



SZYMON FRANKOWSKI

**WIELOWARTOŚCIOWOŚĆ
W LOGIKACH MODALNYCH
I W LINGWISTYCE
FORMALNEJ**

**WIELOWARTOŚCIOWOŚĆ
W LOGIKACH MODALNYCH
I W LINGWISTYCE
FORMALNEJ**



WYDAWNICTWO
UNIWERSYTETU
ŁÓDZKIEGO



SZYMON FRANKOWSKI

**WIELOWARTOŚCIOWOŚĆ
W LOGIKACH MODALNYCH
I W LINGWISTYCE
FORMALNEJ**



WYDAWNICTWO
UNIwersytetu
ŁÓDZKIEGO

Łódź 2016

Szymon Frankowski – Uniwersytet Łódzki, Wydział Filozoficzno-Historyczny
Instytut Filozofii, 90-232 Łódź, ul. Kopcińskiego 16/18

RECENZENT

Tomasz Połacik

REDAKTOR INICJUJĄCY

Damian Rusek

SKŁAD KOMPUTEROWY

Szymon Frankowski

PROJEKT OKŁADKI

Katarzyna Turkowska

Zdjęcie wykorzystane na okładce: © Depositphotos.com/IdeaStudios

Wydrukowano z gotowych materiałów dostarczonych do Wydawnictwa UŁ
przez Wydział Filozoficzno-Historyczny

© Copyright by Szymon Frankowski, Łódź 2016

© Copyright for this edition by Uniwersytet Łódzki, Łódź 2016

Wydane przez Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
Wydanie I. W.07012.15.0.M

Ark. druk. 9,125

ISBN 978-83-8088-100-6

e-ISBN 978-83-8088-101-3

<https://doi.org/10.18778/8088-100-6>

Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
90-131 Łódź, ul. Lindleya 8
www.wydawnictwo.uni.lodz.pl
e-mail: ksiegarnia@uni.lodz.pl
tel. (42) 665 58 63

Spis treści

Wstęp	5
0.1 Logiki wielowartościowe i logiki modalne	5
0.2 Wielowartościowe logiki modalne	6
1 Preliminaria matematyczno-logiczne	13
1.1 Teoria mnogości	13
1.2 Algebra	17
1.3 Konsekwencja logiczna	19
1.4 Logiki modalne	22
2 Logiki modalne oparte o wielowartościową logikę Łukasiewicza	35
2.1 Wprowadzenie	35
2.2 Prezentacja języka i logiki	36
2.3 Logika K_n zbazowana na logice $\mathbf{L}_n$	39
2.4 Logiki $KD_n, T_n, K4_n, KB_n$	46
2.5 Skończenie wartościowa logika Łukasiewicza Den_n	48
2.6 Pozostałe wielowartościowe logiki Łukasiewicza $KD'_n, KDC_n, T'_n,$ $4'_n, KB'_n, K5'_n$	49
2.7 Krata wielowartościowych logik modalnych Łukasiewicza	51
2.8 Warunki specjalne dla skończenie wartościowych logik Łukasiewicza	52
2.9 Filtracja w skończenie wartościowych logikach Łukasiewicza . . .	54
2.10 Obliczanie ilości relacji przechodnich	57
3 O pewnych zastosowaniach wielowartościowych logik Łukasiewicza	61
3.1 Klasyczna PDL	61
3.2 Wielowartościowa PDL	62
3.3 Wielowartościowe logiki Łukasiewicza a logika Nelsona	70
4 Uogólnione modele Kripkego	79
4.1 Sumy rozłączne i podmodele generowane	81
4.2 Homomorfizmy i bisymulacje	82
4.3 Bisymulacja w sensie H.P.Gumma i T.Schrödera	88

5	Topologiczne A-modele Kripkego	91
5.1	Semantyka topologiczna dla logik modalnych	91
5.2	Semantyka topologiczna dla wielowartościowych logik modalnych	92
6	Macierze kratowe	103
6.1	Zastosowania algebr liniowych w teorii krat	103
6.2	Modele Kripkego i bisymulacje	108
6.3	Przykład	113
7	Ekspresyjność wielowartościowych automatów i gramatyk	119
7.1	Związki logik modalnych z automatami skończonymi. Gramatyki	120
7.2	BL-automaty	122
7.3	Gramatyki probabilistyczne	127
	Zakończenie	133
	Od redakcji	143

Wstęp

0.1 Logiki wielowartościowe i logiki modalne

Główne powody powstania logik wielowartościowych miały filozoficzny charakter. Jednym z nich był problem wartości logicznych zdań odnoszących się do przyszłości. Już Arystoteles w Rozdziale XI *O interpretacji* rozpatruje zdanie

$$\text{Jutro będzie bitwa morska.} \quad (1)$$

Jaką wartość logiczną powinno ono przyjąć, jeśli dysponujemy jedynie klasyczną (dwuwartościową) logiką? Pewnym sposobem rozwiązania (między innymi) tego problemu była logika trójwartościowa ([30]). Trzecia wartość, będąca wartością pośrednią pomiędzy prawdą i fałszem jest wartością, która ma odpowiadać niezdecydowaniu zdania odnośnie co do jego prawdziwości lub fałszywości.

Kwestią czasu było rozszerzenie zbioru wartości logicznych do większej niż trzy liczby wartości [31].

Ponadto, należy mieć na uwadze, że sam Łukasiewicz proponował systemy logiki, nazwane przez niego **systemami logiki modalnej** ([32]). Jednym z nich jest logika czterowartościowa (oznaczana symbolem **L**) określona na języku zawierającym spójniki jednoargumentowe $\neg$, $\Box$, $\Diamond$ oraz jeden dwuargumentowy $\rightarrow$. Semantyka zadana jest tabelkami (wartością wyróżnioną jest 11)¹:

$\rightarrow$	11	10	01	00		$\neg$	$\Diamond$	$\Box$
11	11	10	01	00	11	00	11	10
10	11	11	01	01	10	01	11	10
01	11	10	11	10	01	10	01	00
00	11	11	11	11	00	11	01	00

¹ Dowód jej pełności względem systemu zaprezentowanego przez Łukasiewicza podał Smiley [46].

W szerszym znaczeniu² modalność może być definiowana w kategoriach pojęcia **funktora modalnego** ([34]): F jest **funktozem modalnym** działającym na zdanie A wtedy i tylko wtedy, gdy wartość logiczna zdania $F(A)$ nie jest określona (a przynajmniej nie jest określona w sposób całkowity) przez wartość logiczną zdania A ([34]).

Tak więc modalna logika $\mathbf{L}$, będąc ekstensjonalną, nie spełnia powyższego warunku, bowiem w logikach ekstensjonalnych wartość logiczna zdania złożonego wyznaczona jest jednoznacznie przez wartości jego zdań składowych.

