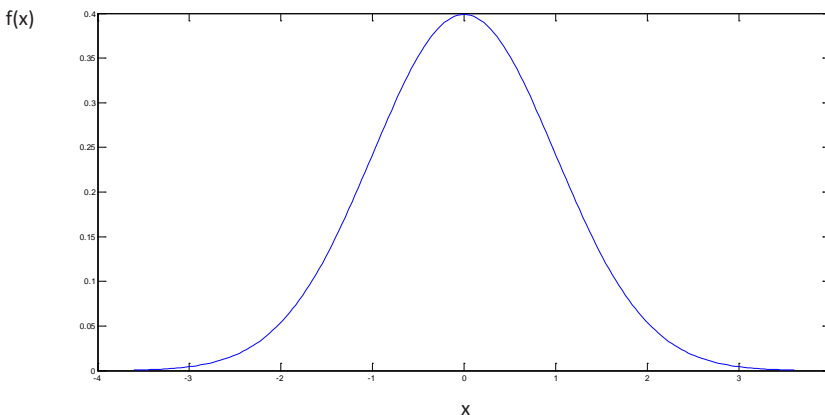
gdzie  $u = \frac{x - X_i}{h}$ .

Ponadto estymator spełnia takie same warunki różniczkowalności, jakie spełnia funkcja jądra.

Klasyczną funkcją jądra jest funkcja gęstości rozkładu normalnego standaryzowanego, zwana gaussowską lub normalną funkcją jądra, o następującej postaci:

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{u^2}{2}\right)}. \quad (1.22)$$

Wykres gaussowskiej funkcji jądra przedstawiony jest na rysunku 1.1.



**Rysunek 1.1.** Gaussowska funkcja jądra

**Źródło:** opracowanie własne.

Dla gaussowskiej funkcji jądra parametry występujące w (1.18) są następujące:  $\nu = 0$ ,  $k = 2$ ,  $\kappa = 1$ . Estymator funkcji gęstości z gaussowską funkcją jądra jest funkcją gładką i ma pochodne wszystkich rzędów.

Horová i in. (2012) wprowadzają określenie klasy  $S_{\nu,k}$ , do której należy funkcja  $K$  rzędu  $k$  o wartościach rzeczywistych.

Założmy, że funkcja  $K$  spełnia warunek  $K(-1) = K(1) = 0$ , oraz gdy nośnik tej funkcji jest  $[-1, 1]$ :

$$S_{\nu,k} = \left\{ K : K \in Lip[-1,1] \wedge \int_{-1}^1 x^j K(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq j \leq k-1, j \neq \nu, \\ (-1)^\nu \nu! & \text{dla } j = \nu, \\ \kappa_k \neq 0 & \text{dla } j = k, \end{cases} \right. \quad (1.23)$$

gdzie  $Lip[-1, 1]$  oznacza klasę funkcji spełniających dla pewnej stałej  $L > 0$  warunek:  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  dla wszystkich  $x, y \in [-1, 1]$ .

Funkcja  $K \in S_{\nu,k}$  określona jest jako funkcja jądra o rzędzie  $(\nu, k)$ .

Niech  $C^\mu[-1, 1]$  oznacza zbiór funkcji rzeczywistych na przedziale  $[-1, 1]$ ,  $\mu$ -krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły.

Funkcja jądra jest określana jako gładka, gdy  $K \in S_{\nu,k}^\mu$ , gdzie

$$S_{\nu,k}^\mu = \{K : K \in S_{\nu,k} \cap C^\mu[-1, 1] \wedge K^{(j)}(-1) = K^{(j)}(1) = 0, j = 0, \dots, \mu - 1\}. \quad (1.24)$$

Ze względu na nieograniczony nośnik gaussowskiej funkcji jądra, funkcja ta nie należy do określonej powyżej klasy.

Wybór funkcji jądra ma znacznie mniejszy wpływ na postać estymatora jądrowego funkcji gęstości niż wybór parametru wygładzania. Parametr wygładzania wpływa na stopień wygładzania i ma podobne znaczenie jak szerokość klas dla histogramu. Wzrost wartości parametru wygładzania oznacza zwiększenie zakresu stosowania funkcji jądra dla poszczególnych obserwacji z próby (dla gaussowskiej funkcji jądra poszerzenie zakresu stosowania każdej funkcji gęstości rozkładu normalnego standaryzowanego). Analogicznie jak w przypadku histogramu, zastosowanie małej wartości parametru wygładzania powoduje otrzymanie estymatora z dużą liczbą maksimum lokalnych (estymator jest „poszarpany” w stosunku do faktycznej postaci funkcji gęstości), w tym również może być rozważana sytuacja, gdzie w każdym punkcie estymator ma maksimum lokalne. Problemem jest wówczas rozstrzygnięcie czy pojawienie się kilku maksimum lokalnych oznacza wielomodalność, czy też jest „skutkiem ubocznym” zastosowania niewłaściwej wartości parametru wygładzania. W konsekwencji może oznaczać to niewłaściwy opis podstawowych charakterystyk rozważanej funkcji gęstości. Mała wartość parametru wygładzania powoduje niedostateczne wygładzenie estymatora funkcji gęstości. Duże wartości parametru wygładzania prowadzą do estymatora nadmiernie wygładzonego, w sensie estymatora zbyt obciążonego, niewykazującego

przy takim doborze parametru wygładzania podstawowych cech strukturalnych, jak na przykład wielomodalności funkcji gęstości.

Znaczenie metod wyboru parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości jest omówione w rozdziale trzecim.

Estymator funkcji gęstości  $\hat{f}(x)$ , określony wzorem (1.20), jest estymatorem zgodnym  $f(x)$  i jest zbieżny według prawdopodobieństwa, czyli  $\hat{f}(x) \rightarrow f(x)$ .

Propozycje nieobciążonych i zgodnych estymatorów jądrowych funkcji gęstości przedstawione są również w pracy Rychlika (1995), gdzie określona jest losowa reguła wyboru liczby obserwacji w estymacji jądrowej funkcji gęstości. Praca Gajka (1986) natomiast prezentuje taką procedurę modyfikacji estymatora jądrowego funkcji gęstości, który nie posiada własności funkcji gęstości, by zapewnić optymalny rząd zbieżności scałkowanego błędu średniokwadratowego.

Charakterystyki liczbowe estymatora jądrowego (1.20) funkcji gęstości są następujące:

a) pierwszy moment zwykły:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x \hat{f}(x) dx &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} (X_i + uh) K(u) du = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h \int_{-\infty}^{+\infty} u K(u) du = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \end{aligned} \tag{1.25}$$

b) drugi moment zwykły:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \hat{f}(x) dx &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{h} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) dx = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} (X_i + uh)^2 K(u) du = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i h \int_{-\infty}^{+\infty} u K(u) du + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 + h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du, \end{aligned} \tag{1.26}$$

c) drugi moment centralny:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \hat{f}(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x \hat{f}(x) dx \right)^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 + h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 = \\ &= \hat{\sigma}^2 + h^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du, \end{aligned} \tag{1.27}$$

gdzie  $\hat{\sigma}^2$  jest wariancją z próby losowej  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Wartość oczekiwana estymatora jądrowego funkcji gęstości ma postać:

$$E\left[\hat{f}(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x+hu) du, \quad (1.28)$$

ponieważ

$$E\left[\frac{1}{h}K\left(\frac{x-X_i}{h}\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{h}K\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y) dy = \begin{matrix} u = \frac{x-y}{h} \\ y = nh+x \\ dy = hdu \end{matrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x+hu) du.$$

Aproksymacja wartości oczekiwanej estymatora jądrowego funkcji gęstości jest możliwa przy zastosowaniu rozwinięcia Taylora  $f(x+hu)$  dla argumentu  $hu$  gdy  $h \rightarrow 0$ , które ma postać:

$$f(x+hu) = f(x) + f^{(1)}(x)hu + \frac{1}{2}f^{(2)}(x)h^2u^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)h^3u^3 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^ku^k + o(h^k), \quad (1.29)$$

gdzie  $o(h^k)$  oznacza wyrażenia rzędu mniejszego niż  $h^k$  dla  $h \rightarrow 0$ .

Dla funkcji jądra rzędu  $k$ , gdzie  $k$  jest rzędem pierwszego niezerowego momentu zwykłego, oraz przyjmując założenia:

1. pochodna funkcji gęstości rzędu  $k+1$  istnieje,

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du = 1, \quad (1.30)$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} u^k K(u) du = \kappa_k \neq 0 \quad (1.31)$$

wartość oczekiwana estymatora jądrowego jest następująca:

$$\begin{aligned} E\left[\hat{f}(x)\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x+hu) du = \\ &= f(x) + f^{(1)}(x)h\kappa_1 + \frac{1}{2}f^{(2)}(x)h^2\kappa_2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x)h^3\kappa_3 + \dots \\ &+ \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)h^k\kappa_k + o(h^k). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Przy założeniu, że  $\kappa_l = \int_{-\infty}^{+\infty} u^l K(u) du = 0$  dla  $l = 1, \dots, k-1$ , otrzymujemy:

$$E[\hat{f}(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) f(x+hu) du = f(x) + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k \kappa_k + o(h^k). \quad (1.33)$$

Obciążenie estymatora jądrowego funkcji gęstości ma postać:

$$B[\hat{f}(x)] = E[\hat{f}(x)] - f(x) = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k \kappa_k + o(h^k). \quad (1.34)$$

Dla funkcji jądra drugiego rzędu obciążenie wynosi:

$$B[\hat{f}(x)] = \frac{1}{2} f^{(2)}(x) h^2 \kappa_2 + o(h^2), \quad (1.35)$$

gdzie funkcja  $o(h^2)$  spełnia warunek  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^2)}{h^2} = 0$ .

Dla funkcji jądra drugiego rzędu obciążenie wzrasta z kwadratem wartości parametru wygładzania. Jeżeli parametr wygładzania byłby dobrany w taki sposób, że  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h = 0$ , to obciążenie estymatora jądrowego będzie dążyć do zera wraz ze wzrostem liczebności próby. Zatem, estymator jądrowy funkcji gęstości jest asymptotycznie nieobciążonym estymatorem, gdyż  $E[\hat{f}(x)] \rightarrow f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K(y) dy = f(x)$  dla  $h \rightarrow 0$ .

Wariancja estymatora jądrowego funkcji gęstości ma postać:

$$\begin{aligned} D^2[\hat{f}(x)] &= \frac{1}{nh^2} D^2 \left[ K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{nh^2} E \left[ K^2 \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right] - \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{h} E \left[ K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right] \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{nh} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(x) dx + o \left( \frac{1}{nh} \right), \end{aligned} \quad (1.36)$$

ponieważ

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} E \left[ K^2 \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right] &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2 \left( \frac{x - y}{h} \right) f(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) f(x+hu) du = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) \{ f(x) + O(h) \} du = f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du + O(h) \end{aligned}$$

oraz

$$\frac{1}{h} E \left[ K \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right] = f(x) + o(1).$$

Funkcja  $o\left(\frac{1}{nh}\right)$  spełnia warunek  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o\left(\frac{1}{nh}\right)}{\frac{1}{nh}} = 0$ . Dla  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nh} = 0$ , czyli

$\lim_{n \rightarrow +\infty} nh = +\infty$  zachodzi własność, że wariancja estymatora jądrowego dąży do zera wraz ze wzrostem liczebności próby. Przy uwzględnieniu nieobciążoności estymatora, estymator jest estymatorem zgodnym.

Warunek  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h = 0$  oznacza, że parametr wygładzania powinien być tak do-  
bierany, by wraz ze wzrostem liczebności próby jego wartość malała do zera. Uwzględnienie warunku  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nh = +\infty$  ogranicza jednak szybkość zmniejszania się wartości parametru wygładzania. Gdy oba te warunki są spełnione, to w każdym punkcie dziedziny funkcji gęstości obciążenie i wariancja estymatora jądrowego maleją do zera wraz ze wzrostem liczebności próby. Skutkiem zmniejszania się obciążenia wartości estymatora jądrowego „oscylują” wokół wartości znajdującej się coraz bliżej prawdziwej (nieznanej) wartości funkcji gęstości. Zmniejszenie wariancji powoduje zaś zmniejszanie tych „oscylacji” (Kulczycki, 2005).

Asymptotyczna zbieżność jądrowego estymatora gęstości jest analizowana, między innymi, w pracach Bickela i Rosenblatta (1973, 1975), gdzie wykazano, że dla dostatecznie gładkich funkcji gęstości  $f$  i funkcji jądra  $K$ ,  $\sup \frac{|\hat{f}(x) - f(x)|}{\sqrt{f(x)}}$  ma graniczny rozkład wartości ekstremalnych.

Istotnym zagadnieniem przy estymacji jądrowej funkcji gęstości jest ocena łatwości estymacji. Dla określonej wartości parametru wygładzania estymator jądrowy jest dobrym estymatorem dla pewnej grupy funkcji gęstości o określonym kształcie, podczas gdy dla klasy funkcji gęstości o innym kształcie estymator ten okazuje się być niewłaściwy, co spowodowane jest stosowaniem tej samej wartości parametru wygładzania w każdym punkcie, gdzie wyznaczany jest estymator jądrowy. W pracach Wanda i Devroye’a (1993) oraz Wanda i Jonesa (1995) przedstawiona jest miara stopnia łatwości estymacji funkcji gęstości oparta na scałkowanym kwadracie drugiej pochodnej funkcji gęstości wraz z analizą miar efektywności estymacji jądrowej dla określonych funkcji gęstości, gdzie funkcja gęstości beta z parametrami (4,4) traktowana jest jako najefektywniejsza. Wykazano, że funkcje gęstości podobne do funkcji gęstości rozkładu normalnego są najłatwiejsze do estymacji, natomiast stopień łatwości estymacji uzależniony jest od skośności, kurtozy i modalności funkcji gęstości. Na przykład, przy kryterium opartym na scałkowanym kwadracie drugiej pochodnej funkcji gęstości, w celu

uzyskania tego samego stopnia dokładności estymacji, dla funkcji gęstości rozkładu lognormalnego wymagane jest ponad 15 razy więcej obserwacji jest niż dla funkcji gęstości rozkładu normalnego.

Istotną charakterystyką funkcji gęstości jest jej nośnik, czyli domknięcie tych punktów dziedziny, w których funkcja gęstości przyjmuje określone wartości.

W wielu zagadnieniach praktycznych rozważane zmienne losowe charakteryzują się naturalnym ograniczeniem, co znaczy, że przyjmują wartości jedynie z określonego ograniczonego podprzedziału. Dotyczy to w szczególności zmiennych o charakterze ekonomicznym, które przyjmują jedynie wartości dodatnie (czas zatrudnienia pracownika, czas funkcjonowania przedsiębiorstwa), ale również o charakterze technicznym (czas wykonywania pewnej operacji technicznej) czy przyrodniczym (wielkość zanieczyszczenia na określonym obszarze).

Stosowanie estymatora jądrowego funkcji gęstości do zmiennych o ograniczonym nośniku może powodować, że estymator jądrowy przyjmie wartości różne od zera również w podprzedziałach, w których zmienna losowa przyjmuje wartość zero. Może to być spowodowane użyciem w estymacji funkcji gęstości takiej funkcji jądra, która charakteryzuje się nieograniczonym nośnikiem (na przykład gaussowskiej funkcji jądra) lub też użyciem funkcji jądra o ograniczonym nośniku, która to zastosowana w estymacji w punktach skrajnych, leżących w tak zwanym obszarze brzegowym, może częściowo wykraczać poza określony podprzedział.

Niech nośnik funkcji gęstości będzie określony jako  $(a, b)$ . Jeśli część nośnika funkcji jądra  $[X - h, X + h]$  nie zawiera się w  $(a, b)$ , to  $X$  jest określone jako punkt w przedziale brzegowym. Punkt  $X$  niespełniający powyższego warunku jest tzw. punktem wewnętrznym przedziału. Na przykład, dla ciągłej funkcji gęstości zmiennej losowej przyjmującej jedynie wartości dodatnie, czyli o nośniku  $[0, +\infty)$  i  $f(x) = 0$  dla  $x < 0$ , dla parametru wygładzania  $h$  w estymacji jądrowej funkcji gęstości, przedział  $[0, h)$  jest przedziałem brzegowym, natomiast  $[h, +\infty)$  jest przedziałem wewnętrznym.

Estymator jądrowy funkcji gęstości jest estymatorem zgodnym w przedziale wewnętrznym (por. 1.2), natomiast w przedziale brzegowym estymator nie jest asymptotycznie nieobciążony i nie jest estymatorem zgodnym. W szczególności, estymator jądrowy funkcji gęstości nie jest estymatorem zgodnym, gdy estymowana jest gęstość blisko krańców nośnika funkcji gęstości. Dla nośnika estymowanej funkcji gęstości  $[0, a)$ , gdzie  $0 < a \leq +\infty$ , własności estymatora blisko krańców nośnika, to znaczy dla  $x \in [0, h) \cup (a - h, a]$ , są odmienne od własności estymatora dla punktów wewnątrz nośnika. Obciążenie estymatora jest rzędu  $O(h^2)$ , podczas gdy obciążenie wewnątrz nośnika jest rzędu  $O(h)$ . Wzrost obciążenia w przedziale brzegowym przy estymacji jądrowej w porównaniu z obciążeniem estymatora w przedziale wewnętrznym nośnika dla ograniczonego nośnika funkcji gęstości jest określany jako efekt brzegowy w estymacji jądrowej funkcji gęstości. Rezultatem efektu brzegowego w jądrowej estymacji funkcji gęstości jest taki

estymator, który nie posiada własności funkcji gęstości, a dla zmiennej o wartościach nieujemnych warunek  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) dx = 1$  jest spełniony, ale niestety  $\int_0^{\infty} \hat{f}(x) dx \neq 1$  (Sclocco, Di Marzio, 2001; Albers, 2012).

Usunięcie efektów brzegowych w estymacji jądrowej funkcji gęstości prowadzi do poprawy rzędu obciążenia estymatora. Metody korekty brzegowej estymatora jądrowego mogą oznaczać odpowiednią modyfikację danych prowadzącą do tzw. estymatora jądrowego z odbiciem. Niech nośnik funkcji gęstości będzie ograniczony z lewej strony, to znaczy, że ma postać  $[a, +\infty)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Jest to również oczekiwany nośnik estymatora jądrowego funkcji gęstości, co oznacza, że  $\hat{f}(x) = 0$  dla każdego  $x < a$ .

Metoda odbicia polega na dokonaniu określonej modyfikacji tej funkcji jądra, która znajduje się poza przedziałem  $[a, +\infty)$ . Taką modyfikacją może być, na przykład, symetryczne odbicie funkcji jądra względem ograniczenia  $a$ , gdzie fragmenty funkcji jądra znajdujące się poza przedziałem  $[a, +\infty)$  są usuwane, a następnie umieszczane w bezpośrednim sąsiedztwie ograniczenia  $a$ .

Estymator jądrowy z odbiciem ma postać (Kulczycki, 2005):

$$\hat{f}_{RL}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n I_{[a, +\infty)}(x) \left[ K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) + K\left(\frac{2a - x + X_i}{h}\right) \right], \quad (1.37)$$

gdzie  $I_{[a, +\infty)}$  jest funkcją charakterystyczną przedziału  $[a, +\infty)$  i ma postać:

$$I_{[a, +\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq a, \\ 0 & \text{dla } x < a. \end{cases} \quad (1.38)$$

W analogiczny sposób można określić estymator jądrowy z odbiciem dla ograniczenia prawostronnego, czyli gdy nośnikiem funkcji jest przedział  $(-\infty, b]$ :

$$\hat{f}_{RP}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, b]}(x) \left[ K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) + K\left(\frac{2b - x + X_i}{h}\right) \right], \quad (1.39)$$

gdzie

$$I_{(-\infty, b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \leq b, \\ 0 & \text{dla } x > b. \end{cases} \quad (1.40)$$

Niestety, rozważane estymatory są nieciągłe w punkcie  $a$  (lub  $b$ ), ale po uzupełnieniu dowolnej pochodnej w tym punkcie o wartość zero, pochodna ta staje się ciągła. Zastosowanie funkcji jądra, której pochodna dowolnego rzędu jest ciągła, prowadzi zatem do ciągłej pochodnej tego samego rzędu estymatora jądrowego.

Korekta brzegowa estymatora jądrowego może być dokonana również za pomocą zastosowania odpowiedniej postaci funkcji jądra, zwanej brzegową funkcją jądra. Może być wykorzystana w przypadku estymacji funkcji gęstości o dowolnym kształcie, jednak jej zasadnicza wada polega na tym, że estymator może przyjmować wartości ujemne blisko punktów brzegowych, szczególnie gdy  $f(0) \approx 0$  lub  $f(a) \approx 0$ .

Estymator jądrowy z brzegową funkcją jądra dla  $x \geq 0$  ma postać:

$$\hat{f}_B(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K_B\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (1.41)$$

gdzie  $K_B(u)$  jest asymetryczną funkcją jądra związaną z odpowiednim rozkładem lub funkcją jądra wyższego rzędu niż  $k = 2$ . Okazuje się bowiem, że redukcja obciążenia jest możliwa dla mniejszych wartości parametru wygładzania. Z drugiej jednak strony obciążenie jest proporcjonalne do drugiej pochodnej funkcji gęstości dla funkcji jądra drugiego rzędu. Jeżeli estymator jądrowy funkcji gęstości wykorzystuje funkcje jądra rzędu  $k$ , obciążenie estymatora jest proporcjonalne do  $h^k$ . Wynika stąd, że obciążenie estymatora wykorzystującego funkcje jądra wyższych rzędów jest mniejsze niż w przypadku estymatora z funkcją jądra drugiego rzędu. Zagadnienie to jest omawiane zarówno w rozdziale drugim, gdzie prezentowane są funkcje jądra redukujące obciążenie, jak i w rozdziale trzecim, gdzie prezentowane są metody wyboru parametru wygładzania.

Innymi metodami korekty brzegowej estymatora jądrowego są metoda pseudodanych (gdzie generowane są dodatkowe dane, które wraz z danymi wejściowymi są stosowane w konstrukcji estymatora jądrowego) oraz metoda transformacji, wykorzystująca określoną funkcję przekształcającą dane. Stosowane są również procedury będące kombinacjami wymienionych wyżej metod (Karunamuni, Albers, 2005).

Zagadnienie to dotyczy również estymacji funkcji regresji. Nieparametryczny estymator regresji wykazuje nagły wzrost wariancji i obciążenia gdy estymacji podlega funkcja regresji w punktach położonych blisko obszarów brzegowych nośnika funkcji ( $X < h$ ) (Härdle, 1990; Kyung-Joon, Schucany, 1998; Mackenzie, Tieu, 2004; Kolářek, Poměnková, 2006).

Analiza porównawcza, w tym badanie własności estymatora jądrowego klasycznego oraz estymatora jądrowego uwzględniającego metodę odbicia w przypadku zmiennych losowych o ograniczonym nośniku przy estymacji funkcji gęstości, dystrybuanty i funkcji regresji, przedstawiona jest, między innymi, w pracach Baszczyńskiej (2015, 2016a, 2016b).

### 1.3. Miary precyzji estymacji jądrowej funkcji gęstości

W analizach dotyczących parametru wygładzania w jądrowej estymacji funkcji gęstości dużą rolę odgrywają miary dobroci estymacji. Minimalizacja tych miar jest niejednokrotnie punktem wyjścia w wyborze parametru wygładzania, jak również mogą one stanowić ocenę precyzji estymatora jądrowego. Rolę takiej miary dobroci pełnią miary odległości (miary podobieństwa, miary bliskości) między badaną funkcją gęstości i jej estymatorem jądrowym (Cha, 2007).

W zależności od wartości  $p$  w funkcji  $\|\cdot\|_p : R^n \rightarrow [0, +\infty)$ ,

gdzie  $\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  można wyróżnić trzy grupy miar precyzji.

Pierwszą grupę stanowią miary oparte na normie  $L_1$  ( $p = 1$ ), czyli błędy bezwzględne (błędy absolutne):

– błąd bezwzględny:

$$AE[\hat{f}(x)] = |\hat{f}(x) - f(x)|, \quad (1.42)$$

– średni błąd bezwzględny:

$$MAE[\hat{f}(x)] = E[AE(\hat{f}(x))] = E|\hat{f}(x) - f(x)|, \quad (1.43)$$

– scałkowany błąd bezwzględny:

$$IAE[\hat{f}(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x) - f(x)| dx, \quad (1.44)$$

– scałkowany średni błąd bezwzględny:

$$MIAE[\hat{f}(x)] = E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x) - f(x)| dx \right]. \quad (1.45)$$

Podstawową zaletą normy  $L_1$  jest jej niezmienniczość przy transformacjach zmiennych, co wraz z prostotą definiowalności stanowi o popularności miar opartych na tej normie (Devroy, Györfi, 1985). Zarówno scałkowany błąd bezwzględny  $IAE$ , jak również błąd bezwzględny  $AE$  są zmiennymi losowymi. Scałkowany błąd bezwzględny  $IAE$  jest traktowany jako miara uniwersalna, pozwalająca na porównanie różnych wartości błędów bez konieczności skalowania, co nie jest spełnione dla miar opartych na innych normach. Miara ta jest interpretowana jako obszar między krzywymi, będącymi wykresami funkcji  $f$  i  $\hat{f}$ .

Dla  $IAE \rightarrow 0$  gdy  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\hat{f}$  jest estymatorem zgodnym  $f$ .

Asymptotyczne własności błędu  $AE$  oraz zastosowanie tego błędu w estymacji funkcji gęstości są przedstawione w pracy Devroya i Györfiego (1985) oraz Halla i Wanda (1988).

Kolejna grupa miar to miary oparte na normie  $L_2$  ( $p = 2$ ), czyli błędy kwadratowe:  
 – błąd kwadratowy:

$$SE[\hat{f}(x)] = [\hat{f}(x) - f(x)]^2, \tag{1.46}$$

– błąd średniokwadratowy:

$$MSE[\hat{f}(x)] = E[\hat{f}(x) - f(x)]^2, \tag{1.47}$$

– scałkowany błąd kwadratowy:

$$ISE[\hat{f}(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx, \tag{1.48}$$

– scałkowany błąd średniokwadratowy:

$$\begin{aligned} MISE[\hat{f}(x)] &= E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} MSE[\hat{f}(x)] dx = E\left\{ISE[\hat{f}(x)]\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E\left\{[\hat{f}(x) - f(x)]^2\right\} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{B^2[\hat{f}(x)] + D^2[\hat{f}(x)]\right\} dx, \end{aligned} \tag{1.49}$$

gdzie  $B[\hat{f}(x)]$  jest obciążeniem estymatora.

Scałkowany błąd kwadratowy  $ISE$  może być interpretowany jako funkcja straty (w klasycznej teorii decyzji). Natomiast scałkowany błąd średniokwadratowy  $MISE$  dla oceny estymatora jako funkcji losowej określonej na całej prostej zwany jest globalnym wskaźnikiem jakości estymacji. W odróżnieniu do  $ISE$  miara  $MISE$  nie może być traktowana jako funkcja straty, co może oznaczać trudności w interpretacji tej miary (Györfi i in., 2002).

Można wykazać, że:

$$\begin{aligned} MSE[\hat{f}(x)] &= E[\hat{f}(x) - f(x)]^2 = \\ &= \left\{E[\hat{f}(x)] - f(x)\right\}^2 + E[\hat{f}(x)]^2 - E^2[\hat{f}(x)] = B^2[\hat{f}(x)] + D^2[\hat{f}(x)] = \\ &= \left\{\frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k \kappa_k\right\}^2 + \frac{\kappa f(x)}{nh} = \frac{\kappa_k^2}{(k!)^2} \left\{f^{(k)}(x)\right\}^2 h^{2k} + \frac{\kappa f(x)}{nh}, \end{aligned} \tag{1.50}$$

gdzie  $\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du$ , natomiast  $\kappa_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k K(u) du$ .

Rozważane mogą być również asymptotyczne postaci miar precyzji, tzn.  $AMSE$  i  $AMISE$  wyrażane odpowiednio (Wand, Jones, 1995):

$$AMSE[\hat{f}(x)] = \frac{\kappa_k^2}{(k!)^2} [f^{(k)}(x)]^2 h^{2k} + \frac{\kappa f(x)}{nh},$$

$$AMISE[\hat{f}(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} AMSE[\hat{f}(x)] dx = \frac{\kappa_k^2}{(k!)^2} R(f^{(k)}) h^{2k} + \frac{\kappa}{nh}, \quad (1.51)$$

gdzie  $R(f^{(k)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(k)}(x)]^2 dx$  jest miarą statystycznej szorstkości  $k$ -tej pochodnej funkcji gęstości (Scott, 2015).

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  oznacza ciąg zmiennych losowych o jednakowych i niezależnych rozkładach o funkcji gęstości  $f(x)$  trzykrotnie różniczkowalnej i niech  $f^{(s)}(x)$  oznacza pochodną  $s$ -tego rzędu  $f(x)$ ,  $s = 1, 2, 3$ . Dla funkcji jądra drugiego rzędu  $k = 2$  (por. (1.18)):

$$MSE[\hat{f}(x)] = \frac{h^4}{4} [\kappa_2 f^{(2)}(x)]^2 + \frac{\kappa f(x)}{nh} + o\left(h^4 + \frac{1}{nh}\right) = O\left(h^4 + \frac{1}{nh}\right), \quad (1.52)$$

gdzie:  $\kappa_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du$ ,  $\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du$ .

Dla  $n \rightarrow +\infty, h \rightarrow 0$  i  $nh \rightarrow +\infty, MSE \rightarrow 0$ , co oznacza zgodność estymatora jądrowego funkcji gęstości. Dowód przedstawiony jest w pracy w Li i Racine (2007). Jeżeli warunek o trzykrotnej różniczkowalności ulegnie osłabieniu, to dla funkcji dwukrotnie różniczkowalnej w wyrażeniu na obciążenie w  $MSE$  występuje  $o(h^2)$ . Wówczas

$$\hat{f}(x) - f(x) = O_p\left(h^2 + \frac{1}{\sqrt{nh}}\right) = o_p(1),$$

gdzie  $O_p(\cdot), o_p(\cdot)$  oznacza rząd zbieżności według prawdopodobieństwa.

Dobierając  $h = cn^{-1/\alpha}$  dla pewnego  $c > 0$  i  $\alpha > 1$ , warunki wymagane dla estymacji zgodnej funkcji gęstości  $f(x)$ ,  $h \rightarrow 0, nh \rightarrow +\infty$  są spełnione.

Scałkowany błąd średniokwadratowy ma wówczas postać:

$$MISE[\hat{f}(x)] = E \int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{f}(x) - f(x)]^2 dx = \frac{h^4}{4} \kappa_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(2)}(x) dx + \frac{\kappa}{nh}. \quad (1.53)$$

Wybór miary  $MISE$  jako kryterium błędu związany jest z możliwością dekompozycji miary na wariancję i obciążenie estymatora w ustalonym punkcie  $x$ .

Upraszcza to interpretację i ułatwia wybór oparty na kompromisie między wariancją i obciążeniem. Dokładna postać przedstawiona jest w pracy Marrona i Wanda (1992), w tym dla przypadku, gdy funkcją gęstości jest rodzina mieszanin rozkładów normalnych.

W ocenie odległości między dwiema krzywymi kryteria błędu *MISE* i *MIAE* uwzględniają jedynie odległość pionową, wykorzystując miarę odpowiednio  $L_2$  i  $L_1$ . Ponadto estymatory z optymalnymi parametrami wygładzania wykorzystującymi *MISE* i *MIAE* są często niedostatecznie wygładzone, szczególnie w przypadku mniejszych liczebności prób.

Asymptotyczne rozszerzenia oraz dolne i górne ograniczenia powyższych błędów są przedstawione, między innymi, w pracach Devroya i Györfiego (1985), Halla i Wanda (1988), Scotta i Wanda (1991).

Metodą wyboru parametru wygładzania opartą na błędach jest metoda podwójnej funkcji jądra omówiona w pracy Devroya (1989).

Wybrane miary precyzji mogą być zastosowane nie tylko w procedurach estymacyjnych funkcji gęstości, ale również w procedurach testowania hipotez statystycznych dotyczących funkcji gęstości (Baszczynska, 2013a, 2013b).

Następną grupę wykorzystywanych w badaniu dokładności estymacji jądrowej funkcji gęstości stanowią miary oparte na normie  $L_p$  dla  $0 < p < 2$ . Szczególnymi przypadkami, dla  $p = 1$ , tak określonych miar są miary (1.42)–(1.45). Uogólniona postać dla wartości oczekiwanej i scałkowanej wartości oczekiwanej błędu opartego na  $L_p$  dla  $0 < p < 2$  przedstawiona jest w pracy Kile (2010).

Odrębną grupę miar tworzą miary oparte na kryterium błędu wizualnego *VE* związanego z ideą wygładzania jakościowego (Mammen, 1994). Kryterium to odzwierciedla wizualną percepcję odległości między funkcją gęstości a jej estymatorem jądrowym. W wielu sytuacjach badawczych istnieje bowiem potrzeba oceny nie tylko wartości punktów funkcji gęstości, ale również kształtu tej funkcji, w tym takich charakterystyk jak gładkość funkcji oraz liczba wartości modalnych. W analizach precyzji estymacji jądrowej prowadzi to do uwzględnienia nie tylko minimalizacji miar opisanych powyżej, ale również stosowania wskaźników jakościowych dotyczących dobroci estymacji. Oznacza to uwzględnienie zarówno pionowej, jak i poziomej odległości między funkcją gęstości a jej estymatorem. Kryterium to traktowane jest często jako uśrednione kryterium oparte na ilościowych i jakościowych cechach estymacji funkcji gęstości (Marron, 1993). Miara oparta na błędzie wizualnym jest następująca (Kile, 2010):

$$VE(\hat{f} \rightarrow f) = \left[ \int_a^b d\left((x, \hat{f}(x)), G_f\right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1.54)$$

gdzie:

$$d\left((x, \hat{f}(x)), G_f\right) = \inf_{(x', y') \in G_f} \left\| (x, \hat{f}(x)) - (x', y') \right\|_2,$$

$G_f$  jest wykresem funkcji gęstości  $f: [a, b] \rightarrow R$ , czyli

$$G_f = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\} \subset R^2,$$

$\|\cdot\|_2$  oznacza normę euklidesową w przestrzeni  $R^2$ .

Wykorzystywana jest również modyfikacja miary (1.54) prowadząca do symetrycznej miary opartej na błędzie wizualnym. Ma ona postać:

$$VE_S[\hat{f}(x)] = \left[ VE(\hat{f} \rightarrow f)^2 + VE(f \rightarrow \hat{f})^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.55)$$

Własności estymacji wykorzystującej błąd wizualny w wielu przypadkach są lepsze dla prób skończonych. Tempo zbieżności do optymalnego estymatora jest takie samo jak w przypadku *MISE* i *MIAE* dla dużych prób (Gefeller, Hjort, 1998).

W powyższych określeniach miar precyzji występuje nieznaną funkcją gęstości, dlatego też nie są one wykorzystywane w praktyce. Stosowane są zatem aproksymacje tych błędów i odpowiednich optymalnych parametrów wygładzania opartych na danych, co jest przedmiotem rozważań w rozdziale trzecim.

## 1.4. Estymacja jądrowa pochodnych funkcji gęstości

Metoda jądrowa może być również wykorzystywana w estymacji pochodnych funkcji gęstości.

Niech:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nh^{2\nu+1} = +\infty \quad \text{dla } \nu \geq 1.$$

Założmy ponadto, że funkcja gęstości posiada ciągłą pochodną rzędu  $k_0$ , gdzie  $\nu + k \leq k_0$ , natomiast pochodna rzędu  $(\nu + k)$  niech będzie całkowalna z kwadratem.

Niech funkcja jądra  $K \in S_{0,k}^\mu$ , to znaczy  $K^{(\nu)} \in S_{\nu,k+\nu}^0$ .

Estymator jądrowy  $\nu$ -tej pochodnej funkcji gęstości  $f^{(\nu)}(x) = \frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x)$  określony jest w następujący sposób (Schuster, 1969; Wand, Jones, 1995; Guidoum, 2015):

$$\hat{f}^{(\nu)}(x) = \frac{d^\nu}{dx^\nu} \hat{f}(x) = \frac{1}{nh^{\nu+1}} \sum_{i=1}^n K^{(\nu)}\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (1.56)$$

gdzie:

$$K^{(v)}(x) = \frac{d^v}{dx^v} K(x). \tag{1.57}$$

Przykładem funkcji jądra wykorzystywanej w estymacji pochodnej funkcji gęstości jest gaussowska funkcja jądra, gdyż funkcja ta spełnia warunki nakładane na funkcję jądra, czyli posiada pochodne dowolnych rzędów.

Wartość oczekiwana estymatora pochodnej rzędu  $v$  funkcji gęstości ma postać:

$$E[\hat{f}^{(v)}(x)] = f^{(v)}(x) + \frac{1}{k!} f^{(k+v)}(x) h^k \kappa_k + o(h^k). \tag{1.58}$$

Asymptotyczne obciążenie, przy założeniu, że funkcja gęstości jest co najmniej  $(k + v + 1)$  różniczkowalna, jest następujące:

$$B[\hat{f}^{(v)}(x)] = E[\hat{f}^{(v)}(x)] - f^{(v)}(x) = \frac{1}{k!} f^{(k+v)}(x) h^k \kappa_k + o(h^k). \tag{1.59}$$

Co oznacza, że rząd obciążenia jest ten sam co w przypadku estymacji jądrowej funkcji gęstości.

Wariancja ma postać (Hansen, 2009):

$$\begin{aligned} D^2[\hat{f}^{(v)}(x)] &= \frac{1}{nh^{2+2v}} D^2 \left[ K^{(v)} \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{nh^{2+2v}} E \left[ \left( K^{(v)} \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right)^2 \right] - \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{h^{1+v}} EK^{(v)} \left\{ \left( \frac{x - X_i}{h} \right) \right\} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{nh^{2+2v}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( K^{(v)} \left( \frac{x - y}{h} \right) \right)^2 f(y) dy - \frac{1}{n} \left( f^{(v)} \right)^2(x) + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{nh^{1+2v}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( K^{(v)} \right)^2(u) f(x + hu) du + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{f(x)}{nh^{1+2v}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( K^{(v)} \right)^2(u) du + O\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ K^{(v)}(u) \right]^2 du}{nh^{1+2v}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{1.60}$$

Rząd wariancji jest znacznie większy niż w przypadku estymacji jądrowej funkcji gęstości.

Scalkowany błąd średniokwadratowy jest następujący:

$$\begin{aligned} MISE\left[\hat{f}^{(v)}(x)\right] &= E \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{f}^{(v)}(x) - f^{(v)}(x)\right]^2 dx = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[K^{(v)}(x)\right]^2 dx}{nh^{2v+1}} + h^{2k} \frac{\kappa_v^2}{(k!)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f^{(v+r)}(x)\right]^2 dx + o\left(h^{2k} + \frac{1}{nh^{2v+1}}\right), \end{aligned} \quad (1.61)$$

a to oznacza, że  $\hat{f}^{(v)}(x)$  jest estymatorem zgodnym  $f^{(v)}(x)$ .

Ponieważ zachodzi następująca własność:

$$\kappa_k = \frac{(-1)^v}{(k+1)\dots(k+v)} \int_{-1}^1 x^{k+v} K^{(v)}(x) dx,$$

można wykazać, że:

$$\frac{\kappa_k}{k!} = \frac{(-1)^v}{(k+v)!} \dot{\kappa}_{k+v},$$

gdzie:

$\dot{\kappa}_{k+v}$  jest drugim momentem zwykłym  $v$ -pochodnej funkcji jądra, rzędu  $v+k$ ,

$$\dot{\kappa}_{k+v} = \int_{-1}^1 x^{k+v} K^{(v)}(x) dx.$$

Miary precyzji estymacji  $AMSE$  i  $AMISE$  są następujące:

$$AMSE\left[\hat{f}^{(v)}(x)\right] = \frac{\kappa_k^2}{(k!)^2} \left[f^{(k+v)}(x)\right]^2 h^{2k} + \frac{f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[K^{(v)}(x)\right]^2 dx}{nh^{1+2v}} \quad (1.62)$$

oraz

$$AMISE\left[\hat{f}^{(v)}(x)\right] = h^{2k} \dot{\kappa}_{k+v}^2 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[f^{(k+v)}(x)\right]^2 dx}{\left[(k+v)!\right]^2} + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[K^{(v)}(x)\right]^2 dx}{nh^{1+2v}}. \quad (1.63)$$

Analizę optymalnej wartości parametru wygładzania w estymacji pochodnej dowolnego rzędu funkcji gęstości przedstawili Horová i in. (2012). Można wykazać, że parametr wygładzania w estymacji pochodnej funkcji gęstości jest inny niż w przypadku estymacji funkcji gęstości. Optymalny parametr wygła-

dzania jest zbieżny w mniejszym tempie niż w przypadku estymacji funkcji gęstości. Przy optymalnym parametrze wygładzania tempo zbieżności dla *AMISE*

jest  $O\left(n^{-\frac{2k}{2\nu+2k+1}}\right)$ , co jest tempem znacznie wolniejszym niż  $O\left(n^{-\frac{2k}{2k+1}}\right)^{\frac{4}{5}}$  dla  $\nu = 0$ .

Dyskusja dotycząca wyboru funkcji jądra i parametru wygładzania wraz z analizą efektywności w estymacji pochodnej funkcji gęstości przedstawiona jest, między innymi, w pracy Härdlego i in. (1990).



## Rozdział 2

# Rodzaje funkcji jądra

### 2.1. Uwagi wstępne

Funkcja jądra jest funkcją wagową i stanowi parametr metody jądrowej, co oznacza, że przy konstrukcji estymatora jądrowego funkcji gęstości konieczny jest odpowiedni wybór funkcji jądra.

W klasycznej metodzie jądrowej rozważanej w podrozdziale 1.2 funkcja waga jest funkcją  $K(u): R \rightarrow R$  spełniającą warunek:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du = 1. \quad (2.1)$$

Jeżeli ponadto funkcja jądra jest nieujemna,  $K(u) \geq 0$  dla wszystkich  $u$ , to funkcja jądra jest funkcją posiadającą własności funkcji gęstości.

Podstawowymi charakterystykami funkcji jądra są:

1.  $j$ -ty moment zwykły funkcji jądra:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^j K(u) du = \kappa_j(K) = \kappa_j. \quad (2.2)$$

Nieparzyste momenty funkcji jądra są równe zero, gdy funkcja jądra spełnia warunek (2.1) oraz warunek:

$$K(u) = K(-u) \text{ dla wszystkich } u, \quad (2.3)$$

czyli jest funkcją symetryczną względem zera.

2. szorstkość funkcji jądra:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du = R(K) = \kappa(K) = \kappa. \quad (2.4)$$

Dla symetrycznej względem zera funkcji jądra, spełniającej warunek (2.1) i posiadającej w zerze (słabe) maksimum globalne:

$$K(0) \geq K(u) \text{ dla wszystkich } u,$$

zachodzi zależność:

$$\kappa \leq K(0) \int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du = K(0).$$

### 3. $\mu$ -gładkość funkcji jądra.

Funkcja jądra jest określona jako  $\mu$ -gładka, gdy  $(\mu - 1)$ -sza pochodna funkcji jądra  $K^{(\mu - 1)}$  jest absolutnie ciągła na zbiorze liczb rzeczywistych (Müller, 1984). Dla funkcji jądra z ograniczonym nośnikiem  $[a, b]$  konieczne jest spełnienie warunku, by  $(\mu - 1)$ -sza pochodna była równa zero w obszarze brzegowym:

$$K^{(\mu - 1)}(a) = K^{(\mu - 1)}(b) = 0.$$

Funkcje jądra nieklasyczne mają zastosowanie przede wszystkim w redukcji obciążenia brzegowego w jądrowej estymacji nieparametrycznej. Redukcję efektu brzegowego, obok metod omówionych w podrozdziale 1.2, związanych ściśle z samą konstrukcją estymatora jądrowego funkcji gęstości, zapewnia wykorzystanie odpowiednio zmodyfikowanych funkcji jądra. Ponieważ efekt brzegowy związany jest z alokacją wagi, to w przypadku estymacji z symetryczną funkcją jądra w standardowej estymacji gęstości może wystąpić alokacja tej wagi poza nośnik funkcji gęstości, gdy wygładzanie jest dokonywane blisko obszarów brzegowych. Funkcja jądra, będąca asymetryczną funkcją gęstości z nieujemnym nośnikiem, nie powoduje efektu brzegowego obciążenia (Chen, 1999). W metodach nieparametrycznych opartych na asymetrycznych funkcjach jądra, dla których nośnik jest ten sam, co funkcji gęstości, nigdy nie jest przypisywana waga na zewnątrz nośnika funkcji gęstości, w wyniku czego rezultaty estymacji są zdecydowanie lepsze, w szczególności powodują one wzrost precyzji estymacji gęstości blisko brzegów nośnika. Spowodowane jest to zmianą kształtu funkcji jądra, co skutkuje różnym poziomem wygładzania w zależności od miejsca, gdzie estymacja jest dokonywana. Oznacza to, że obciążenie estymatora jądrowego funkcji gęstości jest rzędu  $O(h)$ , zarówno blisko brzegów nośnika, jak i wewnątrz.

Modyfikacja klasycznego podejścia estymacji jądrowej funkcji gęstości, polegająca na zastosowaniu w miejsce symetrycznej funkcji jądra, funkcji niesymetrycznych, nie powoduje znaczących zmian w własnościach estymatora jądrowego. Przykładowo, zakładając, że estymowana funkcja gęstości jest dwukrotnie różniczkowalna, można wykazać, że tempo zbieżności estymatorów jądrowych z funkcjami jądra: Birnbauma-Saundersa, gamma, gaussowską odwrotną, logarymiczno-normalną i gaussowską obustronnie odwrotną, jest takie samo jak w przypadku klasycznego estymatora jądrowego.

Estymatory jądrowe z nieklasycznymi funkcjami jądra charakteryzują się takimi samymi własnościami jak ich funkcje jądra (tzw. „dziedziczenie charakterystyk”). Gdy skośność funkcji gęstości jest duża, wówczas jej estymator może być wrażliwy na określone asymetryczne funkcje jądra, co jest korzystne na przykład wtedy, gdy dominanta i kwantyle znajdują się w ogonach tych rozkładów, których funkcje gęstości podlegają estymacji.

Najważniejszą zaletą asymetrycznych funkcji jądra jest to, że charakteryzują się zmieniającym się kształtem i pozwalają na elastyczność w wygładzaniu w nośniku.

Estymatory jądrowe funkcji gęstości z funkcjami jądra gamma i gaussowską odwrotną mogą być traktowane jako szczególny przypadek estymatorów z funkcją jądra potęgowania splotu funkcji przez samą siebie. Do tej grupy estymatorów nie należy estymator z funkcją jądra Birnbauma-Saundersa, gdyż suma niezależnych zmiennych losowych z takim rozkładem nie jest rozkładem Birnbauma-Saundersa.

Można wskazać sytuacje, gdzie nieklasyczne funkcje jądra są szczególnie zalecane. W przypadku wystąpienia dość dużej asymetrii rozkładu zmiennej losowej (w badaniach niektórych szeregów czasowych) w estymacji jądrowej funkcji gęstości preferowana jest asymetryczna funkcja jądra. Gdy analizowana zmienna losowa charakteryzuje się nośnikiem z ograniczeniem dwustronnym, w estymacji jądrowej powinna być stosowana funkcja jądra beta, natomiast w przypadku ograniczenia jednostronnego nośnika zmiennej losowej – funkcja jądra gamma.

Zakres stosowalności różnych funkcji jądra z jednej strony oraz różne metody ich konstrukcji z drugiej dają podstawy do wyodrębnienia określonych rodzajów funkcji jądra. Wyodrębnienie klas funkcji jądra rozważanych w tym rozdziale jest dokonane w taki sposób, że niektóre klasy nie są klasami rozłącznymi.

## 2.2. Klasyczne funkcje jądra

Klasyczna funkcja jądra jest nieujemną, symetryczną względem zera i mającą w tym punkcie maksimum funkcją, co oznacza, że jest funkcją jądra drugiego rzędu ( $k = 2$ ). Funkcje jądra drugiego rzędu spełniają następujące warunki (por. Wand, Jones, 1995; Härdle i in. 2004):

$$K(u) \geq 0, \quad (2.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du = 1, \quad (2.6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} uK(u)du = 0, \quad (2.7)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2K(u)du = \kappa_2 > 0. \quad (2.8)$$

Symetryczność i jednomodalność funkcji jądra jest podstawową cechą klasycznej funkcji jądra. Warunek  $\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)du = 1$  gwarantuje, że estymator jądrowy funkcji gęstości  $\hat{f}(x)$  jest funkcją gęstości (spełnia warunek  $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)dx = 1$ ).

Estymatory wyznaczone w oparciu o funkcje jądra spełniające powyższe warunki określone są jako estymatory dopuszczalne. Estymatory funkcji gęstości, dla których warunki te nie są spełnione, są estymatorami niedopuszczalnymi (por. Cline, 1988).

Wybrane klasyczne funkcje jądra (spełniające warunki (2.5)–(2.8)) przedstawione są w tablicy 2.1.

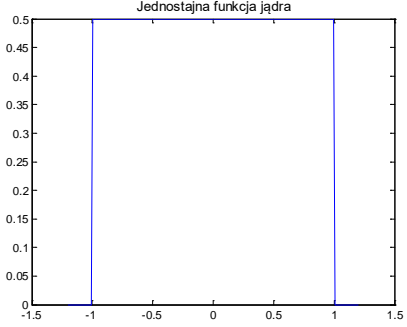
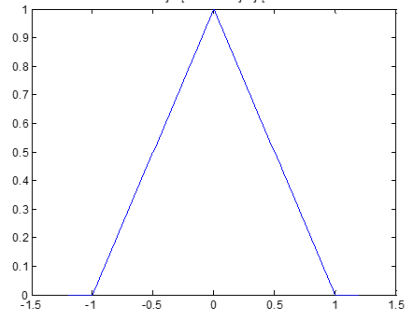
**Tablica 2.1.** Wybrane klasyczne funkcje jądra

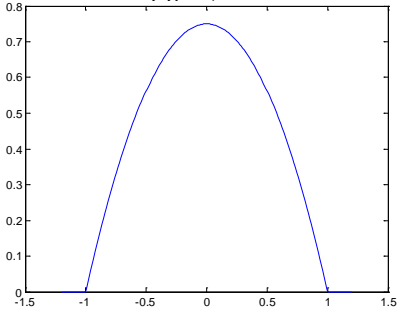
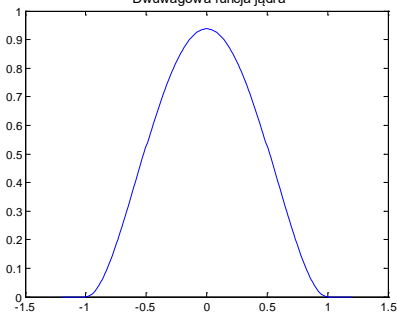
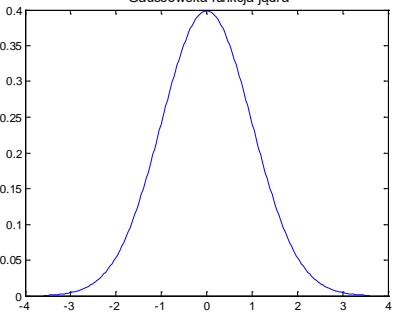
Nazwa funkcji jądra	$K(u)$
Jednostajna	$K_J(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
Trójkątna	$K_T(u) = \begin{cases} (1- u ) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
Epanecznikowa	$K_E(u) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-u^2) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
Dwuwagowa	$K_{DW}(u) = \begin{cases} \frac{15}{16}(1-u^2)^2 & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
Trójwagowa	$K_{TW}(u) = \begin{cases} \frac{35}{32}(1-u^2)^3 & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$

Nazwa funkcji jądra	$K(u)$
Gaussowska	$K_G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$
Kosinusowa	$K_C(u) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}u\right) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
Stopnia trzeciego	$K_{ST}(u) = \begin{cases} \frac{70}{81}(1- u ^3)^3 & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$

**Źródło:** opracowanie własne na podstawie: Härdle i in. (2004); Krzyżko i in. (2008).

Na rysunku 2.1 przedstawione są wybrane klasyczne funkcje jądra wraz z ich podstawowymi charakterystykami (por. (1.23)–(1.24)).

Wykres funkcji jądra	Podstawowe charakterystyki funkcji jądra
<p style="text-align: center;">Jednostajna funkcja jądra</p> 	<p>nośnik <math>[-1, 1]</math>  <math>\nu = 0</math>  <math>k = 2</math>  <math>\mu = -1</math></p> $\int_{-1}^1 K^2(x) dx = 0,5$ <p><math>\kappa_k = 0,3333</math></p>
<p style="text-align: center;">Trójkątna funkcja jądra</p> 	<p>nośnik <math>[-1, 1]</math>  <math>\nu = 0</math>  <math>k = 2</math>  <math>\mu = 0</math></p> $\int_{-1}^1 K^2(x) dx = 0,6667$ <p><math>\kappa_k = 0,1667</math></p>

 <p>Funkcja jądra Epanechnikowa</p>	<p>nośnik <math>[-1, 1]</math>  <math>\nu = 0</math>  <math>k = 2</math>  <math>\mu = 0</math></p> $\int_{-1}^1 K^2(x) dx = 0,6$ $\kappa_k = 0,2$
 <p>Dwuwagowa funkcja jądra</p>	<p>nośnik <math>[-1, 1]</math>  <math>\nu = 0</math>  <math>k = 2</math>  <math>\mu = 1</math></p> $\int_{-1}^1 K^2(x) dx = 0,7143$ $\kappa_k = 0,1429$
 <p>Gaussowska funkcja jądra</p>	<p>nośnik <math>[-\infty, +\infty]</math>  <math>\nu = 0</math>  <math>k = 2</math>  <math>\mu = \infty</math></p> $\int_{-\infty}^{+\infty} K^2(x) dx = 0,2821$ $\kappa_k = 1$

**Rysunek 2.1.** Wybrane klasyczne funkcje jądra oraz ich podstawowe charakterystyki

**Źródło:** opracowanie własne.

Ze względu na tzw. „dziedziczenie” własności estymatora od funkcji jądra, wybór określonej funkcji jądra uzależniony jest od wymagań nakładanych w konkretnym zagadnieniu estymacji. Gdy wymagane jest, by estymator funkcji gęstości miał pochodne dowolnego rzędu, to zalecaną funkcją jest gaussowska funkcja jądra. W przypadku gdy konieczne jest ograniczenie zbioru, na którym estymator przyjmuje wartości dodatnie, a istnienie pochodnej nie jest wymagane, wówczas funkcja jądra Epanechnikowa w estymatorze funkcji gęstości pozwala spełnić te wymagania.

