

Dr PIOTR SZUKALSKI

Łódź

Wzrastająca liczba osób starych (najczęściej definiowanych jako mające 80 i więcej lat), jak i podnoszące się prawdopodobieństwo dożycia do wieku sędziwego wzmagają wagę znajomości formuł opisujących proces wymierania tychże osób. Celem artykułu jest przedstawienie rozpowszechnionych w literaturze demograficznej modeli wymierania osób bardzo starych. Zaprezentowano w nim formuły: Gompertza, logistyczny, Kannisto oraz model Coale'a-Kiskera.

WPROWADZENIE

Wraz z wydłużaniem się ludzkiego życia coraz ważniejszą rolę odgrywa znajomość prawidłowości rządzących umieralnością osób sędziwych. Kwestia ta bowiem obecnie staje się ważna z przyczyn czysto praktycznych, choćby z punktu widzenia zastosowań w celach aktuarialnych. Staje się również ważna w Polsce, zważywszy, z jednej strony, na coraz większą wagę umieralności osób sędziwych, z drugiej zaś na specyfikę procesu wymierania w tym wieku (Szukalski, 2000).

W niniejszym tekście przedstawię wykorzystywane coraz powszechniej modele opisujące porządek wymierania osób bardzo starych, tj. w wieku przynajmniej 75 lat.¹⁾ Stosowanie rozpowszechnionych modeli służących do analizy umieralności osób dorosłych prowadzi do przeszacowania umieralności osób sędziwych, bowiem powyżej pewnego wieku (określanego na 75–85 rok życia, sporny jest bowiem nie sam fakt, lecz jedynie dokładny wiek, zależny zapewne w jakimś stopniu od specyficznych dla danego społeczeństwa czynników ekonomicznych, kulturowych i genetycznych) zauważane jest zwolnienie tempa wzrostu prawdopodobieństwa zgonów. Podstawowymi przyczynami takiego stanu rzeczy są: 1) nasilająca się z wiekiem selekcja, sprawiająca, iż do wieku starszego dożywają osoby o najlepszym stanie zdrowia (tj. posiadające korzystne dziedzictwo genetyczne i/albo zdrowy styl życia); 2) zmiana relacji pomiędzy „ryzykiem tła” (takim samym w każdym wieku prawdopodobieństwem zgonu z powodu wypadków, zatruc, chorób zakaźnych, itp., tj. zewnętrznymi przyczynami zgonów) a ryzykiem związanym z procesem starzenia się jednostki (pogarszaniem się wykony-

wania funkcji fizjologicznych, tj. wewnętrznymi przyczynami zgonów) (Horiuchi, Wilmoth, 1998).

W demografii wyróżnia się trzy typy modeli wymierania (w zasadzie należałoby używać bardziej rozpowszechnionych nazw: modele przeżycia, trwania życia lub niezawodności), a mianowicie modele opisowe, nieparametryczne i parametryczne. Pierwsze z nich ograniczają się do stwierdzenia związku pomiędzy pewnymi własnościami jednostki, czy zdarzeniami, w których ona uczestniczy a częstością zgonu, bez aspiracji do określenia siły owego związku. Drugie, z kolei, choć dostarczają jednoznacznie zdefiniowanej ilościowo informacji o częstości występowania zgonu, nie bazują na żadnych założeniach odnośnie do analitycznej postaci rozkładu zmiennej opisującej rozkład czasu oczekiwania na zgon (przykładem takiego modelu są tablice trwania życia), opisują zatem, jedynie — z wykorzystaniem wielkości liczbowych informujących o natężeniu umieralności — proces ubytku zbiorowości. Wspomniane powyżej założenie o analitycznej postaci rozkładu jest czynnikiem konstytutywnym dla parametrycznych modeli. W dalszej części niniejszego tekstu bazować będziemy wyłącznie na modelach parametrycznych.