Mamy tu na myśli takie operatory jak **Jest możliwe, że ...**, **Jest konieczne, że ...**.

Zauważmy bowiem, że zdania:

$$\text{Beata Szydło jest premierem RP,} \quad (2)$$

$$2 + 2 = 4 \quad (3)$$

są prawdziwe (przy czym zdanie (2) jest prawdziwe przynajmniej w momencie pisania tych słów).

Jeśli jednak poprzedzimy je funktorami typu koniecznościowego, otrzymujemy zdania:

$$\text{Jest konieczne, że Beata Szydło jest premierem RP,} \quad (4)$$

$$\text{Jest konieczne, że } 2 + 2 = 4. \quad (5)$$

Zdania (2) oraz (3) mają tę samą wartość logiczną. Jednak różna jest wartość logiczna zdań (4) oraz (5). Pierwsze z nich jest fałszywe, drugie zaś prawdziwe. Ostatecznie – wartość zdania postaci „**Jest konieczne, że A** ” nie jest zdeterminowana jedynie przez wartość logiczną zdania składowego A .

Zatem funktor **Jest konieczne, że ...** jest funktorem intensjonalnym – wartość logiczna zdania, którego jest głównym spójnikiem, nie jest jednoznacznie wyznaczona poprzez wartości jego argumentów.

W niniejszej pracy rozważamy wyłącznie **modalności aletyczne**, a więc takie, jakie rozpatrywane są w większości znanych systemów formalnej logiki modalnej, w odróżnieniu od na przykład modalności deontycznych czy epistemicznych.

0.2 Wielowartościowe logiki modalne

Konstrukcja wielowartościowych logik modalnych może odbywać się w sposób dwojaki:

² Owo znaczenie jest na tyle szerokie, że może zostać odczytane jako definicja spójnika intensjonalnego. Jednak biorąc pod uwagę podobieństwo spójników intensjonalnych, przyjmujemy definicję W. Marciszewskiego.

- i) Poprzez wprowadzenie modalności do logiki wielowartościowej;
- ii) Poprzez zwiększenie liczby wartości w pewnej wyjściowej logice modalnej.

Owe dwa podejścia, mimo iż mogą prowadzić do tych samych logik, może wiele różnić. Podejście pierwsze wyraża się poprzez proste dołączenie operatora konieczności (lub możliwości) do języka oraz dodaniu aksjomatów charakteryzujących modalność. Jest to niewątpliwie podejście syntaktyczne. Drugie zaś wskazuje na modyfikację logik modalnych od strony semantycznej – modyfikujemy struktury Kripkego w taki sposób, że dopuszczamy w światach (punktach), wartościowania o przeciwdziedzinie innej niż $\{0, 1\}$.

W wielu przypadkach chcemy po prostu podać semantykę dla syntaktycznie zdefiniowanych logik. Najbliższa temu podejściu jest niewątpliwie praca [39]. Jednak najczęściej wykorzystywanym podejściem wydaje się to drugie – definiujemy semantykę oraz staramy się podać syntaktyczną charakterystykę definiowanej przez nią logiki. Semantyka z reguły dobrze oddaje intuicję, jakie stoją za budową tej czy innej logiki. Tak więc semantyka najczęściej stanowi punkt wyjścia.

Nie oznacza to jednak, że każde z tych podejść jest jednoznacznie zorientowane tylko na składnię czy tylko na semantykę. W praktyce formalnej rzadko kiedy dąży się po „sznurku do kłębka”³, modyfikując po drodze przyjęte założenia (tym bardziej, że wspomniane podejścia nie były wyrażone *explicite*). W każdym jednak przypadku możemy znaleźć pewne, mniej lub bardziej stanowcze, rozłożenie akcentów.

Nie sposób pominąć faktu, że pozaformalne (filozoficzne) intencje powstania wielowartościowych logik modalnych spotykają się z badaniami w zakresie opisu właśnie niedookreśloności informacji w bazach danych⁴ (patrz [29]). Bliższe naszemu (to znaczy logiczno-filozoficznemu) jest jednak ujęcie zawarte w [41] oraz [40]⁵, gdzie przedstawione są logiki modalne oparte na skończeniu wartościowej logice Łukasiewicza.

I właśnie Rozdział 2. poświęciliśmy opisowi oraz aksjomatyzacji modalnych logik opartych na skończeniu wartościowych logikach Łukasiewicza. Podajemy ponadto metodę rozstrzygania tych logik, zbazowanej na znanej z logiki modalnej metodzie filtracji. Większość z przedstawionych przez nas logik została już zaksjomatyzowana we wspomnianej pracy [40]. My jednak przedstawiamy aksjomatyzację większej ich liczby, w tym logiki niemającej prostego odpowiednika w dwuwartościowej logice modalnej (RU_n). Warunek nałożony na jej semantykę możemy wyrazić w następującym stwierdzeniu: Wartości zmiennych zdaniowych w świecie v , będącym następnikiem (względem relacji osiągalności w modelu)

³ W naszym przypadku znaczyłoby to, że najpierw definiujemy semantykę, a potem konsekwentnie określamy dla niej aksjomatykę. Ewentualnie – mając daną aksjomatykę, szukamy adekwatnej dla niej semantyki.

⁴ We współcześnie używanych systemach zarządzania relacyjnymi bazami danych (*SQL*) występuje wartość taka jak *NULL*, odpowiadająca łukasiewiczowskiej wartości $\frac{1}{2}$. Praktycy powołują się nawet na logiki wielowartościowe [36]. W nowszych, nierelacyjnych systemach (*NoSQL*) takimi jak MongoDB, klucze o niezdefiniowanej wartości przyjmują po prostu wartość *undefined* (zainteresowani nierelacyjnymi bazami danych mogą sięgnąć np. po [6]).

⁵ Mimo że w obu tych pracach znajdujemy odniesienie do [29].

bieżącego świata w nie mogą być bardziej oddalone od liczby $\frac{1}{2}$ niż ich wartości w w . To znaczy: Rwv implikuje $|V(v, p) - \frac{1}{2}| \leq |V(w, p) - \frac{1}{2}|$. Chcemy przez to wyrazić, że w przypadku gdy relacja osiągalności jest rozumiana jako relacja następstwa czasowego, to w kolejnych punktach czasowych zdania atomowe mają coraz mniej dookreśloną wartość⁶. Może być ona traktowana jako dualna (w bardzo dużym przybliżeniu) w stosunku do logik: Nelsona i intuicjonistycznej (którymi również zajmujemy się w tej pracy).

Ponadto, o czym przed chwilą wspominaliśmy, wskazujemy na zastosowanie filtracji w procedurze rozstrzygania dla poszczególnych logik. Niejako przy okazji podajemy wzory na ilość skończonych struktur, w jakich trzeba sprawdzić prawdziwość formuły, aby stwierdzić, czy jest ona tezą danej logiki.