Określając ogólną rodzinę funkcji jądra jako modyfikację funkcji gęstości rozkładu beta, postaci:

$$K(u) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_d} (1-u^2)^d & \text{dla } |u| \leq 1, \\ 0 & \text{dla } |u| > 1, \end{cases}$$

gdzie  $d$  jest liczbą naturalną, natomiast dodatnia stała  $\tau_d$  jest określona jako:

$$\tau_d = 2 \int_0^1 (1-u^2)^d du,$$

można zauważyć, że rodzina ta zawiera niektóre klasyczne funkcje jądra. Dla  $d = 0$  otrzymujemy jednostajną funkcję jądra, dla  $d = 1$  funkcję jądra Epanecznikowa, natomiast dla  $d = 2$  dwuwagową funkcję jądra.

W pracy Kulczyckiego (2005) proponowana jest procedura polegająca na konstrukcji funkcji jądra na podstawie klasycznych funkcji jądra. Propozycja ta uwzględnia, z jednej strony, brak dużych różnic w efektywnościach poszczególnych klasycznych funkcji jądra, a z drugiej – wady poszczególnych funkcji. I tak, chociaż gaussowska funkcja jądra posiada pochodną dowolnego rzędu, jej całki nie da się wyrazić wzorem analitycznym. W przypadku innych funkcji jądra, mimo że całki ich są możliwe do obliczenia, pochodna nie istnieje w całej dziedzinie (na przykład dla jednostajnej funkcji jądra jest w punktach, w których istnieje, stale równa zero). Możliwe jest stosowanie funkcji jądra będącej kombinacją liniową klasycznych funkcji jądra.

Przykładem może być kombinacja liniowa funkcji jądra Epanecznikowa i gaussowskiej funkcji jądra o postaci:

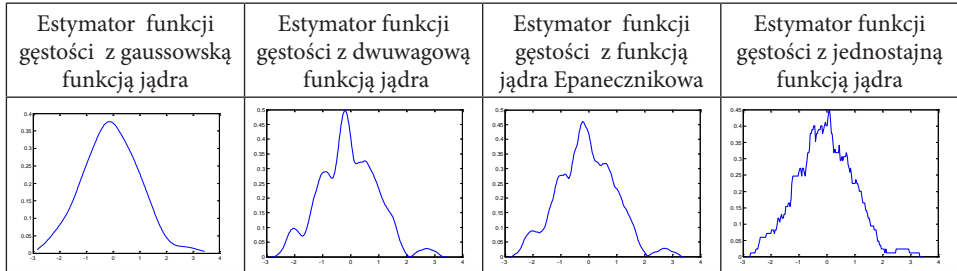
$$K(u) = \alpha K_E(u) + (1 - \alpha) K_G(u),$$

gdzie  $\alpha \in (0, 1)$  jest określonym udziałem funkcji jądra Epanecznikowa w kombinacji liniowej  $K(u)$ . Udział dwóch funkcji jądra o różnych własnościach ma wpływ na własności funkcji jądra  $K(u)$ . Na przykład, dla  $\alpha = 0,9$  funkcja jądra  $K(u)$  charakteryzuje się efektywnością zbliżoną do efektywności funkcji jądra Epanecznikowa, ale ze względu na udział gaussowskiej funkcji jądra ma nieograniczony nośnik.

Dla funkcji jądra należących do grupy klasycznych funkcji jądra zachodzi właściwość przejmowania własności estymatora od funkcji jądra. Dotyczy to niektórych własności, na przykład ciągłość i różniczkowalność estymatora jądrowego funkcji gęstości jest analogiczna do własności funkcji jądra, co określane jest jako „dziedziczenie” własności estymatora jądrowego od funkcji jądra.

Stopień wygładzenia estymatora jest odzwierciedleniem określonych własności funkcji jądra w estymatorze. Na rysunku 2.2 przedstawiono wyniki estymacji funkcji gęstości z wykorzystaniem funkcji jądra o różnych krotnościach różnic-

kowalności tych funkcji. Dla 100-elementowej próby wylosowanej z populacji o rozkładzie normalnym z wartością oczekiwaną 0 i odchyleniem standardowym 1 wyznaczono estymatory funkcji gęstości dla funkcji jądra o różnych krotnościach różniczkowalności i dla ustalonej wartości parametru wygładzania ( $h = 0,42381$ ).



**Rysunek 2.2.** Estymatory funkcji gęstości dla funkcji jądra o różnych krotnościach różniczkowalności

**Źródło:** opracowanie własne.

Wykres estymatora funkcji gęstości jest bardziej wygładzony w tych przypadkach, gdzie krotność różniczkowalności funkcji jądra jest większa, przy takiej samej wartości parametru wygładzania.

Ocena wpływu kształtu funkcji jądra na rezultat procedury estymacji oraz porównanie kształtów funkcji jądra, zarówno tych klasycznych, jak i tych, które nie spełniają warunków (2.5)–(2.8), jest możliwa dzięki procedurze skalowania funkcji jądra. Procedura taka jest dopuszczalna, gdyż parametr skali w jądrowym estymatorze funkcji gęstości nie jest jednoznacznie określony. Oznacza to, że dla określonej funkcji jądra  $K(u)$  możliwe jest, dla pewnej stałej  $b$ , zdefiniowanie alternatywnej funkcji jądra  $K^*(u) = \frac{1}{b}K\left(\frac{u}{b}\right)$ . Funkcje jądra  $K(u)$  i  $K^*(u)$  są nazwane równoważnymi funkcjami jądra, ponieważ dostarczają takich samych estymatorów funkcji gęstości. Estymator funkcji gęstości z funkcją jądra  $K(u)$  i parametrem wygładzania  $h$  jest taki sam jak estymator funkcji gęstości z funkcją jądra  $K^*(u)$  i parametrem wygładzania  $h^* = \frac{h}{b}$ .

W rozważanej grupie klasycznych funkcji jądra, przy  $n \rightarrow +\infty$ , oraz przyjmując założenie, że nieznaną funkcją gęstości jest dwukrotnie różniczkowalna, dla której:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( f^{(2)}(x) \right)^2 dx < +\infty, \quad (2.9)$$

w klasie funkcji symetrycznych i całkowalnych w kwadracie, funkcja jądra Epanechnikowa traktowana jako optymalna w sensie błędu średniokwadratowego MSE (Wand, Jones, 1995; Gajek, Kałuszka, 1996, Kulczycki, 2005).

## 2.3. Funkcje jądra wyższych rzędów

Funkcje jądra o rzędzie  $k > 2$  (por. wzór (1.18)) są określane jako funkcje jądra wyższych rzędów. Funkcje te nie zawsze są nieujemne i nie są funkcjami gęstości, co powoduje, że estymatory jądrowe funkcji gęstości wykorzystujące funkcje jądra wyższych rzędów nie zawsze są nieujemne i dlatego nie posiadają własności charakterystycznych dla funkcji gęstości. Możliwe jest jednak podejście polegające na usunięciu części estymatora, która jest ujemna, a następnie dokonaniu takiego przeskalowania, by całość estymatora wynosiła jeden (por. Hall, Murison, 1993).

Funkcje jądra wyższych rzędów są często wykorzystywane zarówno do estymacji funkcji gęstości, jak i do estymacji pochodnych funkcji gęstości. Wynika to z faktu, że wzrost rzędu funkcji jądra powoduje lepsze własności estymatora jądrowego, szczególnie w przypadku dużych prób. Wymagane są one w niektórych tzw. automatycznych procedurach wyboru parametru wygładzania, jak również stosowane są w celu redukcji rzędu zbieżności obciążenia estymatora jądrowego, prowadząc do szybszej zbieżności dla miary *MISE*.

Niech  $K_{2r}$  ( $r \geq 1$  jest liczbą całkowitą) oznacza ograniczoną,  $\nu$ -krotnie ( $\nu \geq 0$  jest liczbą całkowitą) różniczkowalną funkcję jądra rzędu  $2r$ , dla której

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_{2r}(u) du = 1. \text{ Rząd funkcji jądra wskazuje bezpośrednio na } (2r - 1) \text{ pierwszych}$$

równych zero momentów, co oznacza, że:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^k K(u) du = 0 \text{ dla } k < 2r \quad (2.10)$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{2r} K(u) du \neq 0. \quad (2.11)$$

Ponieważ dla symetrycznych funkcji jądra momenty nieparzyste są równe zero, rozważane są jedynie funkcje jądra o rzędach parzystych.

Funkcje jądra wyższych rzędów mogą być konstruowane na podstawie gausowskiej funkcji jądra, która jest funkcją jądra drugiego rzędu (Wand, Schucany, 1990). Charakteryzują się one odpowiednią gładkością oraz wygodną postacią uwzględniającą splot funkcji. Ich efektywność jest porównywalna do efektywności optymalnych wielomianowych funkcji jądra, szczególnie w przypadku, gdy rząd pochodnej estymowanej funkcji gęstości jest mały.

Uogólnienie tego podejścia polega na konstrukcji funkcji jądra wyższych rzędów na podstawie funkcji jądra niższych rzędów, co po raz pierwszy zostało zaproponowane przez Schucany'ego i Sommersa w przykładzie dotyczącym uogól-

nionej metody jackknife (Wand, Schucany, 1990; Kim i in., 2003). Zgodnie z tym podejściem funkcja jądra czwartego rzędu jest następująca:

$$K_{4,c}(u) = \frac{K_2(u) - c^3 K_2(cu)}{1 - c^2}, \quad (2.12)$$

gdzie  $c > 0$  oraz  $K_2$  jest funkcją jądra drugiego rzędu.

W szczególnym przypadku, gdy  $K_2$  jest gaussowską funkcją jądra drugiego rzędu, gaussowska funkcja jądra czwartego rzędu ma postać:

$$G_{4,c}(u) = \frac{\varphi(u) - c^3 \varphi(cu)}{1 - c^2}, \quad (2.13)$$

gdzie  $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{u^2}{2}\right)}$ .

Wartością minimalizującą asymptotyczny scałkowany błąd średniokwadratowy  $AMISE$  jest  $c = 1$ , dla której funkcja jądra ma postać:  $G_4(u) = \frac{(3 - u^2)\varphi(u)}{2}$ .

Gaussowska funkcja jądra rzędu  $2r$  ( $r \geq 1$ ) jest określona jako:

$$G_{2r}(u) \equiv Q_{2r-2}\varphi, \quad (2.14)$$

gdzie  $Q_{2r-2}$  jest wielomianem stopnia  $(2r - 2)$ .

Funkcja jądra  $G_4(u)$  jest funkcją jądra rzędu czwartego, gdzie  $Q_{2r-2}$  jest wielomianem drugiego stopnia. W pracy Wanda i Schucany'ego (1990) wykazano, że istnieje jeden taki wielomian  $Q_{2r-2}$  stopnia mniejszego lub równego  $(2r - 2)$ , dla którego  $G_{2r}(u)$  jest funkcją jądra rzędu  $2r$ .

W tablicy 2.2 przedstawione są gaussowskie funkcje jądra wybranych rzędów parzystych.

**Tablica 2.2.** Gaussowskie funkcje jądra rzędu 2, 4, 6, 8 i 10

Rząd gaussowskiej funkcji jądra $2r$	$G_{2r}(u)$
2	$G_2(u) = \varphi(u)$
4	$G_4(u) = \frac{(3 - u^2)\varphi(u)}{2}$
6	$G_6(u) = \frac{(15 - 10u^2 + u^4)\varphi(u)}{8}$

Rząd gaussowskiej funkcji jądra $2r$	$G_{2r}(u)$
8	$G_8(u) = \frac{(105 - 105u^2 + 21u^4 - u^6)\varphi(u)}{48}$
10	$G_{10}(u) = \frac{(945 - 1260u^2 + 378u^4 - 36u^6 + u^8)\varphi(u)}{384}$

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Wand, Schucany (1990).

Hansen (2005) wykazał, że na wielkość błędu *MISE* w niewielkim stopniu wpływa wybór między gaussowską funkcją jądra i wielomianową gładką funkcją jądra, podczas gdy wybór rzędu funkcji jądra ma duży wpływ na błąd *MISE*. Kryterium wyboru rzędu funkcji jądra zaproponowane przez Hansena (2005) jest funkcją jedynie liczebności próby, a oparte jest na minimalizacji maksymalnego odsetka odchylenia między rzeczywistym błędem *MISE* i optymalnym *MISE* z całego zbioru różnych funkcji gęstości.

## 2.4. Gładkie wielomianowe funkcje jądra

Gładka wielomianowa funkcja jądra jest określona dla funkcji jądra  $s$ -gładkich ( $s = \mu + 1$ ) i funkcji jądra drugiego rzędu w następujący sposób:

$$K_s(u) = \begin{cases} \frac{(2s+1)!!}{2^{s+1}s!} (1-u^2)^s & \text{dla } |u| \leq 1, \\ 0 & \text{dla } |u| > 1, \end{cases} \quad (2.15)$$

gdzie:

$$n!! = \begin{cases} 1 & \text{dla } n=0 \text{ lub } n=1, \\ n(n-2)!! & \text{dla } n \geq 2. \end{cases}$$

Wraz ze wzrostem wartości  $s$ , funkcja jądra jest bardziej wygładzona, co bezpośrednio skutkuje tym, że estymator funkcji gęstości jest bardziej wygładzony i posiada więcej pochodnych. Klasa gładkich wielomianowych funkcji jądra zawiera funkcję jądra jednostajną ( $s = 0$ ), Epanecznikowa ( $s = 1$ ), dwuwagową ( $s = 2$ ), trójwagową ( $s = 3$ ) oraz dla  $s \rightarrow +\infty$  gaussowską funkcję jądra. Estymator funkcji gęstości z gaussowską funkcją jądra jako szczególnym przypadkiem, dla  $s \rightarrow +\infty$ , funkcji jądra wielomianowej, posiada pochodne wszystkich rzędów.

Uogólnieniem gładkiej wielomianowej funkcji jądra (2.15) dla funkcji jądra  $s$ -gładkich o rzędzie  $2r$  jest funkcja jądra postaci:

$$K_{2r,s}(u) = \begin{cases} B_{r,s}(u)K_s(u) & \text{dla } |u| \leq 1, \\ 0 & \text{dla } |u| > 1, \end{cases} \quad (2.16)$$

gdzie:

$$B_{r,s}(u) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)_{r-1} \left(\frac{3}{2} + s\right)_{r-1} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2} + s + r\right)_k u^{2k}}{k!(r-1-k)! \left(\frac{3}{2}\right)_k} \quad (2.17)$$

oraz  $(a)_m = \prod_{j=0}^{m-1} (a+j)$  jest symbolem Pochhammera.

Alternatywnymi postaciami funkcji jądra są (Hansen, 2005):

$$\begin{aligned} B_{r,s}(u) &= (-1)^{r-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_r}{(s+1)_{r-1} \left(s + \frac{1}{2}\right)} u^{-1} C_{2r-1}^{\frac{s+1}{2}}(u) = \\ &= \frac{s!}{\left(s + \frac{1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{r-1} (-1)^m \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m \left(2m + s + \frac{1}{2}\right)}{(s+m)!} C_{2m}^{\frac{s+1}{2}}(u), \end{aligned}$$

gdzie  $C_m^l(u) = \frac{1}{\Gamma(l)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i \Gamma(l+m-i) (2u)^{m-2i}}{i!(m-2i)!}$  jest wielomianem Gegenbauera

oraz  $K_{2r,s}(u) = \sum_{m=0}^{r-1} (-1)^m \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{m+s}}{m! 2^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)_{2m+s}} K_{2m+s}^{(2m)}(u).$

Dla  $s \rightarrow +\infty$  funkcja jądra jest gaussowską funkcją jądra rzędu  $2r$  o postaci

$$G_{2r}(u) = \frac{(-1)^r \varphi^{(2r-1)}(u)}{2^{r-1} (r-1)! u}. \quad (2.18)$$

Dla gładkich wielomianowych funkcji jądra wraz ze wzrostem rzędu  $2r$  funkcją jądra graniczną jest funkcja Dirichleta o nieskończonym rzędzie i ma ona postać:

$$K_{DIR}(u) = \frac{\sin(u)}{\pi u}. \quad (2.19)$$

Wybrane gładkie wielomianowe funkcje jądra czwartego i szóstego rzędu oraz ich charakterystyki  $R(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du$ ,  $\kappa_{2r} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2r} K(u) du$  przedstawione są w tabelicy 2.3.

**Tabela 2.3.** Funkcje jądra  $K_{2r,s}(u)$  i podstawowe charakterystyki  $R(K)$  oraz  $\kappa_{2r}$  dla  $2r = 4$  oraz  $2r = 6$

Funkcja jądra	Postać funkcji jądra	$R(K)$	$\kappa_{2r}$
Epanecznikowa $2r = 4, s = 1$	$K_{4,1}(u) = \frac{15}{8} \left(1 - \frac{7}{3}u^2\right) K_1(u)$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{21}$
Epanecznikowa $2r = 6, s = 1$	$K_{6,1}(u) = \frac{175}{64} \left(1 - 6u^2 + \frac{33}{5}u^4\right) K_1(u)$	$\frac{1575}{832}$	$\frac{5}{429}$
Dwuwagowa $2r = 4, s = 2$	$K_{4,2}(u) = \frac{7}{4} (1 - 3u^2) K_2(u)$	$\frac{805}{572}$	$-\frac{1}{33}$
Dwuwagowa $2r = 6, s = 2$	$K_{6,2}(u) = \frac{315}{128} \left(1 - \frac{22}{3}u^2 + \frac{143}{15}u^4\right) K_2(u)$	$\frac{29295}{14144}$	$\frac{1}{143}$
Trójwagowa $2r = 4, s = 3$	$K_{4,3}(u) = \frac{27}{16} \left(1 - \frac{11}{3}u^2\right) K_3(u)$	$\frac{3780}{2431}$	$-\frac{3}{143}$
Trójwagowa $2r = 6, s = 3$	$K_{6,3}(u) = \frac{297}{128} \left(1 - \frac{26}{3}u^2 + 13u^4\right) K_3(u)$	$\frac{301455}{134368}$	$\frac{1}{221}$
Gaussowska $2r = 4$	$K_{4,\varphi}(u) = \frac{1}{2} (3 - u^2) K_\varphi(u)$	$\frac{27}{32\sqrt{\pi}}$	-3
Gaussowska $2r = 6$	$K_{6,\varphi}(u) = \frac{1}{8} (15 - 10u^2 + u^4) K_\varphi(u)$	$\frac{2265}{2048\sqrt{\pi}}$	15

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Hansen (2009).

## 2.5. Funkcje jądra o najmniejszej wariancji

Funkcja jądra minimalizująca asymptotyczną wariancję estymatora jądrowego jest wielomianem rzędu  $(k - 2)$  na przedziale  $[-1, 1]$ . Wielomian ten jest symetryczny dla  $k$  parzystego, natomiast dla  $k$  nieparzystego wielomian ten jest niesymetryczny.

Ma on następującą postać (Poměnková, 2008):

$$K(u) = \frac{(-1)^v v!}{2} \sum_{i=v}^{k-2} (2i+1) p_v^i \sum_{r=0}^i p_i^r u^r, \quad (2.20)$$

gdzie  $\sum_{r=0}^i p_r^i u^r = P_i(x)$  jest wielomianem Legendre'a stopnia  $i$ .

Przykłady funkcji jądra o najmniejszej wariancji są przedstawione w tablicy 2.4.

**Tablica 2.4.** Wybrane funkcje jądra o najmniejszej wariancji

Parametry $S_{v,k}$	Postać funkcji jądra
$v = 0, k = 2$ (jednostajna funkcja jądra)	$K_f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$v = 1, k = 3$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{3}{2}u & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$v = 1, k = 3$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{15}{4}u(1-u^2) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$v = 2, k = 4$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{15}{4}(1-3u^2) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$v = 2, k = 4$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{105}{16}(1-u^2)(1-5u^2) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$

**Źródło:** opracowanie własne na podstawie: Horová i in. (2012).

Funkcje jądra o najmniejszej wariancji mają małe znaczenie praktyczne ze względu na ich niekorzystne własności blisko krańców nośnika.

## 2.6. Funkcje jądra optymalne

Optymalność funkcji jądra wyższych rzędów jest ściśle związana z efektywnością estymatora jądrowego, stąd w literaturze rozważane są różne miary (Hansen, 2005; Jones, Signorini, 1997).

Niech funkcja jądra  $K \in S_{\nu, k}$ , gdzie  $S_{\nu, k}$  jest określone w podrozdziale 1.2,  $0 \leq \nu \leq k - 2$  oraz  $\nu$  i  $k$  są jednocześnie parzyste albo nieparzyste,  $(\nu + k)$  jest parzyste. Funkcja jądra jest określana jako optymalna, gdy jest wielomianem rzędu  $k$ , gdzie  $k$  jest rzędem funkcji jądra (Horová i in., 2012).

Założmy, że funkcja jądra  $K \in S_{\nu, k}$  spełnia warunek minimalnej liczby zmian znaków, określającej dokładnie  $(k - 2)$  zmian znaków na przedziale  $[-1, 1]$ . Oznacza to, że dla funkcji jądra  $K$  określonej na przedziale  $[-1, 1]$  istnieje  $(k - 1)$  przedziałów  $[x_{i-1}, x_i] \subset [-1, 1]$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$ ,  $x_0 = -1$ ,  $x_{k-1} = 1$ , że:

$K(x)K(y) \geq 0$  dla wszystkich  $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, k - 1$  oraz  $K(x)K(y) \leq 0$  dla wszystkich  $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $y \in [x_i, x_{i+1}]$   $i = 1, \dots, k - 3$  (Horová, 2015).

Funkcja jądra optymalna  $K$  jest funkcją minimalizującą wyrażenie (Müller, 1984):

$$T(K) = \left[ \left| \int_{-1}^1 x^k K(x) dx \right|^{2\nu+1} \left( \int_{-1}^1 K^2(x) dx \right)^{k-\nu} \right]^{\frac{2}{2k+1}} = \left[ \left| \kappa_k \right|^{2\nu+1} \kappa^{k-\nu} \right]^{\frac{2}{2k+1}}, \quad (2.21)$$

gdzie  $\kappa_k = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k K(u) du$ , natomiast  $\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du$ ,

przy założeniu, że funkcja jądra  $K \in S_{\nu, k}$  ma dokładnie  $(k - 2)$  zmian znaków na przedziale  $[-1, 1]$ .

Minimalizacja  $T(K)$  dla  $\nu = 0$  i  $k = 2$  wraz z dodatkowym warunkiem  $K(u) \geq 0$  została wykorzystana do wykazania optymalności funkcji jądra zwanej funkcją jądra Epanecznikowa.

Oznaczmy przez

$$K_\delta(u) = \frac{1}{\delta^{\nu+1}} K(u), \quad (2.22)$$

gdzie  $K \in S_{\nu, k}$ ,  $\delta > 0$ .

Funkcjonał  $T(K)$  jest niezmienniczy ze względu na transformację:

$$K(\cdot) \rightarrow \frac{1}{\delta^{\nu+1}} K\left(\frac{\cdot}{\delta}\right) = K_\delta(\cdot).$$

Funkcje jądra  $K$  i  $K_\delta$  są określane jako równoważne funkcje jądra.

Optymalne wielomiany  $K$  stopnia  $k$  mają postać:

$$K(u) = \frac{(-1)^{\nu} \nu!}{2} \sum_{i=\nu}^{k-2} (2i+1) P_{\nu}^i \left( \sum_{r=0}^i P_r^i u^r - \sum_{r=0}^k P_r^k u^r \right), \quad (2.23)$$

gdzie  $\sum_{r=0}^i P_r^i u^r = P_i(x)$ ,  $\sum_{r=0}^k P_r^k u^r = P_k(x)$  są wielomianami Legendre'a odpowiednio stopnia  $i$  oraz  $k$ .

Przykłady funkcji jądra optymalnych są przedstawione w tabelicy 2.5.

**Tabela 2.5.** Wybrane funkcje jądra optymalne

Klasa $S_{\nu,k}$	Postać funkcji jądra
$\nu = 0$	
$S_{0,2}$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{3}{4}(u^2 - 1) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{0,4}$	$K(u) = \begin{cases} \frac{15}{32}(u^2 - 1)(7u^2 - 3) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{0,6}$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{105}{256}(u^2 - 1)(33u^4 - 30u^2 + 5) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{0,8}$	$K(u) = \begin{cases} \frac{315}{4096}(u^2 - 1)(715u^6 - 1001u^4 + 385u^2 - 35) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{0,10}$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{3465}{65536}(u^2 - 1)(4199u^8 - 7956u^6 + 4914u^4 - 1092u^2 + 63) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$\nu = 1$	
$S_{1,3}$	$K(u) = \begin{cases} \frac{15}{4}u(u^2 - 1) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{1,5}$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{105}{32}u(u^2 - 1)(9u^2 - 5) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$

Klasa $S_{\nu,k}$	Postać funkcji jądra
$S_{1,7}$	$K(u) = \begin{cases} \frac{315}{256}u(u^2-1)(143u^4-154u^2+35) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{1,9}$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{3465}{4096}u(u^2-1)(1105u^6-17551u^4+819u^2-105) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{1,11}$	$K(u) = \begin{cases} \frac{45045}{65536}u(u^2-1)(260015u^8-14212u^6+10098u^4-2772u^2+231) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$\nu = 2$	
$S_{2,4}$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{105}{16}(u^2-1)(5u^2-1) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{2,6}$	$K(u) = \begin{cases} \frac{315}{64}(u^2-1)(77u^4-58u^2+5) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{2,8}$	$K(u) = \begin{cases} -\frac{3465}{2048}(u^2-1)(1755u^6-2249u^4+721u^2-35) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$

**Źródło:** opracowanie własne na podstawie: Poměnková (2008); Horová i in. (2012).

Wykorzystując odpowiednie własności wielomianu Legendre’a, można wykazać, że dla nośnika funkcji  $[-1, 1]$ , pierwsza pochodna funkcji jądra optymalnej o parametrach  $\nu, k$  i parametrze gładkości  $\mu = 0$  jest funkcją jądra o najmniejszej wariancji, gdzie  $\nu + 1$  i  $k + 1$  są liczbami całkowitymi jednocześnie parzystymi lub nieparzystymi.

Uwzględniając określenie gładkich funkcji jądra z rozdziału pierwszego, możliwa jest konstrukcja funkcji jądra gładkich optymalnych. Przykłady funkcji jądra optymalnych gładkich są przedstawione w tabelicy 2.6.

**Tablica 2.6.** Wybrane funkcje jądra optymalne gładkie

Klasa $S_{\nu,k}^{\mu}$	Przykład funkcji jądra z klasy $S_{\nu,k}^{\mu}$
$S_{0,2}^1$ Dwuwagowa	$K_{Dw}(u) = \begin{cases} \frac{15}{16}(1-u^2)^2 & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$

Tablica 2.6. cd.

Klasa $S_{v,k}^{\mu}$	Przykład funkcji jądra z klasy $S_{v,k}^{\mu}$
$S_{0,2}^2$ Trójwagowa	$K_{TW}(u) = \begin{cases} \frac{35}{32}(1-u^2)^3 & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{2,4}^0$ Druga pochodna trójwagowej	$K_{TW}^{(2)}(u) = \begin{cases} -\frac{105}{16}(u^2-1)(5u^2-1) & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$
$S_{1,3}^1$	$K(u) = \begin{cases} \frac{105}{16}u(u^2-1)^2 & \text{dla }  u  \leq 1, \\ 0 & \text{dla }  u  > 1 \end{cases}$

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Müller (1984); Horová i in. (2012).

Można zauważyć, że jeżeli  $K \in S_{0,k}^{\mu}$ , wówczas  $K^{(v)} \in S_{v,k+v}^0$ .

Dla  $k$  nieparzystych funkcja jądra jest symetryczna, dla nieparzystych wartości  $k$  funkcja jądra jest asymetryczna.

Funkcje jądra optymalne mogą być również konstruowane dla innych nośników funkcji jądra niż  $[-1, 1]$ . Nośnik może być określony jako  $[-q, 1]$  dla funkcji jądra optymalnej z prawym brzegiem, natomiast  $[-1, q]$  dla funkcji jądra optymalnej z lewym brzegiem.

Dla nośnika  $[-1, q]$ ,  $0 < q < 1$ , klasa funkcji jądra jest określona w następujący sposób (Poměnková, 2008):

$$S_{v,k,L} = \begin{cases} K \in C^1[-1, q], & \text{dla nośnika } [-1, q], \\ \int_{-1}^q x^j K(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq j \leq k-1, j \neq v, \\ (-1)^v v! & \text{dla } j = v, \\ \kappa_k \neq 0 & \text{dla } j = k. \end{cases} \end{cases} \quad (2.24)$$

Dla funkcji jądra  $K \in S_{v,k,L}$  zachodzi  $K(-1) = K(q) = 0$ .

Przykłady funkcji jądra optymalnych z lewym brzegiem są przedstawione w tablicy 2.7.

Tablica 2.7. Wybrane funkcje jądra optymalne z lewym brzegiem

Klasa $S_{v,k,L}$	Postać funkcji jądra z lewym brzegiem
$S_{0,4,L}$	$K(u) = \begin{cases} 58,3549u^5 + 85,4375u^4 - 0,0332u^3 - 32,7080u^2 + \\ -2,9910u + 2,6291 & \text{dla } u \in [-1; 0,2679], \\ 0 & \text{dla } u \notin [-1; 0,2679] \end{cases}$
$S_{0,6,L}$	$K(u) = \begin{cases} 10^4(0,3107u^7 + 0,9405u^6 + 1,0040u^5 + 0,4011u^4 + \\ +7,1680 \cdot 10^{-17}u^3 - 0,0290u^2 - 0,0016u + 0,0005) & \text{dla } u \in [-1; 1,1303], \\ 0 & \text{dla } u \notin [-1; 1,1303] \end{cases}$
$S_{0,6,L}$	$K(u) = \begin{cases} -177,4043u^7 - 237,8810u^6 + 131,8714u^5 + 241,9009u^4 + \\ -6,9026 \cdot 10^{-15}u^3 - 54,7696u^2 - 2,0280u + 3,1887) & \text{dla } u \in [-1; 0,4075], \\ 0 & \text{dla } u \notin [-1; 0,4075] \end{cases}$
$S_{0,8,L}$	$K(u) = \begin{cases} 10^5(1,0074u^9 + 4,2709u^8 + 7,3114u^7 + 6,3922u^6 + 2,9240u^5 + 0,5931u^4 + \\ -6,5125 \cdot 10^{-16}u^3 - 0,0140u^2 - 0,0005u + 0,0001) & \text{dla } u \in [-1; 0,0779], \\ 0 & \text{dla } u \notin [-1; 0,0779] \end{cases}$
$S_{0,8,L}$	$K(u) = \begin{cases} 10^4(-1,1024u^9 - 3,6208u^8 - 4,0740u^7 - 1,3609u^6 + 0,5880u^5 + 0,41911u^4 + \\ +6,5070 \cdot 10^{-16}u^3 - 0,0291u^2 - 0,0008u + 0,0006) & \text{dla } u \in [-1; 0,2290], \\ 0 & \text{dla } u \notin [-1; 0,2290] \end{cases}$
$S_{0,8,L}$	$K(u) = \begin{cases} 10^3(0,5923u^9 + 0,6862u^8 - 0,9995u^7 - 1,3576u^6 + 0,2463u^5 + 0,5957u^4 + \\ +2,6257 \cdot 10^{-16}u^3 - 0,0906u^2 - 0,0017u + 0,0038) & \text{dla } u \in [-1; 0,5019], \\ 0 & \text{dla } u \notin [-1; 0,5019] \end{cases}$
$S_{1,5,L}$	$K(u) = \begin{cases} 10^3(-1,0375u^6 - 1,6271u^5 - 6,0590 \cdot 10^{-16}u^4 + \\ +0,7944u^3 + 0,1277u^2 - 0,0824u - 0,0053) & \text{dla } u \in [-1; 0,3139], \\ 0 & \text{dla } u \notin [-1; 0,3139] \end{cases}$

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Poměnkova (2008).

## 2.7. Kanoniczne funkcje jądra

W literaturze przedmiotu określa się klasę funkcji jąder równoważnych, które prowadzą do identycznego estymatora jądrowego gęstości. Możliwe jest określenie pewnej operacji przeskalowania funkcji jądra  $K \in S_{0,k}$ , w taki sposób, by funkcje jądra otrzymane w wyniku tego przeskalowania stanowiły funkcje jądra równoważne dla odpowiednio dobranego parametru wygładzania  $h$ . Niech  $K(u)$  będzie funkcją jądra spełniającą warunki (2.5)–(2.8) oraz niech  $K_\delta(u) = \frac{1}{\delta} K\left(\frac{u}{\delta}\right)$  (dla  $\delta > 0$ ) będzie pewną formą przeskalowania funkcji jądra. Niech  $\hat{f}_h$  oznacza estymator jądrowy z funkcją jądra  $K \in S_{0,k}$  i parametrem wygładzania  $h$ , natomiast  $\tilde{f}_{\tilde{h}}$  oznacza estymator jądrowy z funkcją jądra  $K_\delta(u)$  i parametrem wygładzania  $\tilde{h}$ .

Dla  $h = \tilde{h}\delta$  zachodzi:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right) = \frac{1}{n\tilde{h}\delta} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{\tilde{h}\delta}\right) = \tilde{f}_{\tilde{h}}(x). \quad (2.25)$$

Oznacza to, że różne wartości  $\delta$  odpowiadają różnym elementom klasy funkcji jądra równoważnych.

Dla estymatora jądrowego funkcji gęstości błąd *AMISE* (dla  $k = 2$ ) przyjmuje następującą postać:

$$AMISE[\hat{f}(x)] = \frac{h^4 \kappa_2^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(2)}(x)]^2 dx + \frac{\kappa}{nh},$$

$$\text{gdzie: } \kappa_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du, \quad \kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du.$$

Nie jest zatem możliwa bezpośrednia optymalizacja błędu *AMISE* jedynie ze względu na funkcję jądra, co spowodowane jest powiązaniem funkcji jądra i parametru wygładzania w postaci błędu *AMISE*.

Dla pewnej klasy funkcji jądra  $K_{\gamma_{0k}}(u)$ ,  $K \in S_{0,k}$  błąd ten jest następujący:

$$AMISE[\hat{f}_{K_{\gamma_{0k}}}(x)] = \frac{\tilde{h}^4 \kappa_2^2(K_{\gamma_{0k}})}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(2)}(x)]^2 dx + \frac{\kappa(K_{\gamma_{0k}})}{n\tilde{h}}, \quad (2.26)$$

$$\text{gdzie: } \kappa_2(K_{\gamma_{0k}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K_{\gamma_{0k}}(u) du, \quad \kappa(K_{\gamma_{0k}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\gamma_{0k}}^2(u) du.$$

Dla funkcji jądra  $K \in S_{0,k}$ ,  $\gamma_{0k}$  jest czynnikiem kanonicznym. Jest on określony jako  $\gamma_{v,k} = \left(\frac{\kappa}{\kappa_k^2}\right)^{\frac{1}{2k+1}}$ . Funkcja jądra  $K_{\gamma_{0k}}$  natomiast jest funkcją jądra kanoniczną, dla której  $\kappa(K_{\gamma_{0k}}) = \kappa_2^2(K_{\gamma_{0k}})$ .

W  $AMISE[\hat{f}_{K_\delta}(x)]$  występują wyrażenia zależne od  $K_\delta(u)$ , to znaczy:  $\kappa_2^2(K_\delta)$  oraz  $\kappa(K_\delta)$ . Podejście oznaczające oddzielenie zagadnień wyboru parametru wygładzania  $h$  i wyboru funkcji jądra  $K$  polega na poszukiwaniu takiej wartości  $\delta$ , by spełniona była równość  $\kappa(K_\delta) = \kappa_2^2(K_\delta)$ .

Dla kanonicznej funkcji jądra dla klasy równoważnych funkcji jądra  $K_{\delta_0}$ , dla której możliwe jest oddzielenie funkcji jądra i parametru wygładzania, realne jest określenie takiego parametru wygładzania  $\delta_0$ , zwanego parametrem kanonicznym, który jest wyznaczony z równości  $\kappa(K_\delta) = \kappa_2^2(K_\delta)$  i przyjmuje on

$$\text{postać: } \delta_0 = \left( \frac{\kappa}{\kappa_2^2} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

Dla funkcji jądra  $K \in S_{v,k}$  czynnik kanoniczny ma postać:  $\delta_{v,k} = \left( \frac{\kappa}{\kappa_2^2} \right)^{\frac{1}{2k+1}}$ , a miara  $AMISE$ :

$$AMISE[\hat{f}_{K_{\gamma_0 k}}(x)] = \frac{\tilde{h}^{2k} \kappa_k^2(K_{\gamma_0 k})}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(k)}(x)]^2 dx + \frac{\kappa(K_{\gamma_0 k})}{n\tilde{h}}.$$

Wartości kanonicznych parametrów wygładzania dla wybranych funkcji jądra przedstawia tabela 2.8.

**Tablica 2.8.** Kanoniczny parametr wygładzania dla wybranych funkcji jądra

Funkcja jądra	Kanoniczny parametr $\delta_0$
Jednostajna	$\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,3510$
Trójkątna	$\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,3510$
Epanecznikowa	$15^{\frac{1}{5}} \approx 1,7188$
Dwuwagowa	$35^{\frac{1}{5}} \approx 2,0362$
Trójwagowa	$\left(\frac{9450}{143}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 2,3122$
Gaussowska	$\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 0,7764$
Kosinusowa	$\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{5}} \approx 1,3510$

Źródło: Härdle i in. (2004).

Błąd *AMISE* z funkcją jądra  $K_{\delta_0}$  ma postać:

$$AMISE \left[ \hat{f}_{K_{\delta_0}}(x) \right] = \left\{ \frac{1}{nh} + \frac{1}{4} h^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f^{(2)}(x) \right]^2 dx \right\} T(K), \quad (2.27)$$

$$\text{gdzie: } T(K) = \frac{1}{\delta_0} \kappa(K_{\delta}) = \delta_0^4 \kappa_2^2(K_{\delta}) = \left\{ \kappa^4(K_{\delta}) \kappa_2^2(K_{\delta}) \right\}^{\frac{1}{5}}. \quad (2.28)$$

Oznacza to, że jedynie stała multiplikatywna  $T(K)$  jest zależna od funkcji jądra. Stała ta jest różna dla różnych postaci funkcji jądra, ale nie ma wpływu na własności *AMISE*. Stała  $T(K)$  jest niezmiennicza od reskalowania funkcji jądra. Oznacza to, że  $T(K_{\delta_1}) = T(K_{\delta_2})$  dla  $\delta_1, \delta_2 > 0$ .

Miara *AMISE* jest asymptotycznie równa dla różnych równoważnych klas wtedy, gdy będzie wykorzystana funkcja jądra  $K_{\delta_0}$  jako reprezentant dla każdej klasy. Zastosowanie  $K_{\delta_0}$  zapewnia taki poziom gładkości, jaki jest asymptotycznie równy dla różnych klas równoważnych funkcji jądra (dla takiego samego parametru wygładzania). Pozwala to na dokonanie porównania estymatorów gęstości, gdyż zastosowanie takiego samego parametru wygładzania  $h$ , ale różnych funkcji jądra  $K^A$  i  $K^B$ , nie skutkuje zawsze estymatorami o takim samym stopniu wygładzenia. Natomiast zastosowanie parametru wygładzania  $h$ , ale z kanonicznymi wersjami funkcji jądra  $K^A$  i  $K^B$ , powoduje, że estymatory gęstości charakteryzują się takim samym poziomem wygładzenia.

Własność powyższa pozwala na dokładne określenie zależności między parametrami wygładzania  $h_A$  i  $h_B$  stosowanymi do estymacji z identycznym poziomem gładkości estymatora dla dwóch różnych funkcji jądra  $K^A$  i  $K^B$ , gdzie  $A$  i  $B$  określają

$$h_B = h_A \frac{\delta_0^B}{\delta_0^A} \quad \text{dla } \delta_0^A \text{ i } \delta_0^B, \text{ przedstawionych w tabelicy 2.8.}$$

Funkcje jądra kanoniczne są użyteczne również w wyznaczeniu funkcji jądra optymalnej. Błąd *AMISE* z funkcją jądra  $K_{\delta_0}$  zależy od funkcji jądra tylko poprzez stałą multiplikatywną  $T(K)$ , co oznacza, że optymalna funkcja jądra to ta, która minimalizuje  $T(K)$ . Jednocześnie w ten sposób dokonane jest oddzielenie wyboru parametru wygładzania od wyboru funkcji jądra. Funkcja jądra minimalizująca  $T(K)$ , czyli minimalizująca *AMISE* ze względu na funkcję jądra, dla nieujemnej funkcji jądra spełniającej warunki  $\int_{-\infty}^{+\infty} K(u) du = 1$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} uK(u) du = 0$

i  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du = \kappa_2 > 0$ , ma postać (Hodges, Lehmann, 1956):

$$K(u) = \begin{cases} \frac{3}{4} \left( \frac{1}{5^{\frac{1}{2}} \sqrt{\kappa_2}} \right) \left( \frac{1-u^2}{5\kappa_2} \right) & \text{dla } |u| \leq 5^{\frac{1}{2}} \sqrt{\kappa_2}, \\ 0 & \text{dla } |u| > 5^{\frac{1}{2}} \sqrt{\kappa_2}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Dla  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du = \kappa_2 = \frac{1}{5}$  funkcja jądra jest funkcją jądra Epanecznikowa o postaci:

$$K_E(u) = \begin{cases} \frac{3}{4} (1-u^2) & \text{dla } |u| \leq 1, \\ 0 & \text{dla } |u| > 1. \end{cases}$$

Dowód przedstawiony w pracy Devroya i Györfiego (1985).

Tablica 2.9. prezentuje wartości  $T(K)$  dla wybranych funkcji jądra oraz wartości dwóch miar efektywności funkcji jądra  $K$ :  $Ef_1 = \frac{T(K)}{T(K_E)}$  oraz  $Ef_2 = \left\{ \frac{T(K_E)}{T(K)} \right\}^{\frac{5}{4}}$ .

**Tablica 2.9.** Wartości  $T(K)$  oraz miary efektywności dla wybranych funkcji jądra

Funkcja jądra	$T(K)$	$Ef_1$	$Ef_2$
Jednostajna	0,3701	1,0602	0,9300
Trójkątna	0,3531	1,0114	0,9860
Epanecznikowa	0,3491	1,0000	1,0000
Dwuwagowa	0,3507	1,0049	0,9940
Trójwagowa	0,3699	1,0595	0,9870
Gaussowska	0,3633	1,0408	0,9510
Kosinusowa	0,3494	1,0004	0,9990

**Źródło:** opracowanie własne na podstawie: Härdle i in. (2004); Wand, Jones (1995).

Można zauważyć, że „straty” wynikające z zastosowania funkcji jądra innej niż optymalna (Epanecznikowa) są niewielkie. Funkcja jądra jednostajna ze względu nie tylko na małą wartość miary efektywności  $Ef_2$ , ale również ze względu na to, że estymator wykorzystujący jednostajną funkcję jądra jest „kawałkami” stały, nie jest często stosowana w praktyce. Wybór funkcji jądra może być dokonywany uwzględniając inne charakterystyki, na przykład efektywność obliczeniową, a nie tylko optymalność.

Efektywność  $Ef_2$  przedstawia iloraz dwóch liczebności prób: liczebności próby dla minimalnej wartości  $AMISE$  dla funkcji jądra Epanecznikowa oraz liczebności próby dla funkcji jądra  $K$ . Oznacza to, że w estymacji funkcji gęstości z optymalną funkcją jądra Epanecznikowa wymagane jest zaledwie 95,1% obserwacji, gdy estymacja gęstości dokonywana jest z wykorzystaniem gaussowskiej funkcji jądra przy warunku, że błąd  $AMISE$  jest minimalny.

## 2.8. Asymetryczne sześciennie funkcje jądra

Klasa asymetrycznych standaryzowanych (z wariancją równą 1) funkcji jądra o współczynniku asymetrii  $w$  może być przedstawiona jako (Abadir, Lawford, 2004):

$$K_w(u) = \begin{cases} \alpha(u - \lambda_1)(u - \lambda_2)(u - \lambda_3) & \text{dla } u \in (\lambda_1, \lambda_2), \\ 0 & \text{dla } u \notin (\lambda_1, \lambda_2), \end{cases} \quad (2.30)$$

gdzie:

$$w = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u^3 K_w(u) du,$$

$$\alpha = \frac{12(r-1)(r^2 - 3r + 1)^2}{5(r+1)^5},$$

$$\lambda_1 = -\sqrt{\frac{5}{-r^2 + 3r - 1}},$$

$$\lambda_2 = r\sqrt{\frac{5}{-r^2 + 3r - 1}},$$

$$\lambda_3 = r \frac{3 - 4r + 3r^2}{(r-1)\sqrt{5(-r^2 + 3r - 1)}},$$

$$r = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Dla  $w \in (0; 0,29]$  funkcja jądra minimalizuje błąd  $MISE$ .

Dla  $w = 0$  jest to funkcja Epanecznikowa.

Abadir i Lawford (2004) zaproponowali asymetryczne funkcje jądra i przeanalizowali ich podstawowe własności. Wykazali, że dla prób o umiarkowanych

liczebnościach estymatory funkcji gęstości dążą do nabywania najistotniejszych własności ich funkcji jądra. Wykazano, że optymalną asymetryczną funkcją jądra jest sześcienna funkcja jądra ze średnią zero.

Własności asymptotyczne asymetrycznych funkcji jądra wraz z określeniem rozkładu granicznego klasy asymetrycznych funkcji jądra przedstawione są w pracy Fernandes i Monteiro (2005) poprzez zastosowanie niecentralnego twierdzenia granicznego dla zdegenerowanej  $U$ -statystyki ze zmienną funkcją jądra.

## 2.9. Funkcje jądra stosowane w estymacji funkcji gęstości z ograniczonym nośnikiem

Klasa symetrycznych funkcji jądra beta na przedziale  $[-1, 1]$  określona jest w następujący sposób:

$$K(u; p) = \begin{cases} \frac{(1-u^2)^p}{2^{2p+1} B(p+1, p+1)} & \text{dla } |u| \leq 1, \\ 0 & \text{dla } |u| > 1, \end{cases} \quad (2.31)$$

gdzie  $B(p+1, p+1) = \int_0^1 t^p (1-t)^p dt$  dla  $p+1 > 0$  jest funkcją beta (całką Eulera

I rodzaju). Tak określone funkcje jądra są symetrycznymi funkcjami gęstości beta na przedziale  $[-1, 1]$ .

Dla funkcji jądra określonej przez (2.31) szczególne przypadki w zależności od wartości parametru  $p$  są przedstawione w tablicy 2.10.

**Tablica 2.10.** Funkcje jądra w zależności od wartości parametru  $p$

Wartość parametru $p$	Funkcja jądra
$p = 0$	jednostajna
$p = 1$	Epanecznikowa
$p = 2$	dwuwagowa
$p = 3$	trójwagowa
$p \rightarrow +\infty$	gaussowska

**Źródło:** opracowanie własne na podstawie: Wand, Jones (1995).

Gdy nośnik funkcji gęstości jest nieograniczony  $(-\infty, +\infty)$ , estymator jądrowy gęstości z klasyczną funkcją jądra oraz symetrycznymi funkcjami jądra beta na przedziale  $[-1, 1]$  charakteryzuje się dobrymi własnościami. Przy założeniu, że druga pochodna funkcji gęstości istnieje i jest ciągła w otoczeniu punktu  $x$ , obciążenie estymatora klasycznego dla  $nh \rightarrow 0$  ma postać  $B[\hat{f}(x)] = \frac{1}{2}h^2 f^{(2)}(x) \kappa_2 + o(h^2)$ .

Niestety, gdy funkcja gęstości jest ucięta lewostronnie lub prawostronnie, powyższe określenie obciążenia nie jest prawdziwe. W przypadku gdy funkcja gęstości jest lewostronnie ucięta w punkcie  $x = 0$  obciążenie estymatora w  $x = ch$ ,  $c > 0$  ma postać (Zhang, Karunamuni, 2010):

$$B[\hat{f}(x)] = -f(x) \int_c^{+\infty} K(u) du - hf'(x) \int_{-\infty}^c uK(u) du + \frac{1}{2}h^2 f^{(2)}(x) \int_{-\infty}^c u^2 K(u) du + o(h^2). \quad (2.32)$$

Dla symetrycznej i nieujemnej funkcji jądra i skończonej wartości  $c > 0$  spełnione są nierówności:  $0 < \int_c^{+\infty} K(u) du < 1$  i  $\int_{-\infty}^c uK(u) du \neq 0$ , dlatego estymator jądrowy

nie jest zgodnym estymatorem dla funkcji gęstości. Co więcej, tempo zbieżności obciążenia estymatora klasycznego do zera jest wolniejsze niż zwykle tempo, czyli  $O(h^2)$ . Problem ten jest określany jako problem obciążenia brzegowego w estymacji jądrowej gęstości, natomiast przedział, na który składają się te punkty, zwany jest obszarem brzegowym.

Dla funkcji gęstości z ograniczonym nośnikiem estymator jądrowy gęstości powoduje, niestety, powstanie obciążenia brzegowego.

Dla funkcji gęstości z nośnikiem  $[0, 1]$  Chen (1999, 2000a) zaproponował podejście wykorzystujące funkcję jądra beta określoną na przedziale  $[0, 1]$ , wykorzystujące w konstrukcji estymatora parametr wygładzania  $h$ , spełniający warunki:  $h \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow +\infty$ . Prowadzi to do estymacji jądrowej bez obciążenia brzegowego. W estymacji funkcji gęstości z ograniczonym nośnikiem, na przykład  $[0, 1]$ , dla której istnieje ciągła druga pochodna, funkcja jądra  $K_{B1, \left(\frac{u}{b}+1, \frac{1-u}{b}+1\right)}(u)$ ,

będąca funkcją gęstości rozkładu beta z parametrami  $\frac{u}{b}+1$  oraz  $\frac{1-u}{b}+1$  na przedziale  $[0, 1]$  jest wówczas stosowana. Funkcja ta ma postać:

$$K_{B1, \left(\frac{u}{b}+1, \frac{1-u}{b}+1\right)}(u) = \begin{cases} \frac{u^{\frac{u}{b}} (1-u)^{\frac{1-u}{b}}}{B\left(\frac{u}{h}+1, \frac{1-u}{h}+1\right)} & \text{dla } 0 \leq u \leq 1, \\ 0 & \text{dla } u < 0 \text{ lub } u > 1. \end{cases} \quad (2.33)$$

Odpowiedni wybór parametrów funkcji gęstości rozkładu beta uwzględnia informację, że jeżeli  $x$  jest maksimum lokalnym funkcji jądra beta, to funkcja ta przypisuje maksymalną wagę do obserwacji w estymowanym punkcie. Wówczas estymator jądrowy dla  $x \in [0, 1]$  ma postać:

$$\hat{f}_{B1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{B1, \left(\frac{u}{b}+1, \frac{1-u}{b}+1\right)}(X_i). \quad (2.34)$$

Estymator jądrowy funkcji gęstości (2.34) jest nieujemny, tempo zbieżności wariancji jest mniejsze dla punktów zwanych punktami brzegowymi:  $\frac{x}{h} \rightarrow c$  lub  $\frac{1-x}{h} \rightarrow c$ . Chociaż estymator wykorzystujący funkcję jądra beta jest wolny od obciążenia brzegowego, nie jest wolny od problemów brzegowych spowodowanych wzrastającą wariancją w punktach brzegowych. Estymator ten ma mniejszą wariancję dla skończonych prób w porównaniu z klasycznymi estymatorami uwzględniającymi korekcję obciążenia.

Wystąpienie w wyrażeniu na obciążenie estymatora  $\hat{f}_{B1}(x)$  pierwszej pochodnej funkcji gęstości  $f'(x)$  powoduje, że porównanie estymatora z funkcją jądra beta z innymi klasycznymi estymatorami jest niemożliwe. Chen proponuje zatem następującą brzegową funkcję jądra (Chen, 1999), pozwalającą na korekcję obciążenia, o postaci:

$$K_{B2}(u) = \begin{cases} K_{\left(\frac{u}{b}, \frac{1-u}{b}\right)}(u) & \text{dla } u \in (2h, 1-2h), \\ K_{\left(\rho(u), \frac{1-u}{b}\right)}(u) & \text{dla } u \in [0, 2h], \\ K_{\left(\frac{u}{b}, \rho(1-u)\right)}(u) & \text{dla } u \in [1-2h, 1], \end{cases} \quad (2.35)$$

gdzie:

$$\rho(u) = \rho(u, h) = 2h^2 + 2,5 - \sqrt{4h^4 + 6h^2 + 2,25 - u^2} - \frac{u}{h}. \quad (2.36)$$

Dla każdej ustalonej wartości parametru wygładzania  $h$ ,  $\rho(u, h)$  jest rosnącą funkcją  $u \in [0, 2h]$ . W szczególności posiada styczną  $y = \frac{x}{h}$  w punkcie  $x = 2h$  i  $\rho(0, h) = 1$ .

Estymator jądrowy ma wówczas postać:

$$\hat{f}_{B2}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{B2}(X_i). \quad (2.37)$$

Estymator ten jest zawsze nieujemny, co jest spowodowane tym, że funkcja jądra jest zawsze nieujemna. Kształt funkcji jądra zmienia się w zależności od wartości  $x$  i jest odzwierciedleniem poziomu wygładzenia zastosowanego w estymatorze z funkcją jądra beta, przy czym poziom wygładzenia nie jest spowodowany zmianą wartości parametru wygładzania (w odróżnieniu od innych estymatorów adaptacyjnych). Estymator jest pozbawiony obciążenia brzegowego i charakteryzuje się mniejszą wariancją niż znane w literaturze metody ograniczenia obciążenia. Ma lepsze własności dla próby skończonej niż ograniczony estymator.

Głównymi zaletami estymatora jądrowego z funkcją jądra beta, przede wszystkim, jest nieujemność estymatora, brak obciążenia brzegowego oraz rząd błędu

$MISE$  wynoszący  $O\left(\frac{1}{n^{4/5}}\right)$ , czyli taki sam jak dla estymatora gęstości z klasyczną funkcją jądra.