Specyfika parametrycznych modeli wymierania polega na tym, iż trudno znaleźć *a priori* jakieś „w pełni naukowe” uzasadnienie poprawności danego modelu. Najważniejszą, a niekiedy jedyną, przesłanką sprawiającą, iż dany model jest stosowany, jest jego dobre dopasowanie do danych empirycznych. „Naukowa” podbudowa wyszukiwana jest zwykle *a posteriori*, w konsekwencji dobrego dopasowania do rzeczywistych danych.²⁾

1) Niegdyś za osoby bardzo stare uważano te w wieku 75 i więcej lat, obecnie w literaturze demograficznej rozumie się je jako osoby w wieku 80 i więcej lat, choć jednocześnie wiele badań geriatrycznych wskazuje, iż z punktu widzenia samodzielności, funkcjonalności jako canzure wieku przyjąć należy 85. rok życia (po jego przekroczeniu widoczna jest jakościowa zmiana podstawowych charakterystyk ludzi starych)

2) Przykładem niech nam będzie w tym przypadku wspomniany dalej rozkład autorstwa B. Gompertza. Ów brytyjski aktuarisz „bawiąc” się wielkościami pochodzącymi z tablic trwania życia, zauważył stałą różnicę pomiędzy logarytmami naturalnymi liczby ludności w kolejnych grupach pięcioletnich pomiędzy 15. a 55. rokiem życia, co doprowadziło go do sformułowania prawa umieralności (Olshansky, Cames, 1997), które doczekało się dopiero po półtora wieku uzasadnienia „naukowego”, tj. ustalenia przyczyn występowania

W dalszej części przedstawimy kilka modeli opisujących porządek wymierania osób bardzo starych, modeli, które w opinii znawców zagadnienia najlepiej odzwierciedlają rzeczywiste procesy ubywania z populacji ludzi sędziwych. Prezentować będziemy, zgodnie z praktyką stosowaną w badaniach aktuarialnych, jedynie funkcję intensywności $\mu(x)$, opisującą warunkowe prawdopodobieństwo zgonu osoby w wieku x lat w ciągu roku (warunkowe, tj. przy założeniu, iż ta osoba dożyła do danego wieku). Gdy znamy $\mu(x)$, czyli funkcję intensywności rozkładu, fakt, iż

$$\mu(x) = \frac{-S'(x)}{S(x)} \quad (1)$$

gdzie $S(x)$ oznacza funkcję przeżycia, tj. prawdopodobieństwo, że zgon danej osoby nastąpi nie wcześniej niż przed osiągnięciem przez daną jednostkę wieku x lat. W rezultacie

$$\mu(x) = -[\ln S(x)]' \quad (2)$$

a dalej

$$-\ln S(x) = \int_0^x \mu(t) dt \quad (3)$$

Stąd też można oszacować wartość funkcji przeżycia

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) dt} \quad (4)$$

następnie dystrybuanty rozkładu (tj. prawdopodobieństwa, iż dana osoba umrze nie później niż do chwili osiągnięcia x lat)

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - e^{-\int_0^x \mu(t) dt} \quad (5)$$

oraz natężenie umieralności (bezw warunkowe prawdopodobieństwo zgonu w wieku x lat)

$$f(x) = \mu(x) e^{-\int_0^x \mu(t) dt} \quad (6)$$

STOSOWANE MODELE WYMIERANIA OSÓB BARDZO STARYCH

Punktem wyjścia naszej prezentacji będą dwa najpopularniejsze modele, przedstawiane w każdym podręczniku z zakresu matematyki aktuarialnej. Modelem najczęściej zapewne używanym jest opracowany przez B. Gompertza rozkład nazywany jego imieniem, a opisujący umieralność osób dorosłych. W tym przypadku funkcja intensywności zgonów w wieku x lat

$$\mu_x = ae^{bx} \quad (7)$$

W równaniu (7) parametr a interpretowany jest jako zerowy poziom umieralności, związany z intensywnością umieralności w danym środowisku przyrodniczym i społecznym w danym okresie. Należy zatem oczekiwać, iż wraz z upływem czasu (tj. pozytywnymi zmianami ekonomiczno-społecznymi) wartość tego parametru obniży się. Dodajmy, iż parametr ten przyjmuje znacznie wyższe wartości w populacji mężczyzn niż w populacji kobiet. Parametr b z kolei może być interpretowany jako miara homogeniczności populacji z punktu widzenia umieralności. Im wyższy parametr b , tym dana zbiorowość jest bardziej jednorodna pod względem kalendarium umieralności. Jednocześnie parametr ten dostarcza nam informacji o wpływie czynników biologicznych na umieralność (Koschin, 1989).