Niewątpliwie nowość stanowią wielowartościowe odpowiedniki znanej logiki *PDL* (*propositional dynamic logic*) zbazowane na wielowartościowej logice Łukasiewicza, to znaczy – logiki PDL_n zdefiniowane dla każdego $n \geq 2$. W Rozdziale 3. przedstawiamy aksjomatyzację i dowód twierdzenia o pełności owych logik. Przeprowadzenie tego dowodu wymagało daleko idących modyfikacji i uzupełnień dowodu dla dwuwartościowych logik *PDL* zawartego w Rozdziale 3 [4]. W tym samym rozdziale piszemy o związkach, jakie łączą wielowartościowe logiki Łukasiewicza i logikę Nelsona. Piszemy o tym ze względu na fakt, że między logiką Nelsona i trójwartościową logiką modalną Łukasiewicza $S4_3$ zachodzi związek analogiczny do tego, jaki łączy logikę intuicjonistyczną i dwuwartościową logikę $S4$ (mamy tu oczywiście na myśli interpretowalność intuicjonizmu w $S4$ – patrz [35]).

Sama logika Nelsona, podobnie zresztą jak intuicjonizm, wykazuje pewne pokrewieństwo z logiką wielowartościową. Szczególnie wyraźny związek zachodzi, gdy przyjmiemy epistemiczną interpretację tej drugiej. Dla takich zdań jak *Jutro będzie bitwa morska* czy *W tej chwili w Warszawie jest burza*, mimo iż można przyjąć, że posiadają jakąś wartość logiczną, wartość ta pozostaje niejako w zawieszeniu (por. [20] s.15). W semantyce dla logiki Nelsona zdanie przyjmuje wartość 1, jeśli we wszystkich osiągalnych światach przyjmuje tę wartość. Zdanie zaś jest fałszywe tylko wtedy, gdy w każdym świecie osiągalnym nie jest prawdziwe. Pod koniec rozdziału przedstawiamy propozycję uogólnienia logiki Nelsona, by była interpretowalna w logice $S4_n$ dla dowolnego $n \geq 3$. Wyniki formalne poprzedzamy istotnymi, według nas, rozważaniami o możliwych uogólnieniach porządku informacyjnego, to znaczy przy przejściu od logiki trójwartościowej do logik o większej ilości wartości. Jeśli bowiem dysponujemy logiką trójwartościową, to wartość $\frac{1}{2}$ jest jedynym elementem minimalnym porządku informacyjnego, zaś 1 oraz 0 są nieporównywalnymi elementami maksymalnymi. Wprowadzając uogólnienie, naszą intencją jest odpowiedź na pytanie takie jak: jaki jest porządek informacyjny na zbiorze $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$?

Istnieje jednak znacznie ogólniejsze podejście do modalnych logik wielowartościowych zaprezentowane przez Fittinga w [11, 12, 13]. W powyższych pracach formuły modalne wartościowane są w algebrach Heytinga. Ważną innowa-

⁶ Sama nazwa *RU* jest skrótem od słów *rising uncertainty* (czyli **rosnąca niepewność**).

cję stanowi wartościowanie w algebrę Heytinga samych relacji. Można wówczas mówić o **stopniu zachodzenia relacji**. Jednak ujęcie Fittinga nie wypływa z czystej chęci uogólniania zastanych konstrukcji. Skończona algebra Heytinga może zostać przedstawiona za pomocą zbioru agentów (ekspertów), powiedzmy $\{1, 2, \dots, n\}$, powiązanych relacją zależności (**dominacji**, patrz [12]). Przez wartość logiczną zmiennej zdaniowej p uznajemy tedy jakiś podzbiór zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ określający, który z agentów uznaje zdanie p za prawdziwe. W przypadku gdy agenci są od siebie niezależni, zdanie p może za wartość przyjąć dowolny podzbiór A zbioru agentów. Powiemy wówczas, że agent i należy do zbioru A wtw., gdy i uznaje p za prawdziwe. Wówczas wartością może być dowolny element pełnej algebry Boole’a $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$. Jednak gdy na zbiorze agentów określimy częściową funkcję zależności z (lub jak woli Fitting – dominacji), to z naszej dziedziny możliwych wartości logicznych wykluczamy zbiory B takie, że dla pewnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$i \notin B, \text{ } z \text{ jest określona na } i \text{ oraz } z(i) \in B. \quad (6)$$

Ostatecznie Fitting ogranicza się do wartościowań w skończonych algebrach Heytinga. Można łatwo pokazać, że częściowa funkcja na zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$ wyznacza algebrę Heytinga. Dokładniej, jeśli z jest funkcją częściową na zbiorze $\{1, 2, \dots, n\}$, to elementami algebry Heytinga $L(z)$ będą te i tylko te podzbiory A zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, które spełniają warunek:

$$\text{jeśli } z(i) \text{ jest określony oraz } z(i) \in A, \text{ to } i \in A. \quad (7)$$

Naturalnie $L(z)$ jest kratą, której nośnik zawiera się w $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$.

W naszym ujęciu dopuszczamy, by formuły modalne wartościowane były w dowolnej kratce (lub dokładniej – jeśli język zawiera operatory typu możliwościowego, wymagamy, by krata była $\vee$ -kratą⁷, gdy operatory typu koniecznościowego – potrzebujemy $\wedge$ -kraty⁸). Wynika to z faktu, że gdy zastąpimy częściową funkcję dominacji relacją, nie musimy otrzymać algebry Heytinga. Taka formalizacja ujmuje sytuacje, gdy agent nie tyle jest uzależniony w swoich osądach od jednego, konkretnego agenta, lecz 'przekonać' go może jakaś ich grupa. Ponadto w Rozdziale 4. (którego wyniki zaprezentowane były w [15]) uogólniamy pojęcia takie jak **bisymulacja**, **p-morfizm** itp. poprzez wprowadzenie dodatkowego parametru, umożliwiającego tworzenie bisymulacji, p-morfizmów (nazywanymi przez nas **ograniczonymi morfizmami**) itp., między strukturami relacyjnymi zbazowanymi na różnych algebrach.