Kształt funkcji jądra beta zmienia się w zależności od obserwacji, w której dokonywana jest estymacja, w ten sposób, że dostosowanie poziomu wygładzenia w określonych punktach estymacji jest możliwe bez wyraźnej zmiany parametru wygładzania. Dlatego też estymatory gęstości wykorzystujące funkcję jądra beta traktowane są jako adaptacyjne estymatory funkcji gęstości. Nośnik funkcji jądra beta dopasowuje się do nośnika funkcji gęstości, co prowadzi do większej efektywności liczebności próby wykorzystanej w estymacji gęstości i do tego, że estymator gęstości ma mniejszą wariancję.

W konstrukcji funkcji jądra beta wykorzystuje się (Chen, 1999) własność wielomianów Bernsteina, mówiącą, że dla ciągłej funkcji o ograniczonym nośniku zbieżność wielomianów Bernsteina tej funkcji jest jednostajna, co oznacza, że wielomiany Bernsteina nie są obciążone obciążeniem brzegowym. Wielomiany Bernsteina wykorzystują funkcje jądra dwumianowe, które są funkcjami jądra beta i mają zastosowanie w nieparametrycznej estymacji regresji (Chen, 2000a) oraz w estymacji kwantyli (Stone, 1977; Zieliński, 2004).

Klasa uciętych i znormalizowanych funkcji jądra stanowi klasę funkcji powstałych poprzez kombinację dwóch funkcji jądra z gorszymi własnościami związanymi z obciążeniem. Obciążenie estymatora z tak określoną funkcją jądra ma taki sam rząd zbieżności zarówno w środku, jak i w obszarach brzegowych nośnika.

Dla funkcji gęstości z nośnikiem  $[0, +\infty)$  oraz dla funkcji jądra klasycznego  $K(u)$  określonego przez (2.5)–(2.8) konstrukcja uciętych i znormalizowanych funkcji jądra  $K_{cn}(u)$  polega na obcięciu funkcji jądra  $K(u)$  w punkcie  $c$ , a następnie na znormalizowaniu w taki sposób, by  $\int_{-\infty}^c K_{cn}(u) du = 1$ .

Ucięta w  $x = ch$  ( $c \geq 0$ ) i znormalizowana wykładnicza funkcja jądra ma postać:

$$K_{cnExp}(u) = \begin{cases} \frac{\exp(-|u|)}{c} & \text{dla } u \in (-\infty, c], \\ \int_{-\infty}^c \exp(-|u|) du & \\ 0 & \text{dla } u \notin (-\infty, c]. \end{cases} \quad (2.38)$$

Ucięta w  $x = ch$  ( $c \geq 0$ ) i znormalizowana funkcja jądra Epanecznikowa ma postać:

$$K_{cnE}(u) = \begin{cases} \frac{1-u^2}{c} & \text{dla } u \in (-1, c], \\ \int_{-1}^c (1-u^2) du & \\ 0 & \text{dla } u \notin (-1, c]. \end{cases} \quad (2.39)$$

Ucięta i znormalizowana funkcja jądra  $K_{cn}(u)$  zależy od punktu  $x$ , gdzie funkcja gęstości jest estymowana. Można wykazać, że estymator wykorzystujący funkcję jądra  $K_{cn}(u)$  jest równoważny estymatorowi odbicia (Silverman, 1986).

Kombinacja uciętych i znormalizowanych funkcji jądra oraz uogólnionej metody jackknife jest stosowana tak, by obciążenie miało rząd  $O(h^2)$  wszędzie w obszarach brzegowych. Przykład wykorzystania tej metody do gaussowskiej funkcji jądra jest przedstawiony w pracy Wanda i Schucany'ego (1990).

Niech nośnik funkcji będzie określony jako  $[0, 1]$ . Dla ustalonego  $x$  i parametru wygładzania  $h$ , indeks  $q$  jest liczbą rzeczywistą  $q \in [0, 1]$ , mówiący, jaki parametr wygładzania jest stosowany w zbiorze punktów (Kyung-Joon, Schucany, 1998):

$$q = \min\left\{\frac{x}{h}, 1\right\} \quad \text{dla } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad (2.40)$$

oraz

$$q = \min\left\{\frac{1-x}{h}, 1\right\} \quad \text{dla } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \quad (2.41)$$

Dla  $q = \frac{x}{h} < 1$  nośnik estymatora funkcji jądra jest mniejszy niż  $x \pm h$ . Efektywna dziedzina funkcji jądra jest określona jako  $[-1, q]$ , zamiast  $[-1, 1]$  jak dla punktów wewnętrznych. Dlatego też modyfikacja ucinania i renormalizacji pomija część funkcji jądra leżącą między  $q$  i 1 i renormalizuje funkcję jądra między  $-1$  a  $q$ . W wyniku tego otrzymujemy brzegową funkcję jądra.

Określona może być również liniowa kombinacja dwóch różnych tego typu funkcji jądra brzegowych, czyli uogólniony estymator jackknife. Zastosowanie funkcji jądra tego typu powoduje, że obciążenie estymatora w obszarach brzegowych jest takie samo jak i wewnątrz nośnika.

Możliwe jest również wykorzystanie tej procedury dla określonego lewego efektu brzegowego, czyli dla  $q = \frac{x}{h} < 1$  i dla funkcji jądra drugiego rzędu  $K(u)$  na przedziale  $[-1, 1]$ . Jeżeli  $x$  należy do przedziału  $[0, h)$ , oznacza to, że jest w lewym obszarze brzegowym. Wówczas symetria funkcji jądra nie jest spełniona i ponadto  $\int_{-1}^q K_1(u) du \neq 1$  oraz  $\int_{-1}^q u K_1(u) du \neq 0$ . Stąd proponowana jest ucięta funkcja jądra:

$$K_{1q}(u) = \frac{K_1(u)}{\int_{-1}^q K_1(u) du} \quad \text{dla } -1 \leq u \leq q. \quad (2.42)$$

Następnie jest ona normalizowana w taki sposób, by całka z estymatora była równa 1. Obciążenie i wariancję dla estymatora regresji oraz postać asymptotycznego błędu *MSE* przedstawili w swojej pracy Kyung-Joon i Schucany (1998).

Funkcja jądra gamma została zaproponowana przez Chena (2000b) do estymacji funkcji gęstości z nośnikiem  $[0, +\infty)$ . Funkcja jądra gamma charakteryzuje się podobnymi własnościami jak brzegowa funkcja jądra beta – jest nieujemna, wolna od obciążenia brzegowego oraz osiąga optymalny rząd zbieżności dla błędu *MISE*.

Funkcja jądra gamma jest funkcją gęstości rozkładu gamma i jest określona w następujący sposób (Zhang, 2010; Hirukawa, Sakudo, 2014):

$$K_{G\left(\frac{u}{b}+1, b\right)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{1}{b^{\frac{u}{b}+1} \Gamma\left(\frac{u}{b}+1\right)} u^{\frac{u}{b}} \exp\left(-\frac{u}{b}\right) & \text{dla } u > 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

gdzie:

$\frac{u}{b} + 1 > 0$  jest parametrem kształtu,

$b > 0$  jest parametrem skali, spełniającym warunek  $b \rightarrow 0$  dla  $n \rightarrow +\infty$ ; dla  $h$  będącego parametrem wygładzania w klasycznym estymatorze funkcji gęstości zachodzi następująca zależność  $b = O(h^2)$ ,

$\Gamma\left(\frac{u}{b} + 1\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{u}{b}} dt$  jest funkcją gamma Eulera.

Wówczas przyjmując założenie, że  $\int_0^{+\infty} [f^{(1)}(x)]^2 dx$  i  $\int_0^{+\infty} [xf^{(2)}(x)]^2 dx$  są skończone, estymator funkcji gęstości jest następujący:

$$\hat{f}_{G1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\frac{x}{b}+1, b}(X_i). \quad (2.44)$$

Estymator ten jest estymatorem zgodnym i asymptotycznie nieobciążonym (Chen, 2000b). Estymator z funkcją jądra określoną przez (2.43) jest nieujemny i wolny od obciążenia brzegowego w odróżnieniu od estymatora klasycznego i estymatora z uciętą i znormalizowaną funkcją jądra, dla których brzegowe obciążenie spowodowane jest zwiększoną wariancją. Estymator z funkcją gamma charakteryzuje się tym (w odróżnieniu od estymatora z funkcją beta), że wariancja ulega zmniejszeniu gdy miejsce, gdzie wygładzanie jest dokonywane, oddala się od obszaru brzegowego. Ma to szczególne znaczenie w estymacji gęstości z obserwacjami rzadko występującymi.

W celu zmniejszenia obciążenia estymatora funkcji gęstości Chen (2000b) rozważa również pewną modyfikację funkcji jądra (2.43). Funkcja jądra ma wówczas postać:

$$K_{G2(\rho_b(u), b)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{1}{b^{\rho_b(u)} \Gamma(\rho_b(x))} u^{\rho_b(u)-1} \exp\left(-\frac{u}{b}\right) & \text{dla } u > 0, \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\text{z parametrem kształtu } \rho_b(u) = \begin{cases} \frac{u}{b} & \text{dla } u \in [2b, +\infty), \\ \frac{1}{4} \left(\frac{u}{b}\right)^2 + 1 & \text{dla } u \in [0, 2b). \end{cases} \quad (2.46)$$

Funkcja jądra (2.45) jest funkcją gęstości rozkładu gamma z parametrem kształtu  $\frac{u}{b}$  i parametrem skali  $b$  we wnętrzu nośnika. Rozkład ten jest nieograniczony dla  $x$  bliskich zeru.

Estymatorem częściej stosowanym w praktyce jest estymator funkcji gęstości ze zmodyfikowaną funkcją jądra gamma o postaci:

$$\hat{f}_{G2}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\rho_b(x), b}(X_i). \quad (2.47)$$

Estymator ustala rozmiar obszaru brzegowego do obszaru od 0 do  $2b$  niezależnie od kształtu prawdziwej funkcji gęstości.

Można wykazać (Zhang, 2010), że w odróżnieniu od estymatora wykorzystującego funkcję jądra beta, estymator gęstości z funkcją jądra gamma w lewym krańcu nośnika jest równoważny estymatorowi z uciętą i znormalizowaną funkcją jądra.

Malec i Schienle (2013) zaproponowali estymator jądrowy ze zmodyfikowaną funkcją jądra gamma z dodatkowym parametrem dostrojenia  $c$  dostosowanym do kształtu gęstości blisko obszarów brzegowych. Wykazali również, że dla tak określonego estymatora jego własności w próbie skończonej są zdecydowanie lepsze w porównaniu z estymatorem jądrowym z klasyczną funkcją gamma i innymi klasycznymi estymatorami wykorzystywanymi w procedurach związanych z wystąpieniem obciążenia w obszarach brzegowych. Gdy prawdziwa funkcja gęstości zbliża się do obszarów brzegowych z pochodną istotnie różną od zera (dane wysokiej częstotliwości, estymacja spektralna dla szeregów czasowych o długiej pamięci), wówczas estymator Malca i Schienla jest zalecany.

Malec i Schienle rozważali dwa rodzaje zmodyfikowanych funkcji jądra z parametrem dostrojenia  $c$  ( $c \in (0, 1]$ ):

$$K_{\rho_b^i(u), b}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{1}{b^{\rho_b^i(u)} \Gamma(\rho_b^i(x))} u^{\rho_b^i(u)-1} \exp\left(-\frac{u}{b}\right) & \text{dla } u > 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

dla  $i = I$  lub  $II$ ,

gdzie parametry kształtu są następujące:

$$\rho_b^I(u) = \begin{cases} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{u}{bc} \right)^2 + 1 \right] [c + 2b(1-c)] & \text{dla } u \in [0, 2bc), \\ \frac{u}{bc} (c + 2b - u) & \text{dla } u \in [2bc, 2b), \\ \frac{u}{b} & \text{dla } u \in [2b, +\infty) \end{cases} \quad (2.49)$$

oraz

$$\rho_b^{II}(u) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left( \frac{u}{bc} \right)^2 + 1 & \text{dla } u \in [0, 2bc), \\ \frac{u}{bc} & \text{dla } u \in [2bc, +\infty). \end{cases} \quad (2.50)$$

W funkcji jądra  $K_{\rho_b^i(u), b}(u)$  dla parametru kształtu  $\rho_b^I(u)$  występuje w pierwszej postaci przesunięcie poniżej 1, wprowadzona jest postać kwadratowa w części środkowej, natomiast dla trzeciej postaci dla  $\rho_b(u) > \frac{u}{b}$  zachodzi  $\frac{u}{b} < \rho_b^{II}(u) < \rho_b(u)$ , gdy  $\frac{u}{b} \frac{2b-u}{\rho_b(u) - \frac{u}{b}} < c < 1$  dla  $u \in [2bc, 2b)$ .

Dla parametru kształtu  $\rho_b^{II}(u)$  zachowane są dwie postacie i ogólna struktura z oryginalnej specyfikacji estymatora Chena  $\hat{f}_{G2}(x)$ . Następuje jednak obcięcie obszaru brzegowego proporcjonalnie do wartości parametru dostrojenia  $c$ .

Automatyczna procedura wyboru parametru dostrojenia  $c$  jest przedstawiona w pracy Malca i Schienla (2013).

Określenie klasy brzegowych funkcji jądra jest uogólnieniem wielu metod dotyczących redukcji obciążenia w bliskości obszarów brzegowych (w tym metody uogólnionej jackknife).

Dla  $m = \frac{x}{h}$ , gdzie  $h$  jest parametrem wygładzania estymatora jądrowego funkcji gęstości, niech  $a_l(m) = \int_{-S_K}^{\min\{m, S_K\}} u^l K(u) du$ , gdzie  $[-S_K, S_K]$  jest nośnikiem funkcji jądra, natomiast  $K(u)$  jest funkcją gęstości (Jones, Foster, 1996).

Niech

$$\bar{f}(x) = \frac{\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)}{a_0(p)} \quad (2.51)$$

będzie określone dla nośnika  $[0, +\infty)$

oraz

$$\tilde{f}(x) = \frac{\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n L\left(\frac{x - X_i}{h}\right)}{c_0(p)} \quad (2.52)$$

będzie określona tylko na przedziale  $[0, +\infty)$  dla  $L$  będącego funkcją jądra z nośnikiem  $[-S_L, S_L]$ .

Niech

$$c_l(m) = \int_{-S_L}^{\min\{m, S_L\}} u^l L(u) du. \quad (2.53)$$

Ponadto, niech będzie dany estymator jądrowej funkcji gęstości z korektą obciążenia określony jako liniowa kombinacja o dobrych własnościach dotyczących obciążenia asymptotycznego:

$$\hat{f}(x) = \alpha_x \bar{f}(x) + \beta_x \tilde{f}(x), \quad (2.54)$$

gdzie:

$$\alpha_x(u) = \frac{c_1(p)a_0(p)}{c_1(p)a_0(p) - a_1(p)c_0(p)}, \quad (2.55)$$

$$\beta_x(u) = -\frac{c_0(p)a_1(p)}{c_1(p)a_0(p) - a_1(p)c_0(p)}. \quad (2.56)$$

Funkcja jądra  $L$  zazwyczaj jest inną funkcją niż funkcja jądra  $K$ . Przykłady funkcji jądra  $L$  są następujące:

$$L(u) = \frac{1}{c}K\left(\frac{u}{c}\right), \quad (2.57)$$

$$L(u) = K'(u), \quad (2.58)$$

$$L(u) = K(2p - u), \quad (2.59)$$

$$L(u) = uK(u). \quad (2.60)$$

Postać (2.60) prowadzi do często stosowanej w praktyce brzegowej liniowej funkcji jądra o postaci:

$$L(u) = \left\{ \frac{a_2(p)}{a_2(p)a_0(p) - a_1^2(p)} + \frac{-a_1(p)}{a_2(p)a_0(p) - a_1^2(p)}u \right\} K(u). \quad (2.61)$$

Wadą wszystkich estymatorów z brzegową funkcją jądra jest to, że przyjmują wartości ujemne blisko obszarów brzegowych. Powyższa funkcja jądra nie powoduje, że estymator jest ujemny.

Rodzina funkcji jądra brzegowych indeksowana  $c$  ( $0 < c < 1$ ) ma postać (Jones, 1993):

$$K_c(u) = \frac{\{a_1(pc) - a_1(c)\}K(u) - a_1(p)c^2K(cu)}{\{a_1(pc) - a_1(c)\}a_0(p) - a_1(p)c\{a_0(pc) - a_0(c) - 1\}}, \quad (2.62)$$

gdzie:

$$a_l(m) = \int_{-1}^m u^l K(u) du \quad \text{dla } l = 0, 1, \quad (2.63)$$

natomiast  $p$  jest funkcją  $x$ .

Dla  $c \rightarrow 1$  funkcja jądra ma postać:

$$K_{PD}(u) = \frac{a_2^{(1)}(p)K(u) - a_1(p)uK'(u)}{a_2^{(1)}(p)a_0(p) - a_1(p)a_1^{(1)}(p)}, \quad (2.64)$$

gdzie:

$$a_l^{(1)}(m) = \int_{-1}^m u^l K'(u) du \quad (\text{z wyjątkiem funkcji jądra jednostajnego}).$$

Podejście to jest równoważne zagadnieniu konstrukcji funkcji jądra czwartego rzędu, korzystając z funkcji jądra drugiego rzędu.

Linijowe kombinacje  $K(u)$  i  $uK(u)$  mogą być określone w następujący sposób:

$$K_L(u) = \frac{(a_2(p) - a_1(p)u)K'(u)}{a_2(p)a_0(p) - a_1^2(p)} \quad (2.65)$$

oraz

$$K_D(u) = \frac{a_1^{(1)}(p)K(u) - a_1(p)K'(u)}{a_1^{(1)}(p)a_0(p) - a_1(p)a_0^{(1)}(p)}. \quad (2.66)$$

Funkcja jądra (2.66) nie może być jednak stosowana dla funkcji jądra jednostajnego.

Dla gaussowskiej funkcji jądra otrzymujemy  $K_{pD}(u) = K_D(u)$ .

Klasa funkcji jądra będąca kombinacją  $K(u)$  i  $K(2p - u)$  jest określona jako:

$$K_{R1}(u) = \frac{\{2p(1 - a_0(p)) + a_1(p)\}K(u) - a_1(p)K(2p - u)}{\{2p(1 - a_0(p)) + a_1(p)\}a_0(p) - a_1(p)(1 - a_0(p))}. \quad (2.67)$$

Porównanie obciążenia i wariancji przedstawione jest w pracy Jonesa (1993).

Brzegowa, niekoniecznie nieujemna, funkcja jądra  $K_b(u)$  spełnia następujące warunki:

$$\int_c^1 K_b(u) du = 0 \quad \text{lub} \quad \int_{-1}^c K_b(u) du = 1,$$

$$\int_{-1}^c u K_b(u) du = 0,$$

$$\int_{-1}^c K_c(u) du < +\infty.$$

Estymacja wykorzystująca brzegową funkcję jądra jest procedurą ogólniejszą od metody estymacji odbicia, ponieważ możliwe jest tutaj dopasowanie do każdego kształtu funkcji gęstości. Wadą estymacji opartej na brzegowej funkcji jądra jest jednak możliwość wystąpienia ujemnego estymatora funkcji gęstości.

Następna klasa funkcji jądra związana jest z rozkładem Birnbauma-Saundersa  $BS(\alpha, \beta)$ , który został zaproponowany przez Birnbauma i Saundersa w 1969 roku (Birnbaum, Saunders, 1969; Chacko i in., 2015), z parametrem kształtu  $\alpha$  i parametrem skali  $\beta$ . Jest to mieszanina z równymi wagami rozkładu odwrotnego

gaussowskiego  $IG(\beta, \beta\alpha^{-2})$  i obustronnego odwróconego gaussowskiego

$RIG(\beta, \beta^{-1}\alpha^2)$ . Zmienna losowa ma postać:  $T = \beta \left( \frac{\alpha}{2}Z + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}Z\right)^2 + 1} \right)^2$ , gdzie

$Z \sim N(0,1)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  są parametrami kształtu i skali,  $\beta > 0$  jest medianą rozkładu.

Funkcja jądra Birnbauma-Saundersa ma postać (Birnbaum, Saunders, 1969; Jin, Kawczak, 2003):

$$K_{BS(\alpha, \beta)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{\sqrt{\beta u}} + \sqrt{\frac{\beta}{u^3}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2\alpha^2} \left( \frac{u}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{u} \right) \right] & \text{dla } u > 0. \end{cases} \quad (2.68)$$

Dla  $\alpha = \sqrt{h}$  i  $\beta > x$  klasa funkcji jądra Birnbauma-Saundersa jest określona w następujący sposób:

$$K_{BS(\sqrt{h}, x)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{2h\pi}} \left( \sqrt{\frac{1}{xu}} + \sqrt{\frac{x}{u^3}} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2h} \left( \frac{u}{x} - 2 + \frac{x}{u} \right) \right] & \text{dla } u > 0. \end{cases} \quad (2.69)$$

Estymator jądrowy funkcji gęstości z funkcją jądra Birnbauma-Saundersa ma postać:

$$\hat{f}_{BS}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{BS(\sqrt{h}, x)}(X_i). \quad (2.70)$$

Estymator funkcji gęstości (2.70) jest stosowany w estymacji gęstości o nośniku  $[0, +\infty]$ .

Jin i Kawczak (2003) wykazali, że estymator ten szczególnie polecany jest w zastosowaniu do danych finansowych o wysokiej częstotliwości. Ponieważ estymator (2.70) charakteryzuje się lepszymi własnościami w porównaniu z estymatorami z innymi funkcjami jądra, dlatego zalecany jest w sytuacji gdy estymacji podlegają rozkłady z długimi ogonami, zarówno o wysokiej częstotliwości, jak i ultra wysokiej częstotliwości, gdy celem jest redukcja obciążenia blisko brzegów (dane finansowe o wysokiej częstotliwości często przekraczają 20 tys. obserwacji). Ponadto czasy pomiędzy transakcjami są nieregularnie rozmieszczone z losową liczbą obserwacji dziennych, występują duże strumienie transakcji na otwarciu i zamknięciu rynków. Rozkład danych finansowych o wysokiej częstotliwości jest jednomodalny oraz dane dotyczące zmienności cen są skorelowane. Do takich danych wykorzystywany jest rozkład Birnbauma-Saundersa jako funkcja jądra w estymacji funkcji gęstości.

Metody jądrowe oparte na uogólnionym rozkładzie Birnbauma-Saundersa wydają się być odpowiednie do estymacji funkcji gęstości danych finansowych o wysokiej częstotliwości ze względu na ich elastyczność i własności (ciężkie ogony i jednomodalny rozkład).

Marchant i in. (2013) zaproponowali estymatory jądrowe dla funkcji gęstości dla nieujemnych nośników oparte na uogólnionych rozkładach Birnbauma-Saundersa (uogólniając zmienną  $Z$  do zmiennej o rozkładzie symetrycznym). Zbadali i określili własności tych estymatorów.

Niech zmienna losowa  $Z$  ma rozkład standardowy symetryczny  $Z \sim S(0,1;g) \equiv S(g)$ , który charakteryzowany jest przez dwa parametry: parametr położenia  $\mu = 0$  oraz parametr skali  $\sigma = 1$  i funkcję generującą o gęstości  $g$ . W szczególności funkcja gęstości zmiennej  $Z$  dana jest jako  $f_Z(z) = cg(z^2)$  dla  $z \in R$ , gdzie  $g(v)$ , dla  $v > 0$ , jest funkcją rzeczywistą generującą gęstość zmiennej  $Z$ .

Stała  $c$  jest stałą normalizacyjną, taką że:  $\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(z^2) dz = \frac{1}{c g^2}$ . Niech będzie okre-

ślona zmienna losowa  $U = Z^2 \sim G\chi^2(1;g)$ , która ma rozkład uogólniony chi-kwadrat z jednym stopniem swobody i generatorem  $g$  funkcji gęstości związanym z tym szczególnym określonym rozkładem symetrycznym.

Można wykazać, że zmienna losowa  $Z$  ma rozkład symetryczny:

$$Z = \frac{\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}}}{\alpha} \sim S(g), \quad (2.71)$$

gdzie  $T = \frac{\beta}{4} \left( \alpha Z + \sqrt{\alpha^2 Z^2 + 4} \right)^2 \sim GBS(\alpha, \beta; g)$  ma rozkład uogólniony Birnbauma-Saundersa. Natomiast  $\alpha > 0$  jest parametrem kształtu,  $\beta > 0$  parametrem skali oraz  $g$  jest generatorem gęstości związanym ze szczególną postacią rozkładu symetrycznego.

Funkcja gęstości zmiennej losowej  $T$  jest następująca:

$$f_T(t; \alpha, \beta; g) = \frac{c}{2\alpha} g \left[ \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{t}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{t} \right) \right] \left( \frac{1}{\sqrt{\beta t}} + \sqrt{\frac{\beta}{t^3}} \right) \quad \text{dla } t > 0. \quad (2.72)$$

Uogólniona postać rozkładu Birnbauma-Saundersa, którą zaproponowali Díaz-García i Leiva-Sánchez (2002), pozwala na większą elastyczność w ogonach funkcji jądra i może być również zastosowana jako funkcja jądra w estymatorze gęstości. Uogólniony rozkład Birnbauma-Saundersa obejmuje szeroką klasę skośnych dodatnie funkcji gęstości z nieujemnym nośnikiem (między innymi: klasyczna funkcja gęstości Birnbauma-Saundersa, potęgowo-wykładnicza Birnbauma-Saundersa,  $t$ -Studenta Birnbauma-Saundersa). Funkcje te charakteryzują się lżejszymi i cięższymi ogonami od rozkładu Birnbauma-Saundersa. Postać uogólnionej funkcji jądra Birnbauma-Saundersa pozwala na dużą swobodę w określaniu asymetrii i poziomu kurtozy.

Rozkład  $t$ -Studenta Birnbauma-Saundersa ma większą kurtozę niż klasyczny rozkład Birnbauma-Saundersa. Rozkład potęgowo-wykładniczy ma mniejszą kurtozę dla parametru większego od jedności, a większą kurtozę dla parametru mniejszego od jedności. Dlatego też rozkład potęgowo-wykładniczy Birnbauma-Saundersa jest częściej używany jako elastyczniejszy od klasycznego rozkładu Birnbauma-Saundersa i  $t$ -Studenta Birnbauma-Saundersa. Dla parametru równego jeden otrzymujemy klasyczny rozkład Birnbauma-Saundersa. Dla parametru większego od 8 rozkład  $t$ -Studenta Birnbauma-Saundersa ma większą kurtozę niż klasyczny rozkład Birnbauma-Saundersa.

Funkcja jądra uogólniona Birnbauma-Saundersa ma postać (Marchant i in., 2013):

$$K_{UBS(\alpha,\beta;g)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{c}{2\alpha\sqrt{\beta}} u^{-3/2} (u + \beta) g \left[ \frac{1}{\alpha^2} \left( \frac{u}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{u} \right) \right] & \text{dla } u > 0, \end{cases} \quad (2.73)$$

gdzie  $c$  jest stałą normalizacyjną. Wartości stałej  $c$  oraz funkcji generującej dla wybranych rozkładów podane są, między innymi, w pracy Saulo i in. (2012).

Estymator jądrowy funkcji gęstości zdefiniowanej na przedziale  $[0, +\infty)$  z funkcją jądra uogólnioną Birnbauma-Saundersa jest następujący:

$$\hat{f}_{UBS}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{BS(\sqrt{h},x;g)}(X_i) \quad (2.74)$$

dla  $\alpha = \sqrt{h}$  i  $\beta = x$ .

Funkcja jądra dla  $h > 0$  przyjmuje postać:

$$K_{UBS(\sqrt{h},x;g)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ cg \left[ \frac{1}{h} \left( \frac{u}{x} - 2 + \frac{\beta}{u} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{4h}} \left( \frac{1}{\sqrt{ux}} + \sqrt{\frac{x}{u^3}} \right) & \text{dla } u > 0, \end{cases} \quad (2.75)$$

gdzie  $c$  jest stałą normalizacyjną symetrycznej funkcji jądra.

Powyższa funkcja jądra koncentruje się wokół  $x$  dla  $h \rightarrow 0$ .

Szczególne przypadki uogólnionej funkcji jądra Birnbauma-Saundersa to:

1) klasyczna funkcja jądra Birnbauma-Saundersa o postaci:

$$K_{BS}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2h} \left( \frac{u}{x} - 2 + \frac{\beta}{u} \right) \right) \frac{1}{\sqrt{4h}} \left( \frac{1}{\sqrt{ux}} + \sqrt{\frac{x}{u^3}} \right) & \text{dla } u > 0, \end{cases} \quad (2.76)$$

2) funkcja jądra potęgowo-wykładnicza Birnbauma-Saundersa:

$$K_{BSPE}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{v}{2^{\frac{1}{2v}} \Gamma\left(\frac{1}{2v}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2h^v} \left(\frac{u}{x} - 2 + \frac{\beta}{u}\right)^v\right) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{4h}} \left(\frac{1}{\sqrt{ux}} + \sqrt{\frac{x}{u^3}}\right) & \text{dla } v > 0, u > 0, \end{cases} \quad (2.77)$$

3) funkcja jądra  $t$ -Studenta Birnbauma-Saundersa:

$$K_{BSSt}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi} 2\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left[1 + \frac{1}{vh} \left(\frac{u}{x} - 2 + \frac{\beta}{u}\right)^{-\frac{v+1}{2}}\right] \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{4h}} \left(\frac{1}{\sqrt{ux}} + \sqrt{\frac{x}{u^3}}\right) & \text{dla } v > 0, u > 0. \end{cases} \quad (2.78)$$

Obciążenie, wariancja i postać  $MISE$  dla estymatora jądrowego gęstości z funkcją jądra uogólnioną Birnbauma-Saundersa podana jest w pracy Marchanta i in. (2013).

Tempo zbieżności dla optymalnego  $MISE$  jest rzędu  $n^{-4/5}$  (analogicznie jak dla klasycznego estymatora jądrowego i estymatorów z funkcjami jądra o nieujemnym nośniku).

Innym uogólnieniem rozkładu Birnbauma-Saundersa jest skośno-symetryczny uogólniony rozkład Birnbauma-Saundersa, zakładając, że zmienna losowa  $Z$  ma skośno-symetryczny rozkład.

Niech zmienna losowa  $T$  ma rozkład skośno-symetryczny uogólniony rozkład Birnbauma-Saundersa  $T \sim SUBS(\alpha, \beta, \lambda; g)$ , gdzie  $g$  jest generatorem funkcji gęstości związanym z skośno-symetrycznym rozkładem i  $\lambda$  jest parametrem kształtu zwanym również parametrem skośności. Zmienna losowa o rozkładzie standardowym skośno-symetrycznym jest określona jako  $Z = \frac{1}{\alpha} \left( \sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right) \sim SS(0, 1, \lambda; g)$ .

Wówczas zmienna losowa  $T = \beta \left( \frac{\alpha}{2} Z + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} Z\right)^2 + 1} \right)^2 \sim SUBS(\alpha, \beta, \lambda; g)$  ma rozkład skośno-symetryczny uogólniony rozkład Birnbauma-Saundersa.

Funkcja gęstości zmiennej losowej  $T \sim SUBS(\alpha, \beta, \lambda; g)$  o rozkładzie skośno-symetrycznym uogólnionym Birnbauma-Saundersa, wartości stałych  $c$  oraz postacie

funkcji generującej gęstość dla skośnych rozkładów: normalnego Birnbauma-Saundersa, potęgowo-wykładniczego Birnbauma-Saundersa oraz  $t$ -Studenta Birnbauma-Saundersa przedstawione są, między innymi, w pracy Saulo i in. (2012). Skośny uogólniony rozkład Birnbauma-Saundersa ma zastosowanie w badaniach dotyczących ochrony środowiska (Saulo i in., 2013).

Postacie funkcji jądra będące funkcjami gęstości dla zmiennej losowej o rozkładzie skośnym Birnbauma-Saundersa dla  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  i  $\lambda \in R$  są następujące:

$$K_{SBS}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{u}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{u}\right)\right] \Phi\left[\frac{\lambda}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{u}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{u}}\right)\right] \times \\ \times \frac{u^{-\frac{3}{2}}(u+\beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}} & \text{dla } u > 0, \end{cases} \quad (2.79)$$

gdzie  $\Phi$  jest dystrybuantą rozkładu normalnego standaryzowanego.

Postać funkcji jądra, będąca funkcją gęstości rozkładu skośnego potęgowo-wykładniczego Birnbauma-Saundersa, jest następująca:

$$K_{SBSPE}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{2\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)2^{2\nu}} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^{2\nu}}\left(\frac{u}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{u}\right)^\nu\right] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2\nu}\right)} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2\nu}, \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^{2\nu} \left(\frac{u}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{u}\right)^\nu\right) \right] \right\} \times \\ \times \frac{u^{-\frac{3}{2}}(u+\beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}} & \text{dla } \nu > 0, u > 0, \end{cases} \quad (2.80)$$

gdzie  $\Gamma(\alpha) = \int_0^x u^{\alpha-1} \exp(-u) du$  jest niekompletną funkcją gamma.

W (2.80) dla  $\nu = 1$  otrzymujemy funkcję jądra skośną Birnbauma-Saundersa.

Funkcja jądra, będąca funkcją gęstości rozkładu skośnego  $t$ -Studenta Birnbauma-Saundersa, ma postać:

$$K_{SBS_t}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{2\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}} \left[1 + \frac{1}{\nu\alpha^2} \left(\frac{u}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{u}\right)\right]^{-\frac{(\nu+1)}{2}} \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{2} I_{\frac{\nu}{\nu + \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{u}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{u}\right)}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)}\right) \frac{u^{-\frac{3}{2}}(u+\beta)}{2\alpha\sqrt{\beta}} & \text{dla } \nu > 0, u > 0, \end{cases} \quad (2.81)$$

gdzie  $I_x(a,b) = \frac{B_x(a,b)}{B(a,b)}$  jest ilorazem niekompletnej funkcji beta, gdzie

$$B_x(a,b) = \int_0^x u^{a-1} (1-u)^{b-1} du. \text{ Dla } \nu \rightarrow +\infty \text{ funkcja jądra skośna } t\text{-Studenta Birn-}$$

bauma-Saundersa staje się funkcją jądra skośną Birnbauma-Saundersa.

Rozszerzenie klasy funkcji jądra uogólnionych Birnbauma-Saundersa poprzez określenie klasy skośnych uogólnionych Birnbauma-Saundersa prowadzi do klasy funkcji jądra bardzo szerokiej z możliwością określania poziomu kurtozy ogonów tego rozkładu. Jednocześnie możliwe jest dokładniejsze określenie asymetrii niż w przypadku uogólnionych rozkładów Birnbauma-Saundersa. Estymator gęstości dla  $\alpha = \sqrt{h}$  oraz  $\beta = x$  ze skośną uogólnioną funkcją jądra Birnbauma-Saundersa ma postać:

$$\hat{f}_{SUBS}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{SUBS(\sqrt{h},x,\lambda;g)}(X_i), \quad (2.82)$$

gdzie:

$$K_{SUBS(\sqrt{h},x,\lambda;g)}(u) = 2cg \left(\frac{1}{h} \left(\frac{u}{x} - 2 + \frac{\beta}{u}\right)\right) F_s \left(\frac{\lambda}{\sqrt{h}} \left(\sqrt{\frac{u}{x}} - \sqrt{\frac{x}{u}}\right)\right) \frac{u^{-\frac{3}{2}}(u+x)}{2\sqrt{hx}}.$$

W szczególności:

$$K_{SBS}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2h} \left(\frac{u}{x} - 2 + \frac{x}{u}\right)\right] \Phi\left[\frac{\lambda}{\sqrt{h}} \left(\sqrt{\frac{u}{x}} - \sqrt{\frac{x}{u}}\right)\right] \times \\ \times \frac{u^{-\frac{3}{2}}(u+x)}{2\sqrt{hx}} & \text{dla } u > 0, \end{cases} \quad (2.83)$$

$$K_{SBSPE}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{2v}{\Gamma\left(\frac{1}{2v}\right)2^{2v}} \exp\left[-\frac{1}{2h^v}\left(\frac{u}{x}-2+\frac{x}{u}\right)^v\right] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1}{2v}\right)} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{2v}, \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{h}}\right)^{2v}\left(\frac{u}{x}-2+\frac{x}{u}\right)^v\right) \right] \right\} \times \\ \times \frac{u^{-\frac{3}{2}}(u+x)}{2\sqrt{hx}} & \text{dla } v > 0, u > 0, \end{cases} \quad (2.84)$$

$$K_{SBSI}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{2\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{v\pi}} \left[ 1 + \frac{1}{vh}\left(\frac{u}{x}-2+\frac{x}{u}\right) \right]^{-\frac{(v+1)}{2}} \times \\ \times \left( 1 - \frac{1}{2} I_{\frac{v}{v+\frac{\lambda^2}{h}\left(\frac{u}{x}-2+\frac{x}{u}\right)}}\left(\frac{v}{2}, \frac{1}{2}\right) \right) \frac{u^{-\frac{3}{2}}(u+x)}{2\sqrt{hx}} & \text{dla } v > 0, u > 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

Własności estymatora, w tym obciążenie, wariancja, błąd średniokwadratowy i skalkowany błąd średniokwadratowy, porównanie z innymi estymatorami oraz przykłady empiryczne dotyczące analizy danych finansowych wskazujące na lepsze własności estymatora z funkcją jądra skośną uogólnioną Birnbauma-Saundersa oraz estymacji gęstości zmiennych losowych związanych z koncentracją zanieczyszczenia powietrza (gdzie zmienne losowe są ciągłe nieujemne i ponadto zazwyczaj rozkłady są asymetryczne i charakteryzują się dodatnią skośnością i silną kurtozą), przedstawione są w pracy Saulo i in. (2012), Saulo (2013) i Saulo i in. (2013).

Szczególnym przypadkiem funkcji jądra uogólnionej Birnbauma-Saundersa jest funkcja jądra skośna uogólniona Birnbauma-Saundersa (Saulo i in., 2012). Funkcja ta ma własności nieujemnej funkcji jądra, ale charakteryzuje się lepszymi własnościami, szczególnie w zastosowaniach dotyczących danych o wysokiej częstotliwości.

Jin i Kawczak (2003) zaproponowali klasę funkcji jądra, która ma szczególne zastosowania w analizach danych finansowych o wysokiej częstotliwości i o ultra wysokiej częstotliwości, gdy analizy związane są z rozkładami o długich ogonach. Te funkcje jądra mają również zastosowanie w redukcji obciążenia w obszarach

brzegowych nośnika funkcji gęstości dla nośnika  $[0, +\infty)$ . Charakteryzują się lepszymi własnościami w porównaniu z innymi funkcjami jądra.

Pewną transformacją funkcji gęstości rozkładu normalnego jest funkcja gęstości rozkładu lognormalnego z parametrem skali  $\alpha$  i parametrem kształtu  $\beta$ .

Funkcja jądra ma postać (Jin, Kawczak 2003):

$$K_{LN(\alpha,\beta)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta u}} \exp\left[-\frac{1}{2\beta}(\ln u - \alpha)^2\right] & \text{dla } u > 0 \end{cases} \quad (2.86)$$

dla  $\beta > 0$ .

Dla  $\alpha = \ln x$  i  $\beta = 4\ln(1+h)$  klasa funkcji jądra lognormalnych jest określona w następujący sposób:

$$K_{LN(\ln x, 4\ln(1+h))}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{8\pi \ln(1+h)u}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{8\ln(1+h)}(\ln u - \ln x)^2\right] & \text{dla } u > 0, \end{cases} \quad (2.87)$$

gdzie  $h$  jest parametrem wygładzania spełniającym warunek  $h \rightarrow 0$  i  $nh \rightarrow +\infty$  dla  $n \rightarrow +\infty$ .

Estymator jądrowy funkcji gęstości z funkcją jądra lognormalną ma postać:

$$\hat{f}_{LN}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{LN(\ln x, 4\ln(1+h))}(X_i). \quad (2.88)$$

W pracy Jina i Kawczaka (2003) przedstawiono wyniki badań dotyczących porównania funkcji jądra stosowanych w estymacji funkcji gęstości dla danych o wysokiej częstotliwości i wykazano zdecydowanie lepsze własności funkcji jądra z klasy Birnbauma-Saundersa oraz lognormalnych w porównaniu z estymatorami z innymi asymetrycznymi funkcjami jądra.

Jako funkcja jądra może być wykorzystana funkcja gęstości rozkładu normalnego odwrotnego, zwanego rozkładem Walda. Estymatory jądrowe funkcji gęstości charakteryzują się tymi samymi własnościami co estymatory z funkcjami jądra gamma (są wolne od obciążenia brzegowego, zawsze nieujemne, osiągają optymalne tempo zbieżności dla *MISE*) (Scaillet, 2004). Stosowane są dla funkcji gęstości z ograniczonym nośnikiem  $[0, +\infty)$ .

Nazwa tego rozkładu wskazuje, że istnieje odwrotna zależność między skumulowanymi funkcjami tworzącymi tego rozkładu i rozkładu gaussowskiego. Funkcje

jądra będące funkcjami gęstości rozkładu normalnego odwrotnego i rozkładu obustronnego normalnego odwrotnego charakteryzują się elastycznym kształtem i parametrem położenia na osi nieujemnej. Kształt pozwala na zmiany w zależności od punktów, co oznacza, że zmiany w poziomie wygładzenia dokonują się w sposób naturalny i jej nośniki odpowiadają nośnikom funkcji gęstości podlegających estymacji.

Niech funkcja gęstości będzie dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły i niech  $\int_0^{+\infty} (x^3 f^{(2)}(x))^2 dx < +\infty$ .

Funkcja jądra będąca funkcją gęstości rozkładu normalnego odwrotnego  $IG(m, \lambda)$  z wartością średnią  $m$  i wariancją  $\frac{m^3}{\lambda}$  ma postać:

$$K_{IG(m,\lambda)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}u^3} \exp\left[-\frac{\lambda}{2m}\left(\frac{u}{m} - 2 + \frac{m}{u}\right)\right] & \text{dla } u > 0. \end{cases} \quad (2.89)$$

Niech zmienna  $Z = \frac{1}{U}$  ma rozkład obustronny gaussowski odwrotny z wartością oczekiwaną  $\frac{1}{m} + \frac{1}{\lambda}$  i wariancją  $\frac{1}{\lambda m} + \frac{2}{\lambda^2}$ . Funkcja jądra ma postać:

$$K_{RIG(m,\lambda)}(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \leq 0, \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}z} \exp\left[-\frac{\lambda}{2m}\left(mz - 2 + \frac{1}{mz}\right)\right] & \text{dla } z > 0. \end{cases} \quad (2.90)$$

Rozważana może być następująca funkcja jądra będąca funkcją gęstości rozkładu odwróconego gaussowskiego:

$$K_{IG\left(x, \frac{1}{h}\right)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}hu^3} \exp\left[-\frac{1}{2hx}\left(\frac{u}{x} - 2 + \frac{x}{u}\right)\right] & \text{dla } u > 0. \end{cases} \quad (2.91)$$

Funkcja jądra  $K_{IG\left(x, \frac{1}{h}\right)}(u)$  dąży do zera dla wszystkich  $u$ , gdy  $x$  zbliża się do obszarów brzegowych. Oznacza to ograniczenie  $\hat{f}_{IG}(0) = 0$ , co może być niepożądane w niektórych sytuacjach.

Funkcja jądra będąca funkcją gęstości rozkładu obustronnego odwrotnego gaussowskiego ma postać:

$$K_{RIG\left(\frac{1}{x-h}, \frac{1}{h}\right)}(u) = \begin{cases} 0 & \text{dla } u \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi hu}} \exp\left[-\frac{x-h}{2h} \left(\frac{u}{x-h} - 2 + \frac{x-h}{u}\right)\right] & \text{dla } u > 0. \end{cases} \quad (2.92)$$

Dla  $x = 0$   $K_{RIG\left(\frac{1}{x-h}, \frac{1}{h}\right)}(u)$  dąży do zera dla  $u \rightarrow 0$ , podczas gdy

$$K_{GI(1,h)}(0) = K_{G2(\rho_h(0),h)}(0) = \frac{1}{h}.$$

Estymatory jądrowe funkcji gęstości z odwróconą gaussowską funkcją jądra i obustronną odwróconą gaussowską są następujące:

$$\hat{f}_{IG}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{IG\left(x, \frac{1}{h}\right)}(X_i) \quad (2.93)$$

oraz

$$\hat{f}_{RIG}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{RIG\left(\frac{1}{x-h}, \frac{1}{h}\right)}(X_i). \quad (2.94)$$

Estymatory te są wyjątkowo łatwe do zastosowania, bardzo podobne do estymatorów z funkcją jądra gamma.

W odróżnieniu od obciążenia estymatorów jądrowych z funkcją jądra gamma, w obciążeniu estymatorów z gaussowską odwrotną funkcją jądra i obustronną gaussowską odwrotną nie ma wyrażenia pierwszej pochodnej prawdziwej funkcji gęstości.

W pracy Scailleta (2004) rozważane jest porównanie obciążenia i wariancji estymatorów z funkcjami jądra z tej klasy w porównaniu z klasą estymatorów z funkcjami jądra gamma. Przedstawione są również własności odporności estymatorów z asymetrycznymi funkcjami jądra.

Rozważane rodzaje funkcji jądra są wykorzystywane w praktyce, chociaż można wyróżnić te grupy, które są stosowane najczęściej. Klasyczne funkcje jądra ze względu na ich prostotę, a co za tym idzie łatwość implementacji, są traktowane w wielu sytuacjach badawczych jako uniwersalne. Należy jednak podkreślić konieczność rozważenia wykorzystania w estymacji jądrowej funkcji gęstości tzw. nieklasycznych funkcji jądra uwzględniających w większym stopniu niż w przypadku klasycznych funkcji jądra własności analizowanej zmiennej losowej. Procedurą zalecaną jest również zastosowanie różnych postaci funkcji jądra w konstrukcji estymatora funkcji gęstości, a następnie dokonanie wstępnej eliminacji i pominięcie w dalszych badaniach tych funkcji jądra, dla których estymator funkcji gęstości jest niewłaściwy.



## Rozdział 3

# Metody wyboru parametru wygładzania

### 3.1. Uwagi wstępne

Wybór parametru wygładzania jest kluczowym zagadnieniem w estymacji jądrowej funkcji gęstości, ale jednocześnie jest to zagadnienie traktowane jako najtrudniejsze z punktu widzenia określenia metody najefektywniejszej. Wielu badaczy (Kile, 2010) uważa, że metoda optymalna wyboru parametru wygładzania nie istnieje, gdyż brak jest jednoznacznie określonej definicji optymalnego parametru wygładzania. Nie sformułowano ostatecznie definitywnego i jedynego rozwiązania tego problemu. Gajek i Kałużka (1996) podkreślają, że nie ma takiego wyboru parametru wygładzania oraz funkcji jądra, przy którym scałkowany błąd średniokwadratowy jest najmniejszy dla dowolnej estymowanej funkcji gęstości.

W różnych sytuacjach i zagadnieniach badawczych dotyczących estymacji nieparametrycznej wymagany jest właściwy parametr wygładzania. W niektórych przypadkach będzie to parametr, który zagwarantuje dokładną lokalizację wartości modalnej nieznannej funkcji gęstości. Przykładem w naukach technicznych może być analiza dotycząca ujawniania i interpretacji widm powstających w wyniku oddziaływań wszelkich rodzajów promieniowania – w spektroskopii. W badaniach zjawisk finansowych może to być parametr wygładzania zapewniający otrzymanie informacji o liczbie wartości modalnych. W wyniku zastosowania różnych kryteriów błędu badacz może otrzymać różne wartości optymalnych, w danej sytuacji badawczej, parametrów wygładzania.

Ważnym zagadnieniem przy wyborze parametru wygładzania w konkretnym problemie badawczym jest kwestia jego stałości lub zmienności. Konieczne jest podjęcie decyzji, czy parametr wygładzania ma być globalny – jedna wartość parametru we wszystkich punktach próby, czy też lokalny – przyjmujący różne wartości dla różnych punktów w próbie. Zmienny parametr wygładzania ma zastosowanie w sytuacjach, gdy konieczne jest użycie różnej ilości wygładzania w różnych punktach. I tak, na przykład, blisko wartości modalnej wygładzanie powinno być mniejsze, natomiast w ogonach rozkładu jest preferowany większy

stopień wygładzania. Ponieważ funkcja gęstości nie jest znana, nieznane są podstawowe charakterystyki funkcji gęstości, w tym wartości modalne oraz ich liczba. A to oznacza, że przed analizą badacz nie posiada ani dokładnej, ani przybliżonej informacji, gdzie stosować odpowiednią wartość lokalnego parametru wygładzania. By właściwie korzystać z procedury estymacji funkcji gęstości z lokalnym parametrem wygładzania konieczny jest etap polegający na wstępnej analizie z globalnym parametrem wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości.

Inny problem związany ze stosowaniem lokalnego parametru wygładzania polega na tym, że estymator funkcji gęstości może nie być funkcją posiadającą własności funkcji gęstości, co w zagadnieniach praktycznych traktowane jest jako wada.

Dla prób skończonych niemożliwe jest uzyskanie pełnej informacji o nieznannej funkcji gęstości podlegającej analizie. O zakresie informacji uzyskanych z estymacji funkcji gęstości decyduje wiele czynników, między innymi to, ile fałszywych cech charakterystycznych badacz jest skłonny zaakceptować. Na przykład estymator nadmiernie wygładzony będzie wygładzał wielomodalną strukturę, podczas gdy estymator niedostatecznie wygładzony będzie wykazywał wiele wartości modalnych. Zadaniem badacza jest wyważenie między tymi opcjami, biorąc pod uwagę cel badania. Należy również rozważyć problem związany z liczebnością próby. W analizach metod wyboru parametru wygładzania opartych na danych parametr ten jest taką wartością, która minimalizuje błąd zdefiniowany w określonym kryterium błędu. Wielu badaczy uważa jednak, że dobre własności nowoczesnych metod wyboru parametru wygładzania są spełnione, niestety, tylko dla dużych prób.

Wyniki badań prezentowane w literaturze przedmiotu związane z optymalnym parametrem wygładzania w metodzie jądrowej w większości dotyczą porównania różnych metod wyboru parametru wygładzania. Porównanie metod wyboru parametru wygładzania powinno raczej być dokonane dla małych i średnich prób, gdyż dla dużych liczebności różnice między parametrami otrzymanymi różnymi metodami są pomijalne (przynajmniej dla praktyków). Co więcej, czas obliczeń numerycznych jest proporcjonalny do kwadratu liczebności próby. Zastosowanie metody wyrzucania danych (Wand, Jones, 1995; Raykar i in., 2010) lub metody dyskretyzacji danych (Turlach, 1992) pozwala na znaczną redukcję czasu obliczeń. Wyrzucanie danych powoduje, że nawet dla dużych zbiorów danych optymalny parametr wygładzania może być wyznaczony w rozsądnym czasie obliczeniowym.

Zagadnienie wyboru parametru wygładzania w nieparametrycznej estymacji funkcji gęstości jest rozważane przez ostatnich trzydzieści lat, ze względu na fakt, że nie istnieją idealne procedury wyboru optymalnego parametru wygładzania. Wybór optymalnego parametru wygładzania oznacza zatem określenie metody szacowania parametru wygładzania. Znaczenie dyskusji związanej z procedurami wyboru optymalnego parametru wygładzania (optymalnym wyborem parametru

wygładzania) jest bardzo duże, gdyż dotyczy wskazania rozsądnej procedury wyboru, chociażby w konkretnym zagadnieniu badawczym.

Wybór optymalnego parametru wygładzania dotyczy również nieparametrycznej regresji, ale przy estymacji funkcji gęstości zagadnienie to jest mniej problematyczne.

Metoda wyboru parametru wygładzania w oparciu o próbę  $X_1, X_2, \dots, X_n$  określana jest jako metoda oparta na danych. Przedstawiona jest, na przykład, w pracach Cao, Cuevasa i Manteigi (Cao i in., 1994) oraz Jonesa, Marrona i Sheathera (Jones i in., 1996).

Podstawowy podział metod wyboru parametru wygładzania uwarunkowany jest udziałem badacza w wyborze tego parametru. Subiektywny wybór parametru wygładzania (metoda wizualnej oceny badacza) jest dość często określany jako metoda wystarczająca i efektywna. Polega ona na wyznaczeniu wielu estymatorów jądrowych funkcji gęstości z różnymi wartościami parametrów wygładzania, które podlegają analizie dokonywanej przez badacza. Porównywane są różne estymatory jądrowe wyznaczone dla różnych wartości parametru wygładzania, a następnie wybierana jest (jest to wybór subiektywny) ta wartość parametru wygładzania, która odpowiada subiektywnie określonej optymalnej i oczekiwanej estymacji funkcji gęstości. Parametr wygładzania wyznaczony metodą subiektywnego wyboru nie jest niepowtarzalny. Decyzja o wyborze parametru podejmowana jest przez badacza, stąd różne wartości parametrów wygładzania wynikają jedynie z określonego podejścia badającego. Ponadto metoda ta jest czasochłonna.

Metoda subiektywna może zatem oznaczać estymację funkcji gęstości dla całego zakresu wartości parametrów wygładzania, a następnie na subiektywnym wyborze jednego estymatora. Punktem startowym takiego podejścia może być wyznaczenie estymatora z dużą wartością parametru wygładzania, a następnie zmniejszanie ilości wygładzania (zwiększanie wartości parametru wygładzania) aż do otrzymania odpowiedniego i oczekiwanego estymatora, przy czym ocena stopnia dobroci estymatora zależy od badacza i może być oparta na doświadczeniu i wynikach wcześniejszych badań. Podejście takie wydaje się być niepraktyczne, zwłaszcza w sytuacji gdy w badaniu istnieje konieczność przeprowadzenia wielu procedur estymacyjnych.

Metody obiektywne oparte są na ocenie rozbieżności między estymatorem a funkcją podlegającą estymacji. Rozbieżność ta jest wyznaczana numerycznie przy podaniu pewnego kryterium błędu (miary precyzji estymacji, miary dokładności estymacji). Przykładowe kryteria błędu podane są i omówione w rozdziale pierwszym. Optymalny parametr wygładzania jest tą wartością, która minimalizuje błąd mierzony przy zastosowaniu określonego kryterium błędu. Należy jednak zwrócić uwagę, że różne miary stosowane przy ocenie dobroci estymacji implikują różne definicje optymalnego parametru wygładzania. Optymalny parametr wygładzania może być zdefiniowany jako, na przykład: minimalizujący *ISE*, minimalizujący *MISE* lub też parametr minimalizujący *AMISE* (Gajek, Kałużka, 1996).

Parametr wygładzania  $h$  jest otrzymany jako rozwiązanie  $\min_h MP$ , gdzie  $MP$  oznacza odpowiednią miarę precyzji, jedną z omówionych w podrozdziale 1.3.