Powyższy doskonale znany wszystkim analitykom umieralności model bazuje na założeniu stałej stopy wzrostu intensywności zgonów.³⁾ Oznacza to, iż według formuły Gompertza niezależnie od badanego wieku intensywność umieralności podwaja się w dorosłym życiu co taki sam okres (tj. stopa zmiany intensywności umieralności z wiekiem jest stała). Tymczasem obserwacje rzeczywistej umieralności osób sędziwych wskazują, iż po przekroczeniu pewnego wieku (w granicach 75–85 lat) prawdopodobieństwo zgonu nie wzrasta już tak szybko.

Różnica pomiędzy oczekiwaniami wynikającymi z modelu Gompertza⁴⁾ a rzeczywistym poziomem umieralności osób bardzo starych widoczna była w najbardziej zaawansowanych pod względem rozwoju demograficznego krajach już na początku XX wieku. Efektem prowadzonych prac było sformułowanie przez Perkasa modelu logistycznego, mającego opisywać umieralność osób w czwartym wieku, a dokładniej począwszy od 75. roku życia. W tym przypadku

$$\mu_x = c + \frac{ae^{bx}}{1 + ae^{bx}} \quad (8)$$

3) Opiera się bowiem na przekonaniu, że odporność na śmierć jednostki może być mierzona przez $\frac{1}{\mu(t)}$ (co oznacza, iż owa odporność

traktowana jest jako odwrotność prawdopodobieństwa zgonu w danym wieku) i że ta odporność słabnie wraz z wiekiem w stałym stopniu (tj. wykładniczo). Autor modelu uważał, iż arytmetycznemu przyrostowi wieku odpowiada wykładniczy wzrost intensywności zgonu, który jest tym szybszy, im jest wyższe b . Najwszechstronniejszy znany mi przegląd koncepcji Gompertza zawarty jest w opracowaniu J. H. Pollarda

4) Zaznaczmy przy tym, iż w okresie w którym model ten był opracowywany, jedynie niewielka część ludności dożywała do wieku, w którym pojawiły się niezgodności. Zważywszy na nagminne nieścisłości pomiędzy rzeczywistym a deklarowanym wiekiem (zawyżanie i zaokrąglanie wieku) wielkości znajdujące się w tablicach trwania życia dla osób sędziwych były mało prawdopodobne. Sam Gompertz skłaniał, o ile początkowo twierdził, iż jego formuła stosuje się do wieku 10–80 lat, później zmienił swój pogląd ograniczając się do wieku 20–60 lat (Olshansky, Cames, 1997:3)

Zaznaczmy, iż szczególnymi jego przypadkami są: po pierwsze, gdy $\alpha=0$, znany model Makehama, po drugie, gdy $\alpha=0$ i $c=0$ wspomniany wcześniej model Gomperta. Podstawową zaletą modelu logistycznego jest fakt, iż zakłada on powolne zmniejszanie się tempa wzrostu intensywności zgonów wraz z wiekiem, co — jak już wiemy — odpowiada rzeczywistości.

Na początku lat dziewięćdziesiątych Vaino Kannisto, wybitny znawca umieralności osób sędziwych, bazując na badaniach empirycznych, zaproponował specyficzny rodzaj modelu logistycznego (Thatcher i in., 1998), przy założeniu, iż $\alpha=a$

$$\mu_x = c + \frac{ae^{bx}}{1 + ae^{bx}} \quad (9)$$

Oceniając różnice pomiędzy modelem logistycznym w wersji Perksa i w wersji Kannisto odwołajmy się do ustaleń A. R. Thatchera (1999), który badając umieralność osób dorosłych i sędziwych stwierdził, iż w świetle tak historycznych, jak i współczesnych danych owa umieralność opisana jest bardzo dobrze dzięki odwołaniu się do zapisanego w nieco odmienniej postaci modelu logistycznego:

$$\mu_x = \frac{\kappa z}{1 + z} + \gamma \quad (10)$$

$$\text{gdzie } z = \alpha \exp(\beta x) = \exp\{\beta(x - \phi)\} \quad (11)$$

$$\text{zaś } \phi = -\ln(\alpha)/\beta \quad (12)$$

W stosunku do poprzednio podanej formuły (8) zachodzą równości:

$$\gamma = c; \quad \beta = b; \quad \kappa\alpha = a$$

Dane pochodzące z wielu współczesnych rozwiniętych krajów wskazują, iż κ jest bliska 1, dlatego też powyższy model zapisany być może w prostszej postaci, tożsamej z modelem Kannisto (10):

$$\mu_x = \frac{z}{1 + z} + \gamma \quad (13)$$

Szacunki dokonane przez Thatchera wskazują, na dobre dopasowanie tego właśnie modelu do danych odnośnie do porządku wymierania dla Węgier z X—XII wieku i Anglii z lat 1640—1689, dla Wrocławia z lat 1687—1691, Anglii i Walii z roku 1841 i lat 1980—1982, w dwóch ostatnich przypadkach z podziałem na kobiety i mężczyzn. Co więcej, Thatcher dokonał biomedycznej interpretacji parametrów funkcji logistycznej: α , β , ϕ , γ .