Do tej pory w literaturze rozpatrywane były jedynie morfizmy (bisymulacje, ograniczone morfizmy) między strukturami wartościowanymi w tych samych algebrach [21]. Nasze ujęcie pozwala na zrelatywizowanie morfizmu do danego odwzorowania między algebrami (nazwijmy je h), w których wartościowane są struktury. Dlatego też nasze uogólnienia bisymulacji i ograniczonego morfizmu

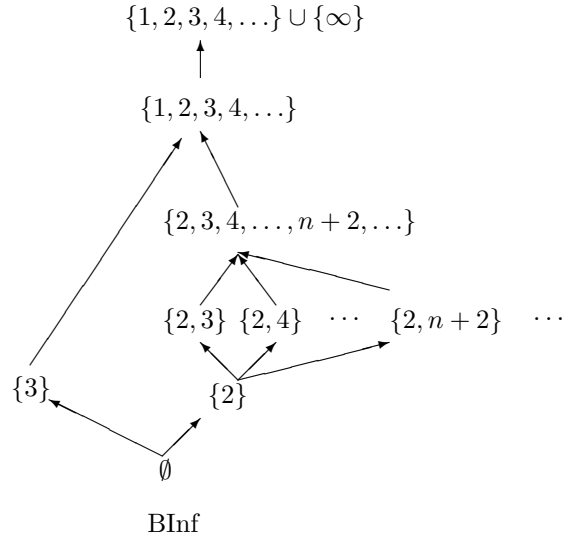
⁷ To jest takiej kraty, by dla każdego niepustego podzbioru istniał jego kres górny.

⁸ To znaczy – takiej kraty, w której każdy niepusty podzbiór ma kres dolny.

to, odpowiednio, bisymulacja ze względu na h , ograniczony morfizm ze względu na h (patrz Definicje 4.2.3 oraz 4.2.5). Aby mieć na obecnym etapie pewien wgląd w nasze podejście, przedstawimy tu uproszczone wersje pojęć z Rozdziału 4. Niech $\mathcal{A} = (A, \leq_{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} = (B, \leq_{\mathcal{B}})$ będą kratami oraz $h : A \rightarrow B$ homomorfizmem. Niech $\mathfrak{M} = (W, R)$ oraz $\mathfrak{N} = (W', R')$ będą strukturami takimi, że W, W' są zbiorami (światów) oraz $R : W \times W \rightarrow A$, $R' : W' \times W' \rightarrow B$ (relacje wielowartościowe). Ponadto niech $f : W \rightarrow W'$. Powiemy, że f jest **morfizmem ze względu na h** wtw. gdy $h(R(w, v)) \leq R'(f(w), f(v))$.

W szczególności możemy dokonać interpretacji dowolnych kratowych wartościowań, w wartościowania w algebrze Heytinga. Ilustrację naszych słów może stanowić przykład zaczerpnięty z [15].

Mianowicie, rozpatrzmy dwie kraty – algebrę Heytinga BT_1 , określoną przez rodzinę zbiorów $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ oraz – $BInf$ przedstawioną na Diagramie 1.



Diag. 1.

Naturalnie, $BInf$ nie jest algebrą Heytinga. Zdefiniujmy funkcję $h : BInf \rightarrow BT_1$ w następujący sposób:

$$\begin{cases} h\emptyset = & \emptyset; \\ h\{3\} = & \{1\}; \\ h\{2\} = h\{2, 3\} = h\{2, 4\} = \dots = h\{2, n+2\} = \dots \\ & = h\{2, 3, 4, \dots, n+2, \dots\} = & \{2\}; \\ h\{1, 2, 3, 4, \dots\} = & \{1, 2\}; \\ h\{1, 2, 3, 4, \dots\} \cup \{\infty\} = & \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Jak łatwo sprawdzić h jest homomorfizmem krat, zachowującym wszystkie kresy (również zbiorów nieskończonych). Sytuację możemy opisać w następujący

sposób: agenci $2, 3, \dots$ zostają utożsamieni, tworzą bowiem coś w rodzaju stronnictwa (partii). Pewna ilość informacji o strukturze zależności między agentami została wprawdzie utracona po zastosowaniu odwzorowania h , lecz BT_1 -model nie tylko zawiera wszystkie informacje istotne, ale ponadto w algebrze BT_1 możemy waluować operatory typu koniecznościowego (patrz uwaga na s. 80).

Ciekawym, lecz nie eksploatowanym do tej pory problemem jest zastosowanie ujęcia Fittinga do opisu praktycznego problemu replikacji baz danych (dla zainteresowanych – [25, s. 374]). Przyjmujemy dla celów poglądowych pewne uproszczenie pojęcia **serwera bazodanowego**, przez który będziemy rozumieć pewien nośnik (zbiór) informacji (możemy nawet założyć, że jest to rodzina ciągów składających się z liter pewnego ustalonego alfabetu). Serwery A i B mogą pozostawać w relacji *master-slave* (w terminologii Fittinga – w relacji dominacji). W przypadku gdy na serwerze nadrzędnym (serwer A – *master*) następuje aktualizacja danych, serwer B (*slave*) pobiera ją, by dane na nim zgromadzone stanowiły lustrzaną kopię danych serwera A .

Następnym pytaniem jest, czy nasza propozycja (tzn. gdy relacja zależności nie jest funkcją) dobrze ujmuje sytuację, gdy jeden serwer podrzędny może dokonać aktualizacji, dopiero gdy zmiany w nadrzędnych względem niego (wielu) serwerach są identyczne (to znaczy dopuszczamy, by relacja dominacji, czyli relacja *master-slave*, nie była funkcją). Posłużmy się przykładem – serwer A jest zależny od serwerów B oraz C . Załóżmy, że każdy z tych trzech serwerów gromadzi ten sam zestaw danych. Niech w chwili t_0 nastąpi zmiana zawartości serwera B . Wówczas serwer A dokonuje aktualizacji swojej zawartości dopiero w chwili $t_1 > t_0$, w której dokonana została aktualizacja na serwerze C oraz jest identyczna z aktualizacją jaka nastąpiła w chwili t_0 na serwerze A .

W Rozdziale 5. pokazujemy, że fuzzy przestrzenie topologiczne (patrz np. [45]) mogą stanowić semantykę dla wielowartościowych logik modalnych, występujących w takiej postaci, w jakiej zostały zdefiniowane w Rozdziale 4. Fuzzy przestrzenie topologiczne stanowią uogólnienie dobrze znanych przestrzeni topologicznych w tym sensie, że topologie nie są rodzinami podzbiorów pewnego zbioru X , lecz są rodzinami jego fuzzy podzbiorów (oczywiście spełniającymi pewne aksjomaty właściwe dla topologii).

Nawiązując do pracy Fittinga [14], pokazujemy, jak interpretować formuły modalne w algebrach macierzy nad kratami. Jednak ze względu na fakt, że do tej pory rozpatrywaliśmy również modalności o większej niż jeden liczbie argumentów, konieczne stało się poszerzenie bazy pojęciowej, w sposób daleko wykraczający poza to, co zostało zaprezentowane w [14].