Metody te są określane jako obiektywne, wymagają znacznie mniejszych nakładów czasu, gdyż wyznaczane są w sposób numeryczny. Zasadniczą wadą tych metod jest problem z określeniem kryterium błędu. Jeżeli kryterium błędu nie odzwierciedla rozbieżności między estymatorem a funkcją gęstości, kryterium to jest bezużyteczne.

Stosując oznaczenie spłotu dwóch funkcji  $K$  i  $L$ , czyli  $K * L(x)$ ,

$$K * L(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-u)L(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} K(u)L(x-u)du,$$
 miary dopasowania można przedstawić jako (por. (1.47), (1.49)):

$$MSE[\hat{f}(x)] = [(K_h * f)(x) - f(x)]^2 + \frac{1}{n} [(K_h^2 * f)(x) - (K_h * f)^2(x)], \quad (3.1)$$

oraz

$$\begin{aligned} MISE[\hat{f}(x)] &= \frac{1}{nh} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2(x)dx + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} (K_h * f)(x)dx + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (K_h * f)(x)f(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Niech funkcja gęstości będzie  $k_0$ -krotnie różniczkowalna,  $0 < k < k_0$ , dla parzystego  $k$ , natomiast  $k$ -ta pochodna funkcji gęstości niech będzie ograniczona i całkowana w kwadracie. Niech parametr wygładzania będzie tak dobrany, by  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nh = +\infty$ .

Miarę dopasowania  $MISE$  można przedstawić jako:

$$MISE[\hat{f}(x)] = \frac{\kappa}{nh} + h^{2k} \kappa_k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right)^2 dx + o\left(h^{2k} + \frac{1}{nh}\right), \quad (3.3)$$

gdzie funkcja jądra  $K \in S_{0,k}$ .

Dla funkcji jądra drugiego rzędu otrzymujemy zatem:

$$MISE[\hat{f}(x)] = \frac{\kappa}{nh} + \frac{1}{4} h^4 \kappa_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (f^{(2)}(x))^2 dx + o\left(h^4 + \frac{1}{nh}\right). \quad (3.4)$$

Niestety, wyrażenie (3.3) nie umożliwia bezpośredniej oceny wpływu parametru wygładzania na zachowanie się estymatora. Dlatego rozważane jest podejście asymptotyczne pozwalające nie tylko na analizę parametru wygładzania, ale również analizę tempa zbieżności estymatora jądrowego funkcji gęstości. Zaletą miary

*AMISE* jest to, że odzwierciedla zależność między estymatorem jądrowym funkcji gęstości a wartością parametru wygładzania. Niestety, podobnie jak w przypadku miary *MISE*, nie ma łatwej interpretacji. Ale dla  $h \rightarrow 0$  i  $nh \rightarrow +\infty$  zachodzi:  $MISE[\hat{f}(x)] = AMISE[\hat{f}(x)] + o(AMISE[\hat{f}(x)])$ .

Podejście asymptotyczne polega na analizie miary *AMISE* jako sumy asymptotycznej scałkowanej wariancji i asymptotycznego kwadratu scałkowanego obciążenia (por. podrozdział 1.3). Aproksymacja scałkowanego obciążenia, dla

funkcji jądra drugiego rzędu, jest dokonywana z wykorzystaniem  $h^4 \kappa_2^2 \frac{R(f^{(2)})}{4}$ , natomiast scałkowana wariancja jest aproksymowana poprzez  $\frac{\kappa}{nh}$ . Aproksymacja

scałkowanego obciążenia jest odpowiedzialna za stosunkowo niedostateczną aproksymację *MISE*, co wykazali Marron i Wand (1992). W badaniu, w którym stosowano funkcje gęstości, będące mieszaniną rozkładów normalnych oraz gausowską funkcję jądra otrzymano dobrą aproksymacją *MISE* za pomocą *AMISE*, chociaż czasami w badaniu wymagane były próby liczące ponad milion elementów.

Z postaci *AMISE* wynika wpływ parametru wygładzania  $h$  na estymator jądrowy. Małe wartości parametru  $h$  powodują zwiększenie asymptotycznej wariancji. Duże wartości parametru wygładzania redukują asymptotyczną wariancję, ale również powodują zwiększenie asymptotycznego obciążenia.

Miara *AMISE* ma postać:

$$AMISE[\hat{f}(x)] = \frac{\kappa}{nh} + h^{2k} \kappa_k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right)^2 dx. \tag{3.5}$$

Dla funkcji jądra drugiego rzędu otrzymujemy zatem:

$$AMISE[\hat{f}(x)] = \frac{\kappa}{nh} + \frac{h^4 \kappa_2^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(2)}(x)]^2 dx. \tag{3.6}$$

Niech  $h_{Opt,0,k}$  oznacza optymalną wartość parametru wygładzania dla  $v = 0$  i dla rzędu funkcji jądra równej  $k$ . Jeżeli jest to wartość, która minimalizuje miarę (3.5), wówczas:

$$h_{Opt,0,k} = \min_{h \in H_n} AMISE[\hat{f}(x)] = h_{AMISE}, \tag{3.7}$$

gdzie  $H_n$  jest zbiorem wartości parametru wygładzania.

Rozwiązaniem równania:

$$\frac{dAMISE[\hat{f}(x)]}{dh} = 0$$

jest

$$h_{Opt,0,k} = \min_{h \in H_n} AMISE[\hat{f}(x)] = h_{AMISE}. \tag{3.8}$$

Oznacza to, że

$$h_{Opt,0,k}^{2k+1} = \frac{\gamma_{0k}^{2k+1}}{2nh \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \right)^2 dx}, \quad (3.9)$$

gdzie  $\gamma_{vk} = \left( \frac{\kappa}{\kappa_k^2} \right)^{\frac{1}{2k+1}}$  jest czynnikiem kanonicznym funkcji jądra  $K \in S_{v,k}$  (por. podrozdział 2.7).

$$\text{Oznacza to, że } h_{Opt,0,k} = O \left( \frac{1}{n^{\frac{1}{2k+1}}} \right). \quad (3.10)$$

Ponadto można wykazać, że dla  $h = h_{Opt,0,k}$ :

$$\frac{d^2 AMISE[\hat{f}(x)]}{dh^2} = O \left( \frac{1}{n^{\frac{2k-2}{2k+1}}} \right). \quad (3.11)$$

Dla funkcji jądra drugiego rzędu optymalna wartość parametru wygładzania wynosi:

$$h_{Opt,0,2} = \left( \frac{\kappa}{\kappa_2^2 R(f^{(2)})} \right)^{\frac{1}{5}} n^{\frac{1}{5}}. \quad (3.12)$$

Dla tak określonego parametru wygładzania  $AMISE[\hat{f}(x)] = \frac{c}{n^{\frac{4}{5}}}$  dla pewnej stałej  $c > 0$ . Dowód można znaleźć w pracy Krzyżki i in. (2008).

Z powyższego wynika, że szybkość zbieżności estymatora jest rzędu  $n^{-\frac{4}{5}}$ . Można wykazać, że przy słabych założeniach nie istnieje estymator nieparametryczny, którego szybkość byłaby większa od  $n^{-\frac{4}{5}}$ .

Minimalizacja  $AMISE[\hat{f}(x)]$  prowadzi do wyznaczenia parametru wygładzania  $h_{AMISE}$ :

$$h_{AMISE} = h_{AMISE,k} = \left( \frac{\kappa(k!)^2}{2k\kappa_k^2 R(f^{(k)})} \right)^{\frac{1}{2k+1}} n^{-\frac{1}{2k+1}}. \quad (3.13)$$

Dla  $k = 2$  otrzymujemy:

$$h_{AMISE,2} = \left( \frac{\kappa}{\kappa_2^2 R(f^{(2)})} \right)^{\frac{1}{5}} n^{-\frac{1}{5}}. \quad (3.14)$$

Oznacza to, że optymalną zbieżnością dla  $h_{AMISE}$  jest  $h_{AMISE} \sim n^{-\frac{1}{2k+1}}$ , wówczas

$AMISE[\hat{f}_{h_{AMISE}}(x)] \sim n^{-\frac{2k}{2k+1}}$ . Oczywiście ta sama zbieżność zachodzi dla  $MISE$ .

Po wstawieniu  $h_{AMISE}$  do  $AMISE[\hat{f}_{h_{AMISE}}(x)]$  otrzymujemy:

$$AMISE[\hat{f}_{h_{AMISE}}(x)] = \left( \frac{2k+1}{2k} \right) \left( \frac{2k\kappa_k^2 R(f^{(k)}) \kappa^{2k}}{(k!)^2} \right)^{\frac{1}{2k+1}} n^{-\frac{2k}{2k+1}} = C_1(K) C_2(f) n^{-\frac{2k}{2k+1}}, \quad (3.15)$$

dla pewnych  $C_1(K)$  i  $C_2(f)$ .

Turlach (1993) uważa, że zasadnicza dyskusja dotyczącą optymalnego parametru wygładzania jest związana przede wszystkim z wyborem miary  $ISE$  lub  $MISE$  w określeniu optymalnego parametru wygładzania. Niech:

$h_{ISE}$  oznacza taką wartość parametru wygładzania, dla której  $ISE[\hat{f}(x)]$  jest najmniejsze,

$h_{MISE}$  oznacza taką wartość parametru wygładzania, dla której  $MISE[\hat{f}(x)]$  jest najmniejsze,

$h_{AMISE}$  oznacza taką wartość parametru wygładzania, dla której  $AMISE[\hat{f}(x)]$  jest najmniejsze.

Należy zauważyć, że zarówno  $h_{ISE}$ , jak i  $h_{MISE}$  są zmiennymi losowymi zależnymi od próby  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Marron i Wand (1992) wykazali, że  $h_{MISE}$  może przyjmować bliskie wartości do  $h_{AMISE}$  gdy liczebność próby jest bliska jednego miliona. Ponadto relatywna zbieżność dowolnego estymowanego parametru wygładzania  $\hat{h}$  do  $h_{ISE}$  jest rzędu

$\left( \frac{1}{n^{10}} \right)$ , podczas gdy relatywna zbieżność  $\hat{h}$  do  $h_{MISE}$  jest rzędu  $\left( \frac{1}{n^2} \right)$ , czyli

$$\frac{\hat{h}}{h_{ISE}} = 1 + O_p\left(\frac{1}{n^{10}}\right) \text{ oraz } \frac{\hat{h}}{h_{MISE}} = 1 + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Wybór  $h_{ISE}$  obarczony jest dużą wariancją, podczas gdy wybór  $h_{MISE}$  jest mniej zależny od fluktuacji w próbie. Stąd  $h_{MISE}$  powinno być traktowane jako optymalna wartość parametru wygładzania mimo wcześniejszych uwag. Ponadto zachodzi następująca zależność:

$$ISE[\hat{f}_{h_{ISE}}(x)] \leq ISE[\hat{f}_{h_*}(x)] \Rightarrow E\{ISE[\hat{f}_{h_{ISE}}(x)]\} \leq E\{ISE[\hat{f}_{h_*}(x)]\} = MISE[\hat{f}_{h_*}(x)]$$

gdzie  $h_* \in \{h_{ISE}, h_{MISE}, h_{AMISE}\}$ .

Należy zauważyć, że optymalne parametry wygładzania rozważane przez Turlacha (1993), czyli  $h_{ISE}$ ,  $h_{MISE}$  oraz  $h_{AMISE}$ , nie są możliwe do bezpośredniego zastosowania w praktyce, gdyż nie ma możliwości wyznaczenia ich wartości ze względu na występowanie nieznannej funkcji gęstości w każdej z postaci. Dlatego też Turlach rozważa pojęcie estymacji optymalnego parametru wygładzania na podstawie próby  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . W ten sposób następuje zastąpienie optymalnej wartości parametru wygładzania  $h_*$  z wykorzystaniem  $h_{ISE}$ ,  $h_{MISE}$  oraz  $h_{AMISE}$ . Stąd, można wyróżnić trzy grupy metod wyboru parametru wygładzania w jądrowej estymacji funkcji gęstości:

- 1) oparte na minimalizacji *AMISE*,
- 2) oparte na minimalizacji *ISE*,
- 3) oparte na minimalizacji *MISE*.

Występuje również podział metod wyboru parametru wygładzania na metody subiektywne, omówione wcześniej, i metody automatyczne. Metody automatyczne dzielą się na klasyczne, wykorzystujące metody parametrycznego modelowania (w tym metody krosvalidacyjne) i metody podstawiania.

Szeroka analiza porównawcza, uwzględniająca powyższy podział metod, jest przedstawiona, między innymi, w pracach Loadera (1999) oraz Heidenreicha i in. (2013).

W literaturze znany jest również podział metod wyboru parametru wygładzania na metody pierwszej i drugiej generacji. Metody pierwszej generacji to niektóre metody odwołania do rozkładu oraz niektóre metody krosvalidacyjne, natomiast metody drugiej generacji to przede wszystkim metody podstawiania i metody bootstrapowe.

W pracy stosowany będzie następujący podział metod wyboru parametru wygładzania: metody odwołania do rozkładu (metody Q&D, metody szybkie i brudne), metody krosvalidacyjne (metody *cross-validation*, metody krzyżowej walidacji, metody sprawdzania krzyżowego), metody podstawiania (metody *plug-in*) oraz inne metody wyboru parametru wygładzania w metodzie jądrowej estymacji funkcji gęstości.

### 3.2. Metody odwołania do rozkładu

Metody odwołania do rozkładu (metody Q&D, metody *quick and dirty*, szybkie i brudne metody) wykorzystują miarę dopasowania *AMISE*, której postać dla funkcji jądra drugiego rzędu jest następująca:

$$AMISE[\hat{f}(x)] = \frac{\kappa}{nh} + \frac{h^4 \kappa_2^2}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(2)}(x)]^2 dx.$$

Minimalizacja powyższej miary precyzji estymacji prowadzi do parametru wygładzania o postaci  $h_{AMISE} = \left( \frac{\kappa}{\kappa_2^2 R(f^{(2)})} \right)^{\frac{1}{5}} n^{-\frac{1}{5}}$ .

W wyrażeniu na wartość optymalnego parametru wygładzania występuje scałkowany kwadrat drugiej pochodnej funkcji gęstości, czyli  $R(f^{(2)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(2)}(x)]^2 dx$ , zawierający nieznaną funkcję gęstości. W praktycznej zasadzie Silvermana (metodzie odwołania do standardowego rozkładu) w wyrażeniu tym wykorzystuje się funkcję gęstości pewnego (referencyjnego) rozkładu, przy czym funkcja ta jest reskalowana w taki sposób, by wariancja tego rozkładu była równa wariancji z próby. Następnie wyrażenie to jest wykorzystywane w  $h_{AMISE}$ .

Metoda analogiczna stosowana była również w przypadku histogramu (por. podrozdział 1.2).

Przy założeniu, że nieznaną rozkład zmiennej losowej jest rozkładem normalnym (przyjętym jako rozkład referencyjny) z wariancją  $\sigma^2$ , otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(2)}(x)]^2 dx = \frac{3}{8\sigma^5 \sqrt{\pi}} \approx 0,212\sigma^{-5}.$$

Dla gaussowskiej funkcji jądra, dla której  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du = 1$  oraz  $\int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$  postać parametru wygładzania jest następująca:

$$h_{RR,G} = \frac{1}{\sqrt[10]{4\pi}} \frac{1}{\sqrt[5]{8\sqrt{\pi}}} \sigma n^{-\frac{1}{5}} \approx 1,06\sigma n^{-\frac{1}{5}} \quad \text{oraz} \quad h_{RR,G} = 0,79Rn^{-\frac{1}{5}},$$

gdzie  $R$  jest rozstępem międzykwartkowym zmiennej losowej  $X$ .

Zastosowanie miar pozycyjnych w wyrażeniu na optymalny parametr wygładzania powoduje, że parametr wygładzania  $h_{RR,G}$  z rozstępem międzykwartkowym jest bardziej odporny na wartości odstające.

Stąd, dla gaussowskiej funkcji jądra, estymator parametru wygładzania wyznaczony metodą odwołania do standardowego rozkładu ma postać (Härdle, 1991):

$$h_{RR,G} = 1,06 \min \left( \hat{\sigma}, \frac{\hat{R}}{1,34} \right) n^{-\frac{1}{5}}, \quad (3.16)$$

gdzie:

$\hat{\sigma}$  jest oszacowaniem na podstawie próby odchylenia standardowego,  
 $\hat{R}$  jest oszacowaniem na podstawie próby rozstępu międzykwartkowego.

Silverman w 1986 roku zaproponował zmniejszenie wartości 1,06 do 0,9, by nie powodować ominięcia dwumodalności. Wówczas:

$$h_{RR,G} = 0,9An^{-\frac{1}{5}}, \text{ gdzie } A = \min\left(\hat{\sigma}, \frac{\hat{R}}{1,34}\right).$$

Dla funkcji jądra Epanechnikowa, dla której  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 K(u) du = 1$  oraz  $\int_{-\infty}^{+\infty} K^2(u) du \approx 0,27$ , otrzymujemy następującą postać parametru wygładzania:

$$h_{RR,E} \approx 1,05\sigma n^{-\frac{1}{5}}.$$

Możliwe jest albo podejście polegające na wykorzystaniu wartości parametru wygładzania  $h_{RR}$ , bezpośrednio w procedurze (wówczas procedura ta jest znana jako praktyczna zasada Silvermana lub metoda odwołania do standardowego rozkładu), albo  $h_{RR}$  jest uwzględniana w  $\int_{-\infty}^{+\infty} [\hat{f}^{(2)}(x)]^2 dx$ , co może być wykorzystane do otrzymania optymalnego parametru wygładzania. Metoda ta, niestety, nie jest w pełni automatyczna w porównaniu z zasadą Silvermana, gdyż konieczne jest wybranie początkowej wartości parametru, by estymować  $\int_{-\infty}^{+\infty} [f^{(2)}(x)]^2 dx$ . Dlatego też podejście to traktowane jest jako należące do grupy metod podstawiania (Jones i in., 1996; Loader, 1999).

W praktycznej zasadzie Silvermana (metodzie odwołania do standardowego rozkładu)  $h_{RR}$  jest oszacowaniem optymalnego parametru wygładzania. Metoda ta jest jednak ograniczona do stosowania w sytuacji gdy prespecyfikowana rodzina gęstości jest dobrana właściwie. Gdy rozkład jest zbliżony do rozkładu normalnego, procedura ta daje dobre wyniki. Jest ona również wygodna dla badaczy ze względu na nieskomplikowane obliczenia polegające na wyznaczeniu odchylenia standardowego z próby i wykorzystaniu go w postaci parametru wygładzania.

Jones, Marron i Sheather wykazali w 1996 roku, że średnia wartość parametru wygładzania  $h_{RR}$  przyjmuje dość duże wartości, co oznacza nadmierne wygładzenie określane jako nadoszacowanie estymacji.

Drugą metodą odwołania do rozkładu, opartą na minimalizacji *AMISE*, jest zasada maksymalnego wygładzania, która częściowo została wykorzystana przy histogramie (Terrell, Scott, 1985). Metoda ta oparta jest na wyborze największego stopnia wygładzenia kompatybilnego z estymowaną skalą gęstości. Największy stopień wygładzenia występuje dla najmniejszej wartości  $R(f^{(2)})$ . Dla określonej wartości skali, na przykład wariancji, Terrell wykazał, że rodzina rozkładów beta (4,4) z wariancją  $\sigma^2$  minimalizuje  $R(f^{(2)})$ .

Nieznany funkcjonal  $R(f^{(2)})$  estymowany jest za pomocą jego dolnego ograniczenia. Wówczas parametr wygładzania dla funkcji jądra drugiego rzędu ma postać:

$$h_{MS} = \frac{3}{35^5} \hat{\sigma} \left( \frac{R(K)}{\kappa_2^2} \right)^{\frac{1}{5}} n^{-\frac{1}{5}}, \quad (3.17)$$

gdzie  $\hat{\sigma}^2$  jest wariancją z próby.

Dla gaussowskiej funkcji jądra otrzymujemy (Horová, Zelinka, 2007):

$$h_{MS,G} = 1,144 \hat{\sigma} n^{-\frac{1}{5}}.$$

Dla funkcji jądra Epanecznikowa parametr ten ma postać:

$$h_{MS,E} = 2,532 \hat{\sigma} n^{-\frac{1}{5}}.$$

Parametr wygładzania wyznaczony metodą Terrella jest w przybliżeniu 1,08 razy większy od wartości parametru wygładzania wyznaczony metodą Silvermana.

Dla jednomodalnych funkcji gęstości praktyczna zasada Silvermana oraz zasada maksymalnego wygładzania dają dobre wyniki, dla gęstości wielomodalnych można zauważyć zbyt duże wygładzenie danych. Jednak Terrell zaleca te metody jako dobry punkt startowy do analiz w sytuacji gdy nie mamy informacji o strukturze danych. Można bowiem określić akceptowalny przedział dla wartości parametru wygładzania (Horová i in., 2012) jako:

$$H_n = \left[ \min |X_i - X_j|, h_{MS} \right],$$

gdzie  $\min |X_i - X_j|$  oznacza minimalną odległość między punktami  $X_i$  i  $X_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  $i \neq j$ , natomiast  $h_{MS}$  dla funkcji jądra drugiego rzędu jest określony przez (3.17).

### 3.3. Metody krosvalidacyjne

Metody krosvalidacyjne należą do grupy metod określanych jako metody całkowicie automatyczne, oparte na danych. Co więcej, przy stosowaniu metod krosvalidacyjnych nie ma konieczności przyjmowania założenia o klasie gładkości, do której nieznaną funkcją gęstości należy.

## Klasyczna metoda krosvalidacyjna

Jedną z częściej wykorzystywanych w praktyce metod krosvalidacyjnych jest metoda krosvalidacyjna najmniejszych kwadratów, określana jako metoda klasyczna. Estymatorem parametru wygładzania w jądrowej estymacji funkcji gęstości jest parametr minimalizujący następujące wyrażenie:

$$ISE\left[\hat{f}_h(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{f}_h(x) - f(x)\right]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_h^2(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_h(x) f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx, \quad (3.18)$$

gdzie  $\hat{f}_h(x)$  oznacza estymator jądrowy funkcji gęstości z parametrem wygładzania  $h$ . Niech  $\hat{f}_h(x) = \hat{f}(x)$  w celu uproszczenia zapisu.

Pierwszy element sumy (3.18) jest znany, ostatni jest niezależny od parametru wygładzania, co oznacza, że tylko wyrażenie  $2 \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) f(x) dx$  musi być estymowane. Estymacja może być dokonana metodą momentów i wówczas estymatorem wyrażenia  $ISE\left[\hat{f}(x)\right] - \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx$  jest funkcja określana jako funkcja krosvalidacyjna najmniejszych kwadratów o postaci:

$$LSCV(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^2(x) dx - 2 \sum_{i=1}^n \hat{f}_{-i}(X_i), \quad (3.19)$$

gdzie:

$$\hat{f}_{-i}(X_i) = \frac{1}{(n-1)h} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right) \quad (3.20)$$

jest estymatorem jądrowym wyznaczonym na podstawie próby, w której pominięto  $i$ -tą obserwację  $X_i$ , zwanym estymatorem *leave-one-out*. Oznacza to konieczność obliczania  $n$ -krotnie estymatora funkcji gęstości i to dla wszystkich zadanych wartości parametru wygładzania  $h$ . Proponowane jest podejście (Krzyśko i in., 2008), polegające na wyznaczeniu dla każdego  $h > 0$ :

$$LSCV(h) \approx \frac{1}{hn^2} \sum_i \sum_j K^*\left(\frac{X_i - X_j}{h}\right) + \frac{2}{nh} K(0),$$

gdzie  $K^*(x) = K^{(2)}(x) - 2K(x)$  oraz  $K^{(2)}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(z-y)K(y)dy$ .

W szczególności, jeżeli funkcja jądra jest funkcją gęstości rozkładu normalnego standaryzowanego, to  $K^{(2)}(x)$  jest funkcją gęstości rozkładu normalnego z parametrami 0 i 2.

Dla gaussowskiej funkcji jądra (Bowman, Azzalini, 2004) zachodzi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{f}(x))^2 dx = \frac{1}{n^2 h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h}\right) K\left(\frac{x-X_j}{h}\right) dx = \frac{1}{2n^2 h \sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e^{-\frac{(X_i-X_j)^2}{2h^2}}$$

oraz

$$\frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n K\left(\frac{X_i-X_j}{h}\right) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_i-X_j)^2}{2h^2}}.$$

Stąd

$$LSCV(h) = \frac{1}{2n^2 h \sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e^{-\frac{(X_i-X_j)^2}{2h^2}} - \frac{2}{n(n-1)h} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X_i-X_j)^2}{2h^2}}. \quad (3.21)$$

Oszacowaniem parametru wygładzania otrzymanym metodą krosvalidacyjną najmniejszych kwadratów jest następujący parametr:

$$h_{LSCV} = \arg \min_h LSCV(h). \quad (3.22)$$

Klasyczna metoda krosvalidacyjna zwana jest również metodą nieobciążoną krosvalidacyjną, gdyż dla ustalonego, nielosowego parametru wygładzania zachodzi (Scott, Terrell, 1987):

$$\begin{aligned} E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^2(x) dx - 2 \sum_{i=1}^n \hat{f}_{-i}(X_i) \right] &= E[ISE(h)] - \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = \\ &= E[ISE(h)] - R(f) = MISE(h) - R(f) \end{aligned} \quad (3.23)$$

gdzie  $E \left[ \sum_{i=1}^n \hat{f}_{-i}(X_i) \right] = E \hat{f}_{-n}(X_n) = E \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{-n}(x) f(x) dx = E \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) f(x) dx.$

Stąd  $LSCV(h)$  jest nieobciążonym estymatorem  $ISE(h) - R(f)$ .

Zaletami klasycznej metody krosvalidacyjnej są przede wszystkim intuicyjna definicja oraz prosta implementacja. Metoda ta jest asymptotycznie optymalna przy określonych dość słabych założeniach. Niestety, charakteryzuje się dużą wariancją, co oznacza w praktyce, że dla różnych prób z tego samego rozkładu szacowany parametr wygładzania może mieć dużą wariancję (Hall, 1983; Stone 1984). Najważniejszą wadą klasycznej metody krosvalidacyjnej jest brak stabilności nawet wtedy, gdy zwiększa się liczebność próby.

Dla wartości parametru wygładzania  $h_{LSCV}$  przy funkcji jądra drugiego rzędu można wykazać, że (Stone, 1984):

$$\frac{ISE(h_{LSCV})}{ISE(h_{ISE})} \xrightarrow{a.s.} 1,$$

gdzie:

$h_{ISE}$  oznacza parametr wygładzania, dla którego  $ISE(h)$  osiąga wartość najmniejszą,

$h_{LSCV}$  oznacza parametr wygładzania, dla którego  $LSCV(h)$  osiąga wartość najmniejszą.

Ponadto te dwa parametry wygładzania charakteryzują się ujemną korelacją.

Względne tempo zbieżności parametru wygładzania wyznaczonego metodą klasyczną krosvalidacyjną w stosunku do parametru wygładzania minimalizującego  $ISE$  wynosi  $O_p\left(\frac{1}{10}\right)$ . Jest ono określane jako bardzo wolne, ale jednocześnie

jedyne możliwe do otrzymania dla parametru minimalizującego  $ISE$ .

Można wykazać również, że  $n^{1/10}\left(\frac{h_{LSCV}}{h_{ISE}} - 1\right)$  ma asymptotyczny rozkład nor-

malny z wartością oczekiwaną równą 0 oraz odchyleniem standardowym  $\sigma_{LSCV}$ .

Funkcja  $LSCV(h)$  ma często kilka minimów, co w wielu przypadkach uniemożliwia zastosowanie klasycznych metod numerycznych w celu znalezienia minimum funkcji. Proponuje się zatem wybór takiego parametru wygładzania, który jest największy dla minimów lokalnych (Silverman, 1986). Ma to szczególne znaczenia gdy  $LSCV(h) \rightarrow -\infty$  dla  $h \rightarrow 0$ , gdy dane są dyskretne i mają kilka powtórzeń. Może się jednocześnie zdarzyć, że  $LSCV(h)$  nie ma minimum.

Stabilizowana metoda krosvalidacyjna (Chiu, 1991; 1996) jest modyfikacją klasycznej metody krosvalidacyjnej, która pozwala rozwiązać problem związany z brakiem stabilności metody klasycznej, nawet wtedy gdy zwiększa się liczebność próby. W oparciu o funkcję charakterystyczną Chiu (1991) podał wyrażenie dla szerokiego parametru wygładzania  $wh_{CV}$ .

Kryterium stabilizowanej metody krosvalidacyjnej jest następujące:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |\tilde{\varphi}(\lambda)|^2 [w^2(h\lambda) - 2w(h\lambda)] d\lambda + \frac{2K(0)}{nh},$$

gdzie:

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n e^{i\lambda X_j},$$

$$w(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda u} K(u) du.$$

Dla parametru wygładzania minimalizującego powyższe kryterium  $h_{ST}$  można wykazać, że  $h_{ST} \xrightarrow{a.s.} h_{ISE}$ .

## Metoda krosvalidacyjna pseudowiarygodności

Metoda krosvalidacyjna pseudowiarygodności polega na takim wyborze parametru wygładzania  $h$ , by funkcja wiarygodności  $\prod_{i=1}^n \hat{f}(X_i)$  była maksymalizowana (Duin, 1976). W celu uniknięcia sytuacji gdy maksimum funkcji dostarczało wartości parametru wygładzania  $h = 0$ , należy zastąpić  $\hat{f}(x)$  przez estymator *leave-one-out*  $\hat{f}_{-i}(x) = \frac{1}{(n-1)h} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K\left(\frac{x - X_j}{h}\right)$ .

Parametr wygładzania wyznaczony metodą krosvalidacyjną pseudowiarygodności jest określony w następujący sposób:

$$h_{PLCV} = \arg \min_h PLCV(h), \quad (3.24)$$

$$\text{gdzie } PLCV(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \hat{f}_{-i}(X_i).$$

Jest to parametr minimalizujący odległość Kullbacka-Leiblera między  $\hat{f}(x)$  a  $f(x)$ . Charakteryzuje się własnościami właściwymi dla miary  $L_1$ . Wada tej metody polega na niezgodnej estymacji dla rozkładów ciężkoogonowych (na przykład rodziny rozkładów  $t$ -Studenta).

## Obciążona metoda krosvalidacyjna

W obciążonej metodzie krosvalidacyjnej parametr wygładzania minimalizuje asymptotyczną postać miary  $MISE$ , czyli  $AMISE$  o postaci:

$$AMISE(h) = \frac{R(k)}{nh} + h^{2k} \left( \frac{\kappa_k}{k!} \right)^2 R(f^{(k)}),$$

która dla funkcji jądra drugiego rzędu przyjmuje postać:

$$AMISE(h) = \frac{R(k)}{nh} + h^4 \left( \frac{\kappa_2}{2} \right)^2 R(f^{(2)}).$$

W tym wyrażeniu wykorzystywane jest oszacowanie  $R(f^{(2)})$  za pomocą  $R(\hat{f}^{(2)})$  (Scott, Terrell, 1987).

Estymator drugiej pochodnej scałkowanego kwadratu funkcji gęstości ma postać:

$$\begin{aligned} R(\hat{f}^{(2)}) &= \frac{1}{n} K^{(2)} * K^{(2)}(0) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K^{(2)} * K^{(2)}(X_i - X_j) = \\ &= \frac{1}{nh^5} K^{(2)} * K^{(2)}(0) + \frac{1}{n^2 h^5} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K^{(2)} * K^{(2)}(X_i - X_j) = \\ &= \frac{1}{nh^5} R(K^{(2)}) + \frac{1}{n^2 h^5} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K^{(2)} * K^{(2)}(X_i - X_j) \end{aligned}$$

dla  $K^{(p)}(u) = \frac{1}{h^{(p+1)}} K^{(p)}\left(\frac{u}{h}\right)$ .

Wartość oczekiwana powyższego estymatora jest następująca:

$E\left[R(\hat{f}^{(2)})\right] = R(f^{(2)}) + \frac{R(K^{(2)})}{nh^5} + O(h^2)$ , co oznacza, że estymator ten jest estymatorem obciążonym. Scott i Terrell zaproponowali w 1987 roku wykorzystanie estymatora  $\hat{R}(f^{(2)})$  dla estymacji  $R(f^{(2)})$ , gdzie:

$$\hat{R}(f^{(2)}) = R(\hat{f}^{(2)}) - \frac{R(K^{(2)})}{nh^5}.$$

Wówczas kryterium jest następujące:

$$BCV(h) = \frac{R(K)}{nh} + \frac{h^4 \mu_2^2(K)}{4n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K^{(2)} * K^{(2)}(X_i - X_j).$$

Parametr wygładzania wyznaczony metodą obciążoną krosvalidacyjną jest następujący:

$$h_{BCV} = \arg \min_h BCV(h). \tag{3.25}$$

Obciążona metoda krosvalidacyjna jest traktowana jako metoda hybrydowa metody krosvalidacyjnej i metody podstawiania, gdzie zamiast zastosowania rozkładu referencyjnego stosuje się estymację odpowiedniego wyrażenia.

Dla gaussowskiej funkcji jądra, dla której  $\kappa_2 = 1$  i  $R(K) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ , otrzymujemy:

$$BCV(h) = \frac{1}{2nh\sqrt{\pi}} + \frac{1}{32n^2h^5\sqrt{\pi}} \left( h^4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n e^{-\frac{(X_i - X_j)^2}{4h^2}} - h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (X_i - X_j)^2 e^{-\frac{(X_i - X_j)^2}{4h^2}} + \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (X_i - X_j)^4 e^{-\frac{(X_i - X_j)^2}{2h^2}} \right).$$

Minimalizacja powyższego wyrażenia względem  $h$  dostarcza estymator optymalnego parametru wygładzania  $h_{BCV}$ . Można wykazać, że  $h_{BCV}$  ma ten sam rząd zbieżności relatywnej do  $h_{ISE}$  jak  $h_{BCV}$  do  $h_{CV}$ , ale stała jest zawsze dużo mniejsza. Problem wielu minimów pojawia się rzadziej niż w przypadku klasycznej metody krosvalidacyjnej. Dla obciążonej metody krosvalidacyjnej zaleca się wybranie najmniejszej wartości parametru wygładzania, dla której występuje lokalne minimum.

Dla klasycznych funkcji jądra zachodzi (Cao i in., 1994):

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} BCV(h) = +\infty,$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} BCV(h) = 0.$$

Ponieważ  $\lim_{h \rightarrow +\infty} BCV(h) = 0$ ,  $h_{BCV}$  jest polecane jako największa lokalna wartość minimalizująca  $BCV(h)$  mniej lub w takim samym stopniu jak parametr wygładzania z przeszacowaniem, czyli  $h_{MS}$ . Z drugiej jednak strony Jones i in. (1996) zalecają, by  $h_{BCV}$  było najmniejszą lokalną wartością minimalizującą  $BCV(h)$  ze względu na lepsze empiryczne własności.

Dla gaussowskiej funkcji jądra, dla której  $4R(K) - \kappa_2^2 K(0) > 0$ ,  $BCV(h) > 0$  dla wszystkich  $h > 0$ , czyli nie istnieje globalne minimum.

Można wykazać (Scott, Terrell, 1987), że:

$n^{1/10} \left( \frac{h_{BCV}}{h_{AMISE}} - 1 \right)$  ma rozkład asymptotyczny normalny  $N(0, \sigma_{LSCV})$ . Wand i Jones (1995) wykazali, że  $\frac{\sigma_{LSCV}^2}{\sigma_{BCV}^2} \approx 15,7$ , co wskazuje na to, że parametry wygładzania otrzymane metodą krosvalidacyjną najmniejszych kwadratów są znacznie bardziej rozproszone niż te otrzymane metodą obciążoną krosvalidacyjną.

## Wygładzona metoda krosvalidacyjna

Wygładzona metoda krosvalidacyjna wykorzystuje wyrażenie:

$$\begin{aligned} MISE(h) &= \int_{-\infty}^{+\infty} D^2(\hat{f}(x))dx + \int_{-\infty}^{+\infty} B^2(\hat{f}(x))dx = \\ &= \left[ \frac{R(k)}{nh} - \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (K * f)^2(x)dx \right] + \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} (K * f - f)^2(x)dx \right]. \end{aligned}$$

Scałkowana wariancja może być estymowana za pomocą  $\hat{IV}(h) = \frac{R(K)}{nh}$ , natomiast w estymacji scałkowanego kwadratu obciążenia można wykorzystać estymator jądrowy funkcji gęstości  $f$ . Dla estymatora jądrowego  $\hat{f}_d(x)$  z parametrem wygładzania  $d$  i funkcją jądra  $L$  estymator scałkowanego kwadratu obciążenia ma postać:

$$\hat{IB}(h) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_h * K_h - 2K_h + K_0) * L_d * L_d (X_i - X_j),$$

gdzie  $K_0$  oznacza funkcję Diraca. Pomijając wyrażenia diagonalne  $i = j$  (podobnie jak w przypadku obciążonej metody krosvalidacyjnej) i przyjmując przybliżenie  $n \approx n - 1$ , kryterium jest następujące:

$$SCV(h) = \frac{R(K)}{nh} + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (K_h * K_h - 2K_h + K_0) * L_d * L_d (X_i - X_j). \quad (3.26)$$

Nazwa tej metody wskazuje, że dla  $n \approx n - 1$ :

$$\begin{aligned} LSCV(h) &= \frac{R(K)}{nh} + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (K_h * K_h - 2K_h)(X_i - X_j) = \\ &= \frac{R(K)}{nh} + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (K_h * K_h - 2K_h + K_0)(X_i - X_j), \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość zachodzi, gdy nie ma powtórzeń w próbie. Tak więc  $SCV(h)$  może być rozpatrywana jako szczególny przypadek  $LSCV(h)$ , gdzie różnice  $(X_i - X_j)$  są wstępnie wygładzone.  $SCV(h)$  może być również rozważana jako metoda bootstrapowa (Cao i in., 1994).

Parametr wygładzania wyznaczony metodą wygładzoną krosvalidacyjną jest następujący:

$$h_{SCV} = \arg \min_h SCV(h). \quad (3.27)$$

Przy określonym wyborze parametru wygładzania  $d$  i funkcji jądra  $L$  względny rząd zbieżności  $h_{SCV}$  do  $h_{MISE}$  jest rzędu  $O_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . By otrzymać ten rząd zbieżności funkcja jądra  $L$  musi być rzędu co najmniej 6.

Faktoryzowana wygładzona metoda krosvalidacyjna jest modyfikacją wygładzonej metody krosvalidacyjnej, gdzie usuwane są wyrażenia diagonalne w  $IB(h)$ . Wówczas parametr wygładzania jest następujący:  $d = \hat{C}n^{-\alpha}$ , gdzie  $\hat{C}$  jest estymatorem  $C$ . Wybór parametru wygładzania  $d$  jest zatem niezależny od  $h$ . Jones i in. (1991) rozważali taką samą funkcję celu  $SCV(h)$ , ale uwzględniali przypadek gdy diagonalne wyrażenia są wprowadzone ponownie i parametr wygładzania  $d$  może zależeć od parametru wygładzania  $h$ , czyli zaproponowali  $d = Cn^p h^m$  dla kilku kombinacji  $m$  i  $p$ .

Niech:

$$h_{FSCV} = \arg \min_h FSCV(h), \quad (3.28)$$

gdzie:

$$FSCV(h) = \frac{R(K)}{nh} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (K_h * K_h - 2K_h + K_0) * L_d * L_d (X_i - X_j). \quad (3.29)$$

Dla  $d \sim \frac{1}{n^{23/45} h^2}$  możliwe jest, by  $h_{FSCV}$  było relatywnie zbieżne rzędu  $n$  nawet

dla funkcji jądra  $K$  i  $L$  rzędu drugiego. Niektóre metody wymagają funkcji jąder wyższych rzędów lub transformacji Fouriera (co jest równoznaczne z użyciem funkcji jąder wyższych rzędów). Jest to ważne, zwłaszcza że funkcje jądra wyższych rzędów mają lepsze asymptotyczne własności, chociaż dla małych prób ich własności są gorsze od funkcji jądra drugiego rzędu.

### 3.4. Metody podstawiania

Parametr wygładzania minimalizujący miarę precyzji  $AMISE$  określony przez (3.13) dla funkcji jądra drugiego rzędu przyjmuje postać:

$$h_{AMISE,2} = \left( \frac{\kappa}{\kappa_2^2 R(f^{(2)})} \right)^{\frac{1}{5}} n^{-\frac{1}{5}}. \quad (3.30)$$

Idea metody wyboru parametru wygładzania, zwana metodą podstawiania, polega na wyznaczeniu estymatora jądrowego funkcji gęstości  $\hat{f}_{h_1}(x)$  z parametrem  $h_1$ , wykorzystaniu tego estymatora do wyznaczenia  $\hat{R}(f^{(2)}) = R(\hat{f}_{h_1}(x))$ , a następnie wyznaczenia parametru wygładzania  $h_2$  poprzez wstawienie  $\hat{R}(f^{(2)})$  do (3.30) (Woodrooffe, 1970). Pewna modyfikacja polega na wprowadzeniu metody iteracyjnej, wyznaczaniu  $h_1, h_2, \dots$  do momentu, gdy  $h_i$  będzie zbieżne.

W odróżnieniu od obciążonej metody krosvalidacyjnej, w metodach podstawiania najpierw wyznacza się parametr wygładzania, który minimalizuje *AMISE*, w taki sposób, jakby  $\hat{R}(f^{(2)})$  nie zależało od parametru wygładzania.

Parametry wygładzania wyznaczone metodą podstawiania mogą być określone w następujący sposób:

$$1) \quad h_{PM} = \left( \frac{\kappa}{\kappa_2^2 \hat{R}(\hat{f}_{g(\hat{\sigma}^2, h)}^{(2)})} \right)^{\frac{1}{5}} n^{-\frac{1}{5}}, \quad (3.31)$$

gdzie  $\hat{R}(\hat{f}_{g(\hat{\sigma}^2, h)}^{(2)}) = R(\hat{f}_{g(\hat{\sigma}^2, h)}^{(2)}) - \frac{R(K^{(p)})}{ng(\hat{\sigma}^2, h)^{2p+1}}$ , natomiast  $g$  charakteryzujące się optymalnym rzędem zbieżności ma postać:

$$g = C(f, K)h^{\frac{10}{13}}.$$

Nieznana stała  $C(f, K)$  może być szacowana przy wykorzystaniu rozkładu normalnego jako rozkładu referencyjnego, czyli

$$g = \hat{C}(f, K)h^{\frac{10}{13}} = C(\phi_{\hat{\sigma}^2}, K)h^{\frac{10}{13}} = g(\hat{\sigma}^2, h),$$

gdzie  $\phi_{\hat{\sigma}^2}$  oznacza funkcję gęstości rozkładu normalnego z wariancją oszacowaną na podstawie próby (Sheather, Jones, 1991).

Park i Marron (1990) wykazali, że zbieżność  $h_{PM}$  do  $h_{MISE}$  optymalnego parametru

wygładzania jest rzędu  $O_p\left(\frac{1}{n^{\frac{4}{13}}}\right)$ .

$$2) \quad h_{HSJM} = \left(\frac{\hat{J}_1}{n}\right)^{\frac{1}{5}} + \hat{J}_2 \left(\frac{\hat{J}_1}{n}\right)^{\frac{3}{5}}, \quad (3.32)$$

gdzie:

$$\hat{J}_1 = \frac{\kappa}{\kappa_2^2 \hat{R}(f^{(2)})},$$

$$\hat{J}_2 = \frac{\kappa_4 \hat{R}(f^{(3)})}{20 \kappa_2 \hat{R}(f^{(2)})} \quad (\text{Hall i in., 1995}).$$

### 3.5. Inne metody wyboru parametru wygładzania

Procedurą łączącą wyznaczenie wartości parametru wygładzania z jednoczesnym określeniem funkcji jądra wraz z rzędem tej funkcji jest automatyczna procedura (Horová i in., 2012). Pozwala ona na optymalny wybór parametru wygładzania. Taki wybór jest możliwy dzięki następującej postaci asymptotycznego scałkowego błędu kwadratowego:

$$AMISE[\hat{f}(x)] = (|\kappa_k| \kappa^k)^{\frac{2}{2k+1}} \frac{(2k+1)\gamma_{0k}}{2nkh_{Opt,0,k}}, \quad (3.33)$$

gdzie  $\gamma_{vk} = \left(\frac{\kappa}{\kappa_k^2}\right)^{\frac{1}{2k+1}}$  jest czynnikiem kanonicznym funkcji jądra  $K$ .

Algorytm automatycznej procedury prowadzącej do wyboru funkcji jądra  $K$ , rzędu funkcji jądra  $k$  oraz parametru wygładzania  $h$  dla  $v = 0$ , przedstawiony jest w pracy Horovej i in. (2012).

Odmianą procedurą jest procedura SiZer mapy. W odróżnieniu od wcześniej rozważanych metod wyboru parametru wygładzania, w metodzie SiZer mapy wyznaczany jest zakres wartości parametru wygładzania. Określana jest rodzina jądrowych estymatorów funkcji gęstości  $\{\hat{f}_h(x) : h \in [h_{\min}, h_{\max}]\}$  gdzie  $h_{\min} = 2B$ ,  $B$  jest szerokością okna,  $h_{\max} = x_{\max} - x_{\min}$  z gaussowską funkcją jądra dla różnych wartości parametrów wygładzania. W procedurze SiZer mapy rozważane są następujące hipotezy:

$$H_0^{h,x} : \frac{\partial^m E(\hat{f}_h(x))}{\partial x^m} = 0$$

oraz

$$H_1^{h,x} : \frac{\partial^m E(\hat{f}_h(x))}{\partial x^m} \neq 0.$$

Rezultat zastosowania procedury jest przedstawiony w postaci graficznej, gdzie określone są te wartości parametru wygładzania, dla których estymator jądrowy funkcji gęstości jest istotnie rosnący, istotnie malejący lub wyznaczone są te obszary, gdzie procedura nie określa w sposób jednoznaczny własności estymatora jądrowego funkcji gęstości. Przykłady zastosowań SiZer mapy przedstawione są, między innymi, w pracach Baszczyńskiej (2014a, 2014b).

### 3.6. Badanie własności wybranych metod wyboru parametru wygładzania

Analizę własności wybranych metod wyboru parametru wygładzania przeprowadzono metodami symulacyjnymi. Głównym celem badania było jednoznaczne określenie, w których sytuacjach badawczych powinny być stosowane określone metody wyboru parametru wygładzania  $h$  w konstrukcji estymatora jądrowego funkcji gęstości.

Analizie podlegały zmienne losowe o rozkładach określonych przez funkcję gęstości:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x), \quad (3.34)$$

gdzie wagi spełniają warunki  $\alpha_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ , a funkcja  $f_i(x)$  jest  $i$ -tym komponentem mieszaniny.

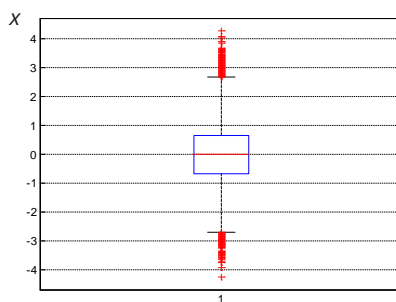
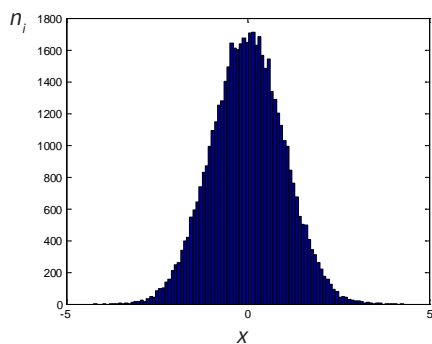
Wybór rozkładów populacji, z których wybierane były losowo próby, był konsekwencją umożliwienia reprezentowania możliwie wszystkich podstawowych sytuacji badawczych. Czynnikiem brany pod uwagę przy wyborze populacji było również uwzględnienie różnorodności populacji z punktu widzenia podstawowych charakterystyk rozkładów, w tym asymetrii, modalności oraz kurtozy. Charakterystyki te są szczególnie istotne przy wstępnej ocenie rozkładu populacji, a co za tym idzie pozwalają na natychmiastową ocenę dopasowania estymatora do danych rzeczywistych. Znajomość rozkładu populacji generalnej jest wykorzystana w ocenie dobroci estymacji jądrowej.

W badaniu rozważano populacje: P1 – populacja o rozkładzie normalnym standardowym  $N(0, 1)$ ; populacje P2–P15 – populacje o rozkładach będących mieszaniną rozkładów normalnych o określonych parametrach rozkładów  $N(\mu, \sigma)$  oraz określonymi wagami mieszanin  $\alpha_i > 0$ . Podstawowe charakterystyki poszczególnych populacji przedstawione zostały w tablicach 3.1–3.15, a graficznie zaprezentowane na rysunkach 3.1–3.15. W konstrukcji histogramu ustalono liczbę podprzedziałów równą 100.

Tablica 3.1. Podstawowe charakterystyki populacji P1

Funkcja gęstości $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	50000
Wartość minimalna	-4,2486
Wartość maksymalna	4,2891
Średnia arytmetyczna	-0,0030
Mediana	0,0005
Kwartył I	-0,6735
Kwartył III	0,6678
Odchylenie standardowe	0,9958
Współczynnik asymetrii	0,0152
Kurtoza	3,0010

Źródło: opracowanie własne.



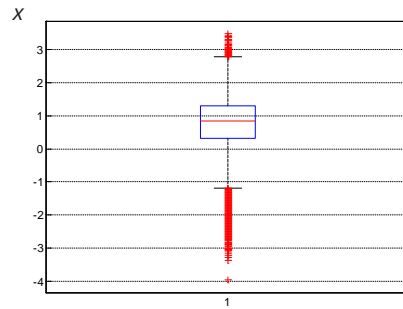
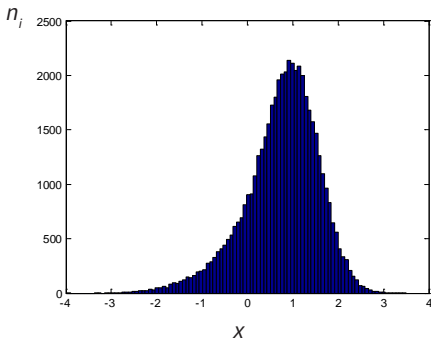
Rysunek 3.1. Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P1

Źródło: opracowanie własne.

**Tablica 3.2.** Podstawowe charakterystyki populacji P2

Mieszana $\frac{1}{5}N(0,1) + \frac{1}{5}N\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{5}N\left(\frac{13}{12}, \frac{5}{9}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	50000
Wartość minimalna	-3,9687
Wartość maksymalna	3,4926
Średnia arytmetyczna	0,7498
Mediana	0,8484
Kwartył I	0,3088
Kwartył III	1,3025
Odchylenie standardowe	0,8188
Współczynnik asymetrii	-0,7439
Kurtoza	4,02179

Źródło: opracowanie własne.



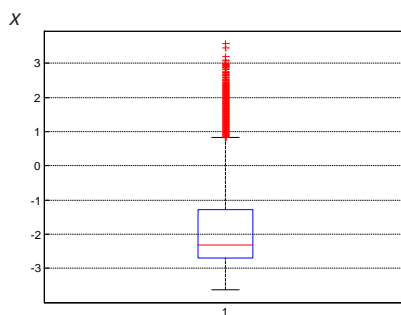
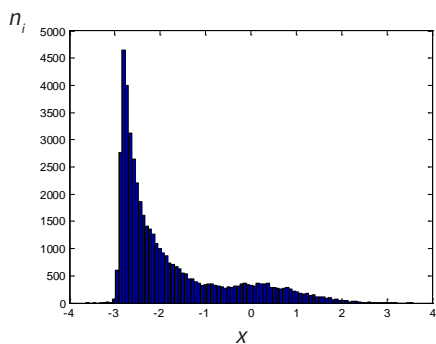
**Rysunek 3.2.** Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P2

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 3.3. Podstawowe charakterystyki populacji P3

Mieszana $\sum_{l=0}^7 \frac{1}{8} N \left( 3 \left\{ \left( \frac{2}{3} \right)^l - 1 \right\}, \left( \frac{2}{3} \right)^l \right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	48000
Wartość minimalna	-3,6353
Wartość maksymalna	3,5835
Średnia arytmetyczna	-1,7909
Mediana	-2,3145
Kwartył I	-2,6992
Kwartył III	-1,2902
Odchylenie standardowe	1,2260
Współczynnik asymetrii	1,3430
Kurtoza	3,8642

Źródło: opracowanie własne.



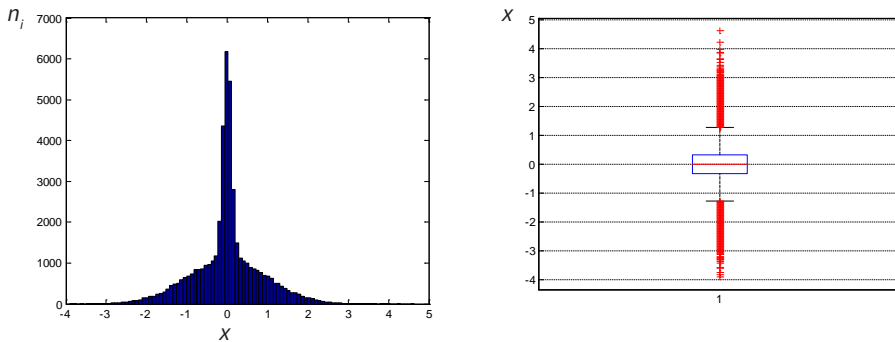
Rysunek 3.3. Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P3

Źródło: opracowanie własne.