Wedle niego parametr γ jest bliski średniemu poziomowi wartości funkcji intensywności w wieku 30—35 lat, stąd też zmiany w jego wartości

występujące wraz z upływem czasu kalendarzowego (a dokładnie stały spadek) Thatcher utożsamia z eliminacją przyczyn zgonów osób w tym wieku w przeszłości, a zatem przede wszystkim — chorób zakaźnych i w przypadku kobiet zgonów okołoporodowych.

Z kolei parametr β jest ściśle związany ze stopą wzrostu intensywności umieralności wraz z wiekiem. W modelu logistycznym owa stopa, w przeciwieństwie do np. modelu Gomperta, nie jest stała, lecz zmienna, obniżając się wraz z wiekiem. Parametr ten okazuje się być względnie stabilny w analizowanych epokach historycznych, wskazując najprawdopodobniej na istnienie genetycznie zdeterminowanego wzorca starzenia się populacji.

Kolejny parametr ϕ określa wiek, w którym intensywność umieralności osiąga wartość 0,5, zaś prawdopodobieństwo zgonu wartość około 0,4. Jednocześnie jest to wiek określający pojawienie się punktu przegięcia wykresu funkcji logistycznej, wiek wynoszący około dziewięćdziesiąt/dziewięćdziesiąt kilka lat.

O ile, jak wcześniej wspomniano, intensywność umieralności wśród młodych dorosłych (30—35 lat) zdeterminowana jest przez parametr γ , zaś w wieku bardzo wysokim (powyżej 90 lat) przez parametr ϕ , o tyle w wieku średnim dominuje parametr α . W dzisiejszych społeczeństwach, gdzie umieralność w wieku 30—35 lat jest bardzo niska, zachodzi następująca relacja $\mu_{50} \approx \alpha$. Patrząc na szacunki Thatchera [1999] bazujące na danych historycznych widać, iż właśnie ten parametr w największym stopniu podlegał zmianom (następnym pod tym względem był γ), co potwierdza wnioski z innych badań, poświęconych fenomenowi procesu starzenia się ludności.

Ostatni prezentowany model bazuje na funkcji kwadratowej. Jest to koncepcja autorstwa Coale'a i Kiskera (zob. [Wilmoth, 1995]), mająca opisywać umieralność osób w wieku 85—110 lat. Bazuje ona na założeniu, iż stopa zmiany współczynnika zgonów wraz z wiekiem ($\kappa_x = \ln(m_x) - \ln(m_{x-1})$, gdzie m_x to współczynnik zgonów w wieku x lat) po 85. roku życia opisana jest funkcją liniową

$$\kappa_x = \kappa_{85} + (x - 85)s \quad (14)$$

gdzie s oznacza spadek κ_x w obszarze wieku między x a 85 lat. W efekcie

$$\begin{aligned} m_x &= m_{84} \exp \left\{ \sum_{y=85}^x (\kappa_{85} + (y - 85)s) \right\} = \\ &= m_{84} \exp \left\{ (x - 84)\kappa_{85} + \frac{(x - 84)(x - 85)}{2}s \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

co po zlogarytmowaniu prowadzi do

$$\ln(m_x) = \ln(m_{84}) + (x-84)k_{85} + \frac{(x-84)(x-85)}{2} s \quad (16)$$

Zważywszy na to, że

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = -\frac{1}{L_x} \cdot \frac{dL_x}{dx} \approx -\frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{dx} \cdot \frac{x+\frac{1}{2}}{2} =$$