Ostatni rozdział został poświęcony wielowartościowości w teorii automatów i gramatyk wielowartościowych. Wielość związków, jakie łączą logiki modalne z teorią automatów, nie pozwala na szersze jej ujęcie w niniejszej pracy (zainteresowani formalno-lingwistycznym ujęciem logik temporalnych mogą sięgnąć do [49], [18]). W rozdziale tym pokazujemy, że każdy automat zdefiniowany nad skończoną BL -algebrą da się zasymulować przez automat skończony. Jednakże

za główny wynik uważamy Twierdzenie 7.3.3 mówiące, że każdą gramatykę probabilistyczną określoną na liczbach z przedziału $[0, 1]$ można aproksymować za pomocą gramatyki, której wartości nie wychodzą poza zbiór liczb wymiernych. Ostatnim twierdzeniem zarówno rozdziału, jak i całej pracy, jest twierdzenie mówiące, że regularnie kontrolowane gramatyki, zdefiniowane w [8], mogą symulować dowolne gramatyki probabilistyczne. Jako naturalne pojawiło się pytanie: czy zachodzi zależność odwrotna, to znaczy – czy dowolną gramatykę regularnie kontrolowaną da się zasymulować za pomocą pewnej gramatyki probabilistycznej?

Korzystając z okazji, chciałbym wyrazić wdzięczność osobom, które podjęły niewdzięczny trud przeczytania poniższej pracy, a zaliczają się do nich: Marek Nowak, Michał Zawidzki, Anna Dębska, Kaja Bednarska i Janusz Kaczmarek. Dzięki nim książka stała się lepsza i zawiera znacznie mniej błędów (a może nawet nie zawiera ich wcale).

Na szczególną uwagę i podziękowania zasługuje praca włożona przez prof.dr. hab. Tomasza Połacika, który podjął się zrecenzowania niniejszej książki.

Rozdział 1

Preliminaria matematyczno-logiczne

1.1 Teoria mnogości

W całej pracy będziemy posługiwać się standardową notacją, głównie teorio-mnogościową. Nie będziemy zatem przytaczać wszystkich pojęć i definicji – są od tego właściwe podręczniki. Warto jednak sformułować kilka z nich oraz podać konwencje notacyjne będące w upodobaniu autora.

Będziemy posługiwać się pojęciem **zbioru pustego** $\emptyset$ ¹ czy **relacji binarnej** między zbiorami A i B , to jest pewnego zbioru R składającego się z par uporządkowanych $\langle a, b \rangle$, gdzie a jest elementem zbioru A , zaś b należy do B . Prawdopodobnie najczęściej używaną relacją będzie **relacja należenia do zbioru** $\in$. Podobnie pochodną od niej relacją zawierania się zbiorów ($A \subseteq B$ – zbiór A zawiera się w zbiorze B) oraz relacją **właściwego** zawierania się: $\subset$, tzn. $A \subset B$ wtw., gdy $A \subseteq B$ oraz $A \neq B$.

Przez zbiór **potęgowy** danego zbioru A , będziemy rozumieć rodzinę wszystkich jego podzbiorów. Oznaczać będziemy go poprzez $\mathcal{P}(A)$. Formalnie – $\mathcal{P}(A) := \{X : X \subseteq A\}$.

Mając dane dwa zbiory: A oraz B , przez ich **iloczyn** będziemy rozumieć zbiór $A \cap B := \{x : x \in A \ \& \ x \in B\}$.

Podobnie przez ich **sumę teoriomnogościową** rozumiemy zbiór $A \cup B := \{x : x \in A \ \text{lub} \ x \in B\}$. Ich różnicę natomiast, oznaczoną poprzez $A - B$, zdefiniujemy jako $\{x : x \in A \ \& \ x \notin B\}$. Przy czym często mamy do czynienia z sytuacją, w której A stanowi pewne, z góry ustalone uniwersum U . Wtedy piszemy po prostu $-B$.

¹ Tj. zbioru niezawierającego żadnego elementu; może być on zdefiniowany bardziej formalnie jako $\emptyset := \{x : x \neq x\}$.

Dla dowolnego zbioru X kładziemy $Fin(X)$ na oznaczenie jego skończonych podzbiorów. Ogólnie – będziemy pisać $X \in Fin$, jeśli tylko X jest zbiorem skończonym. Zatem $Fin(X) = \mathcal{P}(X) \cap Fin$.

Ogólniej – mając daną rodzinę zbiorów A , przez jej **iloczyn uogólniony** będziemy rozumieć zbiór

$$\bigcap A := \{x : \forall_{B \in A} x \in B\}. \quad (1.1)$$

Podobnie, przez **sumę uogólnioną rodziny** A rozumiemy zbiór:

$$\bigcup A := \{x : \exists_{B \in A} x \in B\}. \quad (1.2)$$

Iloczyn uogólniony zbioru będziemy nazywać również **przecięciem**. Czasem sumę uogólnioną określa się mianem **unii**.

Naturalnie $A \cap B = \bigcap \{A, B\}$ oraz $A \cup B = \bigcup \{A, B\}$.

Przez **iloczyn zbiorów** A oraz B rozumiemy zbiór $A \times B = \{\langle x, y \rangle : x \in A, y \in B\}$.

Dla relacji $R \subseteq A \times B$ położmy $R^\sim$ (alternatywnie R^{-1}) na oznaczenie konwersu R , to znaczy $R^\sim := \{\langle y, x \rangle \in B \times A : \langle x, y \rangle \in R\}$.

W większości przypadków przekreślony symbol relacji będzie oznaczał jej dopełnienie: $x \notin A$ oznaczać będzie **nieprawda, że** $x \in A$, $A \not\subseteq B$ – **nieprawda, że** $A \subseteq B$.

Dla dowolnej relacji binarnej $R \subseteq A \times B$ przez $dom(R)$ oznaczmy zbiór $\{x \in A : \exists y \in B \ \& \ \langle x, y \rangle \in R\}$ (**przeciwwobraz, dziedzina** relacji) i podobnie $codom(R) = dom(R^\sim)$ (**obraz, przeciwdziedzina lub kodziedzina**).

Ogólniej – dla relacji $R \subseteq A \times B$, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$ kładziemy

$$\begin{aligned} R[C] &:= \{y \in B : \exists_{x \in C} \langle x, y \rangle \in R\} \\ &\quad \text{obraz zbioru } C \text{ względem relacji } R \\ R^{-1}[D] &:= \{x \in A : \exists_{y \in D} \langle x, y \rangle \in R\} \\ &\quad \text{przeciwwobraz zbioru } D \text{ względem relacji } R. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Z powyższych definicji bezpośrednio wynika, że $dom(R) = R^{-1}[B]$ oraz $codom(R) = R[A]$.

W przypadku gdy $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ oraz $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ są zbiorami skończonymi, będziemy omijać nawiasy klamrowe, pisząc $R[c_1, \dots, c_m]$ oraz $R^{-1}[d_1, \dots, d_k]$.