**Tablica 3.4.** Podstawowe charakterystyki populacji P4

Mieszana $\frac{2}{3}N(0,1) + \frac{1}{3}N\left(0, \frac{1}{10}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	48000
Wartość minimalna	-3,9094
Wartość maksymalna	4,6419
Średnia arytmetyczna	0,0013
Mediana	0,0015
Kwartył I	-0,3150
Kwartył III	0,3214
Odchylenie standardowe	0,8150
Współczynnik asymetrii	0,0089
Kurtoza	4,4666

**Źródło:** opracowanie własne.



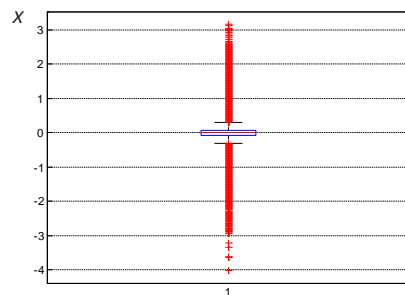
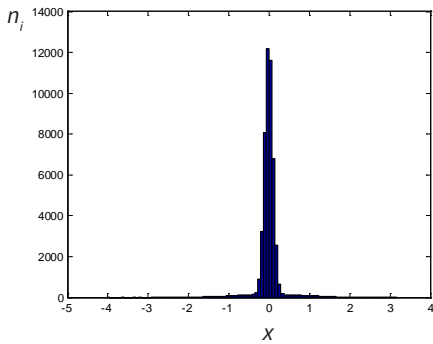
**Rysunek 3.4.** Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P4

**Źródło:** opracowanie własne.

Tablica 3.5. Podstawowe charakterystyki populacji P5

Mieszanina $\frac{1}{10}N(0,1) + \frac{9}{10}N\left(0, \frac{1}{10}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	50000
Wartość minimalna	-4,0204
Wartość maksymalna	3,1736
Średnia arytmetyczna	-0,0006
Mediana	0,0002
Kwartył I	-0,0757
Kwartył III	0,0757
Odchylenie standardowe	0,3311
Współczynnik asymetrii	-0,1886
Kurtoza	25,5015

Źródło: opracowanie własne.



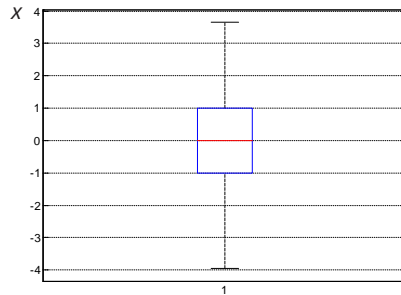
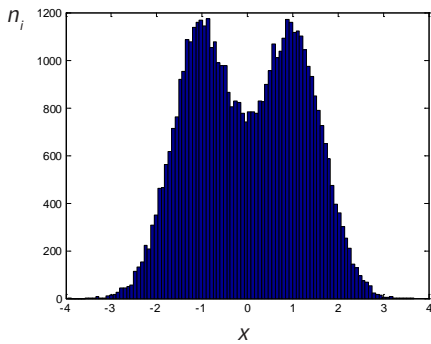
Rysunek 3.5. Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P5

Źródło: opracowanie własne.

**Tablica 3.6.** Podstawowe charakterystyki populacji P6

Mieszana $\frac{1}{2}N\left(-1, \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}N\left(1, \frac{2}{3}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	50000
Wartość minimalna	-3,9572
Wartość maksymalna	3,6665
Średnia arytmetyczna	0,0001
Mediana	-0,0027
Kwartył I	-1,0065
Kwartył III	1,0001
Odchylenie standardowe	1,2018
Współczynnik asymetrii	0,0040
Kurtoza	2,0444

**Źródło:** opracowanie własne.



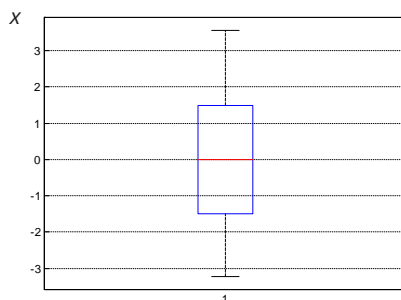
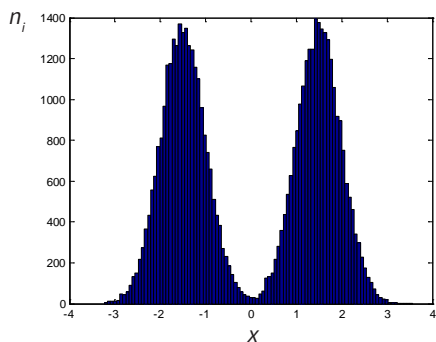
**Rysunek 3.6.** Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P6

**Źródło:** opracowanie własne.

Tablica 3.7. Podstawowe charakterystyki populacji P7

Mieszanina $\frac{1}{2}N\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}N\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	50000
Wartość minimalna	-3,2343
Wartość maksymalna	3,5690
Średnia arytmetyczna	-0,0010
Mediana	-0,0108
Kwartył I	-1,5013
Kwartył III	1,4961
Odchylenie standardowe	1,5775
Współczynnik asymetrii	-0,0011
Kurtoza	1,3804

Źródło: opracowanie własne.



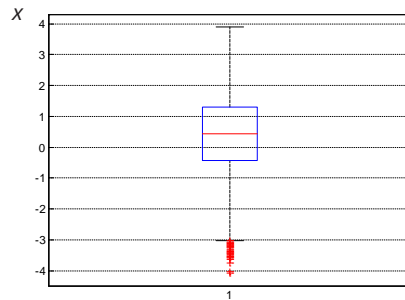
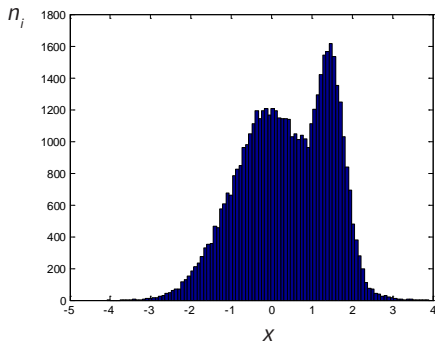
Rysunek 3.7. Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P7

Źródło: opracowanie własne.

**Tablica 3.8.** Podstawowe charakterystyki populacji P8

Mieszanina $\frac{3}{4}N(0,1) + \frac{1}{4}N\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	50000
Wartość minimalna	-4,0840
Wartość maksymalna	3,9049
Średnia arytmetyczna	0,3731
Mediana	0,4252
Kwartył I	-0,4267
Kwartył III	1,3075
Odchylenie standardowe	1,0941
Współczynnik asymetrii	-0,3205
Kurtoza	2,4373

**Źródło:** opracowanie własne.



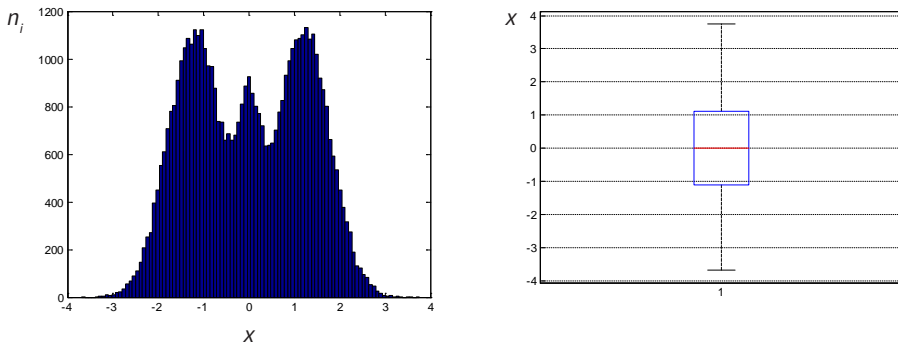
**Rysunek 3.8.** Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P8

**Źródło:** opracowanie własne.

Tablica 3.9. Podstawowe charakterystyki populacji P9

Mieszana $\frac{9}{20}N\left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) + \frac{9}{20}N\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) + \frac{1}{10}N\left(0, \frac{1}{4}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	50000
Wartość minimalna	-3,6906
Wartość maksymalna	3,7608
Średnia arytmetyczna	0,0014
Mediana	-0,0022
Kwartył I	-1,1121
Kwartył III	1,1223
Odchylenie standardowe	1,2756
Współczynnik asymetrii	-0,0010
Kurtoza	1,8895

Źródło: opracowanie własne.



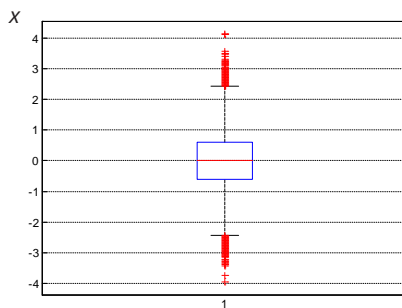
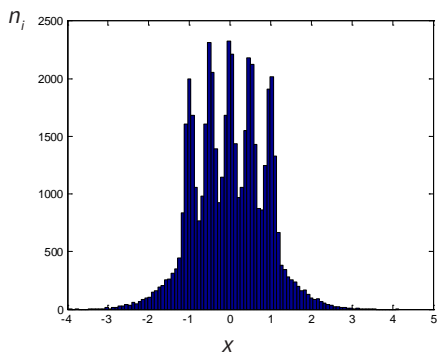
Rysunek 3.9. Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P9

Źródło: opracowanie własne.

**Tablica 3.10.** Podstawowe charakterystyki populacji P10

Mieszana $\frac{1}{2}N(0,1) + \sum_{l=0}^4 \frac{1}{10}N\left(\left(\frac{l}{2}-1\right), \frac{1}{10}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	50000
Wartość minimalna	-3,9687
Wartość maksymalna	4,1558
Średnia arytmetyczna	-0,0012
Mediana	0,0000
Kwartyl I	-0,6068
Kwartyl III	0,6083
Odchylenie standardowe	0,8687
Współczynnik asymetrii	-0,0117
Kurtoza	2,9996

**Źródło:** opracowanie własne.

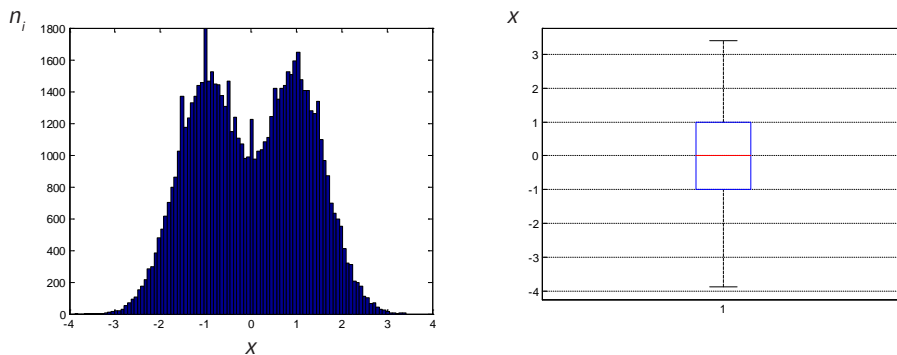
**Rysunek 3.10.** Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P10

**Źródło:** opracowanie własne.

**Tablica 3.11.** Podstawowe charakterystyki populacji P11

Mieszana $\frac{49}{100}N\left(-1, \frac{2}{3}\right) + \frac{49}{100}N\left(1, \frac{2}{3}\right) + \sum_{l=0}^6 \frac{1}{350}N\left(\frac{l-3}{2}, \frac{1}{100}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	70000
Wartość minimalna	-3,8883
Wartość maksymalna	3,4116
Średnia arytmetyczna	-0,0014
Mediana	-0,0026
Kwartył I	-0,9948
Kwartył III	0,9967
Odchylenie standardowe	1,1972
Współczynnik asymetrii	-0,0048
Kurtoza	2,0611

**Źródło:** opracowanie własne.



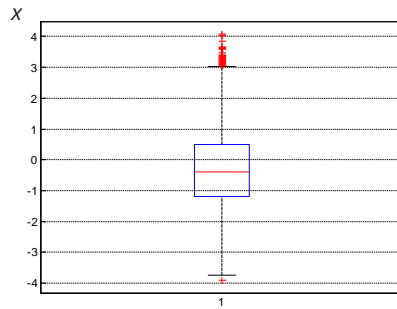
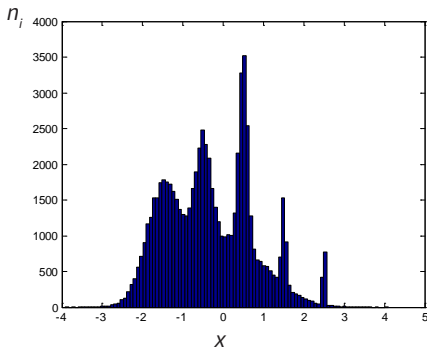
**Rysunek 3.11.** Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P11

**Źródło:** opracowanie własne.

**Tablica 3.12.** Podstawowe charakterystyki populacji P12

Mieszanina $\frac{1}{2}N(0,1) + \sum_{l=-2}^2 \frac{2^{1-l}}{31} N\left(l + \frac{1}{2}, \frac{2^{-l}}{10}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	70000
Wartość minimalna	-3,9157
Wartość maksymalna	4,0904
Średnia arytmetyczna	-0,3011
Mediana	-0,3943
Kwartyl I	-1,2008
Kwartyl III	0,4959
Odchylenie standardowe	1,0980
Współczynnik asymetrii	3,3056
Kurtoza	2,6035

**Źródło:** opracowanie własne.



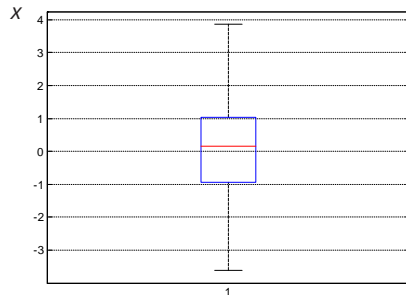
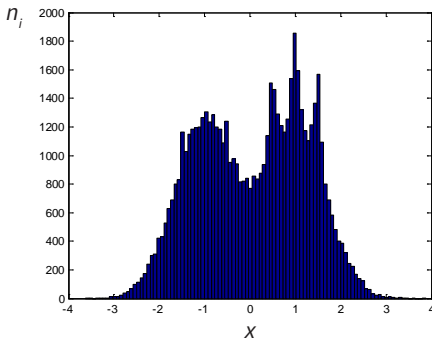
**Rysunek 3.12.** Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P12

**Źródło:** opracowanie własne.

**Tablica 3.13.** Podstawowe charakterystyki populacji P13

Mieszanina $\sum_{l=0}^1 \frac{46}{100} N\left(2l-1, \frac{2}{3}\right) + \sum_{l=1}^3 \frac{1}{300} N\left(\frac{-l}{2}, \frac{1}{100}\right) + \sum_{l=1}^3 \frac{7}{300} N\left(\frac{l}{2}, \frac{7}{100}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	60000
Wartość minimalna	-3,6235
Wartość maksymalna	3,8737
Średnia arytmetyczna	0,0582
Mediana	0,1583
Kwartył I	-0,9489
Kwartył III	1,0370
Odchylenie standardowe	1,1913
Współczynnik asymetrii	-0,0919
Kurtoza	2,0284

**Źródło:** opracowanie własne.



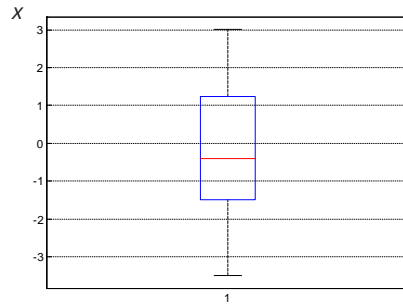
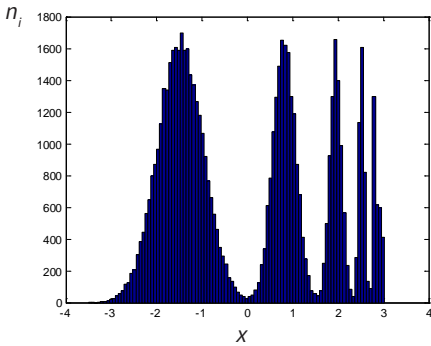
**Rysunek 3.13.** Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P13

**Źródło:** opracowanie własne.

**Tablica 3.14.** Podstawowe charakterystyki populacji P14

$\text{Mieszanina } \sum_{l=0}^5 \frac{2^{5-l}}{63} N \left( \frac{65-96\left(\frac{1}{2}\right)^l}{21}, \frac{\left(\frac{32}{62}\right)^2}{2^{2l}} \right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	63000
Wartość minimalna	-3,5001
Wartość maksymalna	3,0196
Średnia arytmetyczna	-0,0014
Mediana	-0,3948
Kwartył I	-1,4872
Kwartył III	1,2381
Odchylenie standardowe	1,6445
Współczynnik asymetrii	0,2344
Kurtoza	1,6511

Źródło: opracowanie własne.



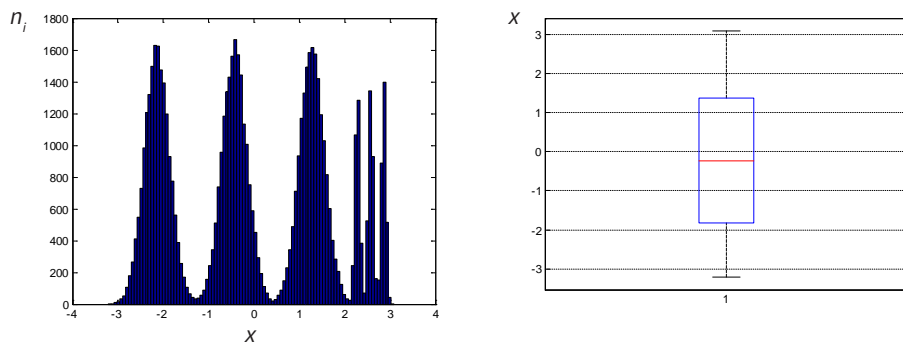
**Rysunek 3.14.** Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P14

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 3.15. Podstawowe charakterystyki populacji P15

$\text{Mieszanina } \sum_{l=0}^2 \frac{2}{7} N\left(\frac{12l-15}{7}, \frac{2}{7}\right) + \sum_{l=8}^{10} \frac{1}{21} N\left(\frac{2l}{7}, \frac{1}{21}\right)$	
Charakterystyka populacji	Wartość charakterystyki liczbowej
Liczebność populacji	63000
Wartość minimalna	-3,2130
Wartość maksymalna	3,0921
Średnia arytmetyczna	-0,0014
Mediana	-0,2414
Kwartył I	-1,8156
Kwartył III	1,3678
Odchylenie standardowe	1,6880
Współczynnik asymetrii	0,0379
Kurtoza	1,7528

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 3.15. Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P15

Źródło: opracowanie własne.

Populacje P1–P15 stanowią zbiór gaussowskich mieszanin Marrona i Wanda (Marron, Wand, 1992; Ruzgas, Drulyrè, 2013).

Jednomodalnymi populacjami są populacje P1–P5, populacje P6–P9 populacjami umiarkowanie wielomodalnymi, populacje P10–P15 można określić jako populacje o silnej wielomodalności.

W grupie rozkładów jednomodalnych rozkład populacji P1, będący rozkładem normalnym z wartością oczekiwaną zero i odchyleniu standardowym jeden, jest oceniany jako ten, który jest najłatwiejszy w estymacji (Terrell, Scott,

1985). Rozkład populacji P2 jest asymetryczny i umiarkowanie skośny, ale jest jedynie nieznacznie odmienny od rozkładu populacji P1 i może być stosowany do analiz rozkładów wartości ekstremalnych. Skośność rozkładu populacji P3 jest duża, rozkład ten jest podobny do rozkładu lognormalnego. Rozkłady populacji czwartej i piątej charakteryzują się wysoką kurtozą (większą dla populacji piątej). Rozkład czwarty jest traktowany jako aproksymacja funkcji gęstości z punktami nieciągłości, podczas gdy rozkład piąty jest rozkładem funkcji gęstości z wartościami odstającymi (10% obserwacji to obserwacje odstające).

Rozkłady populacji P6–P8 są bimodalne, natomiast P9 jest populacją o rozkładzie trójmodalnym.

Rozkład populacji P11 jest bardzo podobny do rozkładu populacji P6. Różnica między tymi dwoma rozkładami może być niezauważalna w przypadku małych liczebności prób, gdyż jedynie 2% obserwacji tworzy maksima lokalne funkcji gęstości.

Rozkłady populacji P12 i P13 są modyfikacjami rozkładów P10 i P11, odpowiednio. Rozkłady P14 i P15 są natomiast modyfikacjami rozkładu P7.

Z populacji losowane były próby o liczebnościach tak dobranych, by uwzględnione były próby powszechnie traktowane jako małe, średnie i duże. Uwzględnienie różnych liczebności prób w badaniu pozwala na ocenę wpływu liczebności próby na rezultat estymacji jądrowej.

Dla każdej próby wyznaczany był estymator jądrowy funkcji gęstości, przy czym stosowane były różne funkcje jądra oraz wartości parametru wygładzania wyznaczone określonymi metodami. Procedura ta była powtarzana 25 000 razy.

W celu jednoznacznej oceny wpływu poszczególnych parametrów metody jądrowej zachowana była zasada eliminacji. Dla ustalonego stałego jednego parametru metody (na przykład funkcji jądra) stosowany był zmienny drugi parametr metody (dla stałej funkcji jądra zmiennym parametrem był parametr wygładzania). W badaniu wykorzystane były następujące funkcje jądra: Epanecznikowa, dwukwadratowa, gaussowska, jednostajna oraz dwie funkcje jądra wyższych rzędów.

Analizie podlegały następujące metody wyboru parametru wygładzania: metoda iteracyjna (IT), metoda bezpośrednia podstawiania (DPI), metoda maksymalnego wygładzania (MS), metoda obciążona krosvalidacyjna (BCV), metoda krosvalidacyjna najmniejszych kwadratów (LSCV) oraz metoda odwołania do standardowego rozkładu (RR).

W badaniu porównywano wartości parametrów wyznaczonych różnymi metodami oraz oceniano wpływ liczebności próby na wartość parametru wygładzania, a tym samym na kształt estymatora funkcji gęstości.

Wyniki dla populacji P1–P15 są przedstawione w tablicach 3.16–3.30.

**Tablica 3.16.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P1

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanecznikowa	IT	2,1238	1,5241	0,9427	1,4241	1,2340	0,9380	1,2225	0,3853	1,071	1,0567
	DPI	1,0115	1,3311	0,9472	1,4206	1,2129	1,1754	1,3478	0,9927	1,2083	1,1976
	MS	0,9611	1,1707	0,8549	1,2098	1,0466	1,0647	1,1165	0,8859	1,009	0,9176
	BCV	1,9136	2,3295	0,9904	1,2107	0,8062	0,7694	0,8734	0,7167	0,7098	0,6714
	LSCV	1,5470	1,4129	0,9414	1,4811	0,4768	0,5639	1,1418	0,1856	1,1036	0,6617
	RR	0,8899	1,0841	0,7916	1,1203	0,9692	0,9859	1,0330	0,8203	0,9343	0,8492
Dwukwadratowa	IT	2,5347	1,8145	1,1265	1,6952	1,5188	1,1356	1,4470	0,4907	1,2754	1,2716
	DPI	1,1983	1,5769	1,1222	1,6829	1,4368	1,3924	1,5967	1,1760	1,4315	1,4187
	MS	1,1386	1,3869	1,0127	1,4332	1,2399	1,2613	1,3227	1,0495	1,1953	1,0865
	BCV	2,2666	2,7595	1,6956	1,9330	1,7278	1,5832	1,7089	1,8546	1,3992	1,3429
	LSCV	1,8071	1,8095	1,0971	1,7319	0,5735	0,7310	1,3932	0,2293	1,3992	0,8536
	RR	1,0543	1,2843	0,9378	1,3271	1,1481	1,1679	1,2248	0,9718	1,1068	1,0060
Gaussowska	IT	0,9487	0,6985	0,4341	0,6506	0,5772	0,4333	0,5503	0,1803	0,4908	0,4858
	DPI	0,4569	0,6012	0,4279	0,6417	0,5479	0,5309	0,6088	0,4484	0,5458	0,5409
	MS	0,4341	0,5288	0,3862	0,5465	0,4728	0,4809	0,5034	0,4002	0,4557	0,4143
	BCV	0,8654	0,7541	0,4664	0,6804	0,6758	0,5212	0,6194	0,5612	0,4857	0,5294
	LSCV	0,7504	0,7292	0,4570	0,6968	0,2390	0,3038	0,5777	0,1216	0,5542	0,4471
	RR	0,4020	0,4897	0,3576	0,5060	0,4378	0,4453	0,4670	0,3705	0,4220	0,3836
Jednostajna	IT	1,1824	1,0823	0,6040	0,9616	0,6769	0,5937	0,8817	0,2062	0,7757	0,7122
	DPI	0,7950	1,0823	0,7446	1,1166	0,9533	0,9238	1,0594	0,7803	0,9497	0,9413
	MS	0,7554	0,9202	0,6719	0,9509	0,8226	0,8368	0,8776	0,6963	0,7930	0,7208
	BCV	0,5045	1,8311	1,3370	1,8919	1,6366	1,6649	1,7459	1,3854	1,5777	1,4341
	LSCV	0,9445	1,1474	0,5072	0,8838	0,3705	0,5346	0,7782	0,1425	0,9441	0,5882
	RR	0,6995	0,8521	0,6222	0,8805	0,7617	0,7749	0,8126	0,6448	0,7343	0,6675
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	1,3315	1,2439	0,8547	1,4057	1,3792	1,1133	1,4348	1,1218	1,2735	1,3221
	DPI	0,5795	0,9087	0,7189	1,1329	0,8794	1,0398	1,1563	0,6988	1,1650	0,9674
	MS	0,8663	1,0978	0,8204	1,1803	1,0342	1,0630	1,1247	0,8992	1,031	0,9429
	BCV	1,6279	2,0615	1,5405	2,2161	1,9416	1,9958	2,1114	1,6883	1,9356	1,7700
	LSCV	0,3482	0,1613	0,0942	0,1121	0,0859	0,0874	0,0708	0,0828	0,0620	0,0592
	RR	0,7974	1,0085	0,7536	1,0842	0,9499	0,9765	1,0331	0,8260	0,9471	0,8661
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	1,9831	1,3389	0,9448	1,5058	1,399	1,2983	1,4776	1,2321	1,3135	1,4877
	DPI	0,7950	1,1089	0,9189	1,4929	0,9692	1,1689	1,3769	0,8999	1,3504	1,0854
	MS	1,0376	1,3442	1,0176	1,4774	1,3037	1,3479	1,4330	1,1506	1,3242	1,2158
	BCV	1,9127	2,4764	1,8745	1,7213	2,4012	2,4826	2,6393	2,1193	2,4389	2,2378
	LSCV	1,2928	1,0104	0,5031	0,7692	1,1662	0,8732	0,7747	0,9061	0,3842	0,5152
	RR	0,9476	1,2272	0,9290	1,3487	1,1901	1,2305	1,3082	1,0504	1,2089	1,1092

Źródło: obliczenia własne.

Dla prób losowanych z populacji o rozkładzie normalnym standaryzowanym metoda iteracyjna dawała największe wartości parametru wygładzania niezależnie od wielkości prób, chociaż różnice między wartościami parametrów wygładzania wyznaczonymi różnymi metodami nie były duże, szczególnie dla dużych prób. Procedury należące do grupy metod odwołania do rozkładów oznaczały zazwyczaj najmniejsze wartości parametru wygładzania, w tym zastosowanie zasady odwołania do standardowego rozkładu (która zakłada, że rozkład populacji jest rozkładem normalnym) powodowało, że parametr wygładzania przyjmował najmniejszą wartość. Wykorzystanie gaussowskiej funkcji jądra wydaje się być w tym przypadku odpowiednie, chociaż parametr wygładzania jest dla tej funkcji jądra najmniejszy, co oznacza najmniejsze wygładzanie danych. Dla funkcji jądra wyższych rzędów, które mogą powodować, że estymator funkcji gęstości nie będzie funkcją gęstości, parametr wygładzania wyznaczony metodą krosvalidacyjną najmniejszych kwadratów jest najmniejszy w porównaniu z estymacją funkcji gęstości, gdzie stosowane są klasyczne funkcje jądra. Wraz ze wzrostem liczebności próby można zauważyć zmniejszenie wartości parametru wygładzania.

**Tablica 3.17.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P2

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanecznikowa	IT	2,2885	1,5025	1,1104	1,0163	0,8915	1,0259	0,8033	0,5950	0,6938	0,5958
	DPI	2,2357	1,4486	1,1147	1,0387	0,9148	1,1146	0,8731	0,7821	0,8904	0,7791
	MS	1,6232	1,3778	1,0068	0,9305	0,7566	0,9278	0,7333	0,6919	0,7427	0,6552
	BCV	3,2301	2,7416	1,0782	0,8549	0,6962	0,7299	0,5242	0,5133	0,5258	0,4834
	LSCV	0,9341	1,2655	0,9476	0,7751	0,9124	0,9135	0,8208	0,5060	0,3158	0,6406
	RR	1,5030	1,2758	0,9323	0,8616	0,7006	0,8591	0,6790	0,6407	0,6877	0,6067
Dwukwadratowa	IT	2,8051	1,7976	1,3267	1,2099	1,0642	1,2258	0,9567	0,7092	0,8464	0,7118
	DPI	1,6881	1,7161	1,3205	1,2305	1,0838	1,3204	1,0343	0,9266	1,0548	0,9230
	MS	1,9229	1,6322	1,1928	1,1023	0,8963	1,0991	0,8687	0,8196	0,8799	0,7763
	BCV	3,8263	3,2477	1,8889	1,3637	1,2011	1,2852	1,0430	0,7939	1,1329	1,0116
	LSCV	1,1820	1,6700	1,4205	0,9216	1,0829	0,3168	1,0105	0,7548	0,4360	0,7161
	RR	1,7806	1,5114	1,1045	1,0207	0,8299	1,0178	0,8044	0,7589	0,8147	0,7188
Gaussowska	IT	1,0350	0,6923	0,5116	0,4544	0,4105	0,4651	0,3679	0,2709	0,3243	0,2712
	DPI	0,6439	0,6544	0,5035	0,4692	0,4132	0,5034	0,3944	0,3533	0,4022	0,3519
	MS	0,7332	0,6224	0,4548	0,4203	0,3418	0,4191	0,3312	0,3125	0,3355	0,2960
	BCV	1,4599	0,8043	0,5416	0,5503	0,4106	0,5322	0,3665	0,2989	0,3827	0,3287
	LSCV	0,5491	0,6974	0,5416	0,3812	0,4571	0,1643	0,4123	0,2804	0,1892	0,2669
	RR	0,6789	0,5763	0,4211	0,3892	0,3165	0,3881	0,3067	0,2894	0,3106	0,2741

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Jednostajna	IT	1,3695	1,0302	0,7070	0,6846	0,6453	0,4403	0,5751	0,3710	0,4454	0,3125
	DPI	1,1200	1,1386	0,8761	0,8164	0,7191	0,8761	0,6862	0,6148	0,6999	0,6124
	MS	1,2758	1,0830	0,7914	0,7314	0,59471	0,7292	0,5764	0,5438	0,5837	0,5150
	BCV	2,5392	2,1552	1,5747	1,7314	1,1833	1,4509	1,1467	1,0820	1,1614	1,0246
	LSCV	0,7392	0,9263	0,681	0,5772	0,8201	0,8631	0,5354	0,3807	0,2562	0,4026
	RR	1,1814	1,0028	0,7328	0,6777	0,5507	0,6753	0,5337	0,5036	0,5405	0,4769
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	1,4901	1,1827	1,0085	0,9937	0,9291	1,1327	0,8979	0,6609	0,9214	0,8233
	DPI	1,4783	1,4985	1,1176	1,0847	1,01938	1,2112	1,1163	0,8993	0,9899	0,9182
	MS	1,4630	1,2920	0,9662	0,9078	0,74764	0,9264	0,7387	0,7023	0,7589	0,6736
	BCV	2,7477	2,4263	1,8143	1,7046	1,4037	1,7393	1,3868	1,3186	1,4249	1,2647
	LSCV	0,3027	0,2179	0,1182	1,7046	0,0750	0,0809	0,0516	1,3186	0,0623	0,0425
	RR	1,3439	1,1868	0,8876	0,8339	0,0749	0,8510	0,6785	0,6451	0,6971	0,6188
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	1,2871	1,0047	1,1005	0,8337	0,8471	1,0037	0,7441	0,6598	0,8996	0,7943
	DPI	1,3513	1,3625	1,0927	0,9597	1,0149	1,0749	1,0051	0,8387	0,9275	0,8190
	MS	1,7523	1,582	1,1985	1,1363	0,9423	1,1746	0,9412	0,8986	0,9747	0,8681
	BCV	3,2287	2,9145	2,2077	2,0931	1,7360	2,1635	1,7335	1,6552	1,7953	1,5988
	LSCV	2,7462	0,7399	0,6791	0,5520	0,5876	0,8565	0,5126	0,3122	0,6934	0,4001
	RR	1,5997	1,4442	1,0941	1,0373	0,8604	1,0723	0,8592	0,8203	0,8898	0,7925

Źródło: obliczenia własne.

**Tablica 3.18.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P3

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanecznikowa	IT	2,5635	1,6360	0,4765	0,4719	0,3534	0,4043	0,2806	0,2147	0,2639	0,2311
	DPI	0,7097	1,5448	0,9362	1,0650	0,6299	1,005	0,9994	0,8582	1,0816	0,7035
	MS	0,8181	1,6779	1,0850	1,2958	0,6624	1,2430	1,1366	0,9878	1,2545	0,7765
	BCV	1,6291	3,3385	2,0135	1,8288	0,4842	1,4364	0,8129	0,4634	0,5012	0,2846
	LSCV	0,5708	0,7644	0,4690	0,1445	0,2703	0,3372	0,1702	0,1552	0,1541	0,1545
	RR	0,7575	1,5537	1,0047	1,1999	0,6134	1,1510	1,0543	0,9146	1,1617	0,7190

Tablica 3.18. cd

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Dwukwadratowa	IT	3,3126	1,9470	0,5768	0,5720	0,4262	0,4850	0,3421	0,2612	0,3086	0,2794
	DPI	0,8408	1,8301	1,1091	1,2617	0,7463	1,1852	1,1839	1,0166	1,2814	0,8334
	MS	0,9691	1,9878	1,2853	1,5351	0,7848	1,4726	1,3488	1,1702	1,4862	0,9199
	BCV	1,9295	3,9548	2,5573	3,0541	1,5616	2,9294	2,6832	2,3278	2,9564	1,8299
	LSCV	0,6505	0,9711	0,5149	0,2116	0,3273	0,4033	0,2043	0,1617	0,1892	0,1750
	RR	0,8974	1,8406	1,1902	1,4215	0,7267	1,3636	1,2490	1,0836	1,3762	0,8518
Gaussowska	IT	1,1999	0,6744	0,2190	0,2107	0,1592	0,1852	0,1264	0,0971	0,1079	0,1044
	DPI	0,32059	0,6978	0,4229	0,4811	0,2846	0,4519	0,45144	0,3876	0,4886	0,3178
	MS	0,3695	0,7579	0,4901	0,5853	0,2992	0,5615	0,5143	0,4462	0,5667	0,3507
	BCV	0,7369	1,5086	0,9755	1,1650	0,3272	1,1172	1,0233	0,8878	1,1275	0,4331
	LSCV	0,3695	0,4616	0,1780	0,1367	0,1227	0,1789	0,0829	0,0643	0,0827	0,0812
	RR	0,3422	0,7018	0,4538	0,5420	0,2771	0,5199	0,4762	0,4132	0,5247	0,3248
Jednostajna	IT	0,5607	0,8598	0,2589	0,1909	0,1499	0,2687	0,1598	0,1355	0,1217	0,1363
	DPI	0,5578	1,2142	0,7358	0,8371	0,4951	0,7864	0,7855	0,6745	0,8502	0,5530
	MS	0,6430	1,3189	0,8528	1,0185	0,5207	0,9770	0,8949	0,7764	0,9861	0,6103
	BCV	1,2808	2,6243	1,6970	2,0266	1,0363	1,9437	1,7804	1,5446	1,9616	1,2142
	LSCV	0,3469	0,5460	0,4185	0,1414	0,2373	0,2633	0,1380	0,0633	0,1321	0,1243
	RR	0,5954	1,2212	0,7896	0,9431	0,4821	0,9047	0,8287	0,7189	0,9131	0,5652
$v = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	0,3763	1,6526	0,2981	0,3761	0,4591	0,3530	0,1634	0,1430	0,1248	0,1649
	DPI	0,5781	1,2884	0,7992	1,0063	0,5610	1,1003	1,1993	0,8841	1,1125	0,6765
	MS	0,7373	1,5734	1,0412	1,2642	0,6546	1,2411	1,1469	1,8823	1,2820	0,7983
	BCV	1,3859	2,9545	1,9552	2,3737	1,2293	2,3301	2,1532	1,8823	2,4067	1,4987
	LSCV	0,3474	0,2014	0,1439	0,1433	0,9041	0,7263	0,0787	0,0652	0,0661	0,9861
	RR	0,6773	1,4453	0,9565	1,1613	0,6013	1,1401	1,0535	0,9210	1,1776	0,7333
$v = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	0,4778	1,7702	0,3997	0,4491	0,5621	0,5110	0,2118	0,2004	0,2094	0,2569
	DPI	0,67735	1,4409	0,9016	1,1163	0,62726	1,1383	1,0471	0,9476	1,2178	0,7794
	MS	0,88319	1,9266	2,3791	1,5824	0,8252	1,5737	1,4613	1,2829	1,6465	1,0287
	BCV	1,6283	3,5490	2,3791	2,9148	1,5202	2,8984	2,6915	2,3629	3,0325	1,8947
	LSCV	0,3488	0,5479	0,3073	2,9148	0,1806	0,236	2,6915	2,3629	3,0325	0,1184
	RR	0,8063	1,7588	1,1790	1,4446	0,7533	1,4366	1,3340	1,1712	1,5031	0,9391

Źródło: obliczenia własne.

**Tablica 3.19.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P4

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epancznikowa	IT	0,5744	0,8194	0,8527	1,1208	0,3446	0,2599	0,1759	0,1872	0,2338	0,1775
	DPI	0,2984	0,6894	0,8943	0,8129	0,4368	0,7446	0,3285	0,5071	0,5412	0,4584
	MS	0,3332	0,7709	0,9101	0,7481	0,4170	0,7616	0,3436	0,4950	0,5643	0,4560
	BCV	0,5978	1,5345	1,2379	1,0556	0,8299	0,9039	0,6392	0,6885	0,7733	0,7034
	LSCV	0,2889	0,1967	0,3095	0,1180	0,2105	0,2035	0,1299	0,1815	0,1874	0,1446
	RR	0,2780	0,7139	0,8427	0,6927	0,3862	0,7052	0,3182	0,4583	0,5225	0,4223
Dwukwadratowa	IT	0,6902	1,2297	1,0300	1,3671	0,4123	0,3103	0,2122	0,2246	0,2812	0,2121
	DPI	0,3535	0,8167	1,0594	0,9630	0,5175	0,8821	0,3892	0,6008	0,6412	0,5430
	MS	0,3557	0,9133	1,0782	0,8863	0,4940	0,9022	0,4071	0,5863	0,6685	0,5402
	BCV	0,7080	1,8177	2,1453	1,7448	0,9831	1,795	0,8101	1,1666	1,3301	1,0748
	LSCV	0,3907	0,1983	0,3803	0,1334	0,2527	0,2652	0,1748	0,2147	0,2126	0,1767
	RR	0,3293	0,8457	0,9983	0,8207	0,4575	0,8355	0,3770	0,5429	0,6190	0,5002
Gausowska	IT	0,2446	0,3954	1,3687	0,5055	0,1502	0,1171	0,0809	0,0866	0,1060	0,0800
	DPI	0,1348	0,3114	0,4039	0,3672	0,1973	0,3364	0,1484	0,2291	0,2445	0,2070
	MS	0,1356	0,3482	0,4111	0,3379	0,1884	0,3440	0,1552	0,2236	0,2549	0,2060
	BCV	0,2703	0,6937	0,8185	0,6726	0,3751	0,6847	0,3091	0,4450	0,5073	0,4100
	LSCV	0,1645	0,1921	0,2099	0,0903	0,1085	0,1025	0,0728	0,0866	0,0905	0,0714
	RR	0,1256	0,3225	0,3807	0,3129	0,1744	0,3186	0,1437	0,2071	0,2360	0,1907
Jednostajna	IT	0,3613	0,1148	0,3359	0,1330	0,2053	0,3447	0,1156	0,1235	0,1442	0,1027
	DPI	0,2345	0,5419	0,7029	0,6389	0,3434	0,3498	0,2582	0,3986	0,4254	0,3603
	MS	0,2340	0,6059	0,7154	0,5880	0,3278	0,4114	0,2701	0,3890	0,4436	0,3584
	BCV	0,4700	1,2063	1,4237	1,1701	0,6524	0,7392	0,5376	0,7741	0,8826	0,7132
	LSCV	0,2138	0,2061	0,2651	0,0931	0,1662	0,2990	0,0953	0,1674	0,1788	0,1329
	RR	0,2185	0,5611	0,6624	0,5445	0,3035	0,4103	0,2501	0,3602	0,4107	0,3319
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	0,2260	1,2666	0,3404	1,2379	0,2805	0,9897	0,1303	0,1264	0,1713	0,1134
	DPI	0,1667	0,6129	0,9308	0,9172	0,4208	0,7945	0,4172	0,5591	0,6127	0,5531
	MS	0,2706	0,7229	0,8734	0,7299	0,4121	0,7604	0,3462	0,5024	0,5767	0,4688
	BCV	0,5085	1,3581	1,6403	1,3705	0,7739	1,4279	0,6501	0,9433	1,0828	0,8803
	LSCV	0,3155	0,1957	0,1902	0,0942	0,6421	0,0883	0,2821	0,1931	0,3663	0,3894
	RR	0,248	0,6641	0,8023	0,6705	0,3785	0,6985	0,3180	0,4615	0,5298	0,4306
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	0,3122	1,3559	0,4498	1,3276	0,3288	1,0290	0,2007	0,1973	0,2095	0,1911
	DPI	0,2698	0,5799	0,8208	0,7160	0,4101	0,6761	0,3506	0,4744	0,5793	0,4890
	MS	0,3241	0,8852	1,0833	0,9136	0,5195	0,9642	0,4411	1,1841	0,7406	0,6041
	BCV	0,5975	1,6312	1,9959	1,6829	0,9571	1,7761	0,8126	0,6428	1,3643	1,1128
	LSCV	0,2158	1,5278	1,1399	1,0248	0,1517	1,0255	0,0819	0,5944	0,1771	0,1024
	RR	0,2959	0,8081	0,9890	0,8340	0,4742	0,8802	0,4027	0,5868	0,6762	0,5515

Źródło: obliczenia własne.

**Tablica 3.20.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P5

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanechnikowa	IT	0,1498	0,1048	0,1591	0,1253	0,1223	0,1338	0,1060	0,1371	0,1168	0,1028
	DPI	0,1050	0,0887	0,1523	0,1417	0,1453	0,1709	0,1364	0,1779	0,1504	0,1434
	MS	0,0955	0,0723	0,1269	0,1240	0,1315	0,1543	0,1079	0,1511	0,1185	0,1226
	BCV	0,1901	0,1442	0,1312	0,1315	0,1023	0,1167	0,0868	0,0908	0,0851	0,0898
	LSCV	0,1436	0,1148	0,1759	0,1388	0,0749	0,1215	0,1155	0,1717	0,0954	0,0564
	RR	0,0885	0,0670	0,1175	0,1148	0,1218	0,1428	0,0999	0,1399	0,1098	0,1135
Dwukwadratowa	IT	0,1784	0,1250	0,1901	0,1500	0,1472	0,1573	0,1261	0,1656	0,1387	0,1213
	DPI	0,1244	0,1051	0,1805	0,1679	0,1721	0,2025	0,1616	0,2108	0,1782	0,1698
	MS	0,1132	0,0856	0,1504	0,1469	0,1558	0,1827	0,1279	0,1790	0,1404	0,1453
	BCV	0,2252	0,1708	0,2020	0,2012	0,1706	0,2073	0,1481	0,1828	0,1479	0,1422
	LSCV	0,1629	0,1304	0,2076	0,1549	0,0879	0,1316	0,1286	0,1955	0,1118	0,0633
	RR	0,1048	0,0792	0,1392	0,1360	0,1443	0,1692	0,1184	0,1658	0,1301	0,1345
Gaussowska	IT	0,0685	0,0483	0,0735	0,0573	0,0551	0,0585	0,0484	0,0639	0,0523	0,0439
	DPI	0,0474	0,0401	0,0688	0,0640	0,0656	0,0772	0,0616	0,0804	0,0679	0,0647
	MS	0,0431	0,0326	0,0573	0,0560	0,0594	0,0698	0,0488	0,0682	0,0535	0,0554
	BCV	0,0859	0,0326	0,0735	0,0680	0,0689	0,0794	0,0516	0,0653	0,0597	0,0604
	LSCV	0,0658	0,0653	0,0809	0,0554	0,0381	0,0592	0,0519	0,0700	0,0503	0,0309
	RR	0,3996	0,0302	0,0531	0,0519	0,0550	0,0645	0,0452	0,0632	0,0496	0,0513
Jednostajna	IT	0,0947	0,0717	0,1008	0,0725	0,0796	0,0749	0,0787	0,0805	0,0852	0,0488
	DPI	0,0825	0,0697	0,1198	0,1114	0,1142	0,1344	0,1072	0,1399	0,1182	0,1127
	MS	0,0751	0,0568	0,0998	0,0975	0,1034	0,1213	0,0849	0,1188	0,0932	0,0964
	BCV	0,1494	0,1134	0,1985	0,1941	0,2058	0,2415	0,1690	0,2363	0,1855	0,1919
	LSCV	0,0731	0,0794	0,1563	0,0906	0,0687	0,1049	0,0795	0,1308	0,0852	0,0509
	RR	0,0695	0,0526	0,0924	0,0903	0,0958	0,1123	0,0786	0,1099	0,0863	0,0893
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	0,1007	0,0828	0,1438	0,1189	0,1270	0,1446	0,1170	0,1599	0,1325	0,1299
	DPI	0,0931	0,1138	0,1115	0,1089	0,1001	0,1021	0,1292	0,2832	0,2116	0,1884
	MS	0,0861	0,0678	0,1218	0,1210	0,1299	0,1540	0,1087	0,1534	0,1212	0,1261
	BCV	0,1617	0,1276	0,2288	0,2274	0,2441	0,2895	0,2044	0,2879	0,2276	0,2368
	LSCV	0,0187	0,1276	0,0141	0,2274	0,2441	0,2895	0,2044	0,2879	0,2276	0,2368
	RR	0,0791	0,0622	0,1119	0,1111	0,1194	0,1415	0,0999	0,1409	0,1113	0,1158
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	0,1178	0,1289	0,1998	0,2156	0,1489	0,1752	0,1996	0,1988	0,2119	0,1994
	DPI	0,0945	0,0699	0,1228	0,1286	0,1298	0,1684	0,1459	0,2434	0,1391	0,1358
	MS	0,10314	0,0829	0,1511	0,1515	0,1638	0,1953	0,1386	0,1962	0,1556	0,1625
	BCV	0,1900	0,1532	0,2783	0,2791	0,3019	0,3599	0,2554	0,3615	0,2868	0,2994
	LSCV	0,0730	0,0776	0,1143	0,0906	0,0456	0,0729	0,0477	0,1199	0,0531	0,0702
	RR	0,0942	0,0758	0,1379	0,1383	0,1496	0,1783	0,1265	0,1792	0,1420	0,1483

Źródło: obliczenia własne.

W grupie estymatorów jądrowych funkcji gęstości wyznaczonych na podstawie prób losowanych z populacji jednomodalnych zauważalny jest wzrost wygładzania wraz ze wzrostem skośności populacji, z których losowane były próby. Wysoka kurtoza populacji oznacza również, że mniejsze wartości parametru wygładzania są odpowiednie. Zastosowanie funkcji jądra wyższych rzędów nie spowodowało znaczących zmian w wartościach parametrów wygładzania. Próby losowane z populacji charakteryzujących się wartościami odstającymi (populacja piąta) wymagały znacznie mniejszych wartości parametru wygładzania. W całej grupie rozważanych prób losowanych z populacji jednomodalnych metoda krowalidacyjna najmniejszych kwadratów zapewniała małe wartości parametrów wygładzania estymacji jądrowej funkcji gęstości.

**Tablica 3.21.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P6

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanechnikowa	IT	3,3298	2,5087	1,8743	1,7417	1,7319	1,4344	1,2024	1,4294	1,3311	0,6983
	DPI	1,9028	1,9499	1,6114	1,6375	1,6573	1,4738	1,3566	1,5520	1,5201	1,2264
	MS	2,0482	1,9254	1,4595	1,4046	1,4769	1,2498	1,1548	1,2432	1,2585	1,1790
	BCV	4,0760	3,8310	1,4875	1,3279	1,5806	1,0146	0,9136	0,9892	1,1181	1,1836
	LSCV	1,6285	0,5595	1,3997	1,4954	1,0901	1,2011	0,6944	1,5161	1,0710	0,2980
	RR	1,8966	1,7829	1,3514	1,3006	1,3676	1,1573	1,0693	1,1512	1,1653	1,0918
Dwukwadratowa	IT	4,0401	3,036	2,2444	2,0690	2,0216	1,6875	1,4412	1,6958	1,5586	0,8500
	DPI	2,2542	2,3100	1,9090	1,9399	1,9634	1,7459	1,6071	1,8386	1,8006	1,4529
	MS	2,4264	2,2810	1,7290	1,6640	1,7496	1,4806	1,3680	1,4728	1,4909	1,3968
	BCV	4,8283	4,5382	2,4828	2,3615	2,4995	2,0815	1,8544	1,9386	1,9097	2,224
	LSCV	2,2341	0,7546	1,5442	1,7363	1,4063	1,3999	0,8296	1,7047	1,2296	0,4288
	RR	2,2468	2,1122	1,6010	1,5408	1,6201	1,3710	0,8296	1,3638	1,3805	1,2934
Gaussowska	IT	1,5413	1,1506	0,8456	0,7780	0,7229	0,6246	0,5335	0,6477	0,5659	0,3264
	DPI	0,8595	0,8808	0,7279	0,7397	0,7486	0,6657	0,6128	0,7011	0,6867	0,5540
	MS	0,9252	0,8697	0,6592	0,6345	0,6671	0,5646	0,5216	0,5616	0,5685	0,5326
	BCV	1,8423	1,4562	1,0152	0,9310	1,0398	0,8247	0,7244	0,6853	0,7813	0,9811
	LSCV	0,9071	0,3477	0,6341	0,7138	0,6126	0,5638	0,4068	0,7028	0,4844	0,1785
	RR	0,8567	0,8054	0,6105	0,5875	0,6177	0,5228	0,4830	0,5200	0,5264	0,4932
Jednostajna	IT	1,8942	0,8594	1,0504	1,2086	1,2119	0,6159	0,7517	1,0480	0,8871	0,4146
	DPI	1,4956	1,5326	1,2666	1,2871	1,3027	1,1584	1,0663	1,2199	1,1948	0,9639
	MS	1,6099	1,5134	1,1471	1,1040	1,1608	0,9824	0,9076	0,9772	0,9892	0,9267
	BCV	3,2042	3,0115	2,2824	2,1964	2,3094	1,9544	1,8056	1,9439	1,9678	1,8435
	LSCV	1,3717	0,4543	1,3262	1,2780	0,8454	0,7109	0,6318	1,1182	1,0023	0,2526
	RR	1,4907	1,4014	1,0622	1,0223	1,0749	0,9097	0,8405	0,9048	0,9160	0,8581

Tablica 3.21. cd.

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$v = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	2,310	2,2068	1,7692	1,7587	1,9209	1,6560	1,5004	1,6915	1,6944	1,7930
	DPI	1,4817	1,3005	1,1971	1,5984	1,4081	1,2918	1,0043	1,4562	1,2068	1,2311
	MS	1,8461	1,8055	1,4006	1,3703	1,4593	1,2479	1,1632	1,2619	1,2860	1,2121
	BCV	3,4672	3,3904	2,6299	2,5728	2,7398	2,3429	2,1837	2,369	2,4143	2,2755
	LSCV	0,3886	0,3539	0,1499	0,1096	0,1081	0,0849	0,0699	0,0683	0,0785	0,0564
	RR	1,6958	1,6585	1,2866	1,2588	1,3405	1,1463	1,0685	1,1592	1,1813	1,1134
$v = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	2,1560	2,0034	1,4891	1,2765	1,5889	1,2651	1,0508	1,3001	1,2987	1,6519
	DPI	1,6577	1,6754	1,4329	1,5684	1,6075	1,4455	1,2829	1,6452	1,4702	1,3395
	MS	2,2112	2,2108	1,7373	1,7152	1,8396	1,5823	1,4821	1,6147	1,6517	1,5620
	BCV	4,0742	4,0726	3,2001	3,1593	3,3884	2,9143	2,7297	2,9738	3,0421	2,8768
	LSCV	2,5931	2,5734	2,0886	0,8100	0,7162	0,7035	0,4303	0,6392	0,8333	0,6497
	RR	2,0186	2,0183	1,5860	1,5659	1,6794	1,4445	1,3530	1,4740	1,5078	1,4259

Źródło: obliczenia własne.