$$= -\frac{S'(x+0,5)}{S(x+0,5)} = \mu_{x+0,5} \quad (17)$$

po odpowiednich podstawieniach otrzymujemy ostatecznie

$$\ln(\mu_x) = a + bx + cx^2 \quad (18)$$

z ujemnym parametrem c . Według badań J. Wilmoth (1995) model ten dość dobrze zgadza się z rzeczywistymi danymi pochodzącymi z Japonii i Szwecji. Jego podstawową zaletą jest prostota, zaś dodatkową fakt, iż jako jedyna z podanych w niniejszym opracowaniu formuł nadaje się bez zastrzeżeń do zastosowania w oparciu o dane okresowe, a nie wyłącznie dane kohortowe. Dlatego też może być swobodnie wykorzystywany do analiz bazujących na tablicach trwania życia. Pozostałe modele, ponieważ zakładają opis procesów biologicznych prowadzących do ubytku ludności, powinny być stosowane tylko do badania określonych populacji, a mianowicie określonych kohort.

ZAKOŃCZENIE

Znajomość prawidłowości rządzących umieralnością osób bardzo starych zyskuje obecnie coraz większą wagę, zwłaszcza w kontekście bazującej na analizie rzeczywistych procesów koncepcji rektangularyzacji krzywej zgonów, przewidyującej powolne ujednolicanie się wzorców umieralności (tj. zmniejszanie się zmienności wieku w chwili zgonu) i powszechne osiągnięcie bardzo zaawansowanego wieku. Okresowe tablice trwania życia wskazują, iż w krajach rozwiniętych już obecnie połowa populacji dożywa do wieku 80 lat, zaś prognozy mówią, iż za pół wieku dotyczyć to będzie ponad 60% ludności (UN, 2001:73). Zastosowanie niewłaściwej metody prognozowania intensywności procesu wymierania osób w czwartym wieku prowadzić może do nadmiernie pesymistycznych wyników, efektem czego będzie mnożstwo żyjących — aczkolwiek niewuzględnio-

nych w prognozach — starców. Dlatego też przedstawione w niniejszym tekście modele wymierania osób bardzo starych zasługują na zapoznanie się z nimi tak przez demografów, jak i specjalistów z zakresu biometrii i matematyki aktuarialnej. Podejmowane są już obecnie prace mające pozwolić na stwierdzenie, który z powyższych modeli charakteryzuje się najwyższą zgodnością z rzeczywistością (zob. [Thatcher i in. 1998]). Mielmy nadzieję, iż udostępnienie przez polskie publiczne służby statystyczne szczegółowych danych informacji o umieralności osób sędziwych (zwłaszcza niepublikowanych w żadnej postaci informacji odnoszących się do osób w wieku 100 i więcej lat) pozwoli na przeprowadzenie weryfikacji prezentowanych w niniejszym tekście modeli parametrycznych na rodzimym materiale statystycznym.

LITERATURA:

- 1) Horiuchi S., Wilmoth J. R., 1998, Deceleration in the age pattern of mortality at older ages, „Demography” vol. 35, nr 4, November
- 2) Kannisto V., 1994, Development of the oldest-old mortality, 1950—1990: Evidence from 28 developed countries, „Odense Monographs on Population Aging” nr 1, Odense University Press, Odense (Dania)
- 3) Koschin F., 1989, Mortality and age structure at old ages, [w:] Ageing of population in developed countries. Causes, consequences, policies, „Acta Demographica” (Czechoslovak Academy of Sciences), vol. IX, nr 3
- 4) Olshansky S. Y., Carnes B. A., 1997, Ever since Gompertz, „Demography” vol. 34, nr 1, February
- 5) Pollard J. H., 1991, Fun with Gompertz, „Genus”, vol. XLVII, nr 1—2
- 6) Szukalski P., 2000, Umieralność osób bardzo starych w Polsce, [w:] Kowaleski J.T., Szukalski P. (red.), Sytuacja zdrowotna osób starych w Polsce — aspekt medyczny i społeczno-demograficzny, OW IMP, Łódź
- 7) Thatcher A. R., 1999, The long-term pattern of adult mortality and the highest attained age, „Journal of Royal Statistical Society”, series A, vol. 162, part 1
- 8) Thatcher A. R., Kannisto V., Vaupel J. W., 1998, The force of mortality at ages 80 to 120, „Odense Monographs on Population Aging”, nr 5, Odense University Press, Odense (Dania)
- 9) UN (United Nations), 2001, World population monitoring 2000. Population, gender and development, New York
- 10) Wilmoth J. R., 1995, Are mortality rates falling at extremely high ages? An investigation based on a model proposed by Coale and Kisker, „Population Studies”, vol. 45, nr 2