Zauważmy, że notacja $R^{-1}[d_1, \dots, d_k]$ zgodna jest z konwencją, wedle której konwers relacji R zapisujemy jako R^{-1} (przeciwwobraz zbioru względem relacji jest tożsamy z obrazem zbioru względem jej konwersu).

Przez **funkcję odwzorowującą zbiór A w zbiór B** ($f : A \longrightarrow B$ lub $f \in B^A$) rozumiemy dowolną relację $f \subseteq A \times B$, taką, że $\text{dom}(f) = A$ (co oznacza, że dla każdego $a \in A$ istnieje $b \in B$ takie, że $\langle a, b \rangle \in f$) oraz warunek $\langle a, b_1 \rangle, \langle a, b_2 \rangle \in f$ implikuje $b_1 = b_2$.

Element jednoznacznie wyznaczony przez funkcję f oraz $a \in A$ będziemy oznaczać przez $f(a)$. W bardziej skomplikowanych wzorach będziemy pomijać nawiasy, dopuszczając notację fa . Mówimy, że funkcja $f : A \longrightarrow B$ jest **iniekcją** (lub jest 1-1), jeśli spełnia warunek $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$. Równoważnie, gdy $f^{-1} : \text{codom}(f) \longrightarrow A$ (to znaczy, gdy relacja f^{-1} jest funkcją należącą do zbioru $A^{\text{codom}(f)}$).

Fakt, że funkcja jest iniekcją często oznacza się za pomocą notacji $f : A \rightarrowtail B$. Jeśli $f : A \longrightarrow B$ spełnia warunek $\forall_{y \in B} \exists_{x \in A} f(x) = y$, to powiemy, że f jest **surjekcją** lub **funkcją „na”**. Oczywiście $f : A \longrightarrow B$ jest surjekcją wtw., gdy $f[A] = B$. Piszemy wtedy: $f : A \twoheadrightarrow B$.

Jeśli $f : A \longrightarrow A$, to o f powiemy, że jest **endomorfizmem**. Rodzinę endomorfizmów na zbiorze A będziemy oznaczać przez $\text{End}(A)$.

Dla dowolnej indeksowanej rodziny zbiorów $\{A_t : t \in T\}$ jej iloczyn uogólniony będziemy zapisywać jako $\bigcap_{t \in T} A_t$. Podobnie, sumę uogólnioną: $\bigcup_{t \in T} A_t := \bigcup \{A_t : t \in T\}$.

Niech T będzie niepustym zbiorem oraz dla każdego $t \in T$ A_t będzie dowolnym zbiorem. Przez **iloczyn kartezjański** rodziny indeksowanej $\{A_t\}_{t \in T}$ będziemy rozumieć zbiór wszystkich funkcji $f : T \longrightarrow \bigcup_{t \in T} A_t$ takich, że $f(t) \in A_t$ dla dowolnego $t \in T$. Iloczyn taki będziemy oznaczać jako $\prod_{t \in T} A_t$. Dopuszczamy konwencję zapisywania jego elementów jako $\langle a_t \rangle_{t \in T}$, gdzie $(\langle a_t \rangle_{t \in T})(t_0) = a_{t_0}$ dla $t_0 \in T$.

W przypadku zbioru $\langle a_t \rangle_{t \in T} \in \prod_{t \in T} A_t$ przez **projekcję na składnik t_0** będziemy rozumieć funkcję $pr_{t_0} : \prod_{t \in T} A_t \longrightarrow A_{t_0}$ zdefiniowaną jako $pr_{t_0}(\langle a_t \rangle_{t \in T}) = a_{t_0}$. Zatem dla $a \in \prod_{t \in T} A_t$ mamy zawsze $a = \langle pr_t(a) \rangle_{t \in T}$. Zrozumiały jest zatem zapis $pr_{t_0}[\prod_{t \in T} B_t]$ dla $\prod_{t \in T} B_t \subseteq \prod_{t \in T} A_t$.

W przypadku relacji innych niż dwuargumentowe niemożliwe jest użycie notacji infiksowej. W niniejszej pracy będziemy posługiwali się kilkoma konwencjami:

- i) $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R$;
- ii) $Rx_1x_2 \dots x_n$;
- iii) $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dla każdego $n \geq 2$;
- iv) czy w przypadku relacji dwuargumentowej xRy .

Mając dane dwie relacje $R \subseteq A \times B$ oraz $T \subseteq B \times C$, przez $R \circ T$ oznaczamy będziemy ich **złożenie**, tzn. $R \circ T := \{\langle x, z \rangle \in A \times C : \exists y (y \in B \ \& \ \langle x, y \rangle \in R \ \& \ \langle y, z \rangle \in T)\}$.

Niech $R \subseteq A \times A$. Kładziemy:

$$R^0 := \{\langle a, a \rangle : a \in A\}, \quad R^{n+1} = R \circ R^n \quad (1.4)$$

oraz

$$R^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n, \quad R^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n. \quad (1.5)$$

Naturalnie każda funkcja jest relacją. Tak więc możemy złożyć dwie funkcje $f : A \longrightarrow B$ oraz $g : B \longrightarrow C$, otrzymując $f \circ g$. Jednak w przypadku funkcji będziemy używać innego rodzaju złożenia (możemy je nazwać **złożeniem funkcyjnym**). Oznaczmy je poprzez $\cdot$. Czyli dla $f : A \longrightarrow B$ oraz $g : B \longrightarrow C$ przez $(g \cdot f) : A \longrightarrow C$ będziemy rozumieć ich złożenie jako funkcję $(g \cdot f)(x) = g(f(x))$. Jednak w dalszym ciągu $f \circ g$ oznaczać będzie ich złożenie jako relacji. Dysponując złożeniem funkcji, możemy pokusić się o przedstawienie alternatywnych w stosunku do powyższych definicji iniekcji (zwanej również **monomorfizmem**) oraz surjekcji (określanej mianem **epimorfizmu**). Ujęcie to odnajdujemy w teorii kategorii, gdzie nie możemy posługiwać się pojęciem elementu zbioru (sama teoria kategorii posługuje się abstrakcyjnymi pojęciami, takimi jak obiekt czy morfizm). Przez monomorfizm rozumiemy funkcję $f : A \longrightarrow B$, która jest lewostronnie skracalna, to znaczy dla dowolnych funkcji $g : C \longrightarrow A$ oraz $h : C \longrightarrow A$ warunek

$$f \cdot g = f \cdot h \quad (1.6)$$

implikuje

$$g = h. \quad (1.7)$$

Podobnie, funkcja $f : A \longrightarrow B$ jest epimorfizmem wtw., gdy dla dowolnych funkcji $g : B \longrightarrow C$ oraz $h : B \longrightarrow C$ warunek

$$g \cdot f = h \cdot f \quad (1.8)$$

implikuje

$$g = h, \quad (1.9)$$

czyli gdy mamy do czynienia z prawostronną skracalnością funkcji f .