Tablica 3.22. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P7

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanecznikowa	IT	3,3096	2,4402	0,8574	0,7507	0,7609	0,7950	0,7349	0,6859	0,6853	0,5805
	DPI	1,813	1,5676	1,4823	1,4793	1,5016	1,5095	1,5294	1,4752	1,4906	1,2889
	MS	2,3748	2,1120	1,7405	1,7918	1,7685	1,7227	1,7859	1,7582	1,7444	1,5659
	BCV	4,7257	4,2018	1,7187	1,7822	1,9076	1,8634	1,9197	1,9724	1,9162	1,8089
	LSCV	1,1444	0,7761	1,0303	0,5559	0,7598	0,8257	0,7368	0,5557	0,7567	0,6719
	RR	2,1990	1,9556	1,6117	1,6591	1,6376	1,5952	1,6537	1,6281	1,6152	1,4500
Dwukwadratowa	IT	4,2244	0,9355	1,0407	0,8905	0,9079	0,9529	0,8764	0,8164	0,8165	0,6973
	DPI	2,1478	1,8571	1,7560	1,7525	1,7789	1,7883	1,8119	1,7476	1,7658	1,5269
	MS	2,8133	2,5020	2,0620	2,1227	2,0951	2,0408	2,1157	2,0829	2,0665	1,8551
	BCV	5,5980	4,9775	3,3962	3,6453	3,4204	3,3083	3,4969	3,7056	3,5417	3,3381
	LSCV	1,3522	0,8895	1,1366	0,7414	0,8637	0,9882	0,8835	0,6634	0,8643	0,7584
	RR	2,6051	2,3168	1,9093	1,9655	1,9400	1,8897	1,9591	1,9288	1,9135	1,7178

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Gaussowska	IT	1,5792	0,3569	0,4043	0,3314	0,3478	0,3667	0,3358	0,3093	0,3141	0,2667
	DPI	0,8189	0,7081	0,6695	0,6682	0,6783	0,6819	0,6909	0,6664	0,6733	0,5822
	MS	1,0727	0,6540	0,7862	0,8094	0,7988	0,7781	0,8067	0,7942	0,7879	0,7074
	BCV	2,1359	1,8279	1,4699	1,6105	1,5895	1,5401	1,6050	1,5801	1,5676	1,4072
	LSCV	0,5421	0,3309	0,3975	0,2709	0,3517	0,3802	0,3520	0,3026	0,3503	0,2713
	RR	0,9933	0,8834	0,7280	0,7495	0,7397	0,7206	0,7470	0,7354	0,7296	0,6550
Jednostajna	IT	0,7879	0,4264	0,4774	0,3412	0,5227	0,5240	0,5020	0,4509	0,4918	0,3083
	DPI	1,4250	1,2322	1,1651	1,1627	1,1803	1,1865	1,2021	1,1595	1,1716	1,0131
	MS	1,8666	1,6600	1,3681	1,4083	1,3901	1,3540	1,4037	1,382	1,3711	1,2308
	BCV	3,7149	3,3029	2,7219	2,8019	2,7654	2,6937	2,7925	2,7492	2,7275	2,4484
	LSCV	1,0204	0,6017	0,9131	0,4813	0,4182	0,6125	0,6455	0,4947	0,4520	0,4904
	RR	1,7284	1,5371	1,2668	1,3041	1,2872	1,2538	1,2998	1,2797	1,2696	1,1397
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	2,7797	3,0387	2,3423	2,5323	2,6239	2,5912	2,8195	2,6365	2,8696	2,7730
	DPI	1,8721	1,6956	1,6564	1,6589	1,7111	1,7256	1,8123	1,7111	1,8189	1,6490
	MS	2,1404	1,9804	1,6704	1,7481	1,7475	1,7201	1,7990	1,7847	1,7825	1,6098
	BCV	4,0199	3,7185	3,1362	3,2819	3,2808	3,2292	3,3772	3,3504	3,3463	3,0221
	LSCV	1,0377	0,2284	0,1519	0,1361	0,1115	0,1005	0,0989	0,0922	0,0848	0,0669
	RR	1,9662	1,8192	1,5344	1,6058	1,6053	1,5800	1,6525	1,6394	1,6374	1,4788
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	2,5666	3,0121	2,2173	2,3278	2,4220	2,3981	2,2365	1,3588	2,7774	2,4461
	DPI	1,7820	1,6914	1,5643	1,6275	1,6540	1,6849	1,7618	1,7437	1,7332	1,5751
	MS	2,5638	2,425	2,0718	2,1881	2,2029	2,1809	2,2921	2,2836	2,2894	2,0745
	BCV	4,7236	4,4668	3,8162	4,0301	4,0574	4,0168	4,2216	4,2058	4,2164	3,8206
	LSCV	3,2679	3,3399	2,8668	3,2155	0,4291	0,5824	0,5377	0,3248	0,4445	0,4354
	RR	2,3405	2,2138	1,8914	1,9975	2,0111	1,9910	2,0925	2,0847	2,0900	1,8938

Źródło: obliczenia własne.

**Tablica 3.23.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P8

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanechnikowa	IT	3,3581	1,7397	1,6864	1,3895	1,4760	1,3841	1,3189	1,1151	1,3072	0,8040
	DPI	2,1277	1,5571	1,5580	1,3698	1,5343	1,5391	1,3660	1,2975	1,5115	1,3119
	MS	2,1236	1,3601	1,3933	1,1655	1,3077	1,2904	1,2034	1,0541	1,1799	1,1852
	BCV	4,2260	2,7065	1,2415	1,0090	1,1856	1,0369	1,1292	0,6989	0,8258	0,9449
	LSCV	3,5194	1,7463	0,9418	0,8706	1,5501	0,7698	0,6797	0,4758	0,6898	0,5312
	RR	1,9664	1,2595	1,2002	1,0793	1,2109	1,1949	1,1143	0,9761	1,0926	1,0974
Dwukwadratowa	IT	4,0288	2,0795	2,0374	1,6803	1,7663	1,6782	1,5525	1,3478	1,5788	0,9579
	DPI	2,5206	1,8447	1,8457	1,6228	1,8176	1,8234	1,6182	1,5372	1,7907	1,5541
	MS	2,5158	1,6113	1,6506	1,3808	1,5492	1,5287	1,4257	1,2488	1,3978	1,4040
	BCV	5,006	3,2061	2,3172	1,7646	2,1562	2,0545	1,7588	1,4934	1,6185	2,0478
	LSCV	3,9263	2,0443	1,1130	1,0352	1,7139	0,8843	0,8994	0,6169	0,7573	0,7354
	RR	2,3296	1,492	1,5258	1,2786	1,4346	1,4156	1,3201	1,1563	1,2943	1,3001
Gaussowska	IT	1,5527	0,8026	0,7804	0,6431	0,6683	0,6389	0,5151	0,5128	0,6026	0,3596
	DPI	0,9611	0,7034	0,7038	0,6188	0,6931	0,6952	0,6170	0,5861	0,6828	0,5926
	MS	0,9593	0,6144	0,6294	0,5265	0,5907	0,5829	0,5436	0,4761	0,5329	0,5354
	BCV	1,9100	0,8514	0,8802	0,7120	0,8116	0,7478	0,7764	0,5770	0,6565	0,8343
	LSCV	1,4652	0,8402	0,5728	0,4662	0,5711	0,4172	0,3606	0,2537	0,3081	0,3124
	RR	0,8883	0,5689	0,5828	0,4875	0,5470	0,5397	0,5034	0,4409	0,4935	0,4957
Jednostajna	IT	1,8457	0,7821	1,0855	0,9207	0,7925	0,8702	0,8014	0,6509	0,7450	0,5170
	DPI	1,6724	1,2239	1,2246	1,0767	1,2060	1,2098	1,0737	1,0199	1,1881	1,0311
	MS	1,6692	1,0691	1,0952	0,9161	1,0279	1,0143	0,9459	0,8285	0,9274	0,9315
	BCV	3,3221	2,1275	2,1792	1,8227	2,0450	2,0179	1,8818	1,6482	1,8450	1,8532
	LSCV	2,2161	1,3548	0,6881	0,6394	1,4504	0,6769	0,5423	0,4309	0,3924	0,3367
	RR	1,5456	0,9899	1,0141	0,8483	0,9518	0,9392	0,8759	0,7672	0,8588	0,8626
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	2,3604	1,4341	1,5704	1,4068	1,6402	1,6264	1,5471	1,3491	1,5773	1,6637
	DPI	1,4398	1,0043	1,2003	1,0050	1,2703	1,2889	1,2008	1,0024	1,2259	1,2118
	MS	1,9140	1,2754	1,3372	1,1371	1,2922	1,2885	1,2122	1,0699	1,2057	1,2184
	BCV	3,5948	0,2144	2,5109	2,1350	2,4261	2,4190	2,2758	2,0087	2,2636	2,2874
	LSCV	0,3919	1,1716	0,1678	0,1001	0,0984	0,0980	0,0788	0,0602	0,0662	0,0632
	RR	1,7582	1,1716	1,2283	1,0445	1,1870	1,1836	1,1135	0,9829	1,1076	1,1192
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	2,5773	1,5117	1,6116	1,6182	1,6996	1,7003	1,6057	1,4117	1,6338	1,6995
	DPI	1,5765	1,1277	1,3016	1,1969	1,4282	1,3589	1,2836	1,1757	1,3188	1,3548
	MS	2,2926	1,5617	1,6585	1,1423	1,6290	1,6337	1,5445	1,3690	1,5486	1,5701
	BCV	4,2241	2,8771	3,0552	2,6217	3,0004	3,0090	2,8448	2,5215	2,8521	2,8918
	LSCV	2,2062	1,2907	1,4790	1,3574	1,033	1,3313	0,3042	0,9734	1,2852	0,2703
	RR	2,0930	1,4257	1,5141	1,2994	1,4871	1,4914	1,4100	1,2498	1,4137	1,4334

Źródło: obliczenia własne.

W grupie estymatorów jądrowych funkcji gęstości wyznaczanych na podstawie prób pochodzących z rozkładów bimodalnych można zauważyć zwiększenie wartości parametru wygładzania wraz ze zwiększeniem kurtozy populacji, z których pochodziły próby. Dla większych liczebności prób zauważalne jest zmniejszenie wartości parametrów wygładzania. Gaussowska funkcja jądra w większości przypadków wymagała małych wartości parametrów wygładzania w porównaniu z innymi funkcjami jądra.

**Tablica 3.24.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P9

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanecznikowa	IT	3,9220	2,5263	2,0404	1,6042	1,8557	1,0656	1,4577	1,5266	1,4774	0,6884
	DPI	2,3126	1,9943	1,9153	1,5752	1,7758	1,5559	1,5816	1,7276	1,6474	1,3368
	MS	2,5063	1,8908	1,6024	1,3948	1,6114	1,4839	1,3258	1,3946	1,3159	1,2720
	BCV	4,9875	3,7620	1,6114	1,4325	1,5942	1,6069	1,2685	0,9857	0,9088	1,3522
	LSCV	0,4889	1,4542	2,1593	1,5902	1,1270	0,4762	1,3784	1,3330	1,4796	0,3146
	RR	2,3207	1,7509	1,4838	1,2916	1,4922	1,3740	1,2276	1,2914	1,2185	1,1778
Dwukwadratowa	IT	4,7364	3,0348	2,4330	1,8973	2,1585	1,2759	1,7140	1,8305	1,7605	0,8614
	DPI	2,7397	2,3626	2,2690	1,8661	2,1037	1,8432	1,8736	2,0466	1,9516	1,5836
	MS	2,9691	2,2400	1,8983	1,6524	1,9090	1,7579	1,5706	1,6521	1,5589	1,5068
	BCV	5,9081	4,4566	2,6180	2,3073	2,7567	2,6522	2,2217	2,2741	1,8817	2,4156
	LSCV	0,5541	2,1954	2,5981	1,7168	1,3331	0,7881	1,5721	1,5548	1,9068	0,3486
	RR	2,7493	2,0742	1,7578	1,5301	1,7677	1,6278	1,4544	1,5298	1,4435	1,3953
Gaussowska	IT	1,8244	1,1531	0,9380	0,7108	0,7523	0,4549	0,6393	0,6981	0,6739	0,3295
	DPI	1,0446	0,9001	0,8652	0,7155	0,8021	0,7028	0,7144	0,7804	0,7442	0,6038
	MS	1,1321	0,8541	0,7239	0,6300	0,7279	0,6703	0,5989	0,6299	0,5944	0,5746
	BCV	2,2543	1,4184	0,9516	0,9053	1,1523	1,1358	0,8594	0,7838	0,6999	1,0433
	LSCV	0,4739	0,9188	1,0153	0,6416	0,5973	0,3132	0,6017	0,0804	0,7333	0,1533
	RR	1,0483	0,7909	0,6702	0,5834	0,6740	0,6207	0,5545	0,5833	0,5504	0,5320
Jednostajna	IT	0,6984	1,7517	1,4166	0,9083	0,8252	0,5414	0,7344	0,7636	1,0182	0,3221
	DPI	1,8177	1,5675	1,5054	1,2381	1,3958	1,2229	1,2431	1,3579	1,2949	1,0507
	MS	1,9699	1,4862	1,2595	1,0963	1,2666	1,1663	1,0421	1,0962	1,0343	0,9998
	BCV	3,9208	2,9572	2,5060	2,1812	2,5198	2,3203	2,0731	2,1806	2,0575	1,9888
	LSCV	1,2889	0,8501	1,3878	0,6314	0,8999	0,3356	0,6060	1,0846	1,3974	0,2510
	RR	1,8241	1,3762	1,1663	1,0152	1,1728	1,0800	0,9649	1,0150	0,9577	0,9257

Tablica 3.24. cd.

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	2,8771	2,1073	1,8431	1,6422	2,1171	2,0603	1,8007	1,9034	1,7772	1,9339
	DPI	1,9989	1,8112	1,8267	1,8430	1,7981	1,6639	1,6620	1,6919	1,9920	1,6608
	MS	2,2589	1,7731	1,5378	1,3608	1,5923	1,4816	1,3355	1,4155	1,3447	1,3076
	BCV	4,2427	3,3293	2,8875	2,5549	2,9894	2,7815	2,5072	2,6575	2,5244	2,4548
	LSCV	0,4849	0,2269	0,1712	1,1291	0,1142	0,0904	0,0796	0,0816	0,0768	0,0608
	RR	2,0750	1,6287	1,4126	1,2500	1,4627	1,3610	1,2268	1,3003	1,2352	1,2012
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	2,4980	1,9067	1,5743	1,5499	2,0007	1,9886	1,5600	1,8167	1,6654	1,8891
	DPI	1,9389	1,7586	1,7840	1,5767	1,7365	1,5242	1,5784	1,6751	1,7937	1,4015
	MS	2,7057	2,1710	1,9074	1,7033	2,0073	1,8786	1,7016	1,8113	1,7270	1,6851
	BCV	4,9854	3,9993	3,5135	3,1374	3,6971	3,4600	3,1340	3,3360	3,1808	3,1035
	LSCV	2,7839	0,8578	1,2073	0,9326	0,6889	0,3369	0,9887	1,0862	0,6394	0,6840
	RR	2,4701	1,982	1,7413	1,5549	1,8325	1,7150	1,5534	1,6535	1,5766	1,5383

Źródło: obliczenia własne.

Tablica 3.25. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P10

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanecznikowa	IT	1,6062	1,7271	1,4955	1,0969	1,1066	1,2285	0,7823	0,5049	0,8684	0,8712
	DPI	0,5973	1,5203	1,4122	1,1611	1,0952	1,3169	0,7388	0,8825	1,0609	1,0231
	MS	0,6951	1,3576	1,2737	1,0309	0,9568	1,0952	0,8051	0,8182	0,8751	0,8537
	BCV	1,3837	2,7013	1,1335	0,9765	0,8413	0,8652	0,6255	0,5890	0,6130	0,5373
	LSCV	0,2149	1,8362	1,4077	1,0194	0,2548	1,1093	0,7758	0,1380	0,1525	0,7622
	RR	0,6437	1,2571	1,1794	0,9546	0,8860	1,0141	0,7455	0,7576	0,8103	0,7905
Dwukwadratowa	IT	2,0193	2,0604	1,8013	1,3093	1,3145	1,4616	0,9332	0,6607	1,0553	1,0375
	DPI	0,7076	1,8011	1,6729	1,3755	1,2974	1,5601	1,1121	1,0455	1,2568	1,2120
	MS	0,8235	1,6083	1,5089	1,2213	1,1334	1,2974	0,9537	0,9693	1,0367	1,0114
	BCV	1,6390	3,2000	1,9754	1,4510	1,4864	1,5600	1,2458	1,3599	1,0682	1,0301
	LSCV	0,2550	2,0260	1,5331	1,2649	0,3007	1,2451	0,8822	0,1640	0,1766	1,1654
	RR	0,7625	1,4892	1,3872	1,1309	1,0496	1,2014	0,8831	0,8975	0,9599	0,9365

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Gausowska	IT	0,7502	0,7919	0,6869	0,5033	0,4854	0,5511	0,3555	0,2562	0,3992	0,3979
	DPI	0,2698	0,6868	0,6379	0,5245	0,4947	0,5969	0,4241	0,3986	0,4792	0,4622
	MS	0,3140	0,6132	0,5754	0,4657	0,4322	0,4947	0,3637	0,3696	0,3953	0,3856
	BCV	0,6256	0,9030	0,7872	0,5304	0,6099	0,6344	0,4309	0,5769	0,4605	0,4037
	LSCV	0,1976	0,8023	0,5222	0,5395	0,1303	0,5060	0,3593	0,0781	0,0750	0,4442
	RR	0,2908	0,5678	0,5328	0,4312	0,4002	0,4581	0,3367	0,3422	0,3660	0,3571
Jednostajna	IT	0,9115	1,1507	1,0064	0,5951	0,3293	0,6218	0,3494	0,1229	0,1282	0,3151
	DPI	1,0807	1,1950	1,1100	0,9126	0,8608	1,0351	0,7379	0,6937	0,8338	0,8042
	MS	1,2286	1,0671	1,0011	0,8103	0,7520	0,8608	0,6328	0,6431	0,6878	0,6710
	BCV	1,9312	2,1235	1,9920	1,6123	1,4962	1,7126	1,2590	1,2794	1,3684	1,3350
	LSCV	0,4498	0,6105	1,2381	0,8360	0,1529	0,7892	0,6833	0,1062	0,1019	0,6478
	RR	0,8501	0,9881	0,9270	0,7503	0,6964	0,7971	0,5859	0,5955	0,6369	0,6214
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	0,3368	1,4116	1,3755	1,0650	1,1729	1,3268	0,9270	1,0907	1,0824	1,0565
	DPI	0,6620	1,1123	1,1127	1,1907	1,0060	1,1163	0,7481	0,8861	0,7992	1,0037
	MS	0,6265	1,2730	1,2224	1,0058	0,9454	1,0935	0,8109	0,8305	0,8943	0,8777
	BCV	1,1771	2,3906	2,2953	1,8885	1,7750	2,0530	1,5226	1,5592	1,6789	1,6477
	LSCV	0,2006	0,2045	0,1511	0,1132	0,0879	0,0826	0,0745	0,0639	0,1220	1,6477
	RR	0,5755	1,1694	1,1229	0,9239	0,8684	1,0045	0,7449	0,7629	0,8215	0,8062
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	0,4299	1,6331	1,4401	1,0005	1,054	1,5629	1,1298	1,1165	1,2355	1,1284
	DPI	0,5123	1,3136	1,2919	1,2161	1,0304	1,2446	0,9949	0,9091	0,9429	1,1776
	MS	0,7504	1,5588	1,5161	1,2589	1,1918	1,3865	1,0332	1,0626	1,1485	1,1310
	BCV	1,3831	2,8717	2,7929	2,3190	2,1952	2,5538	1,9032	1,9572	2,1154	2,0831
	LSCV	1,3208	0,7652	1,2336	0,7023	0,6187	0,7325	0,5833	0,5198	0,7312	0,4967
	RR	0,6851	1,4230	1,3841	1,1493	1,0880	1,2657	0,9433	0,9701	1,0485	1,0325

Źródło: obliczenia własne.

**Tablica 3.26.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P11

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanechnikowa	IT	2,3378	2,4522	2,2071	1,8642	1,4896	1,6026	0,6324	1,5660	1,2882	0,8025
	DPI	1,6445	1,8836	2,0560	1,6254	1,5394	1,6394	1,2471	1,7527	1,6037	1,3297
	MS	1,5157	1,8248	1,7365	1,5241	1,3658	1,4301	1,3140	1,4858	1,3451	1,2043
	BCV	3,0165	3,6306	1,7495	1,6408	1,3012	1,3632	1,3729	1,2443	1,0390	1,1026
	LSCV	2,0857	1,5082	2,1758	0,7174	0,9310	0,4246	0,5291	0,9219	1,2378	0,8020
	RR	1,4035	1,6897	1,6080	1,4113	1,2647	1,3243	1,2168	1,3758	1,2456	1,1151
Dwukwadratowa	IT	2,7678	2,9663	2,6276	2,1984	1,7720	1,9137	0,7533	1,8957	1,5361	0,9604
	DPI	1,9482	2,2314	2,4357	1,9255	1,8237	1,9421	1,4774	2,0764	1,8998	1,5753
	MS	1,7956	2,1617	2,0572	1,8055	1,6181	1,6942	1,5567	1,7602	1,5935	1,4267
	BCV	3,5732	4,3009	2,8580	2,6117	2,1646	2,3026	2,4318	2,4224	2,3023	2,1040
	LSCV	2,4055	1,7633	2,6414	0,8916	1,2174	0,4703	0,5668	1,0215	1,4606	0,9743
	RR	1,6627	2,0017	1,9049	1,6719	1,4983	1,5688	1,4414	1,6299	1,4756	1,3211
Gaussowska	IT	1,0584	1,1309	1,0083	0,7704	0,6538	0,6925	0,2781	0,6741	0,5818	0,3717
	DPI	0,7428	0,8508	0,9287	0,7342	0,6954	0,7405	0,5633	0,7917	0,7244	0,6007
	MS	0,6847	0,8243	0,7844	0,6885	0,6170	0,6460	0,5936	0,6712	0,6076	0,5440
	BCV	1,3636	1,3572	1,0725	1,1142	0,8644	0,9458	1,1009	0,9619	0,8845	0,8876
	LSCV	1,0200	0,8041	1,0610	0,3851	0,4903	0,2123	0,2159	0,3896	0,5539	0,3817
	RR	0,6340	0,7633	0,7263	0,6375	0,5713	0,5982	0,5986	0,6215	0,5626	0,5037
Jednostajna	IT	1,7108	1,5874	1,6263	0,8588	0,9624	0,5147	0,4106	0,8479	0,6163	0,4603
	DPI	1,2926	1,4805	1,6160	1,2775	1,2100	1,2885	0,9803	1,3776	1,2605	1,0452
	MS	1,1914	1,4343	1,3649	1,1979	1,0736	1,1241	1,0328	1,1678	1,0573	0,9466
	BCV	2,3714	2,8539	2,7157	2,3833	2,1359	2,2363	2,0547	2,3232	2,1032	1,8830
	LSCV	1,4335	1,1759	1,3444	0,3720	0,6812	0,2442	0,1583	0,3002	1,1461	0,6834
	RR	1,1032	1,3281	1,2639	1,1093	0,9941	1,0409	0,9564	1,0814	0,9790	0,8765
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	1,4672	2,1211	1,9801	1,9563	1,6327	1,887	1,9382	2,0581	1,9133	1,7539
	DPI	1,5115	1,8932	1,9823	1,6378	1,6114	1,6918	1,5002	1,5993	1,6873	1,5003
	MS	1,3661	1,7111	1,6665	1,4869	1,3496	1,4279	1,3236	1,5081	1,3745	1,2381
	BCV	2,5661	3,2131	3,1291	2,7917	2,5340	2,6809	2,4849	2,8312	2,5805	2,3242
	LSCV	0,3295	0,2201	0,1829	0,1232	0,1249	0,1046	0,0784	0,0855	0,0702	0,0645
	RR	1,2549	1,5718	1,5308	1,3659	1,2398	1,3117	1,2159	1,3853	1,2626	1,1373
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	1,3098	2,0921	1,7595	1,9996	1,7721	1,9880	1,9774	2,4880	2,9052	1,8699
	DPI	1,4960	1,7247	1,9609	1,4911	1,4306	1,5190	1,3517	1,5575	1,6228	1,3608
	MS	1,6363	2,0952	2,0670	1,8612	1,7013	1,8105	1,6865	1,9297	1,7654	1,5954
	BCV	3,0152	3,8596	3,8075	3,4281	3,1338	3,3347	3,1061	3,5541	3,2514	2,9384
	LSCV	1,0316	0,9851	0,9048	0,3282	0,6660	1,7998	0,3754	1,5743	0,8540	0,5815
	RR	1,4938	1,9127	1,8870	1,6991	1,5532	1,6528	1,5396	1,7616	1,6116	1,4565

Źródło: obliczenia własne.

**Tablica 3.27.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P12

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanecznikowa	IT	2,4648	2,1760	1,3152	1,7675	1,4081	1,6356	1,6509	1,1184	1,0929	0,9597
	DPI	1,5887	1,8182	1,2522	1,7325	1,4457	1,7323	1,6995	1,2724	1,3860	1,3892
	MS	1,6224	1,6297	1,1812	1,4626	1,1712	1,4241	1,4430	1,0820	1,1943	1,1830
	BCV	3,2285	3,2426	1,3125	1,4134	1,1154	1,2076	1,2246	0,7048	1,0821	0,7673
	LSCV	1,4416	2,2251	0,1795	1,4518	0,3150	1,3554	0,2935	1,2596	0,2784	0,2016
	RR	1,5023	1,5091	1,0937	1,3544	1,0845	1,3187	1,3362	1,0019	1,1059	1,0954
Dwukwadratowa	IT	2,9692	2,6080	1,5905	2,1154	1,6819	1,9568	1,9795	1,3361	1,3990	1,2366
	DPI	1,8820	2,1539	1,4835	2,0524	1,7126	2,0522	2,0133	1,5073	1,6420	1,6458
	MS	1,9219	1,9306	1,3993	1,7327	1,3875	1,6871	1,7094	1,2818	1,4148	1,4014
	BCV	3,8244	3,8412	2,2580	2,2568	1,7665	2,2917	2,1692	1,4120	1,8779	1,5903
	LSCV	1,9883	2,5333	0,2282	1,7257	0,3984	1,5610	0,3911	1,5220	0,3208	0,2606
	RR	1,7797	1,7877	1,2957	1,6045	1,2848	1,5622	1,5829	1,1869	1,3101	1,2977
Gaussowska	IT	1,1303	1,0001	0,5956	0,8055	0,6435	0,7415	0,7192	0,5143	0,2087	0,4605
	DPI	0,7176	0,8213	0,5657	0,7826	0,6530	0,7825	0,7677	0,5747	0,6261	0,6275
	MS	0,7328	0,7362	0,5335	0,6607	0,5291	0,6433	0,6518	0,4888	0,5395	0,5344
	BCV	1,4592	1,1375	0,8236	0,8990	0,6794	0,8617	0,9244	0,5194	0,7725	0,6450
	LSCV	0,8936	0,9622	0,1231	0,7729	0,1776	0,6838	0,1710	0,5724	0,1330	0,1078
	RR	0,6786	0,6817	0,4941	0,6118	0,4899	0,5957	0,6036	0,4526	0,4995	0,4948
Jednostajna	IT	1,5005	1,0887	0,1582	1,1797	0,5582	1,0522	0,4322	0,7438	0,2048	0,2204
	DPI	1,2487	1,4291	0,9843	1,3617	1,1363	1,3616	1,3358	1,0001	1,0894	1,0919
	MS	1,2752	1,2809	0,9284	1,1496	0,9206	1,1194	1,1342	0,8505	0,9387	0,9298
	BCV	2,5379	2,5489	1,8473	2,2874	1,8315	2,2269	2,2563	1,6919	1,8674	1,8497
	LSCV	1,2572	2,0585	0,1370	0,9947	0,2323	0,5851	0,2384	1,1103	0,1543	0,4042
	RR	1,1808	1,1861	0,8597	1,0645	0,8525	1,0365	1,0502	0,7875	0,8692	0,8610
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	1,6435	1,8447	1,3641	1,7514	1,4772	1,8537	1,9485	1,2667	1,6543	1,4599
	DPI	1,3301	1,2198	1,0053	1,3899	1,1032	1,4192	1,4835	1,4103	1,0988	1,3554
	MS	1,4622	1,5282	1,1336	1,4270	1,1573	1,4220	1,4535	1,0982	1,2204	1,2161
	BCV	2,7463	2,8696	2,1284	2,6792	2,1728	2,6696	2,7288	2,0618	2,2911	2,2831
	LSCV	0,2977	0,2091	0,1290	0,1419	0,0837	0,1003	0,0841	0,0686	0,0666	0,0614
	RR	1,3432	1,4038	1,0413	1,3108	1,0631	1,3062	1,3352	1,0088	1,1211	1,1171
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	1,7350	1,9022	1,5181	1,8973	1,5061	1,9301	1,9878	1,3926	1,7728	1,6691
	DPI	1,4769	1,4409	1,1159	1,5902	1,2518	1,5677	1,5516	1,4935	1,2513	1,4724
	MS	1,7515	1,8712	1,4060	1,7861	1,4589	1,8029	1,8520	1,4053	1,5674	1,5672
	BCV	3,2271	3,4471	2,5899	3,2900	2,6871	3,3207	3,4110	2,5882	2,8868	2,8863
	LSCV	1,0960	1,9889	1,2601	1,0002	1,1037	0,8400	2,0052	0,3298	1,5389	1,1683
	RR	1,5989	1,7083	1,2835	1,6306	1,3319	1,6459	1,6907	1,2829	1,4309	1,4307

Źródło: obliczenia własne.

**Tablica 3.28.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P13

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanechnikowa	IT	3,6169	1,8455	1,8838	1,5617	0,7243	1,0349	1,4371	0,5931	0,6691	1,0369
	DPI	1,8555	1,5045	1,5504	1,4449	1,0892	1,3627	1,5780	1,4760	1,1663	1,3062
	MS	2,2739	1,4669	1,4868	1,1991	1,1046	1,2579	1,2997	1,3590	1,1272	1,1104
	BCV	4,5249	2,9187	1,5324	1,1877	1,1022	1,2436	0,9670	1,0699	1,1180	0,8445
	LSCV	0,4037	0,5965	0,9131	1,3889	0,7049	0,8339	1,3899	0,4099	0,6978	0,2234
	RR	2,1055	1,3583	1,3767	1,1104	1,0228	1,1648	1,2035	1,2584	1,0438	1,0282
Dwukwadratowa	IT	4,4688	2,2154	2,2855	1,8560	0,8661	1,2461	1,7063	0,7276	0,7975	1,2149
	DPI	2,1981	1,7823	1,8367	1,7118	1,2903	1,6144	1,8694	1,7486	1,3816	1,5474
	MS	2,6938	1,7378	1,7614	1,4208	1,305	1,4902	1,5397	1,6099	1,3354	1,3155
	BCV	5,3600	3,4575	2,5698	2,1920	2,0637	2,1314	1,9576	2,3096	2,0491	1,8717
	LSCV	0,4083	0,7423	0,2736	1,7193	0,8525	1,0243	1,6813	0,4761	0,8056	0,3069
	RR	2,4944	1,6092	1,6310	1,3154	1,2117	1,3799	1,4257	1,4908	1,2365	1,2181
Gausowska	IT	1,7169	0,8336	0,8596	0,7032	0,3353	0,4750	0,6510	0,2775	0,3049	0,3725
	DPI	0,8381	0,6796	0,7003	0,6527	0,4920	0,6155	0,7128	0,6667	0,5268	0,5900
	MS	1,0271	0,6626	0,6716	0,5416	0,4989	0,5682	0,5871	0,6139	0,5092	0,5016
	BCV	2,0451	1,1582	1,0496	0,8273	0,8999	0,8732	0,7013	0,9057	0,9016	0,7349
	LSCV	0,3900	0,3736	0,1408	0,6878	0,3494	0,4273	0,6892	0,2137	0,2991	0,1416
	RR	0,9511	0,6136	0,6219	0,5016	0,4620	0,5262	0,5436	0,5684	0,4715	0,4645
Jednostajna	IT	0,4052	0,8184	0,3457	0,6632	0,5167	0,6538	1,0354	0,3735	0,3484	0,3208
	DPI	1,4584	1,1825	1,2186	0,8994	0,8561	1,0711	1,2403	1,1602	0,9167	1,0267
	MS	1,7873	1,1530	1,1686	0,8099	0,8682	0,9887	1,0216	1,0682	0,8860	0,8728
	BCV	3,5570	2,2943	2,3252	1,9837	1,7273	1,9671	2,0323	2,1249	1,7625	1,7363
	LSCV	0,7138	0,4512	0,1825	0,6642	0,5540	0,6296	1,0404	0,2992	0,5656	0,6091
	RR	1,6550	1,0676	1,0821	0,8903	0,8039	0,9156	0,9495	0,9891	0,8204	0,8082
$v = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	2,8906	1,5904	1,8490	1,6679	1,2211	1,5372	1,6422	1,8859	1,6634	1,6072
	DPI	1,5331	1,1784	1,3143	1,3902	1,0229	1,3651	1,5931	1,2883	1,1944	1,1003
	MS	2,0494	1,3755	1,4269	1,1699	1,0914	1,2560	1,3092	1,3794	1,1519	1,1416
	BCV	3,8491	2,5830	2,6791	2,1965	2,0492	2,3582	2,4579	2,5896	2,1625	2,1431
	LSCV	0,3999	0,1899	0,1482	0,1176	0,0908	0,1004	0,0861	0,0739	0,0627	0,0559
	RR	1,8826	1,2636	1,3107	1,0475	1,0026	1,1538	1,2026	1,2671	1,0581	1,0486
$v = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	2,9910	1,7192	1,9980	1,8210	1,3399	1,7201	1,7707	1,8917	1,7266	1,7331
	DPI	1,7600	1,2729	1,4326	1,4702	1,1402	1,4008	1,6437	1,3326	1,2468	1,1902
	MS	2,4548	1,6843	1,7698	1,4643	1,3759	1,5925	1,6681	1,7650	1,4794	1,4711
	BCV	4,5229	3,1027	3,2599	2,6972	2,5342	2,9333	3,0723	3,2507	2,7250	2,7094
	LSCV	3,1974	1,1735	2,0053	1,0496	0,4387	0,3155	0,6479	1,5607	0,5563	0,5847
	RR	2,2410	1,5376	1,6157	1,3368	1,2560	1,4538	1,5228	1,6113	1,3506	1,3430

Źródło: obliczenia własne.

**Tablica 3.29.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P14

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanecznikowa	IT	3,8117	3,0486	2,5380	1,6454	0,9531	0,6883	0,7184	0,4831	0,4508	0,4477
	DPI	2,3154	1,9437	1,8891	1,9826	1,8598	1,6583	1,6892	1,6025	1,5753	1,3500
	MS	2,5602	2,3602	2,0863	1,9676	1,9098	1,7837	1,8234	1,8587	1,5732	1,5350
	BCV	5,0947	4,6958	2,1312	2,1100	2,1523	1,7132	1,9574	2,1903	1,4004	1,3328
	LSCV	1,0632	0,4668	0,2714	0,6771	0,5327	0,4070	0,6645	0,1675	0,3876	0,3773
	RR	2,3707	2,1855	1,9319	1,8219	1,7676	1,6517	1,6885	1,7211	1,4568	1,4214
Dwukwadratowa	IT	4,638	3,8830	3,1671	2,6187	1,1359	0,8316	0,8563	0,5915	0,5420	0,5397
	DPI	2,7430	2,3026	2,2379	2,3487	2,2033	1,9646	2,0012	1,8984	1,8662	1,5993
	MS	3,0330	2,7961	2,4716	2,3309	2,2614	2,1131	2,1602	2,2020	1,8637	1,8185
	BCV	6,0351	5,5628	3,8609	3,4726	3,4259	3,4494	3,5461	3,7734	3,0578	3,1357
	LSCV	1,5036	0,2623	0,4106	0,8077	0,6139	0,4494	0,7405	0,2220	0,4497	0,4478
	RR	2,8085	2,5891	2,2886	2,1584	2,0940	1,9567	2,0003	2,0390	1,7258	1,6838
Gaussowska	IT	1,7584	1,4371	0,3200	0,7151	0,4084	0,3101	0,3186	0,2170	0,2062	0,2059
	DPI	1,0459	0,8779	0,8533	0,8955	0,8401	0,7491	0,7630	0,7238	0,7116	0,6098
	MS	1,1565	1,0661	0,9424	0,8888	0,8623	0,8057	0,8236	0,8396	0,7106	0,6934
	BCV	2,3027	1,9291	1,6059	1,5052	1,4979	1,5115	1,5827	1,6704	1,2828	1,3794
	LSCV	0,6269	0,2433	0,1708	0,2998	0,2781	0,2007	0,2363	0,0938	0,1693	0,1826
	RR	1,0709	0,9872	0,8726	0,8229	0,7985	0,7461	0,7627	0,7775	0,6580	0,6420
Jednostajna	IT	2,0667	0,2320	0,3369	0,3773	0,4485	0,3216	0,3201	0,2052	0,2310	0,2819
	DPI	1,8199	1,5277	1,4848	1,5583	1,4618	1,3035	1,3277	1,2595	1,2382	1,0611
	MS	2,0123	1,8552	1,6399	1,5465	1,5004	1,4020	1,4332	1,4610	1,2365	1,2065
	BCV	4,0050	3,6912	3,2626	3,0767	2,9849	2,7892	2,8511	2,9063	2,4598	2,4001
	LSCV	0,8796	0,3283	0,2298	0,6239	0,3988	0,3825	0,5169	0,1143	0,3155	0,3265
	RR	1,8634	1,7178	1,5185	1,4320	1,3893	1,2982	1,3271	1,3528	1,1450	1,1172
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	2,7023	3,1769	2,8045	2,6176	2,6495	2,4619	2,6597	2,9762	2,3563	2,4547
	DPI	1,7123	1,7800	1,5944	1,6629	1,5978	1,5883	1,5461	1,5292	1,5263	1,3276
	MS	2,3075	2,2132	2,0022	1,9196	1,8862	1,7810	1,8368	1,8866	1,6076	1,5780
	BCV	4,3339	4,1557	3,7593	3,6039	3,5412	3,3436	3,4482	3,5418	3,0180	2,9624
	LSCV	0,4693	0,2545	0,1812	0,1419	0,1238	0,1103	0,0955	0,0865	0,0734	0,0708
	RR	2,1197	2,0331	1,8392	1,7633	1,7327	1,6360	1,6872	1,7331	1,4767	1,4496
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	2,8129	3,3320	2,9445	2,8113	2,7953	2,6691	2,9201	2,9799	2,5139	2,6620
	DPI	1,8898	1,8804	1,6780	1,7990	1,7993	1,6644	1,7162	1,6789	1,6043	1,4545
	MS	2,7640	2,7100	4,4834	2,4027	2,3778	2,2582	2,3403	2,4140	2,0647	2,0335
	BCV	5,0925	4,9920	4,5743	4,4255	4,3795	4,1592	4,3103	4,4461	3,8027	3,7452
	LSCV	4,0867	3,6857	2,9430	3,1080	2,9526	3,1663	3,4169	3,6730	2,7849	2,7526
	RR	2,5232	2,4740	2,2671	2,1935	2,1707	2,0615	2,1365	2,2038	1,8849	1,8564

Źródło: obliczenia własne.

**Tablica 3.30.** Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P15

Funkcja jądra	Metoda wyboru parametru wygładzania	Liczebność próby									
		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Epanecznikowa	IT	3,6713	3,1948	2,6346	2,2665	2,2176	0,3979	0,5663	0,4300	0,4568	0,4262
	DPI	2,3579	2,4986	2,4607	2,0543	2,2629	2,0872	2,1987	2,1208	2,1467	1,8073
	MS	2,1330	2,6911	2,0640	2,0249	1,9119	1,9357	1,8788	1,8173	1,7137	1,6536
	BCV	4,2451	5,3541	1,8793	1,7181	1,8392	1,9016	1,8007	1,8783	1,1060	0,9754
	LSCV	0,4828	0,4854	0,2523	0,1761	0,3990	0,3828	0,3633	0,3909	0,4875	0,4493
	RR	1,9751	2,4919	1,9112	1,8750	1,7704	1,7924	1,7397	1,6828	1,5869	1,5312
Dwukwadratowa	IT	4,3799	3,8302	3,1798	2,9,39	2,7072	0,4800	2,3375	0,5150	2,2629	0,5088
	DPI	2,7934	2,9600	2,9151	2,4337	2,6808	2,4727	2,6047	2,5125	2,5431	2,1411
	MS	2,5269	3,1880	2,4451	2,3988	2,265	2,2931	2,2257	2,1529	2,0302	1,9589
	BCV	5,0286	6,3426	3,6323	3,988	3,3124	3,5691	3,3543	3,3234	3,0076	3,1711
	LSCV	0,4872	0,5933	0,3165	0,2355	0,4896	0,4130	0,4406	0,5564	0,5674	0,5442
	RR	2,3399	2,9520	2,2641	2,2213	2,0973	2,1234	2,0610	1,9935	1,8799	1,8114
Gaussowska	IT	1,6830	1,2607	1,2191	1,0721	1,0209	0,1830	0,8785	0,1989	0,8595	0,1963
	DPI	1,0651	1,1286	1,1115	0,9279	1,0222	0,9428	0,9932	0,9580	0,9697	0,8164
	MS	0,9635	1,2156	0,9323	0,9147	0,8637	0,8744	0,8487	0,8209	0,7741	0,7469
	BCV	1,9190	2,4193	1,3125	1,4035	1,2448	1,4284	1,2361	1,2468	1,0389	1,2160
	LSCV	0,4700	0,2871	0,1966	0,1425	0,2158	0,1607	0,1962	0,2106	0,2218	0,2107
	RR	0,8922	1,1256	0,8633	0,8470	0,7997	0,8096	0,7858	0,7601	0,7168	0,6916
Jednostajna	IT	1,6768	0,2951	0,2677	0,2095	0,3051	0,2476	0,3347	0,1707	0,3048	0,2436
	DPI	1,8533	1,9639	1,9341	1,6147	1,7786	1,6406	1,7282	1,6670	1,6873	1,4206
	MS	1,6765	2,1152	1,6223	1,5916	1,5028	1,5214	1,4767	1,4284	1,3470	1,2997
	BCV	3,3372	4,2087	3,2278	3,1664	2,9897	3,0267	2,9377	2,8415	2,6796	2,5855
	LSCV	1,8342	0,4598	0,2210	0,3675	0,2806	0,1734	0,5853	0,2976	0,3949	0,3778
	RR	1,5524	1,9586	1,5022	1,4738	1,3915	1,4088	1,3674	1,3227	1,2473	1,2035
$\nu = 1$ $k = 3$ $\mu = -1$	IT	2,6414	3,1751	2,6341	2,7571	2,6062	2,7902	2,6749	2,6955	2,5449	2,4750
	DPI	1,3288	2,0064	1,5422	1,5532	1,1652	1,6004	1,0553	1,2668	1,4107	1,2995
	MS	1,9225	2,5235	1,9808	1,9755	1,8892	1,9327	1,8925	1,8446	1,7512	1,6999
	BCV	3,6112	4,7383	3,7192	3,7089	3,5468	3,6283	3,5529	3,4629	3,2876	3,1913
	LSCV	0,4794	0,2999	0,2069	0,1529	0,1330	0,1120	0,1000	0,0868	0,0807	0,0742
	RR	1,7660	2,318	1,8196	1,8147	1,7354	1,7754	1,7385	1,6944	1,0609	1,5616
$\nu = 2$ $k = 4$ $\mu = -1$	IT	2,8870	3,3879	2,9941	2,4366	2,8550	2,8221	2,9032	2,8178	2,6567	2,6575
	DPI	1,4948	2,4123	1,6839	1,6990	1,2787	1,6987	1,8102	1,8068	1,6388	1,6336
	MS	2,3028	3,0899	2,4568	2,4727	2,3815	2,4505	2,4113	2,3603	2,2492	2,1906
	BCV	4,2433	5,6918	4,5255	4,5545	4,3864	4,5133	4,4411	4,347	4,1424	4,0346
	LSCV	1,8180	3,7942	2,1441	2,0176	1,8525	1,9157	1,9513	1,7088	1,8579	1,5767
	RR	2,1022	2,8208	2,2429	2,2574	2,1741	2,2371	2,2013	2,1547	2,0533	1,9999

Źródło: obliczenia własne.

W jądrowej estymacji funkcji gęstości populacji wielomodalnych zauważalny jest wzrost wartości parametrów wygładzania w porównaniu z wartościami parametrów wygładzania przy szacowaniu funkcji gęstości populacji jednomodalnych. Metoda krosvalidacyjna najmniejszych kwadratów oznaczała w większości przypadków mniejsze wartości parametrów wygładzania. W tej grupie estymatorów zasada odwołania do standardowego rozkładu zastosowana do wyboru parametru wygładzania powoduje, że wartości parametru są wyższe niż dla metody krosvalidacyjnej najmniejszych kwadratów, ale wartości te są bardzo podobne jak w przypadku metody maksymalnego wygładzania. Oznaczać to może, że procedury odwołania do rozkładu dla prób pochodzących z populacji wielomodalnych zachowują się w bardzo podobny sposób, chociaż przyjmowane są przecież w nich odmienne założenia co do rozkładu populacji. Tak małe różnice w wartościach parametru wygładzania nie są zauważalne dla prób pochodzących z populacji jednomodalnych. Zwiększenie liczebności prób nie powoduje w dużym stopniu zmiany wartości parametru wygładzania, co zachodzi dla większości rozważanych populacji. Ma to ogromne znaczenie praktyczne, gdyż nie zawsze zwiększanie liczebności prób musi oznaczać zmianę w stopniu wygładzania danych. Zastosowanie funkcji jądra wyższych rzędów w przypadku prób pochodzących z populacji wielomodalnych nie zawsze miało swoje odzwierciedlenie w wartości parametru wygładzania. W większości rozważanych przypadków gaussowska funkcja jądra zastosowana wraz z zasadą odwołania do standardowego rozkładu dawała małe wartości parametru wygładzania, co w praktyce oznaczało mały stopień wygładzenia danych.

### 3.7. Zastosowanie metody wyboru parametru wygładzania opartej na uogólnionej średniej harmonicznej w estymacji jądrowej funkcji gęstości

Na podstawie wyników badań przedstawionych w podrozdziale 3.6, jednocześnie biorąc pod uwagę prostotę i intuicyjność metod wyboru parametru wygładzania, proponowana jest następująca procedura wyboru parametru wygładzania oparta na uogólnionej średniej harmonicznej:

- 1) wyznaczenie wartości parametru wygładzania wartości  $h_A, h_B$  dwiema metodami wybranymi na podstawie informacji wstępnych dotyczących charakterystyk rozkładu badanej populacji,
- 2) określenie wartości parametru  $\beta$  ( $\beta \in (0, 1)$ ) w uogólnionej średniej harmonicznej  $h_{UH}$  (Hajja i in., 2013, Lovric, 1999; Tooth, Dobelman, 2016),

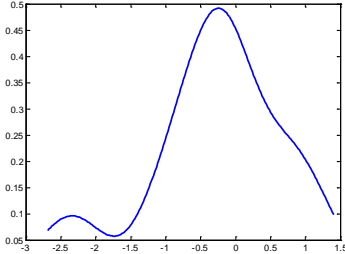
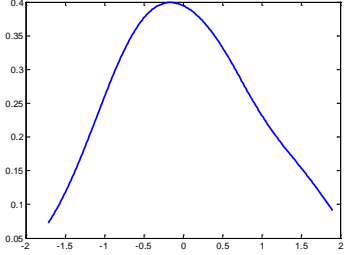
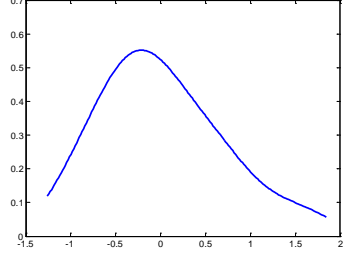
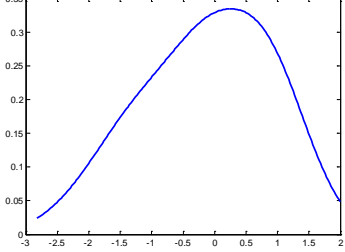
- 3) wyznaczenie parametru wygładzania  $h_{UH(A,B)}$  jako uogólnionej średniej harmonicznej z wartości  $h_A$  oraz  $h_B$  postaci:

$$h_{UH(A,B)} = \frac{h_A h_B}{h_A + \beta(h_B - h_A)}.$$

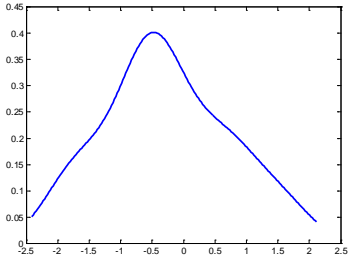
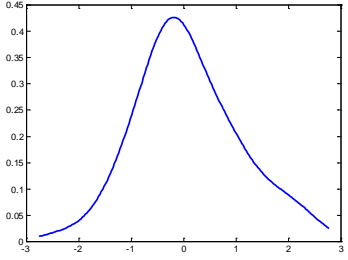
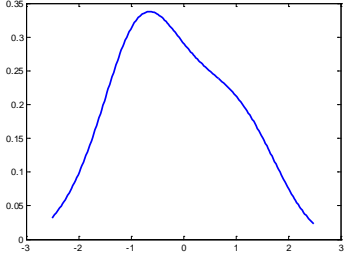
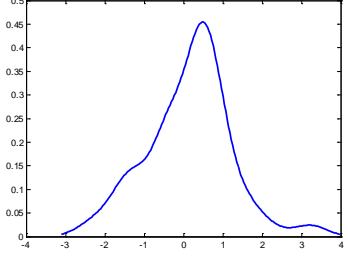
Wybór uogólnionej średniej harmonicznej spowodowany jest jej związkami ze średnią arytmetyczną i geometryczną wyrażonymi w nierówności Cauchy'ego oraz tym, że wśród średnich potęgowych średnia harmoniczna w największym stopniu przypisuje dużą wagę wartościom mniejszym z dwóch uwzględnianych w średniej harmonicznej. Ponadto, waga ta w uogólnionej średniej harmonicznej może być regulowana parametrem  $\beta$ . Gdy średnia harmoniczna jest wyznaczana z dwóch parametrów wygładzania, średnia ta będzie bliższa mniejszemu parametru wygładzania niż parametrowi o większej wartości. Pozwala to w sposób oczywisty uniknąć zbyt dużego stopnia wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości.

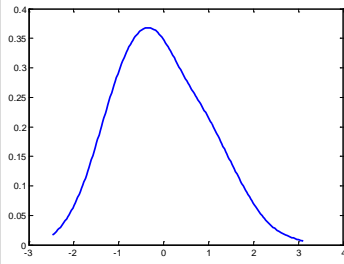
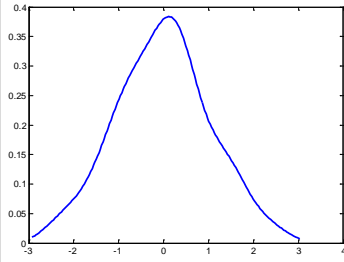
Dla populacji symetrycznej jednomodalnej na podstawie wyników analiz przedstawionych w podrozdziale 3.6 podjęto decyzję o wyborze dwóch parametrów, które przyjmują wartości najmniejsze. Są to parametry wygładzania wyznaczone za pomocą metod odwołania do rozkładu. Dlatego też parametr wygładzania wyznaczony na podstawie uogólnionej średniej harmonicznej  $h_{UH(RR,MS)}$  wykorzystuje wartości parametrów wygładzania wyznaczone metodami odwołania do standardowego rozkładu  $h_{RR}$  i maksymalnego wygładzania  $h_{MS}$ . Wartości parametrów wygładzania wyznaczonych metodami: odwołania do standardowego rozkładu, maksymalnego wygładzania i uogólnionej średniej harmonicznej dla różnych wartości parametru  $\beta$  dla określonych liczebności prób pochodzących z populacji P1 wraz z estymatorami funkcji gęstości przedstawione są w tablicy 3.31.

**Tablica 3.31.** Wartości parametrów wygładzania otrzymane w oparciu o  $n$ -elementowe próby losowane z populacji P1 oraz estymatory funkcji gęstości z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmonicznej i z gaussowską funkcją jądra

$n$	$h_{RR}$	$h_{MS}$	$h_{UH(RR, MS)}$			$\hat{f}(x)$ $h_{UH(RR, MS)}$ $\beta = 1/2$
			$\beta = 1/2$	$\beta = 1/5$	$\beta = 1/8$	
10	0,4020	0,4341	0,4174	0,4273	0,4298	
20	0,4897	0,5288	0,5085	0,5205	0,5236	
30	0,3576	0,3862	0,3713	0,3801	0,3823	
40	0,5060	0,5465	0,5255	0,5379	0,5411	

Tablica 3.31. cd

$n$	$h_{RR}$	$h_{MS}$	$h_{UH(RR, MS)}$			$\hat{f}(x)$ $h_{UH(RR, MS)}$ $\beta = 1/2$
			$\beta = 1/2$	$\beta = 1/5$	$\beta = 1/8$	
50	0,4378	0,4728	0,4546	0,4654	0,4681	
60	0,4453	0,4809	0,4624	0,4733	0,4761	
70	0,467	0,5034	0,4845	0,4957	0,4985	
80	0,3705	0,4002	0,3848	0,3939	0,3962	

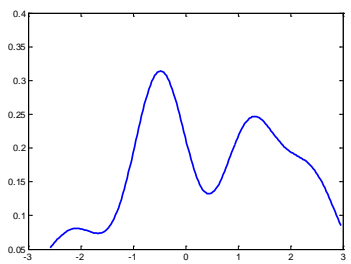
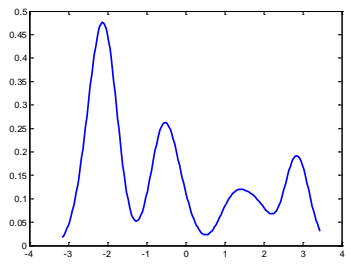
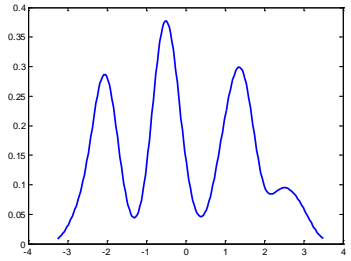
$n$	$h_{RR}$	$h_{MS}$	$h_{UH(RR, MS)}$			$\hat{f}(x)$ $h_{UH(RR, MS)}$ $\beta = 1/2$
			$\beta = 1/2$	$\beta = 1/5$	$\beta = 1/8$	
90	0,4220	0,4557	0,4382	0,4485	0,4512	
100	0,3836	0,4143	0,3984	0,4078	0,4102	

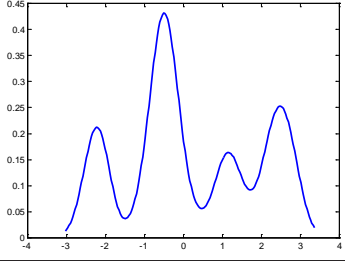
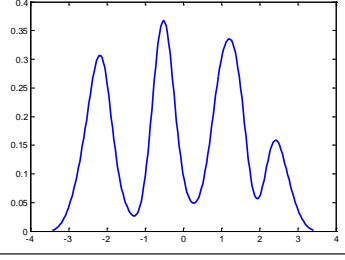
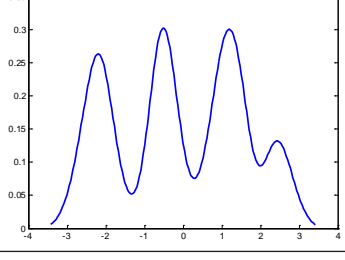
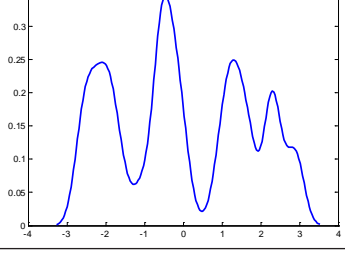
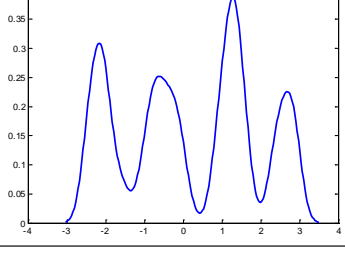
Źródło: obliczenia własne.