Dla dowolnego zbioru A funkcję identycznościową na tym zbiorze zapiszemy jako id_A .

Przez **łańcuch** na zbiorze Z rozumiemy dowolną rodzinę zbiorów $\mathbf{L} \subseteq \mathcal{P}(Z)$ spełniającą:

$$\text{dla dowolnych } X, Y \in \mathbf{L} : X \subseteq Y \text{ lub } Y \subseteq X. \quad (1.10)$$

Niech A będzie dowolnym zbiorem. O relacji $R \subseteq A \times A$ powiemy, że jest:

- **zwrotna na zbiorze A** , jeśli $\forall_{x \in A} xRx$,
- **przeciwzwrotna na zbiorze A** , jeśli $\forall_{x \in A} \neg xRx$,
- **symetryczna na zbiorze A** , jeśli $\forall_{x, y \in A} [xRy \Rightarrow yRx]$,
- **przeciwsymetryczna na zbiorze A** , jeśli $\forall_{x, y \in A} [xRy \Rightarrow \neg yRx]$,
- **antysymetryczna na zbiorze A** , jeśli $\forall_{x, y \in A} [xRy \ \& \ yRx \Rightarrow x = y]$,
- **przechodnia na zbiorze A** , jeśli $\forall_{x, y, z \in A} [xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz]$.

Przez **zbiór uporządkowany** będziemy rozumieli parę $\langle A, R \rangle$, gdzie A jest zbiorem, a R binarną relacją na A . W przypadku gdy będziemy mieli do czynienia ze strukturami złożonymi często zamiast $\langle A, R \rangle$ będziemy używać nawiasów okrągłych (A, R) .

Powyższe własności możemy łączyć w grupy, tworząc zbiory uporządkowane o określonych własnościach. I tak – relację binarną R na zbiorze A nazywamy **quasi-porządkującą** na tym zbiorze wtw., gdy jest zwrotna i przechodnia na tym zbiorze.

Relację binarną R na zbiorze A nazywamy **częściowo-porządkującą** na tym zbiorze wtw., gdy jest quasi-porządkiem oraz jest antisymetryczna na tym zbiorze.

Jeśli ponadto relacja R spełnia warunek xRy lub yRx dla dowolnych $x, y \in A$, to powiemy, że jest **liniowo porządkująca** zbiór A .

Wracając do struktur uporządkowanych, możemy powiedzieć zatem, że (A, R) jest zbiorem quasi-uporządkowanym wtw., gdy R jest quasi-porządkiem. Podobnie dla pozostałych własności.

1.2 Algebra

Dowolną funkcję $o : A^m \longrightarrow A$, gdzie A jest niepustym zbiorem oraz $m \geq 0$, nazwiemy **operacją m -argumentową**. Rodzinę wszystkich operacji m -argumentowych na zbiorze A oznaczymy przez $\mathcal{O}^m(A)$. Powiemy, że podzbiór B zbioru A jest **zamknięty na operację $o \in \mathcal{O}^m(A)$** wtw., gdy spełniony jest warunek:

$$b_1, \dots, b_m \in B \text{ implikuje } o(b_1, \dots, b_m) \in B. \quad (1.11)$$

W tym przypadku funkcję o ograniczoną do m -tek postaci $\langle b_1, \dots, b_m \rangle$ takich, że $b_1, \dots, b_m \in B$ oznaczymy przez $o|_B$.

Podobną notację będziemy stosować w bardziej ogólnym przypadku: gdy $f : \prod_{t \in T} A_t \longrightarrow B$ oraz $B_t \subseteq A_t$ dla dowolnego $t \in T$. Napiszemy wówczas

$$f|_{\prod_{t \in T} B_t} \text{ na oznaczenie funkcji } A^{t \in T}.$$

Definicja 1.2.1. Niech $\bar{n} = (n_1, \dots, n_k)$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Przez **algebrę typu $\bar{n}$** rozumiemy będziemy strukturę

$$\mathcal{A} = (A, o_1, \dots, o_k), \quad (1.12)$$

gdzie A jest niepustym zbiorem oraz $o_i \in \mathcal{O}^{n_i}(A)$ dla dowolnego $i = 1, \dots, k$. Wówczas $o_1, \dots, o_k$ nazwiemy **operacjami algebry $\mathcal{A}$** , zbiór A – **nośnikiem tej algebry** (oznaczymy go przez $/\mathcal{A}/$).

O dwóch algebrach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ powiemy, że są **podobne** wtw., gdy są tego samego typu.

Niech $\mathcal{A} = (A, o_1, \dots, o_k)$ będzie algebrą ustalonego typu oraz $B \subseteq A$. O algebrze $\mathcal{B} = (B, u_1, \dots, u_k)$ powiemy, że jest **podalgebrą** algebry $\mathcal{A}$ (symbolicznie $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$) wtw. $u_i = o_i|B$ dla dowolnego $i = 1, \dots, k$.

Piszemy ponadto $\mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ wtw., gdy zachodzi jednocześnie $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ oraz $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

Założmy, że $G \subseteq A$. Oznaczmy przez $(G)_{\mathcal{A}}$ najmniejszą podalgebrę algebry $\mathcal{A}$ zawierającą zbiór G . $(G)_{\mathcal{A}}$ zawsze istnieje, gdyż rodzina $G(\mathcal{A}) = \{B \subseteq A : \langle B, o_1|B, \dots, o_k|B \rangle \preceq \mathcal{A} \text{ \& } G \subseteq B\}$ jest niepusta, bowiem zawsze należy do niej sama algebra $\mathcal{A}$, oraz rodzina podalgebr algebry $\mathcal{A}$ jest zamknięta na przecięcia. Mówimy, że $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ jest generowana przez $G \subseteq A$ w przypadku, gdy zachodzi $(G)_{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$.

Założmy, że $\mathcal{A} = (A, o_1, \dots, o_k)$, $\mathcal{B} = (B, u_1, \dots, u_k)$ są algebrami tego samego typu. Dowolną funkcję $h : A \longrightarrow B$ spełniającą dla dowolnego $i = 1, \dots, k$, dowolnych $a_1, \dots, a_{k_i} \in A$

$$h(o_i(a_1, \dots, a_{k_i})) = u_i(ha_1, \dots, ha_{k_i}) \quad (1.13)$$

nazwiemy **homomorfizmem algebr $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$** . Rodzinę wszystkich takich funkcji oznaczymy przez $\text{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Jasno widać, że $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$ wtw. $\text{id}_{/\mathcal{B}/} \in \text{hom}(\mathcal{B}, \mathcal{A})$.