Wykorzystanie parametru wygładzania wyznaczonego metodą uogólnionej średniej harmonicznej  $h_{UH(RR, MS)}$  z parametrem  $\beta = 1/2$  oraz gaussowskiej funkcji jądra w estymatorze jądrowym funkcji gęstości nie w każdym przypadku powoduje, że estymator charakteryzuje się takimi samymi własnościami jak funkcja gęstości populacji, z której pochodzą próby. Szczególnie zauważalne jest to w przypadku małej, dziesięcioelementowej próby. Wartość parametru wygładzania, będącego uogólnioną średnią harmoniczną, skutkuje większym wygładzeniem niż zachodziłoby to dla estymatora jądrowego z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą odwołania do standardowego rozkładu, ale i tak dla małej próby wygładzenie to okazuje się być niedostateczne i estymator jądrowy może być traktowany jako dwumodalny. Oznacza to, że nawet w przypadku gdy populacja, z której pobierane są próby, jest populacją o rozkładzie normalnym standardowym a funkcja wagowa w estymatorze jest funkcją gęstości rozkładu normalnego standaryzowanego, wygładzenie powinno być większe niż wynikałoby to z zasady Silvermana. Dla większych prób metoda uogólnionej średniej harmonicznej zapewnia wygładzenie stanowiące optymalną alternatywę dla wygładzenia metodą Silvermana i metodą maksymalnego wygładzenia. Zmniejszenie wartości parametru  $\beta$  oznacza zwiększenie wartości parametru wygładzania.

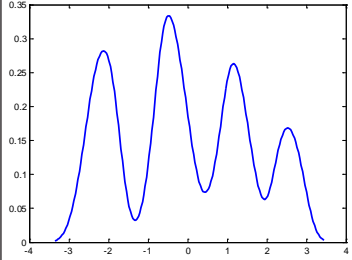
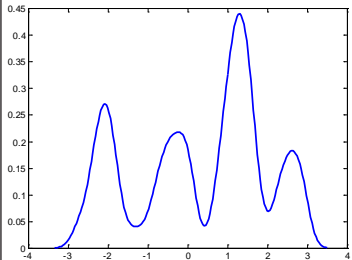
W celu przeprowadzenia analizy własności parametru wygładzania wyznaczonego metodą uogólnioną średniej harmoniczej wyznaczono również wartości parametrów dla prób o różnych liczebnościach pochodzących z populacji wielomodalnej. Analiza własności parametrów wygładzania dokonana na podstawie wyników badania dla populacji wielomodalnych (por. tablica 3.30) wskazała na parametry wygładzania wyznaczone metodą iteracyjną  $h_{IT}$  oraz metodą krosvalidacyjną najmniejszych kwadratów  $h_{LSCV}$ . Wyniki dla wybranych wartości parametru  $\beta$  przedstawia tablica 3.32.

**Tablica 3.32.** Wartości parametrów wygładzania otrzymane w oparciu o  $n$ -elementowe próby losowane z populacji P15 oraz estymatory funkcji gęstości z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmoniczej i z gaussowską funkcją jądra

$n$	min ( $h_{IT}, h_{LSCV}$ )	max ( $h_{IT}, h_{LSCV}$ )	$h_{UH(IT, LSCV)}$			$\hat{f}(x)$ $h_{UH(IT, LSCV)}$ $\beta = 9/10$
			$\beta = 1/2$	$\beta = 1/8$	$\beta = 9/10$	
10	0,4700	1,683	0,7348	1,2725	0,5065	
20	0,2871	1,2607	0,4677	0,8854	0,3111	
30	0,1966	1,2191	0,3386	0,7388	0,2146	

$n$	min $(h_{IT}, h_{LSCV})$	max $(h_{IT}, h_{LSCV})$	$h_{UH(IT, LSCV)}$			$\hat{f}(x)$ $h_{UH(IT, LSCV)}$ $\beta = 9/10$
			$\beta = 1/2$	$\beta = 1/8$	$\beta = 9/10$	
40	0,1425	1,0721	0,2516	0,5905	0,1560	
50	0,2158	1,0209	0,3563	0,6962	0,2342	
60	0,1607	0,183	0,1711	0,1799	0,1627	
70	0,1962	0,8785	0,3208	0,6123	0,2127	
80	0,1989	0,2106	0,2046	0,2091	0,2000	

Tablica 3.32. cd

$n$	min ( $h_{IT}, h_{LSCV}$ )	max ( $h_{IT}, h_{LSCV}$ )	$h_{UH(IT, LSCV)}$			$\hat{f}(x)$ $h_{UH(IT, LSCV)}$ $\beta = 9/10$
			$\beta = 1/2$	$\beta = 1/8$	$\beta = 9/10$	
90	0,2218	0,8595	0,3526	0,6323	0,2396	
100	0,1963	0,2107	0,2032	0,2088	0,1976	

Źródło: obliczenia własne.

Do estymacji funkcji gęstości populacji o rozkładzie wielomodalnym i niesymetrycznym wykorzystano estymator jądrowy funkcji gęstości z parametrami wygładzania wyznaczonymi metodą uogólnionej średniej harmonicznej z parametrów wyznaczonych metodą iteracyjną oraz krosvalidacyjną najmniejszych kwadratów. W odróżnieniu od estymatorów wyznaczonych na podstawie prób pochodzących z populacji jednomodalnej symetrycznej, parametr wygładzania w estymatorze w tym przypadku, niestety, nie może być wyznaczony metodami odwołania do rozkładu (w metodach odwołania do rozkładu przyjmowane jest założenie, że populacja, z której losowane są próby, ma rozkład normalny lub rozkład beta). Znacznie lepsze własności estymatora funkcji gęstości otrzymuje się, gdy parametr wygładzania przyjmuje wartości parametru wygładzania wyznaczone metodą iteracyjną i krosvalidacyjną najmniejszych kwadratów. Parametr uogólnionej średniej harmonicznej bliski 1 ( $\beta = 9/10$ ) daje najlepsze wyniki estymacji funkcji gęstości i wykorzystany w tej metodzie zapewnia estymatory funkcji gęstości, które w najlepszy sposób wygładzają estymator.

## Rozdział 4

# Parametr wygładzania w estymacji jądrowej wielowymiarowej funkcji gęstości

### 4.1. Uwagi wstępne

W estymacji jądrowej wielowymiarowej funkcji gęstości, która jest naturalnym uogólnieniem jednowymiarowej estymacji jądrowej, wymagane jest, analogicznie do przypadku jednowymiarowego, określenie macierzy parametrów wygładzania dodatnio określonej, która kontroluje zarówno stopień, jak i kierunek wygładzania. Konieczne jest również określenie rodzaju funkcji jądra.

Niech  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  będzie próbą losową pobraną z  $d$ -wymiarowej populacji o funkcji gęstości  $f$ . Estymator jądrowy  $\hat{f}$  wielowymiarowej funkcji gęstości dla  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$  jest określony w następujący sposób (por. Devroye, Lugosi, 2001; Efrovitch, 1999):

$$\hat{f}(\mathbf{x}, \mathbf{H}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{\mathbf{H}}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_i), \quad (4.1)$$

gdzie:

$$K_{\mathbf{H}} \text{ jest funkcją jądra } K_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = |\mathbf{H}|^{-\frac{1}{2}} K\left(\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x}\right),$$

$\mathbf{H}$  jest dodatnio określoną symetryczną kwadratową macierzą parametrów wygładzania stopnia  $d$ ,

$|\mathbf{H}|$  jest wyznacznikiem macierzy parametrów wygładzania  $\mathbf{H}$ .

### 4.2. Produktowa i radialna funkcja jądra

W praktycznych zastosowaniach wykorzystywane są dwa rodzaje funkcji jądra: produktowa oraz radialna.

Produktowa funkcja jądra ma postać (por. Scott, 2015):

$$K^P(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d K(x_i), \quad (4.2)$$

gdzie:  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$  oraz  $K$  jest jednowymiarową symetryczną funkcją jądra.

Wielowymiarowa funkcja jądra jest iloczynem jednowymiarowych funkcji jądra dla poszczególnych współrzędnych, gdzie czynniki iloczynu funkcji jądra produktowego mogą przyjmować różne postacie funkcji jądra jednowymiarowej.

Parametr wygładzania  $h^d = h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_d$  jest iloczynem parametrów wygładzania wyznaczonych dla poszczególnych współrzędnych wektora  $\mathbf{x}$ . Jeśli dowolnie ustalić  $d-1$  współrzędnych to  $d$ -wymiarowa funkcja jądra produktowa, rozważana jako funkcja pozostałej (nieustalonej) współrzędnej, jest z dokładnością do stałej tożsama z funkcją jądra jednowymiarową. Na przekroju równoległym do dowolnej osi funkcja jądra jednowymiarowa jest proporcjonalna do funkcji jądra wielowymiarowej.

Radialna funkcja jądra wyraża się wzorem:

$$K^R(\mathbf{x}) = c_k K(\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}), \quad (4.3)$$

gdzie:  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ , natomiast  $c_k^{-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}) d\mathbf{x}$  oraz  $c_k$  jest dodatnią stałą,

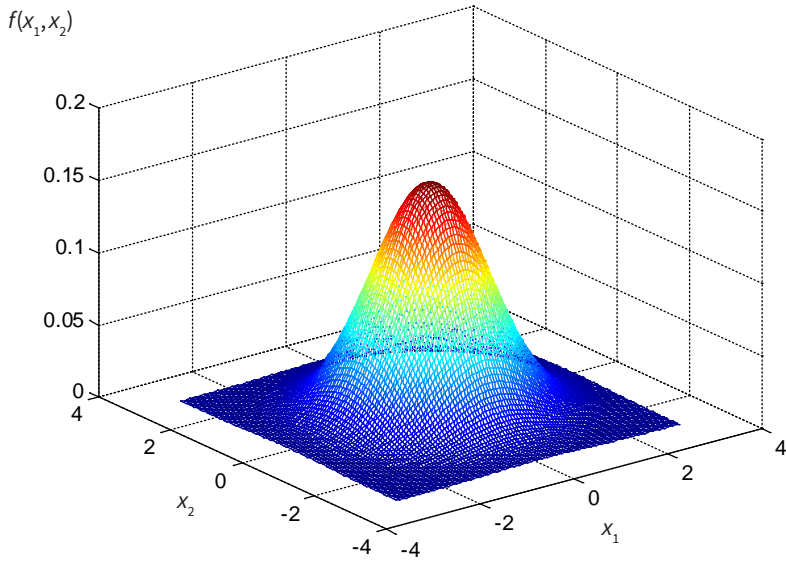
taką że funkcja jądra  $K^R(\mathbf{x})$  jest funkcją gęstości.

W przypadku nietypowych jednowymiarowych funkcji jądra wyznaczenie stałej  $c_k$  nie jest możliwe ze względu na to, że  $\int_{-\infty}^{+\infty} K(\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}) d\mathbf{x} = \infty$ . Konieczna jest wówczas odpowiednia dodatkowa modyfikacja.

Funkcje jądra radialne charakteryzują się własnością symetrii radialnej, co oznacza, że na dowolnym okręgu o środku w początku układu współrzędnych wartość funkcji jądra radialnego jest stała. Dla jednowymiarowego przekroju wzdłuż osi  $x_1$ , czyli dla  $x_2 = x_3 = \dots = x_d = 0$ ,  $d$ -wymiarowa funkcja jądra radialna jest z dokładnością do stałej tożsama z funkcją jądra jednowymiarową. Własność symetrii radialnej powoduje, że także na przekroju wzdłuż dowolnej prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych funkcja jądra wielowymiarowa jest proporcjonalna do jednowymiarowej funkcji jądra.

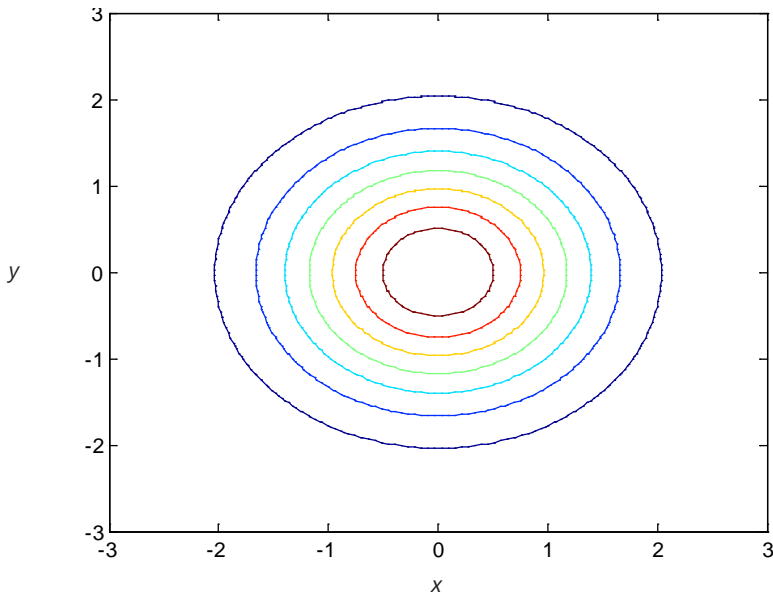
Przykłady radialnych funkcji jądra oraz warstwic funkcji jądra produktowego i radialnego przedstawione są w pracy Kulczyckiego (2005).

Należy zauważyć, że dla gaussowskiej funkcji jądra warstwic są identyczne dla radialnej i produktowej funkcji jądra. Przykładowa gaussowska funkcja jądra i jej warstwic dla  $d = 2$  przedstawione są na rysunkach, odpowiednio 4.1 i 4.2.



**Rysunek 4.1.** Dwuwymiarowa gaussowska funkcja jądra

Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 4.2.** Warstwie dwuwymiarowej gaussowskiej funkcji jądra

Źródło: opracowanie własne.

Estymator jądrowy  $d$ -wymiarowy  $\hat{f}(\mathbf{x})$  może być zapisany w postaci:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d \frac{1}{h_j} K\left(\frac{x_j - X_{ij}}{h_j}\right), \quad (4.4)$$

gdzie:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)',$$

$X_{ij}$  jest  $j$ -tą składową wektora  $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{id})'$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $K(u)$  jest jednowymiarową funkcją jądra,

$h_1, h_2, \dots, h_d$  są parametrami wygładzania związanymi z poszczególnymi zmiennymi.

Problem optymalnego parametru wygładzania można sprowadzić do poszukiwania tylko jednego parametru gdy  $h_j = h s_j$ , gdzie  $s_j$  jest odchyleniem standardowym z próby  $j$ -tej zmiennej. Miara precyzji estymacji jest następująca:

$$AMISE(h) = \frac{1}{4} \kappa_2^2 \left[ \sum_{j=1}^d h_j^4 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{jj}^2(x) dx + \sum_{j \neq k} h_j^2 h_k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{jj}(x) f_{kk}(x) dx \right] + \frac{\kappa^d}{N h_1 \dots h_d}, \quad (4.5)$$

gdzie  $f_{jj}(x)$  jest pochodną cząstkową rzędu drugiego funkcji  $f$ .

Optymalny parametr wygładzania ma postać:

$$h_i \approx \kappa n^{-\frac{1}{4+d}}, \quad (4.6)$$

co prowadzi do miary dopasowania rzędu  $n^{-\frac{4}{4+d}}$ . Miara dopasowania rośnie bardzo szybko wraz z wymiarem  $d$  przestrzeni. Związane jest z tym tzw. zjawisko przekleństwa wymiarowości. W pracy Silvermana (1986) przedstawiona jest niezbędna liczebność próby w celu zapewnienia względnego błędu średniokwadratowego w zerze mniejszego od 0,1. Posiadanie 842 tys. obserwacji w przestrzeni dziesięciowymiarowej odpowiada faktowi posiadania czterech obserwacji jednowymiarowych.

Do estymacji wielowymiarowych funkcji gęstości populacji wykorzystywane są funkcje jądra wielowymiarowe.

Funkcja jądra Epanechnikowa wyraża się wzorem:

$$K(\mathbf{u}) = \begin{cases} \frac{(d+2)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} (1-\mathbf{u}'\mathbf{u}) & \text{dla } \mathbf{u}'\mathbf{u} < 1 \\ 0 & \text{dla } \mathbf{u}'\mathbf{u} \geq 1, \end{cases} \quad (4.7)$$

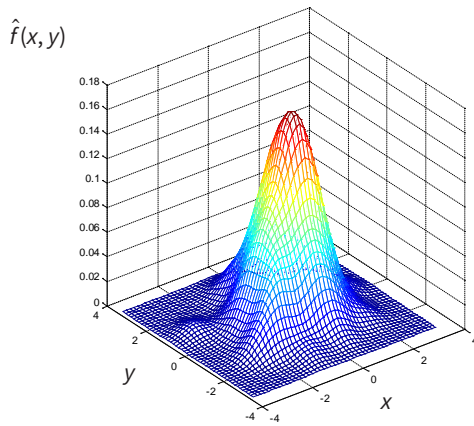
gdzie  $\Gamma$  oznacza niekompletną funkcję gamma.

Jest to jednomodalna funkcja gęstości o symetrii kołowej w przestrzeni  $d$ -wymiarowej.

Funkcja jądra  $d$ -gaussowska ma postać:

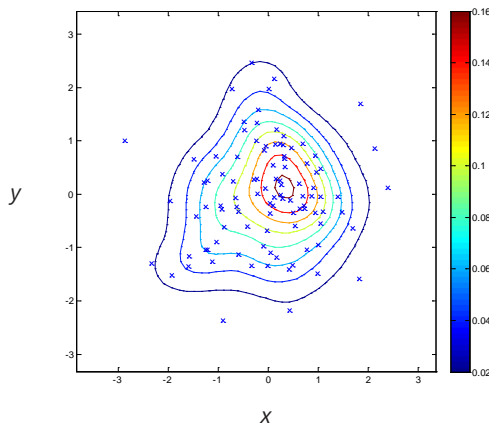
$$K(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{u}'\mathbf{u}\right) \quad \text{dla } \mathbf{u} \in R^d. \quad (4.8)$$

Dla populacji o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym z wektorem wartości oczekiwanych  $[0, 0]$  i macierzą kowariancji  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  na podstawie próby  $n = 100$  z gaussowską funkcją jądra wyznaczono estymator dwuwymiarowej funkcji gęstości, który przedstawiony jest na rysunku 4.3, natomiast warstwie na rysunku 4.4.



**Rysunek 4.3.** Estymator jądrowy dwuwymiarowej zmiennej losowej ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra)

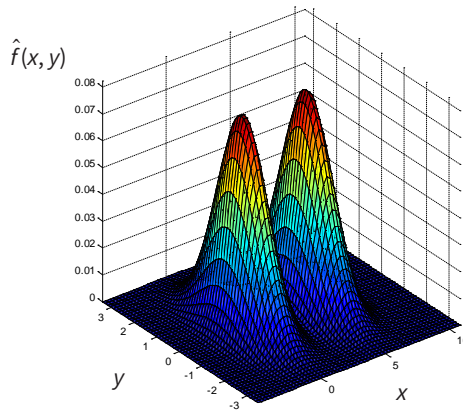
**Źródło:** opracowanie własne.



**Rysunek 4.4.** Warstwiec estymatora jądrowego dwuwymiarowej zmiennej losowej ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra)

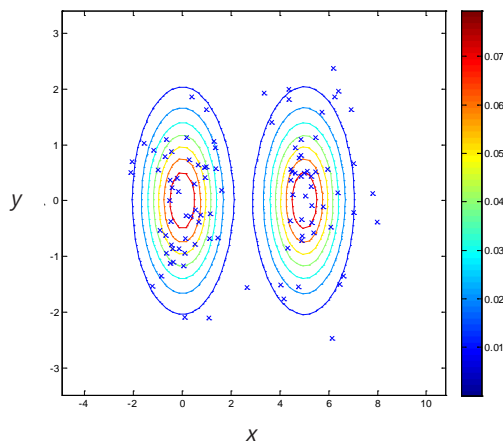
**Źródło:** opracowanie własne.

Dla populacji będącej mieszaniną dwóch dwuwymiarowych rozkładów normalnych o wagach 1/2 z wektorem wartości oczekiwanych  $[0, 0]$  i macierzą kowariancji  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  oraz wektorem wartości oczekiwanych  $[5, 0]$  i macierzą kowariancji  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  na podstawie próby  $n = 100$  z gaussowską funkcją jądra wyznaczono estymator dwuwymiarowej funkcji gęstości, który przedstawiony jest na rysunku 4.5, natomiast warstwicę na rysunku 4.6.



**Rysunek 4.5.** Estymator jądrowy dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną dwóch dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra)

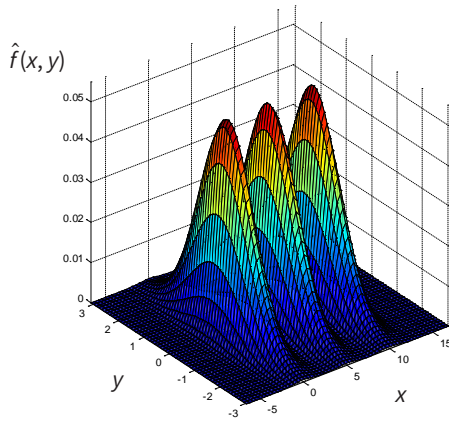
Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 4.6.** Warstwicę estymatora jądrowego dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną dwóch dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra)

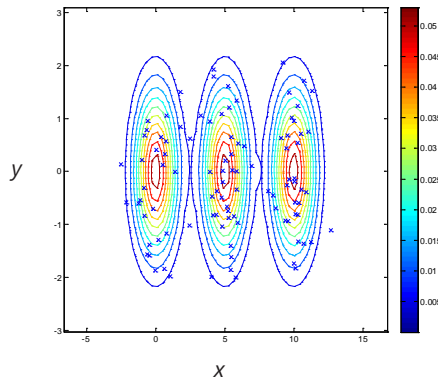
Źródło: opracowanie własne.

Wyznaczono również estymator jądrowy dwuwymiarowej zmiennej losowej o dwuwymiarowym rozkładzie będącym mieszaniną trzech rozkładów normalnych o wagach 1/3 z wektorem wartości oczekiwanych  $[0, 0]$  i macierzą kowariancji  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , wektorem wartości oczekiwanych  $[5, 0]$  i macierzą kowariancji  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  oraz z wektorem wartości oczekiwanych  $[10, 0]$  i macierzą kowariancji  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  na podstawie próby  $n = 100$  z gaussowską funkcją jądra. Wyniki przedstawione są na rysunkach 4.7 i 4.8.



**Rysunek 4.7.** Estymator jądrowy dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną trzech dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra)

Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 4.8.** Warstwicze estymatora jądrowego dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną trzech dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra)

Źródło: opracowanie własne.

### 4.3. Wybór macierzy parametrów wygładzania

W praktycznych zastosowaniach wykorzystuje się dwie metody wyboru macierzy parametrów wygładzania: metodę podstawiania i metodę odwołania do standardowego rozkładu. Należy jednak pamiętać o konieczności wyskalowania danych tak, by wariancje z próby były takie same w każdym wymiarze (Wand, Jones, 1995).

Macierz parametrów wygładzania wyznaczona metodą podstawiania ma postać:

$$\hat{\mathbf{H}}_{PI} = \arg \min_{\mathbf{H} \in H} PI(\mathbf{H}), \quad (4.9)$$

$$\text{gdzie: } PI(\mathbf{H}) = \frac{1}{n} \mathbf{R}(K) |\mathbf{H}|^{-\frac{1}{2}} + \frac{\mathbf{K}_2^2}{4} \text{vech}^T \mathbf{H} \hat{\Psi}_4 \text{vech } \mathbf{H},$$

$$\mathbf{R}(K) = \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathbf{x}) K^T(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$$\hat{\Psi}_4 \text{ jest oszacowaniem } \hat{\Psi}_4 = \int_{\mathbb{R}^d} f^{(4)}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

$\text{vech } \mathbf{H}$  jest macierzą bez elementów diagonalnych.

Postać macierzy parametrów wygładzania wyznaczona metodą odwołania do standardowego rozkładu jest następująca:

$$\hat{\mathbf{H}}_{REF} = \left( \frac{4}{n(d+2)} \right)^{\frac{2}{d+4}} \hat{\Sigma}, \quad (4.10)$$

gdzie:  $\hat{\Sigma}$  jest empirycznym estymatorem macierzy kowariancji:

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T.$$

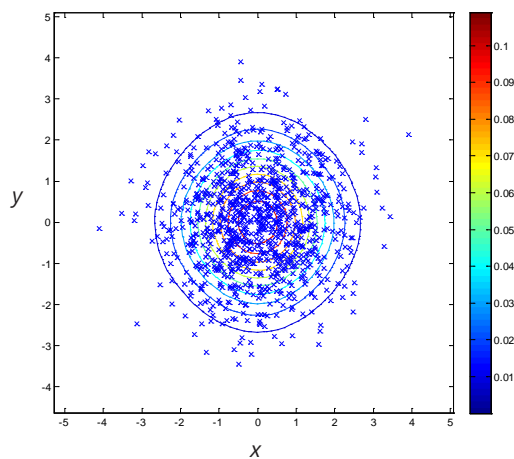
Wyznaczono przykładowy estymator jądrowy na podstawie próby 1000-elementowej wylosowanej z populacji o dwuwymiarowym rozkładzie normalnym będącym mieszaniną pięciu rozkładów normalnych o następujących charakterystykach: wagi mieszaniny 1/5, wektory wartości oczekiwanych [0 0], [1 0],

[0 1], [-1 0], [0 -1]; macierze kowariancji  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Wyniki przedstawione są na rysunkach 4.9 i 4.10.



**Rysunek 4.9.** Estymator jądrowy dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną pięciu dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 1000$ , gaussowska funkcja jądra, odwołanie do standardowego rozkładu)

Źródło: opracowanie własne.



**Rysunek 4.10.** Warstwicze estymatora jądrowego dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną pięciu dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 1000$ , gaussowska funkcja jądra, odwołanie do standardowego rozkładu)

Źródło: opracowanie własne.



## Rozdział 5

# Parametr wygładzania w zastosowaniach ekonomicznych estymacji jądrowej funkcji gęstości

### 5.1. Uwagi wstępne

Uniwersalność metod jądrowych powoduje, iż zakres stosowalności tych metod jest bardzo szeroki. Dotyczą one zarówno estymacji, jak i weryfikacji hipotez statystycznych.

W literaturze polskiej przykłady procedur jądrowych stosowanych w testowaniu hipotez statystycznych, rozważania dotyczące optymalnego wyboru parametru wygładzania oraz przykłady zastosowań w analizach ekonomicznych przedstawione są, między innymi, w pracach Śliwickiego (2012), Baszczyńskiej (2013a), gdzie analizowany był rozkład wskaźnika rozwoju społecznego, Baszczyńskiej (2013b) oraz Domańskiego i in. (2014). Zastosowanie metod jądrowych w analizach dotyczących estymacji charakterystyk zmiennych ekonomicznych przedstawione są, między innymi w pracach: Czyżyckiego (2013), gdzie analizy związane były z rozkładem stóp zwrotu z inwestycji na rynku kapitałowym; Baszczyńskiej (2014a), gdzie zaprezentowano wyniki badań rozkładu emisji dwutlenku węgla na świecie w latach 1960–2010; Baszczyńskiej (2014b), gdzie przedstawiono rezultaty badania dotyczącego kontraktów terminowych na cenę jednostki emisji dwutlenku węgla w 2014 roku.

Metoda jądrowa znajduje również zastosowanie przy podejmowaniu decyzji odnośnie do problemów medycznych i zagadnień związanych z psychologią, w analizach zjawisk technicznych, na przykład w identyfikacji parametrów obiektu dla potrzeb optymalnego i odpornego sterowania systemami dynamicznymi (Kulczycki, 2005).

Metoda jądrowa bywa także stosowana jako narzędzie wykorzystywane w konstrukcji pewnych procedur statystycznych, na przykład przy konstrukcji przedziałów ufności (Kończak, 2013).

## 5.2. Analiza kondycji przedsiębiorstw

Metoda estymacji jądrowej może być zastosowana w analizach dotyczących największych firm Europy Środkowo-Wschodniej w 2015 roku. Dane uwzględniane w analizie pochodzą z opracowań grupy Coface, która od 2006 roku przygotowuje ranking TOP 500 CEE, prezentujący największe firmy Europy Środkowo-Wschodniej. Zestawienie prezentuje w ujęciu bezwzględny 500 przedsiębiorstw, które osiągnęły największe obroty w roku poprzedzającym publikację rankingu (*top 500 CCE*, <http://www.coface.com> [22.03.2016]).

Dane na temat przedsiębiorstw pozyskują i weryfikują eksperci Coface bezpośrednio w 13 krajach tego regionu. Prace koordynuje centrala Coface na ten region znajdująca się w Wiedniu, a ostatecznego scalenia listy dokonuje Coface w Polsce, jako prekursor tego projektu i najsilniejszy oddział w regionie.

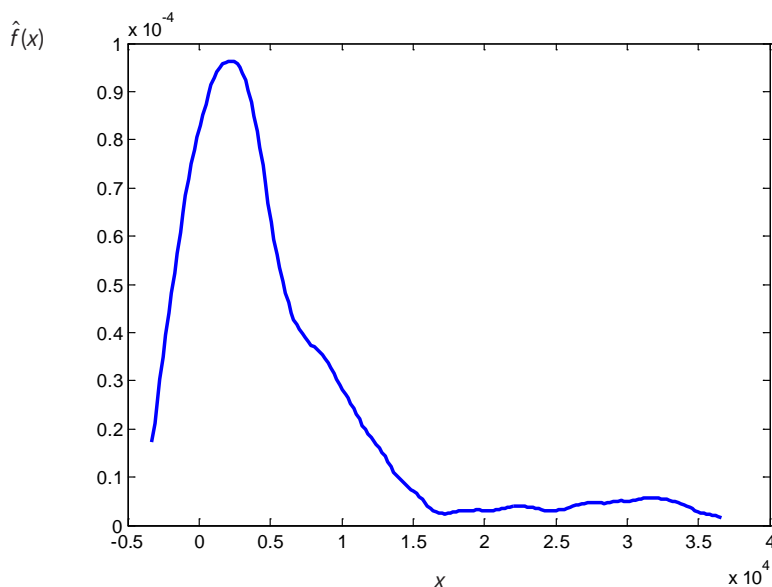
W rankingu nie są uwzględniane banki i ubezpieczyciele oraz inne firmy z sektora finansowego ze względu na odmienny sposób raportowania wyników takich spółek, co utrudnia zestawienie ich na jednej liście z przedsiębiorstwami produkcyjnymi lub handlowymi. W przypadku grup kapitałowych prezentowane są skonsolidowane wyniki spółek z grupy, co umożliwia pokazanie rzeczywistego znaczenia i siły największych koncernów z tego regionu.

Analizie podlegał rozkład liczby zatrudnionych w 500 największych firmach Europy Środkowo-Wschodniej. W sposób losowy pobierano próby o różnej liczebności i wyznaczano estymator jądrowy funkcji gęstości.

Dla próby o liczebności  $n = 50$  estymator jądrowy wyznaczany był przy wykorzystaniu optymalnej funkcji jądra. Estymatory jądrowe funkcji gęstości przedstawione są na rysunkach 5.1–5.3, natomiast parametry funkcji jądra oraz wielkości parametrów wygładzania w zależności od metody wyboru zawierają tablice 5.1–5.3. Parametr wygładzania wyznaczony metodą uogólnionej średniej harmonicznej

określony jest w następujący sposób: 
$$h_{UH(RR,BCV)} = \frac{h_{RR}h_{BCV}}{h_{RR} + \frac{1}{10}(h_{BCV} - h_{RR})},$$

gdzie  $h_{RR}$  jest parametrem wygładzania wyznaczonym metodą odwołania do standardowego rozkładu, natomiast  $h_{BCV}$  jest parametrem wyznaczonym metodą obciążoną krosvalidacyjną.



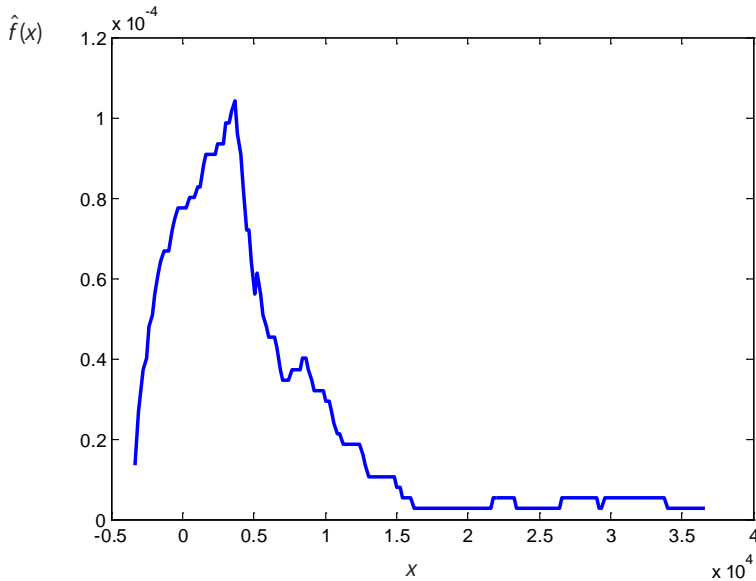
**Rysunek 5.1.** Estymator funkcji gęstości z funkcją jądra optymalną z parametrami  $\nu = 0$ ,  $k = 2$ ,  $\mu = 0$  (Epanecznikowa) z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmonicznej

**Źródło:** opracowanie własne.

**Tablica 5.1.** Wartości parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości dla funkcji jądra optymalnej z parametrami  $\nu = 0$ ,  $k = 2$ ,  $\mu = 0$  (funkcja jądra Epanecznikowa)

Metoda wyboru parametru wygładzania	Wartość parametru
Uogólniona średnia harmoniczna	5734,0510
Iteracyjna	1694,5513
Bezpośrednia podstawiania	4538,5815
Maksymalnego wygładzania	5144,8276
Obciążona krosvalidacyjna	5866,7843
Krosvalidacyjna najmniejszych kwadratów	876,2016
Odwolania do standardowego rozkładu	4764,0018

**Źródło:** opracowanie własne.



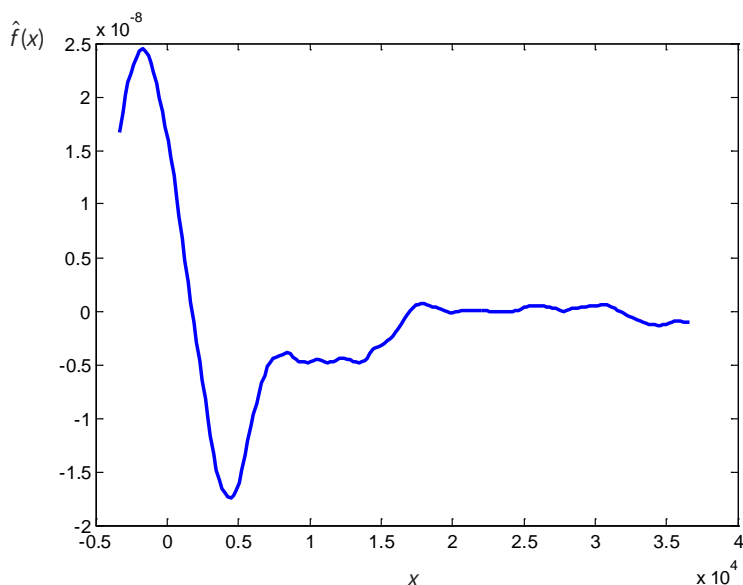
**Rysunek 5.2.** Estymator funkcji gęstości z funkcją jądra optymalną z parametrami  $\nu = 0, k = 2, \mu = -1$  z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmonicznej

**Źródło:** opracowanie własne.

**Tablica 5.2.** Wartości parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości dla funkcji jądra optymalnej z parametrami  $\nu = 0, k = 2, \mu = -1$

Metoda wyboru parametru wygładzania	Wartość parametru
Uogólniona średnia harmoniczna	7217,6630
Iteracyjna	1017,0941
Bezpośrednia podstawiania	3567,3391
Maksymalnego wygładzania	4043,8504
Obciążona kroswalidacyjna	8046,9724
Kroswalidacyjna najmniejszych kwadratów	705,6883
Odwołania do standardowego rozkładu	3744,5201

**Źródło:** opracowanie własne.



**Rysunek 5.3.** Estymator funkcji gęstości z funkcją jądra optymalną z parametrami  $\nu = 1, k = 3, \mu = 0$  z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmonicznej

**Źródło:** opracowanie własne.

**Tablica 5.3.** Wartości parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości dla funkcji jądra optymalnej z parametrami  $\nu = 1, k = 3, \mu = 0$

Metoda wyboru parametru wygładzania	Wartość parametru
Uogólniona średnia harmoniczna	6986,4930
Iteracyjna	nieskończona
Bezpośrednia podstawiania	4671,0041
Maksymalnego wygładzania	5889,2807
Obciążona krosvalidacyjna	7220,3028
Krosvalidacyjna najmniejszych kwadratów	2370,9088
Odwołania do standardowego rozkładu	5409,8480

**Źródło:** opracowanie własne.

### 5.3. Analiza wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych

Metodę estymacji jądrowej zastosowano do badania rozkładu wskaźnika cen towarów i usług konsumpcyjnych, opracowanego na podstawie obserwacji cen reprezentantów towarów i usług konsumpcyjnych (ok. 1400 w 2014 r.).

Wskaźniki cen obliczono przy przyjęciu systemu wag opracowanego na podstawie struktury wydatków (bez spożycia naturalnego) poszczególnych grup gospodarstw domowych na zakup towarów i usług konsumpcyjnych z roku poprzedzającego rok badany, uzyskanej z badania budżetów gospodarstw domowych. Grupowania towarów i usług konsumpcyjnych dokonano na podstawie Klasyfikacji Spożycia Indywidualnego według Celu, zaadaptowanej na potrzeby zharmonizowanych wskaźników cen konsumpcyjnych (COICOP/HICP). Od roku 2014 w obliczeniach wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych zastosowano bardziej szczegółowy system wag, w związku z wdrażaniem przez Eurostat pięcioletniego szczebla agregacji do klasyfikacji COICOP.

Źródłem informacji o cenach detalicznych towarów i usług są:

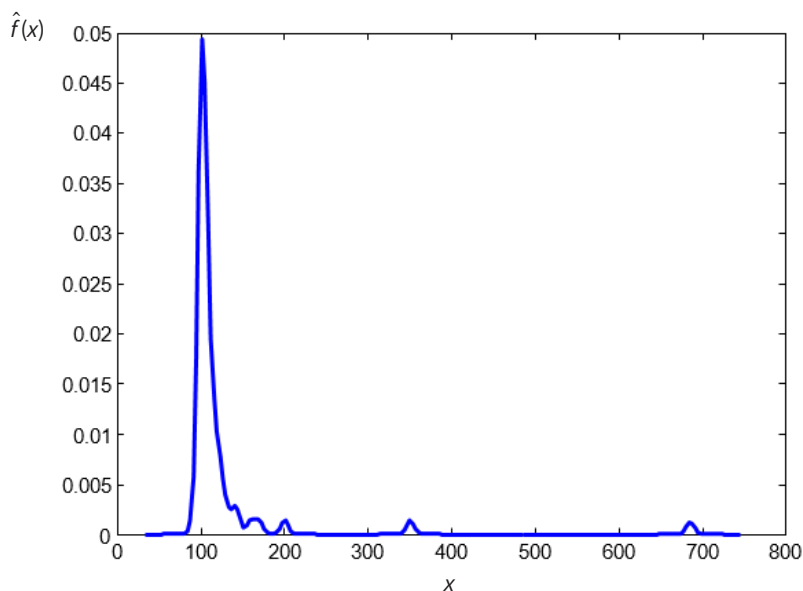
- notowania cen dokonywane przez ankietatorów w wybranych punktach sprzedaży, w wytypowanych rejonach badania cen (209 rejonów w 2014 r.);
- cenniki, zarządzenia i decyzje w zakresie cen jednolitych obowiązujących na terenie całego kraju lub jego części;
- notowania cen towarów i usług zakupywanych przez internet.

Badania dotyczące rozkładu wskaźnika cen towarów i usług konsumpcyjnych przeprowadzone były w dwóch etapach:

1) analiza cen towarów i usług konsumpcyjnych w Polsce dotyczyła rocznych indeksów cen w latach 1950–2013, półrocznych wskaźników w latach 1989–2014, kwartalnych wskaźników w latach 1995–2014, miesięcznych w latach 1989–2014 oraz miesięcznych w latach 1999–2014 (1998 = 100) (<http://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/ceny-handel/wskazniki-cen/wskazniki-cen-towarow-i-uslug-konsumpcyjnych-pot-inflacja/> [31.08.2014]);

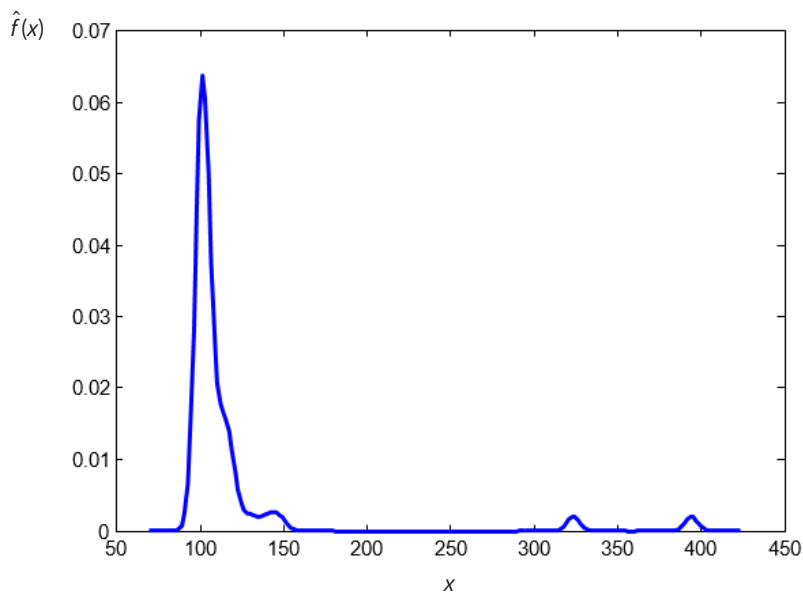
2) analiza wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych w krajach świata od 2004 do 2013 roku, dane pochodziły z zasobów The World Bank IBRD-IDA (<http://data.worldbank.org/indicator/FP.CPI.TOTL?page=1> [31.08.2014]).

Estymatory jądrowe wyznaczone z gaussowską funkcją jądra i z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmonicznej ( $\beta = 1/10$ ,  $h_{RR}$ ,  $h_{LSCV}$ ) w etapie pierwszym są przedstawione na rysunkach 5.4–5.8.



**Rysunek 5.4.** Estymator funkcji gęstości rocznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1950–2013

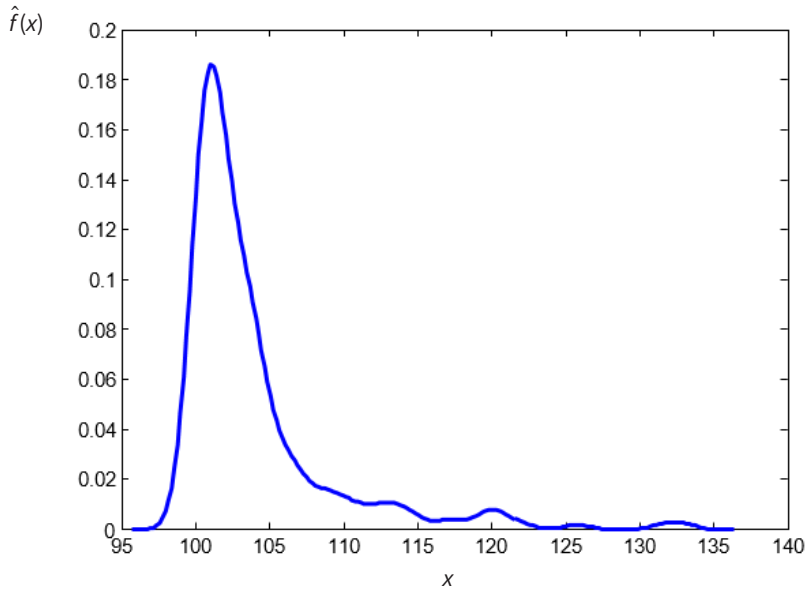
**Źródło:** opracowanie własne.



**Rysunek 5.5.** Estymator funkcji gęstości półrocznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1989–2014

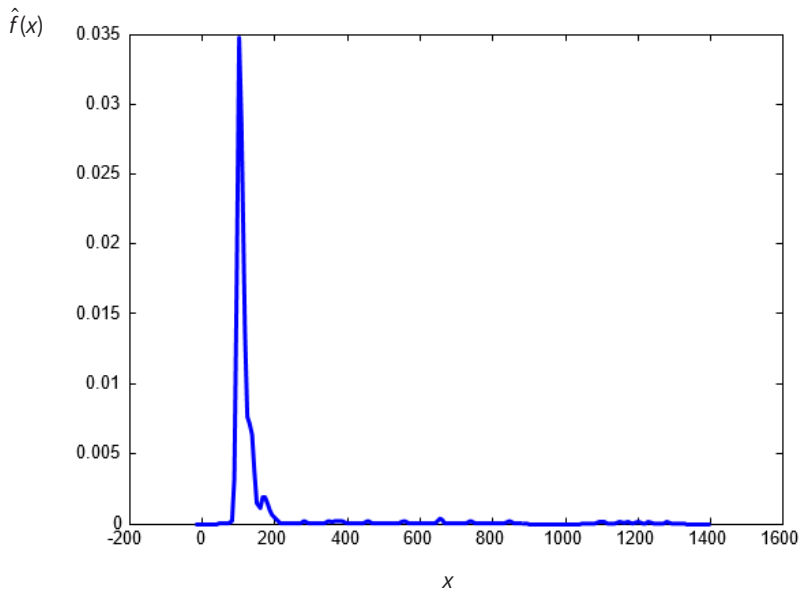
**Źródło:** opracowanie własne.

**174** Parametr wygładzania w estymacji jądrowej...



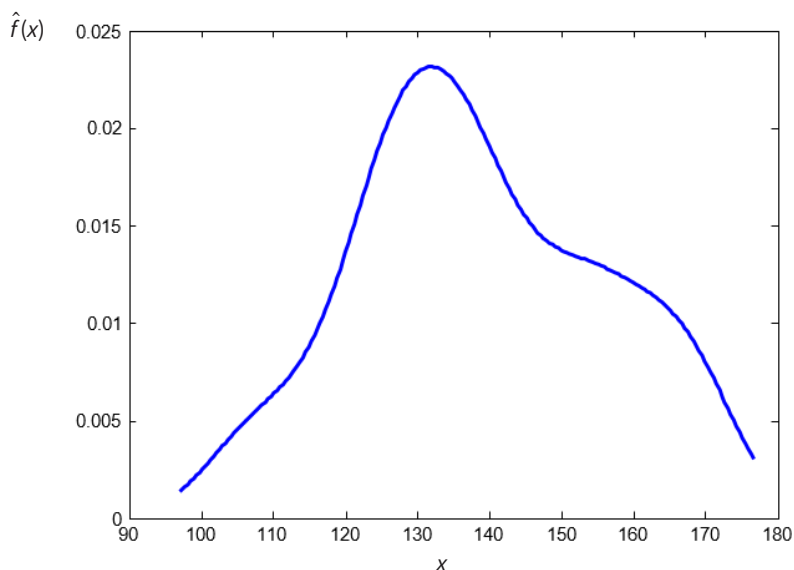
**Rysunek 5.6.** Estymator funkcji gęstości kwartalnych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1995–2014

**Źródło:** opracowanie własne.



**Rysunek 5.7.** Estymator funkcji gęstości miesięcznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1989–2014

**Źródło:** opracowanie własne.



**Rysunek 5.8.** Estymator funkcji gęstości miesięcznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1999–2014 (1998 = 100).

**Źródło:** opracowanie własne.

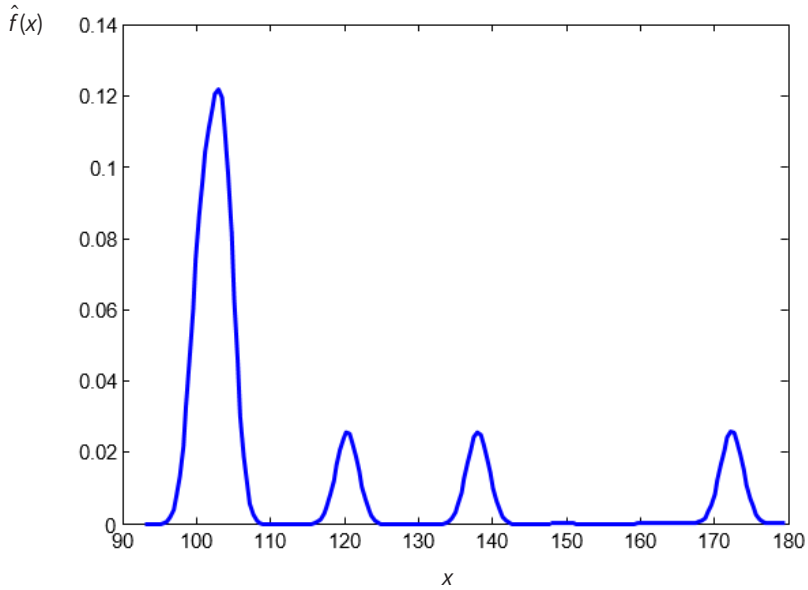
Rozkłady cen towarów i usług są rozkładami asymetrycznymi, gdy indeksy cen towarów i usług są indeksami łańcuchowymi, natomiast gdy indeksy cen są indeksami jednopodstawowymi (rok 1998 jest rokiem podstawowym) rozkład indeksu jest rozkładem o znacznie mniejszej asymetrii.

Wyniki estymacji jądrowej na podstawie 10-elementowej próby wylosowanej z populacji miesięcznego wskaźnika cen towarów i usług konsumpcyjnych w latach 1989–2014 przedstawiają rysunki 5.9 i 5.10.

Wyznaczenie estymatora jądrowego funkcji gęstości dla małej 10-elementowej próby spowodowało, że w przypadku indeksów łańcuchowych estymacja wskazuje na wielomodalność.

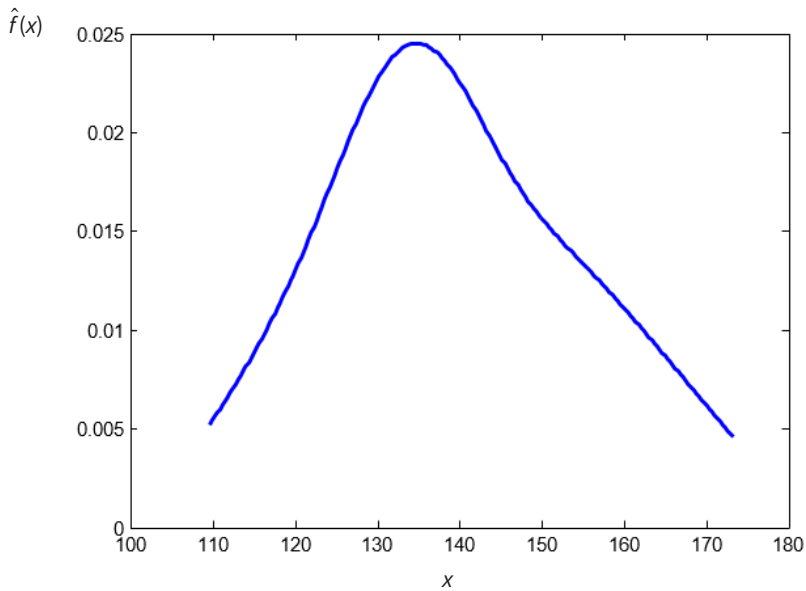
W drugim etapie badania analizie podlegały wskaźniki dla krajów świata w latach 2004–2013 (2010 = 100). Wyznaczono estymatory dla gaussowskiej funkcji jądra i dla metody odwołania do standardowego rozkładu oraz metody krosvalidacyjnej najmniejszych kwadratów. Wyniki estymacji dla roku 2004 (173 państw) oraz 2013 (163 państwa) przedstawiają rysunki 5.11 oraz 5.12 (metoda odwołania do standardowego rozkładu z lewej strony, metoda krosvalidacyjna najmniejszych kwadratów z prawej strony).

**176** Parametr wygładzania w estymacji jądrowej...



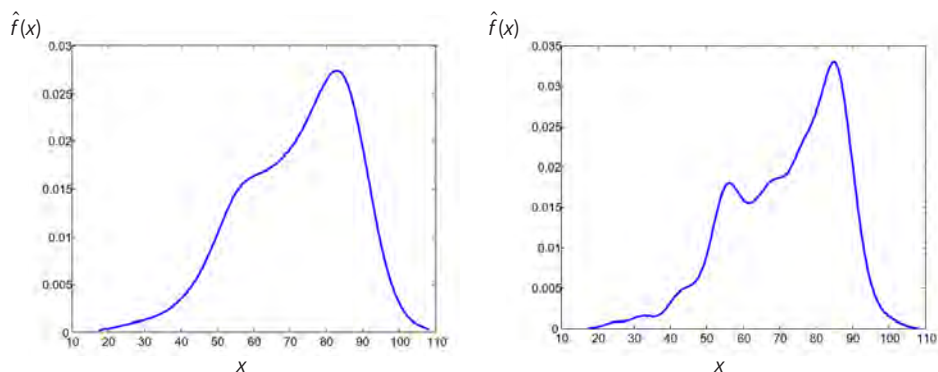
**Rysunek 5.9.** Estymator funkcji gęstości miesięcznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1989–2014

**Źródło:** opracowanie własne.

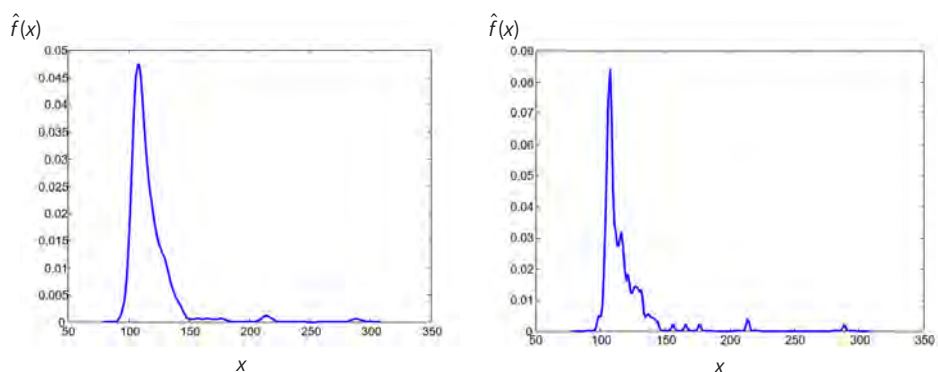


**Rysunek 5.10.** Estymator funkcji gęstości miesięcznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1999–2014 (1998 = 100)

**Źródło:** opracowanie własne.


**Rysunek 5.11.** Estymator funkcji gęstości dla 2004 roku

Źródło: opracowanie własne.


**Rysunek 5.12.** Estymator funkcji gęstości dla 2013 roku

Źródło: opracowanie własne.

Estymatory funkcji gęstości są funkcjami asymetrycznymi bez względu na metodę wyboru parametru wygładzania. Wpływ metody wyboru odzwierciedla się w stopniu wygładzenia estymatora. W każdym z rozważanych przypadków, gdy estymator funkcji gęstości wykorzystywał metodę krosvalidacyjną najmniejszych kwadratów, estymator charakteryzuje się małym stopniem wygładzania (wówczas estymator określany jest jako „poszarpany”), co jest spowodowane małą wartością parametru wygładzania wyznaczonego tą metodą.



# Zakończenie

Wpływ parametrów metody jądrowej na estymator jądrowy funkcji gęstości jest przedmiotem badań, których znaczenie podkreślają użytkownicy nieparametrycznych procedur statystycznych. Określenie, w sposób eksplicytny, którymi parametrami metody jądrowej należy się posłużyć w konkretnej sytuacji badawczej stanowi niewątpliwie wytyczne, które będą stosowane przy różnego rodzaju badaniach statystycznych wykorzystujących procedury związane z funkcją gęstości. Oznacza to, że informacja o podstawowych własnościach funkcji gęstości otrzymywana poprzez estymator tej charakterystyki funkcyjnej, wyznaczany w sposób intuicyjny i przystępny, staje się zasadniczym elementem niemal każdej analizy statystycznej o nieparametrycznym charakterze. Wyniki rozważań dotyczących parametrów metody jądrowej mogą zatem być wykorzystywane przy analizach związanych bezpośrednio z funkcją gęstości, gdzie zasadniczym celem badania jest ogólna charakterystyka populacji, ale również w zagadnieniach szczegółowych analiz, gdzie wstępna ocena funkcji gęstości jest wyznacznikiem kierunku dalszych, szczegółowych badań. Ta właśnie uniwersalność i szeroki zakres stosowalności procedury jądrowego estymatora funkcji gęstości wymusza konieczność dokładnych analiz związanych z parametrami metody jądrowej.

W pracy rozważano wybrane parametry metody jądrowej, ze szczególnym uwzględnieniem parametru wygładzania. Wskazano na wady i zalety każdego z rodzajów podejścia by umożliwić użytkownikom metod jądrowych stosowanie procedur o szerokich możliwościach aplikacyjnych, a jednocześnie ułatwić wybór odpowiednich parametrów metody jądrowej. Zaproponowano również własną, autorską procedurę wyznaczania wartości parametru wygładzania opartą na uogólnionej średniej harmonicznnej, której własności zapewniają odpowiedni sposób wygładzenia funkcji przy uwzględnieniu informacji dodatkowej dotyczącej populacji. Porównano znane z literatury przedmiotu procedury wyboru parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości oraz zwracano uwagę na zależność metody wyboru parametru wygładzania od postaci funkcji jądra.

Zaprezentowano i poddano analizie szerokie spektrum klas funkcji jądra, formułując wskazówki dotyczące możliwych zastosowań w konkretnej sytuacji

badawczej. Przedstawiono metody wyboru parametru wygładzania, biorąc pod uwagę możliwości implementacyjne potencjalnych użytkowników. Rezultaty przeprowadzonego badania pozwalają określić pary parametrów metody jądrowej w estymacji funkcji gęstości, gdy użytkownik jest w stanie wstępnie określić chociaż niektóre z własności rozkładu analizowanej populacji.

Analiza własności autorskiej propozycji dotyczącej metody wyboru parametru wygładzania wskazuje na uniwersalność tej metody poprzez możliwość doboru odpowiedniego parametru w uogólnionej średniej harmonicznnej, jednocześnie pozwalając użytkownikowi na własny subiektywny dobór na przykład parametrów wygładzania biorących udział w konstrukcji uogólnionej średniej harmonicznnej.

Wskazano również na obszary zastosowań estymacji jądrowej funkcji gęstości dla zmiennych o charakterze ekonomicznym i problemy związane z odpowiednim doбором parametrów metody jądrowej, w tym parametru wygładzania.

Wyniki przeprowadzonych badań pozwalają na sformułowanie wniosków, które zostały pogrupowane w trzy obszary węzłowe.

1. Zasadne jest wyodrębnienie poszczególnych rodzajów funkcji jądra. Usystematyzowanie i podanie własności istniejących w literaturze propozycji funkcji jądra umożliwi określenia jasnych kryteriów wyboru właściwej postaci funkcji jądra w estymacji funkcji gęstości. Klasyczne funkcje jądra (o rzędzie równym 2) oraz ich określone kombinacje liniowe stosowane w estymacji jądrowej funkcji gęstości są zalecane we wstępnej analizie statystycznej i mogą stanowić punkt wyjścia do dalszych pogłębionych analiz. Ponieważ klasyczne funkcje jądra posiadają własności funkcji gęstości, ich wykorzystanie w konstrukcji estymatora pozwoli na określenie podstawowych cech badanej zmiennej losowej, jednocześnie gwarantując, że użytkownik nie ponosi ryzyka polegającego, na przykład, na tym, że estymator funkcji gęstości nie ma własności funkcji gęstości lub nośnik estymatora jądrowego nie jest zgodny z nośnikiem zmiennej losowej. Jest to podejście zapewniające wysoki stopień ogólności przy jednoczesnym spełnieniu określonych założeń wymaganych w stosunku do rezultatu analiz. Funkcje jądra wyższych rzędów (o rzędzie co najmniej 3) mają zastosowanie w zaawansowanych analizach statystycznych. Wówczas traktowane są one przez użytkownika jako naturalna konsekwencja początkowych analiz, w wyniku których otrzymywana jest podstawowa charakterystyka populacji. I tak, na przykład, asymetria estymatora lub jego zbyt duże obciążenie zauważalne w pierwszym etapie badań stanowi wskazówkę do użycia funkcji jądra wyższych rzędów w dalszych badaniach. Funkcje jądra wyższych rzędów zastosowane w estymacji jądrowej funkcji gęstości nie zawsze gwarantują, że estymator charakteryzuje się własnościami funkcji gęstości. Jednak te funkcje wyższych rzędów, które konstruowane są na podstawie funkcji jądra klasycznych minimalizują ryzyko otrzymania

estymatora funkcji gęstości o niepożądanych własnościach. Funkcjami jądra o szczególnym znaczeniu, zwłaszcza w badaniach zjawisk ekonomicznych, są funkcje jądra o ograniczonym nośniku. Estymator jądrowy funkcji gęstości z funkcją jądra o ograniczonym nośniku, w szczególności o ograniczonym nośniku z lewej strony, jest zalecany ze względu na swoje pożądane własności, w sytuacjach badawczych dotyczących zmiennych losowych przyjmujących jedynie wartości nieujemne.

2. Parametr wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości przyjmuje na ogół większe wartości wraz ze wzrostem rzędu funkcji jądra, która bierze udział w konstrukcji estymatora funkcji gęstości. Zależność ta ma znaczenie wówczas, gdy parametr wygładzania jest wybierany przez użytkownika metodą subiektywną, natomiast funkcja jądra jest komponentem determinowanym przez organizatora badań. Wśród dwóch metod wyboru parametru wygładzania, bazujących na założeniu o znajomości rozkładu zmiennej losowej, to znaczy metody odwołania do standardowego rozkładu i metody maksymalnego wygładzania, to właśnie metoda wykorzystująca założenie o normalności rozkładu zmiennej losowej dostarcza mniejszą wartość parametru wygładzania. Co więcej, parametr wygładzania wyznaczony metodą maksymalnego wygładzania nie przyjmuje wartości największych w porównaniu z innymi badanymi metodami wyboru szerokości okna. W zdecydowanej większości analizowanych przypadków metody krosvalidacyjne, zarówno metoda obciążona, jak i najmniejszych kwadratów gwarantowały wybór znacznie większej wartości parametru, a co za tym idzie znacznie większego stopnia wygładzenia estymatora funkcji gęstości. Liczebność próby, na podstawie której jest wyznaczany estymator jądrowy funkcji gęstości, ma również istotne znaczenie dla wartości parametru wygładzania. Niestety, mało liczne próby wymagają zawsze większych wartości parametru wygładzania. Następnym elementem mającym znaczenie w doborze wielkości parametru wygładzania jest modalność populacji. Informacja dodatkowa pochodząca z wcześniejszych lub analogicznych badań odnośnie do podobnych zbiorowości, a dotycząca modalności populacji, może być wykorzystana w procesie doboru odpowiedniej wartości parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości. Wówczas wartość tego parametru powinna być większa niż w przypadku estymacji dokonywanej dla jednomodalnych populacji.
3. Proponowana procedura wyznaczania parametru wygładzania oparta na uogólnionej średniej harmonicznej jest kombinacją metody subiektywnej wyboru parametru wygładzania oraz metody wykorzystującej posiadane informacje dodatkowe o własnościach zmiennej losowej podlegającej analizie. Wysoki poziom uniwersalności tej metody jest spowodowany dowolnością wyboru metod stosowanych w metodzie wyboru parametru wygładzania za pomocą uogólnionej średniej harmonicznej. Dopuszczalne

zatem jest wykorzystanie metod łatwych do implementacji przez użytkownika, co ma znaczenie w zastosowaniach praktycznych, jak również metod, których własności są najlepsze w konkretnej sytuacji badawczej. Uszczegółowienie procedury jest dokonywane za pomocą wykorzystania parametru  $\beta$  uogólnionej średniej harmonicznej. Wartość tego parametru pozwala na odpowiednie przypisanie wag do rozważanych metod wyboru parametru wygładzania. Jeżeli użytkownik dysponuje informacją o symetryczności rozkładu badanej zmiennej losowej, wówczas najlepszą wartością parametru  $\beta$  jest  $1/2$ . Informacja dodatkowa o wielomodalności implikuje natomiast wartość parametru  $\beta$  bliskie 1. Proponowana metoda sankcjonuje w ten sposób nie tylko wybór użytkownika co do metod wyboru parametru wygładzania (a to jest w większości przypadków ściśle związane zarówno z wiedzą i doświadczeniem użytkownika metody, jak i możliwościami aplikacyjnymi odpowiednich programów informatycznych), ale jednocześnie pozwala na dogodne uwzględnienie informacji dodatkowych o badanej zmiennej losowej. Możliwe jest również zastosowanie omawianej metody przez niedoświadczonego badacza poprzez możliwość rozpatrywania różnorodnych sytuacji.

Zagadnienia podlegające koniecznym dalszym badaniom będą dotyczyć nie tylko modyfikacji procedur wyboru parametru wygładzania, ale również procedur nieklasycznej statystyki w wyborze parametrów metody jądrowej w estymacji funkcji gęstości. Ważnym zagadnieniem jest również możliwość wykorzystania otrzymanych wyników badań w estymacji jądrowej innych charakterystyk funkcyjnych oraz liczbowych zmiennej losowej.

# Literatura

- Abadir Karim M., Lawford Steve, (2004), *Optimal Asymmetric Kernels*, „Economics Letters”, 83, 61–68.
- Albers Martina G., (2012), *Boundary Estimation of Densities with Bounded Support*, [www.sam.math.ethz.ch/sfs/research/mas\\_theses/2012/albers.pdf](http://www.sam.math.ethz.ch/sfs/research/mas_theses/2012/albers.pdf) [30.03.2015].
- Arbuthnot John, (1710), *An Argument for Divine Providence, Taken From the Constant Regularity Observed in the British of Both Sexes*, „Philosophical Transactions of the Royal Society of London”, 27, 186–190, doi:10.1098/rstl.1710.0011, <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/27/325-336/186> [30.03.2015].
- Baszczyńska Aleksandra, (2013a), *Some Remarks on the Symmetry Kernel Test*, „Acta Universitatis Lodzianis. Folia Oeconomica”, 285, 21–29.
- Baszczyńska Aleksandra, (2013b), *Uwagi o miarach podobieństwa w jądrowych testach zgodności*, [w:] Zbigniew E. Zieliński (red.), *Rola informatyki w naukach ekonomicznych i społecznych. Innowacje i implikacje interdyscyplinarne*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlowej w Kielcach, Kielce, 261–267.
- Baszczyńska Aleksandra, (2014a), *Testing Significance of Peaks in Kernel Density Estimator by SiZer Map*, [w:] Monika Papież, Sławomir Śmiech (red.), *Proceedings of the 8th Professor Aleksander Zelias International Conference on Modelling and Forecasting of Socio-Economic Phenomena*, Foundation of the Cracow University of Economics, Kraków, 2, 9–17.
- Baszczyńska Aleksandra, (2014b), *Computer-Assisted Choice of Smoothing Parameter in Kernel Methods Applied in Economic Analysis*, [w:] *Quantitative Methods in Economics (Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych)*, Warsaw University of Life Sciences Press, Warszawa, XV/2, 37–46.
- Baszczyńska Aleksandra, (2015), *Bias Reduction in Kernel Estimator of Density Function in Boundary Region*, [w:] *Quantitative Methods in Economics (Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych)*, Warsaw University of Life Sciences Press, Warszawa, XVI/1, 7–16.
- Baszczyńska Aleksandra, (2016a), *Kernel Estimation of Cumulative Distribution Function for Random Variable with Bounded Support*, „Statistics in Transition. New Series”, 17, 3, 541–556.
- Baszczyńska Aleksandra, (2016b), *Boundary Effect Reduction in Kernel Estimation of Chosen Functional Characteristics of Random Variable*, „Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Bankowej we Wrocławiu”, 16, 3, 111–121.

- Bickel Peter J., Rosenblatt Murray, (1973), *On Some Global Measures of the Deviations of Density Function Estimates*, „The Annals of Statistics”, 1, 6, 1071–1095.
- Bickel Peter J., Rosenblatt Murray, (1975), *Notes: Corrections to “On Some Global Measures of the Deviations of Density Function Estimates”*, „The Annals of Statistics”, 3, 6, 1370.
- Birnbaum Zygmunt Wilhelm, Saunders Sam C., (1969), *A New Family of Life Distribution*, „Journal of Applied Probability”, 6, 2, 319–327.
- Bowman Adrian W., Azzalini Adelchi, (2004), *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*, Oxford University Press, Oxford.
- Cao Ricardo, Cuevas Antonio, Manteiga Wenceslao Gonzalez, (1994), *A Comparative Study of Several Smoothing Methods in Density Estimation*, „Computational Statistics and Data Analysis”, 17, 2, 153–176.
- Cha Sung Hyuk, (2007), *Comprehensive Survey on Distance/Similarity Measures between Probability Density Function*, „International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences”, 4, 1, 300–307.
- Chacko V. M., Mariya Jeeja P. V., Deepa Paul, (2015), *p-Birnbaum Saunders Distribution: Applications to Reliability and Electronic Banking Habits*, [http://www.gnedenko-forum.org/Journal/2015/012015/RTA\\_1\\_2015-07.pdf](http://www.gnedenko-forum.org/Journal/2015/012015/RTA_1_2015-07.pdf) [15.03.2015].
- Chen Song Xi, (1999), *Beta Kernel Estimators for Density Functions*, „Computational Statistics and Data Analysis”, 31, 131–145.
- Chen Song Xi, (2000a), *Beta Kernel Smoothers for Regression Curves*, „Statistica Sinica”, 10, 73–91.
- Chen Song Xi, (2000b), *Probability Density Function Estimation Using Gamma Kernels*, „Annals of the Institute of Statistical Mathematics”, 52, 3, 471–480.
- Chiu Shean-Tsong, (1991), *Bandwidth Selection for Kernel Density Estimation*, „The Annals of Statistics”, 19, 4, 1883–1905.
- Chiu Shean-Tsong, (1996), *A Comparative Review of Bandwidth Selection for Kernel Density Estimation*, „Statistica Sinica”, 6, 129–145.
- Chmieleńska Magdalena, (2014), *Zastosowanie estymacji jądrowej do monitorowania procesu o nieznanym rozkładzie*, „Studia Ekonomiczne – Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach”, 203, 39–49.
- Cline Daren B. H., (1988), *Admissible Kernel Estimators of a Multivariate Density*, „The Annals of Statistics”, 16, 4, 1421–1427.
- Czyżycki Rafał, (2013), *Estymacja jądrowa w modelowaniu rozkładu stopy zwrotu*, „Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Bankowej w Poznaniu”, 47, 2.
- Devroye Luc, (1989), *The Double Kernel Method in Density Estimation*, „Annales de L’institut Henri Poincaré (B), Probabilité et Statistiques”, 25, 4, 533–580.
- Devroye Luc, Györfi László, (1985), *Nonparametric Density Estimation. The  $L_1$  View*, John Wiley and Sons, New York.
- Devroye Luc, Lugosi Gábor, (2001), *Combinatorial Methods in Density Estimation*, Springer-Verlag, New York.
- Díaz-García Josè A., Leiva-Sánchez Victor, (2002), *A New Family of Life Distributions Based on Birnbaum-Saunders Distribution*, Comunicación Técnica No I-02-17/03-09-2002, (PE/CIMAT), [www.cimat.mx/reportes/enlinea/I-02-17.pdf](http://www.cimat.mx/reportes/enlinea/I-02-17.pdf) [15.03.2015].

- Domański Czesław, (1979), *Statystyczne testy nieparametryczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Domański Czesław, (1986), *Teoretyczne podstawy testów nieparametrycznych i ich zastosowanie w naukach ekonomiczno-społecznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Domański Czesław, (1990), *Testy statystyczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Domański Czesław, Pekasiewicz Dorota, Baszczyńska Aleksandra, Witaszczyk Anna, (2014), *Testy statystyczne w procesie podejmowania decyzji*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Domański Czesław, Pruska Krystyna (2000), *Nieklasyczne metody statystyczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Domański Czesław, Pruska Krystyna, Wagner Wiesław, (1998), *Wnioskowanie statystyczne przy nieklasycznych założeniach*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- Duin Robert P. W., (1976), *On the Choice of Smoothing Parameters of Parzen Estimators of Probability Density Functions*, IEEE Transactions on Computers, C-25, 1175–1179, [rduin.nl/papers/comp\\_76\\_parzen.pdf](http://rduin.nl/papers/comp_76_parzen.pdf) [2.04.2016].
- Efromovitch Sam, (1999), *Nonparametric Curve Estimation: Methods, Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York.
- Fernandes Marcelo, Monteiro Paulo Klinger, (2005), *Central Limit Theorem for Asymmetric Kernel Functionals*, „Annals of the Institute of Statistical Mathematics”, 57, 3, 425–442.
- Gajek Lesław, (1986), *On Improving Density Estimators are not Bona Fide Functions*, „The Annals of Statistics”, 14, 4, 1612–1618.
- Gajek Lesław, Katuszka Marek, (1996), *Wnioskowanie statystyczne. Modele i metody*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Gefeller Olaf, Hjort Nils Lid, (1998), *A New Look at the Visual Performance of Nonparametric Hazard Rate Estimators*, [w:] I. Balderjahn, R. Mathar, M. Schader (eds.) *Classification, Data Analysis, and Data Highways: Proceedings of the 21st Annual Conference of the Gesellschaft für Klassifikation e. V., University of Potsdam, March 12–14, 1997*, Springer-Verlag, Berlin.
- Gibbons Jean Dickinson, Chakraborti Subhabrata, (2003), *Nonparametric Statistical Inference*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel.
- Guidoum Arsalane Chouaib, (2015), *Kernel Estimator and Bandwidth Selection for Density and its Derivatives*, <https://cran.r-project.org/web/packages/kedd/vignettes/kedd.pdf> [2.04.2016].
- Györfi László, Kohler Michael, Krzyżak Adam, Walk Harro, (2002), *A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression*, Springer-Verlag, New York.
- Hajja Mowaffag, Bullen Peter, S., Matkowski Janusz, Neuman Edward, Simic Slavko, (2013), *Means and Their Inequalities*, „International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences”, Hindawi Publishing Corporation, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/698906> [2.04.2016].
- Hall Peter, (1983), *Large Sample Optimality of Least Squares Cross-Validation in Density Estimation*, „The Annals of Statistics”, 11, 1156–1174.
- Hall Peter, Wand Matthew P., (1988), *Minimizing  $L_1$  Distance in Nonparametric Density Estimation*, „Journal of Multivariate Analysis”, 26, 1, 59–88.
- Hall Peter, Lahiri Soumendra Nath, Truong Young K., (1995), *On Bandwidth Choice for Density Estimation with Dependent Data*, „The Annals of Statistics”, 23, 6, 2241–2263.

- Hall Peter, Murison Robert D., (1993), *Correcting the Negativity of High-Order Kernel Density Estimators*, „Journal of Multivariate Analysis”, 47, 103–122.
- Hansen Bruce E., (2005), *Exact Mean Integrated Squared Error of Higher Order Kernel Estimators*, „Econometric Theory”, 21, 1031–1057.
- Hansen Bruce E., (2009), *Lectures Notes on Nonparametric*, [www.ssc.wisc.edu/~bhansen/718/NonParametrics1.pdf](http://www.ssc.wisc.edu/~bhansen/718/NonParametrics1.pdf) [2.02.2015].
- Härdle Wolfgang, (1990), *Applied Nonparametric Regression*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Härdle Wolfgang, (1991), *Smoothing Techniques With Implementation in S*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Härdle Wolfgang, Marron J. Steve, Wand Matt P., (1990), *Bandwidth Choice for Density Derivatives*, „Journal of Royal Statistical Society B (Methodological)”, 52, 1, 223–232.
- Härdle Wolfgang, Müller Marlene, Sperlich Stefan, Werwatz Axel, (2004), *Nonparametric and Semiparametric Models*, Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Heidenreich Nils-Bastian, Schindler Anja, Sperlich Stefan, (2013), *Bandwidth Selection for Kernel Density Estimation: a Review of Fully Automatic Selectors*, „ASTA Advances in Statistical Analysis”, 97, 4, 403–433.
- Hirukawa Masayuki, Sakudo Mari, (2014), *Nonnegative Bias Reduction Methods for Density Estimation Using Asymmetric Kernels*, „Computational Statistics and Data Analysis”, 75, 112–123.
- Hodges Joseph Lawson, Lehmann Erich Leo, (1956), *The Efficiency of Some Nonparametric Competitors to the t-test*, „The Annals of Mathematical Statistics”, 13, 324–335.
- Horová Ivanka, (2015), *Optimization Problems Connected with Kernel Smoothing*, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.412.8628> [20.04.2015].
- Horová Ivanka, Koláček Jan, Zelinka Jiří, (2012), *Kernel Smoothing in MATLAB. Theory and Practice of Kernel Smoothing*, World Scientific, New Jersey.
- Horová Ivanka, Zelinka Jiří, (2007), *Contribution to the Bandwidth Choice for Kernel Density Estimates*, „Computational Statistics”, 22, 1, 31–47.
- Hotelling Harold, Pabst Margaret R., (1936), *Rank Correlation and Tests of Significance Involving no Assumption of Normality*, „The Annals of Mathematical Statistics”, 7, 29–43.
- Jin Xiaodong, Kawczak Janusz, (2003), *Birnbaum-Saunders and Lognormal Kernel Estimators for Modelling Durations in High Frequency Financial Data*, „Annals of Economics and Finance”, 4, 103–124.
- Jones M. Chris, (1993), *Simple Boundary Correction for Kernel Density Estimation*, „Statistics and Computing”, 3, 135–146.
- Jones M. Chris, Foster Peter J., (1996), *A Simple Nonnegative Boundary Correction Method for Kernel Density Estimation*, „Statistica Sinica”, 6, 1005–1013.
- Jones M. Chris, Marron J. Steve, Park Byeong U., (1991), *A Simple Root n Bandwidth Selector*, „The Annals of Statistics”, 19, 4, 1919–1932.
- Jones M. Chris, Marron J. Steve, Sheather Simon J., (1996), *A Brief Survey of Bandwidth Selection for Density Estimation*, „Journal of the American Statistical Association”, 91, 433, 401–407.
- Jones, M. Chris, Signorini David, (1997), *A Comparison of Higher-Order Bias Kernel Density Estimators*, „Journal of the American Statistical Association”, 92, 439, 1063–1073.

- Karunamuni Rohana J., Alberts Tom, (2005), *On Boundary Correction in Kernel Density Estimation*, „Statistical Methodology”, 2, 3, 191–212.
- Kile Håkon, (2010), *Bandwidth Selection in Kernel Density Estimation*, Norwegian University of Science and Technology, Department of Mathematical Sciences, <http://www.google.pl/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCAQFJAA&url=http%3A%2F%2Fwww.diva-portal.org%2Fsmash%2Fget%2Fdiva2%3A348940%2FFULLTEXT01.pdf&ei=2sdHVZKiDeneywPO44HoCg&usg=AFQjCNFlj5j4JUc2ifE058XO1xSQsRPTIA&bvm=bv.92291466,d.bGQ> [20.01.2015].
- Kim Choongrak, Kim Wochul, Park Byeong U., (2003), *Skewing and Generalized Jackknifing in Kernel Density Estimation*, „Communications in Statistics. Theory and Practice”, 32, 11, 2153–2162.
- Kolářek Jan, Poměnková Jitka, (2006), *A Comparative Study of Boundary Effects for Kernel Regression*, „Austrian Journal of Statistics”, 35, 2&3, 281–288.
- Kończak Grzegorz, (2013), *O pewnej konstrukcji przedziałów ufności z wykorzystaniem jądrowej estymacji funkcji gęstości*, [w:] Zbigniew E. Zieliński (red.), *Rola informatyki w naukach ekonomicznych i społecznych. Innowacje i implikacje interdyscyplinarne*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlowej w Kielcach, Kielce, 2, 100–110.
- Koronacki Jacek, Ćwik Jan, (2005), *Statystyczne systemy uczące się*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Kot Stanisław, (2008), *Polaryzacja ekonomiczna. Teoria i zastosowanie*, Polskie Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Krzyśko Mirosław, Wołyński Waldemar, Górecki Tomasz, Skorzybut Michał, (2008), *Systemy uczące się. Rozpoznawanie wzorców analiza skupień i redukcja wymiarowości*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Kulczycki Piotr, (2005), *Estymatory jądrowe w analizie systemowej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- Kyung-Joon Cha, Schucany William R., (1998), *Nonparametric Kernel Regression Estimation Near Endpoints*, „Journal of Statistical Planning and Inference”, 66, 289–304.
- Kvam Paul H., Vidakovic Brani, (2007), *Nonparametric Statistics with Applications to Science and Engineering*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Li Qi, Racine Jeffrey Scott, (2007), *Nonparametric Econometrics. Theory and Practice*, Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Loader Clive R., (1999), *Bandwidth Selection: Classical or Plug-in*, „The Annals of Statistics”, 27, 2, 415–438.
- Lovric Miodrag, (1999), *International Encyclopedia of Statistical Science*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Mackenzie Mark, Tieu Kiet, (2004), *Asymmetric Kernel Regression*, <http://ro.uow.edu.au/engpapers/29> [13.03.2016].
- Malec Peter, Schienle Melanie, (2013), *Nonparametric Kernel Density Near the Boundary*, „Computational Statistics and Data Analysis”, preprint, [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2342165](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2342165) [13.03.2015].

- Mammen Enno, (1994), *On Qualitative Smoothness of Kernel Density Estimates*, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.45.2622> [13.08.2014].
- Marchant Carolina, Bertin Karine, Leiva Victor, Saulo Helton, (2013), *Generalized Birnbaum-Saunders Kernel Density Estimators and an Analysis of Financial Data*, „Computational Statistics and Data Analysis”, 63, 1–15.
- Markovich Natalia, (2007), *Nonparametric Analysis of Univariate Heavy-Tailed Data. Research and Practice*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley and Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester.
- Marron J. Steve, (1993), *Assessing Bandwidth Selectors with Visual Error Criteria*, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.154.7952> [13.08.2014].
- Marron J. Steve, Wand Matthew P., (1992), *Exact Mean Integrated Squared Error*, „The Annals of Statistics”, 20, 2, 712–736.
- Müller Hans-Georg, (1984), *Smooth Optimum Kernel Estimators of Densities, Regression Curves and Modes*, „The Annals of Statistics”, 12, 2, 766–774.
- Müller Hans-Georg, Petersen Alexander, (2016), *Density Estimation Including Examples*, [anson.ucdavis.edu/~mueller/encycl5-1.pdf](http://anson.ucdavis.edu/~mueller/encycl5-1.pdf) [17.05.2016].
- Noether Gottfried E., (1984), *Nonparametrics: The Early Years – Impressions and Recollections*, „The American Statistician”, 38, 3, 173–178.
- Ostasiewicz Walenty, (2012), *Myślenie statystyczne*, Wolters Kluwer Polska Sp. z o.o., Warszawa.
- Pagan Adrian, Ullah Aman, (1999), *Nonparametric Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge, Melbourne.
- Park Byeong U., Marron J. Steve, (1990), *Comparison of Data-Driven Bandwidth Selectors*, „Journal of the American Statistical Association”, 85, 409, 66–72.
- Parzen Emanuel, (1962), *On Estimation of a Probability Density Function and Mode*, „Annals of Mathematical Statistics”, 33, 3, 1065–1076.
- Pearson Karl, (1895), *Contributions to the Mathematical Theory of Evolution. II. Skew Variation in Homogeneous Material*, „Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences”, 186, 343–414.
- Pearson Karl, (1900), *On the Criterion That a Given System of Deviations From the Probable in the Case of a Correlated System of Variables is Such That it Can be Reasonably Supposed to Have Arisen From Random Sampling*, „Philosophical Magazine”, 5, 157–175.
- Pearson Karl, (1911), *On the Probability That Two Independent Distributions of Frequency are Really Samples from the Same Population*, „Biometrika”, 8, 250–254.
- Poměnková Jitka, (2008), *Remarks on Optimum Kernels and Optimum Boundary Kernel*, „Applications of Mathematics”, 53, 4, 305–317.
- Raykar Vikas C., Duraiswami Ramani, Zhao Linda H., (2010), *Fast Computation of Kernel Estimators*, „Journal of Computational and Graphical Statistics”, 19, 1, 205–220.
- Rosenblatt Murray, (1956), *Remarks on Some Nonparametric Estimates of a Density Function*, „Annals of Mathematical Statistics”, 27, 3, 832–837.
- Ruzgas Tomas, Drulyrè Indrè, (2013), *Kernel Density Estimation for Gaussian Mixture Models*, „Lithuanian Journal of Statistics”, 52, 1, 14–21.

- Rychlik Tomasz, (1995), *A Class of Unbiased Kernel Estimates of a Probability Density Function*, „*Applicaciones Mathematicae*”, 22, 4, 485–497.
- Sainudiin Raazesh, Lee Dominic, (2011), *Computational Statistical Experiments in MATLAB*, <http://www.math.canterbury.ac.nz/~r.sainudiin/courses/STAT459/CSEBook.pdf> [17.12.2015].
- Saulo Helton, (2013), *Essays on Birnbaum-Saunders Models*, [www.lume.ufrgs.br/handle/10183/87375?locale=en](http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/87375?locale=en) [17.03.2015].
- Saulo Helton, Leiva Víctor, Ziegelmann Flavio A., Marchant Carolina, (2012), *Density Estimation Using Skew-Birnbaum-Saunders Kernels*, <http://bibliotecadigital.fgv.br/ocs/index.php/sbe/EBE12/paper/view/3749> [17.03.2015].
- Saulo Helton, Leiva Víctor, Ziegelmann Flavio A., Marchant Carolina, (2013), *A Nonparametric Method for Estimating Densities Based on Skewed Birnbaum-Saunders Distributions Applied to Environmental Data*, „*Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*”, 27, 1479–1491.
- Scaillet Olivier, (2004), *Density Estimation Using Inverse and Reciprocal Inverse Gaussian Kernels*, „*Journal of Nonparametric Statistics*”, 16, 214–226.
- Scheffè Henry, (1943), *Statistical Inference in Non-parametric Case*, „*The Annals of Mathematical Statistics*”, 32, 506–523.
- Schuster Eugene F., (1969), *Estimation of a Probability Density Function and its Derivatives*, „*The Annals of Mathematical Statistics*”, 40, 4, 1187–1195.
- Sclocco Tonino, Di Marzio Marco, (2001), *A Note on Kernel Density Estimation for Non-Negative Random Variables*, „*Statistical Methods and Applications*”, 10, 67–79.
- Scott David W., (2015), *Multivariate Density Estimation. Theory, Practice and Visualization*, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Scott David W., Terrell George R., (1987), *Biased and Unbiased Cross-Validation in Density Estimation*, „*Journal of the American Statistical Associations*”, 82, 1131–1146.
- Scott David W., Wand Matt P., (1991), *Feasibility of Multivariate Density Estimates*, „*Biometrika*”, 78, 1, 197–205.
- Sheather Simon J., Jones M. Chris, (1991), *A Reliable Data-based Bandwidth Selection Method for Kernel Density Estimation*, „*Journal of the Royal Statistical Society B*”, 53, 3, 683–690.
- Silverman Bernard W., (1986), *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, London.
- Stone Charles J., (1977), *Consistent Nonparametric Regression*, „*The Annals of Statistics*”, 5, 4, 595–645.
- Stone Charles J., (1984), *An Asymptotically Optimal Window Selection Rule for Kernel Density Estimates*, „*The Annals of Statistics*”, 12, 1285–1297.
- Stone Charles J., (1994), *The Use of Polynomial Splines and Their Tensor Products in Multivariate Function Estimation*, „*The Annals of Statistics*”, 22, 118–171.
- Sturges Herbert A., (1926), *The Choice of a Class Interval*, „*Journal of the American Statistical Association*”, 21, 153, 65–66.
- Śliwicki Dominik, (2012), *Jądrowy test liniowości*, „*Acta Universitatis Nicolai Copernici*”, *Ekonomia XLIII*, 2, 183–198.
- Terrell George R., Scott David W., (1985), *Oversmoothed Nonparametric Density Estimates*, „*Journal of the American Statistical Association*”, 80, 389, 209–214.

- Tooth Sarah M., Dobelman John A., (2016), *A New Look at Generalized Means*, „Applied Mathematics”, 7, 468–472.
- Turlach Berwin A., (1992), *Discretization Methods for Average Derivative Estimation*, Discussion Paper 9232, C.O.R.E., <http://staffhome.ecm.uwa.edu.au/~00043886/cv/rep.html> [6.12.2013].
- Turlach Berwin A., (1993), *Bandwidth Selection in Kernel Density Estimation: A Review*, Discussion Paper 9317, Institut de Statistique, C.O.R.E., <http://staffhome.ecm.uwa.edu.au/~00043886/cv/rep.html> [6.12.2013].
- Van Ryzin John, Kim Bock K., (1980), *On the Asymptotic Distribution of a Histogram Density Estimator*, [www.osti.gov/servlets/purl/5271176/](http://www.osti.gov/servlets/purl/5271176/) [14.12.2015].
- Wald Abraham, Wolfowitz Jacob, (1939), *Confidence Limits for Continuous Distribution Functions*, „The Annals of Mathematical Statistics”, 10, 2, 105–118.
- Wand Matt P., Devroye Luc, (1993), *How Easy is a Given Density to Estimate?*, „Computational Statistics and Data Analysis”, 16, 311–323.
- Wand Matt P., Jones M. Chris, (1995), *Kernel Smoothing*, Chapman and Hall, London.
- Wand Matthew P., Schucany William R., (1990), *Gaussian-based Kernels*, „The Canadian Journal of Statistics”, 18, 3, 197–204.
- Wilcoxon Frank, (1945), *Individual Comparisons by Ranking Methods*, „Biometrics Bulletin”, 1, 6, 80–83.
- Wolfowitz Jacob, (1942), *Additive Partition Functions and a Class of Statistical Hypotheses*, „The Annals of Mathematical Statistics”, 13, 247–279.
- Woodroffe Michael, (1970), *On Choosing a Delta-Sequence*, „The Annals of Mathematical Statistics”, 41, 5, 1665–1671.
- Zambom Adriano Z., Dias Ronaldo, (2012), *A Review of Kernel Density Estimation with Application to Econometrics*, <http://arxiv.org/pdf/1212.2812v1.pdf> [28.02.2014].
- Zieliński Ryszard, (2004), *Optimal Quantile Estimators Small Sample Approach*, IMPAN, [www.impan.pl/Preprints/p653.pdf](http://www.impan.pl/Preprints/p653.pdf) [6.03.2014].
- Zinde-Walsh Victoria, (2005), *Kernel Estimation when Density does not Exist*, <https://ideas.repec.org/p/mtl/montec/09-2005.html> [28.02.2014].
- Zhang Shunpu, (2010), *A Note on the Performance of the Gamma Kernel Estimators at the Boundary*, „Statistics and Probability Letters”, 80, 548–557.
- Zhang Shunpu, Karunamuni Rohana J., (2010), *Boundary Performance of the Beta Kernel Estimators*, „Journal of Nonparametric Statistics”, 22, 1, 81–104.

# Smoothing Parameter in Kernel Density Estimation for Random Variables in Economic Researches

## Summary

The economic phenomena can be analyzed using the procedures of mathematical statistics. It is closely related to the mass character of the economic phenomena, where a large amount of information makes that, in many cases, it is impossible to use a descriptive statistical analysis effectively. Moreover, the popularity of mathematical statistics is connected with the simplicity and intuitive nature of mathematical statistics procedures.

Estimation, which is the mathematical statistics procedure based on a random sample, can be used for the one of the basic functional characteristics of a random variable – the density function. This is an example of the mathematical statistics procedure, which basing only on a sample, makes it possible to formulate an accurate and comprehensive description of the economic phenomenon and to analyze the statistical characteristics of a random variable. The methods of nonparametric estimation of the density function have the versatility due to the lack of the need to accept additional assumptions regarding the distribution of random variables. These assumptions are not always satisfied, what in many cases is a consequence of the special nature of the analyzed economic variables, especially their uniqueness and specific nature. Therefore, the special nature of the economic variables forces the application of such methods, for which a wide range of applicability is observed, and there is no need to accept, perhaps, questionable assumptions. Appropriate properties of nonparametric procedures are a guarantee of the effectiveness of regarded nonparametric methods. Nonparametric estimation of density function, in many cases, is not only a procedure that is a starting point for further detailed statistical analysis of a random variable, but it is also extremely compact and comprehensive procedure for providing specific range of information about the properties of a random variable. The diversity of these approaches means, on the one hand, the usage of the results of density function estimation to define clearly the class of procedures used in further research and statistical analysis; at the

same time density estimation itself can be a target and complete statistical procedure. It is therefore statistical procedure of a very general nature, while providing detailed performance analysis.

Kernel density estimation is one of the most known and often used method of nonparametric density estimation. Kernel method requires a determination of two parameters: the smoothing parameter and kernel functions. Before the analysis, the researcher is forced to make a decision on the choice of these parameters.

The theme of the monograph *Smoothing Parameter in Kernel Density Estimation for Random Variables in Economic Researches* is closely connected with the procedures for choosing the parameters of kernel method, with particular emphasis on the smoothing parameter, as it is pointed in the literature the importance of choosing a kernel function in the estimation of the density function is smaller. The choice of subject matter is a natural extension and a summary of the author's previous research in this area.

This work consists of five chapters. The first section presents information related to the nonparametric estimation, in particular the kernel density function estimation. The construction and properties of classical Rosenblatt-Parzen density estimation are presented, as well as the modifications of the classical estimator associated with the presence of bounded support of the random variable, what in economic and social studies occurs quite often. In the general discussion on the classical approach to the kernel density estimation, some measures of the estimation precision are shown as they are used in further analysis of choosing the smoothing parameter methods. In many methods of choosing the smoothing parameter, the minimizing certain strict measure of precision allows to determine a proper value of the smoothing parameter. Further considerations associated with the classical approach present procedures for derivatives of the density function estimation since they are used in some more sophisticated statistical measures.

The second chapter covers the systematization of the information about kernel functions presented in the literature. There are distinguished eight types of kernel functions, where factors in classifying the appropriate kernel function to a specific group were the construction rules and the application in the analysis of the practical nature of the random variables. Thus extracted classes in many cases are not mutually exclusive. There were differentiated the following classes of kernel functions: classical kernel functions, kernel functions of higher orders, smooth polynomial kernel functions, kernel functions with the smallest variance, optimal kernel functions, canonical kernel functions, asymmetric kernel functions and kernel function used when a random variable is bounded.

The third chapter is devoted to methods of smoothing parameter selection. The diversity of methods presented in literature causes a certain indeterminacy as to the best method. Hence, this chapter presents both of these methods, which are regarded by researchers as a simple and fast (highlighting their faults), and more

advanced methods that, despite the difficulties in the implementation, should be applied in practice. They are: reference rules methods, cross-validation methods and plug-in methods. In addition, some other methods are presented, including SiZer Map method. Some of these smoothing parameter choice methods are compared using results of the simulation study. Basing on the results of this simulation study, some conclusions are shown, which can be useful for the researchers and users of kernel methods in practice. It is shown that in some specific situations depending, for example, on asymmetry or modality of a random variable, some methods of choosing the smoothing parameter are of higher importance. The comparison of chosen methods of smoothing parameter selection, with particular emphasis both on the relationship between the kernel function and parameter smoothing, taking into account the additional information associated with a random variable is made. It means that when the organizer of the research has additional information about the random variable, it can be used in the process of determining the method of choosing the smoothing parameter in kernel density estimation. In this chapter, the author's own proposition of a new smoothing parameter method is presented – it is the method basing on the generalized harmonic mean. Because of the good properties of this mean, it is possible to use in density estimation such a smoothing parameter that will result in better properties of the kernel density estimator.

The fourth chapter elaborates the topic of the multidimensional methods of estimating the density functions and procedures of the selection vector of smoothing parameters. The procedures used for multivariate estimation are not simply an extension of the one-dimensional procedures.

In the fifth chapter, the results of the previous analyses have been used in issues related to the estimation of the density function of a random variable in economic research, taking into account, in particular, the preliminary information on the nature of the considered random variable. There are presented some examples of usage of the kernel methods parameters (smoothing parameter and kernel function) in kernel density estimation of the chosen economic random variables.

This work was based mainly on English literature since in Polish, only a few works deal with the issues of nonparametric kernel estimation of the density function. Work can therefore supplement this gap.

In part of the work associated with the use of procedures and benchmarks, there were used simulation methods using the software MATLAB from Mathworks, R2012 and R2014a.



# Spis rysunków

Rysunek 1.1.	Gaussowska funkcja jądra . . . . .	29
Rysunek 2.1.	Wybrane klasyczne funkcje jądra oraz ich podstawowe charakterystyki	51
Rysunek 2.2.	Estymatory funkcji gęstości dla funkcji jądra o różnych krotnościach różniczkowalności . . . . .	54
Rysunek 3.1.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P1 . . . . .	115
Rysunek 3.2.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P2 . . . . .	116
Rysunek 3.3.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P3 . . . . .	117
Rysunek 3.4.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P4 . . . . .	118
Rysunek 3.5.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P5 . . . . .	119
Rysunek 3.6.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P6 . . . . .	120
Rysunek 3.7.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P7 . . . . .	121
Rysunek 3.8.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P8 . . . . .	122
Rysunek 3.9.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P9 . . . . .	123
Rysunek 3.10.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P10 . . . . .	124
Rysunek 3.11.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P11 . . . . .	125
Rysunek 3.12.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P12 . . . . .	126
Rysunek 3.13.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P13 . . . . .	127
Rysunek 3.14.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P14 . . . . .	128
Rysunek 3.15.	Histogram i wykres pudełkowy dla populacji P15 . . . . .	129
Rysunek 4.1.	Dwuwymiarowa gaussowska funkcja jądra . . . . .	159
Rysunek 4.2.	Warstwie dwuwymiarowej gaussowskiej funkcji jądra . . . . .	159
Rysunek 4.3.	Estymator jądrowy dwuwymiarowej zmiennej losowej ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra) . . . . .	161
Rysunek 4.4.	Warstwie estymatora jądrowego dwuwymiarowej zmiennej losowej ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra) . . . . .	161
Rysunek 4.5.	Estymator jądrowy dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną dwóch dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra) . . . . .	162
Rysunek 4.6.	Warstwie estymatora jądrowego dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną dwóch dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra) . . . . .	162

Rysunek 4.7. Estymator jądrowy dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną trzech dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra) .....	163
Rysunek 4.8. Warstwice estymatora jądrowego dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną trzech dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 100$ , gaussowska funkcja jądra) .....	163
Rysunek 4.9. Estymator jądrowy dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną pięciu dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 1000$ , gaussowska funkcja jądra, odwołanie do standardowego rozkładu) .....	165
Rysunek 4.10. Warstwice estymatora jądrowego dwuwymiarowej funkcji gęstości będącej mieszaniną pięciu dwuwymiarowych rozkładów normalnych ( $n = 1000$ , gaussowska funkcja jądra, odwołanie do standardowego rozkładu).....	165
Rysunek 5.1. Estymator funkcji gęstości z funkcją jądra optymalną z parametrami $\nu = 0, k = 2, \mu = 0$ (Epanecznikowa) z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmonicznej .....	169
Rysunek 5.2. Estymator funkcji gęstości z funkcją jądra optymalną z parametrami $\nu = 0, k = 2, \mu = -1$ z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmonicznej .....	170
Rysunek 5.3. Estymator funkcji gęstości z funkcją jądra optymalną z parametrami $\nu = 1, k = 3, \mu = 0$ z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmonicznej .....	171
Rysunek 5.4. Estymator funkcji gęstości rocznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1950–2013 .....	173
Rysunek 5.5. Estymator funkcji gęstości półrocznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1989–2014 .....	173
Rysunek 5.6. Estymator funkcji gęstości kwartalnych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1995–2014 .....	174
Rysunek 5.7. Estymator funkcji gęstości miesięcznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1989–2014 .....	174
Rysunek 5.8. Estymator funkcji gęstości miesięcznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1999–2014 (1998 = 100).....	175
Rysunek 5.9. Estymator funkcji gęstości miesięcznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1989–2014 .....	176
Rysunek 5.10. Estymator funkcji gęstości miesięcznych wskaźników cen towarów i usług konsumpcyjnych, 1999–2014 (1998 = 100).....	176
Rysunek 5.11. Estymator funkcji gęstości dla 2004 roku.....	177
Rysunek 5.12. Estymator funkcji gęstości dla 2013 roku.....	177

# Spis tablic

Tablica 2.1.	Wybrane klasyczne funkcje jądra .....	50
Tablica 2.2.	Gaussowskie funkcje jądra rzędu 2, 4, 6, 8 i 10. ....	56
Tablica 2.3.	Funkcje jądra $K_{2r,s}(u)$ i podstawowe charakterystyki $R(K)$ oraz $\kappa_{2r}$ dla $2r=4$ oraz $2r=6$ .....	59
Tablica 2.4.	Wybrane funkcje jądra o najmniejszej wariancji .....	60
Tablica 2.5.	Wybrane funkcje jądra optymalne .....	62
Tablica 2.6.	Wybrane funkcje jądra optymalne gładkie .....	63
Tablica 2.7.	Wybrane funkcje jądra optymalne z lewym brzegiem .....	65
Tablica 2.8.	Kanoniczny parametr wygładzania dla wybranych funkcji jądra .....	67
Tablica 2.9.	Wartości $T(K)$ oraz miary efektywności dla wybranych funkcji jądra ....	69
Tablica 2.10.	Funkcje jądra w zależności od wartości parametru $p$ . ....	71
Tablica 3.1.	Podstawowe charakterystyki populacji P1 .....	115
Tablica 3.2.	Podstawowe charakterystyki populacji P2 .....	116
Tablica 3.3.	Podstawowe charakterystyki populacji P3 .....	117
Tablica 3.4.	Podstawowe charakterystyki populacji P4 .....	118
Tablica 3.5.	Podstawowe charakterystyki populacji P5 .....	119
Tablica 3.6.	Podstawowe charakterystyki populacji P6 .....	120
Tablica 3.7.	Podstawowe charakterystyki populacji P7 .....	121
Tablica 3.8.	Podstawowe charakterystyki populacji P8 .....	122
Tablica 3.9.	Podstawowe charakterystyki populacji P9 .....	123
Tablica 3.10.	Podstawowe charakterystyki populacji P10 .....	124
Tablica 3.11.	Podstawowe charakterystyki populacji P11 .....	125
Tablica 3.12.	Podstawowe charakterystyki populacji P12 .....	126
Tablica 3.13.	Podstawowe charakterystyki populacji P13 .....	127
Tablica 3.14.	Podstawowe charakterystyki populacji P14 .....	128
Tablica 3.15.	Podstawowe charakterystyki populacji P15 .....	129
Tablica 3.16.	Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P1 .....	131
Tablica 3.17.	Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P2 .....	132

Tablica 3.18. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P3 .....	133
Tablica 3.19. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P4 .....	135
Tablica 3.20. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P5 .....	136
Tablica 3.21. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P6 .....	137
Tablica 3.22. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P7 .....	138
Tablica 3.23. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P8 .....	140
Tablica 3.24. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P9 .....	141
Tablica 3.25. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P10 .....	142
Tablica 3.26. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P11 .....	144
Tablica 3.27. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P12 .....	145
Tablica 3.28. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P13 .....	146
Tablica 3.29. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P14 .....	147
Tablica 3.30. Wartości parametru wygładzania otrzymane w oparciu o próby o wybranych liczebnościach losowane z populacji P15 .....	148
Tablica 3.31. Wartości parametrów wygładzania otrzymane w oparciu o $n$ -elementowe próby losowane z populacji P1 oraz estymatory funkcji gęstości z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmonicznej i z gaussowską funkcją jądra .....	151
Tablica 3.32. Wartości parametrów wygładzania otrzymane w oparciu o $n$ -elementowe próby losowane z populacji P15 oraz estymatory funkcji gęstości z parametrem wygładzania wyznaczonym metodą uogólnionej średniej harmonicznej i z gaussowską funkcją jądra .....	154
Tablica 5.1. Wartości parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości dla funkcji jądra optymalnej z parametrami $v = 0, k = 2, \mu = 0$ (funkcja jądra Epanecznikowa) .....	169
Tablica 5.2. Wartości parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości dla funkcji jądra optymalnej z parametrami $v = 0, k = 2, \mu = -1$ .....	170
Tablica 5.3. Wartości parametru wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości dla funkcji jądra optymalnej z parametrami $v = 1, k = 3, \mu = 0$ .....	171

# Od Redakcji

Dr Aleksandra Baszczyńska jest adiunktem w Katedrze Metod Statystycznych Uniwersytetu Łódzkiego. Ukończyła studia na kierunku Cybernetyka Ekonomiczna i Informatyka na Uniwersytecie Łódzkim. Jej zainteresowania naukowe związane są z nieparametrycznymi metodami statystycznymi i ich zastosowaniami w badaniach ekonomicznych. Zarówno praca magisterska, jak i rozprawa doktorska, napisane pod kierunkiem Prof. dr hab. Czesława Domańskiego, dotyczyły nieparametrycznych procedur estymacji podstawowych charakterystyk funkcyjnych i liczbowych zmiennej losowej.

Rezultatem badań dr Aleksandry Baszczyńskiej, związanych z własnościami i zastosowaniami nieparametrycznych procedur statystycznych, są liczne artykuły naukowe oraz rozdziały w monografii *Testy statystyczne w procesie podejmowania decyzji*. Badania naukowe prowadzone były w ramach badań własnych realizowanych na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym UŁ (kierownik lub członek zespołu badawczego) oraz w ramach projektu finansowanego przez Narodowe Centrum Nauki pt. *Metodologia testów statystycznych. Analiza procedur testowych z punktu widzenia jakości decyzji* (główny wykonawca projektu). Wyniki badań były prezentowane na krajowych i międzynarodowych konferencjach naukowych w Polsce i za granicą. Wystąpienia na konferencjach naukowych oraz publikacje naukowe dr Aleksandry Baszczyńskiej prezentowane są w większości w języku angielskim.

Dr Aleksandra Baszczyńska jest recenzentem statystycznym czasopisma „Zeszyty Teoretyczne Rachunkowości” oraz członkiem Rady Redakcyjnej czasopisma „Bulletin de la Société des Sciences et des Lettres de Łódź”. Série: Recherches sur les Déformations.

Dr Aleksandra Baszczyńska prowadzi zajęcia dydaktyczne w języku polskim i angielskim dla studentów różnych wydziałów Uniwersytetu Łódzkiego (przedmioty: statystyka, rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna, Statistical Market Analysis) oraz dla studentów zagranicznych w ramach programu *Erasmus* i *Erasmus+* (przedmioty: Statistical Methods of Decision Making, Foundation of Mathematical Statistics, Statistical Methods in Management).

W 2016 roku prowadziła wykłady na Uniwersytecie w Zhengou (Chiny). Brała udział w opracowaniu programów nauczania i materiałów dydaktycznych ze statystyki i statystyki matematycznej w kursie kształcenia na odległość dla studentów kierunku Ekonomia *E-Ekonomia* oraz jest autorką kursu Statystyczne metody w analizie danych pomiarowych prowadzonego dla pracowników naukowych Centralnego Instytutu Ochrony Pracy – Państwowego Instytutu Badawczego w Warszawie.

Dr Aleksandra Baszczyńska była Pełnomocnikiem Rektora Uniwersytetu Łódzkiego i Pełnomocnikiem Dziekana Wydziału Ekonomiczno-Socjologicznego Uniwersytetu Łódzkiego ds. ECTS. Była członkiem Wydziałowej Komisji ds. Jakości Kształcenia na Wydziale Ekonomiczno-Socjologicznym oraz jest członkiem Rady Konsultacyjnej kierunku Informatyka i Ekonometria.

Była sekretarzem i skarbnikiem Oddziału Łódzkiego Polskiego Towarzystwa Statystycznego oraz brała udział w pracach Komitetu Programowego Olimpiady Statystycznej. Jest członkiem-współpracownikiem oraz sekretarzem Komisji Matematyczno-Fizycznej Wydziału III Łódzkiego Towarzystwa Naukowego.

Rozprawa habilitacyjna *Parametr wygładzania w estymacji jądrowej funkcji gęstości dla zmiennych losowych w badaniach ekonomicznych* stanowi podsumowanie kilkuletnich prac autorki związanych z nieparametryczną jądrową estymacją funkcji gęstości i jej zastosowaniami w analizach zjawisk ekonomicznych.