Jeśli dysponujemy odwzorowaniami będącymi homomorfizmami między algebrami, to będziemy posługiwać się również pojęciami właściwymi dla funkcji. Na przykład dowolny homomorfizm algebry $\mathcal{A}$ w nią samą nazwiemy endomorfizmem tej algebry. Zbiór endomorfizmów algebry $\mathcal{A}$ będziemy oznaczać przez $\text{End}(\mathcal{A})$.

Niech dana będzie algebra $\mathcal{A} = (A, o_1, \dots, o_k)$ typu $\bar{n}$ oraz klasa algebr $\mathbf{A}$ typu $\bar{n}$. Niech ponadto $G \subseteq A$ spełnia następujący warunek

$$\begin{aligned} &\text{dla dowolnej algebry } \mathcal{B} = (B, u_1, \dots, u_k) \in \mathbf{A}, \text{ każda funkcja} \\ &f : G \longrightarrow B \text{ rozszerza się jednoznacznie do homomorfizmu} \\ &\text{między algebrami } \mathcal{A} \text{ oraz } \mathcal{B} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Wówczas G nazwiemy zbiorem **wolnych generatorów** algebry $\mathcal{A}$, a samą algebrę $\mathcal{A}$ nazwiemy **wolno generowaną** przez zbiór G w klasie $\mathbf{A}$.

Warunek (1.14) oznacza, że jeśli mamy funkcję $f : G \longrightarrow \mathcal{B}$, to istnieje funkcja $g : A \longrightarrow B$, taka że $g|G = f$ oraz $g \in \text{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Warunek jednoznaczności oznacza, że jeśli dla jakiegoś $h \in \text{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ zachodzi $h|G = f$, to $g = h$.

Strukturą algebraiczną, często występującą w następnych rozdziałach będzie algebra Heytinga. Przypominamy, że przez **algebrę Heytinga** rozumie się algebrę $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$, w której $(A, \vee, \wedge)$ jest kratą, 0 i 1 jej elementami, odpowiednio, najmniejszym i największym, $\rightarrow$ dwuargumentową operacją spełniającą:

$$x \wedge y \leq z \text{ wtw. } x \leq y \rightarrow z \quad (1.15)$$

dla dowolnych $x, y, z \in A$.

1.3 Konsekwencja logiczna

Wszystkie pojęcia i twierdzenia występujące w bieżącym podrozdziale możemy znaleźć w [51].

Niech będzie dany przeliczalnie nieskończony zbiór zmiennych zdaniowych Φ oraz skończony ciąg symboli $f_1, \dots, f_n$. Ponadto niech będzie dana funkcja $\bar{n} : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$. Definiujemy zbiór **formuł** L języka $\mathcal{L}$, jako najmniejszy pod względem inkluzji zbiór X spełniający warunki:

- i) $\Phi \subseteq X$;
- ii) jeśli $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \in X$ oraz $\bar{n}(f_i) = n$, to $f_i(\varphi_1, \dots, \varphi_k) \in X$.

Wówczas strukturę $\mathcal{L} = (L, f_1, \dots, f_n)$ możemy traktować jak algebrę typu $\bar{n}$. Łatwo jest zauważyć, że $\mathcal{L}$ jest algebrą wolno generowaną w klasie wszystkich algebr typu $(\bar{n}(1), \dots, \bar{n}(n))$. Wówczas nazwiemy $\mathcal{L}$ **językiem zdaniowym**.

Niech $\mathcal{L} = (L, f_1, \dots, f_n)$ będzie dowolnym językiem zdaniowym.

Definicja 1.3.1. Przez **relację konsekwencji** dla $\mathcal{L}$ rozumiemy dowolną relację $\vdash \subseteq \mathcal{P}(L) \times L$ spełniającą:

- i) $\varphi \in X \Rightarrow X \vdash \varphi$ (**zwrotność**)
- ii) $X \subseteq Y \ \& \ X \vdash \varphi \Rightarrow Y \vdash \varphi$ (**monotoniczność**)
- iii) $\{\psi \in L : X \vdash \psi\} \vdash \varphi \Rightarrow X \vdash \varphi$ (**idempotencja**, zwana również **domknięciem**).

Definicja 1.3.2. Dowolną operację $C : \mathcal{P}(L) \longrightarrow \mathcal{P}(L)$ nazwiemy **operacją konsekwencji** wtw. C spełnia:

- i) $X \subseteq C(X)$ (**zwrotność**)
- ii) $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$ (**przechodniość**)
- iii) $C(C(X)) \subseteq C(X)$ (**idempotencja**).

Jest wiadome, że powyższe pojęcia są równoważne, a użycie któregoś z nich jest raczej wynikiem przyzwyczajenia, bowiem dla dowolnej relacji konsekwencji $\vdash$ niech $C_{\vdash} : \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(L)$ zdefiniowana będzie:

$$C_{\vdash}(X) := \{\psi \in L : X \vdash \psi\}.$$

Odwrotnie: dla operacji konsekwencji C : niech $\vdash_C \subseteq \mathcal{P}(L) \times L$:

$$X \vdash_C \varphi \text{ wtw. } \varphi \in C(X).$$

Twierdzenie 1.3.3. $\vdash = \vdash_{C_{\vdash}}$ oraz $C = C_{\vdash_C}$. ■

Definicja 1.3.4. O konsekwencji $C : \mathcal{P}(L) \rightarrow \mathcal{P}(L)$ powiemy, że jest **strukturalna** wtw. dla dowolnego $e \in \text{End}(\mathcal{L})$, dla dowolnego $X \subseteq L$: $e[C(X)] \subseteq C(e[X])$.

(Warunek dla relacji: jeśli $X \vdash \varphi$, to $e[X] \vdash e(\varphi)$).

Definicja 1.3.5. Konsekwencja C jest **finitarna** wtw. dla dowolnego $X \subseteq L$, $\varphi \in L$: jeśli $\varphi \in C(X)$, to istnieje $X_f \in \text{Fin}(X)$, spełniający $\varphi \in C(X_f)$. W przypadku relacji $\vdash$ powiemy, że jest ona finitarna, jeśli dla dowolnych $X \subseteq L$, $\varphi \in L$ warunek $X \vdash \varphi$ implikuje $X_f \vdash \varphi$ dla jakiegoś skończonego $X_f \subseteq X$.

Niech $\mathcal{A} = (M, F_1, \dots, F_n)$ będzie algebrą podobną do języka $\mathcal{L}$. Powiemy, że $\mathfrak{M} = (M, F_1, \dots, F_n, D)$ jest **matrycą** dla języka $\mathcal{L}$, jeśli tylko $D \subseteq M$.

D – zbiór wartości wyróżnionych matrycy $\mathfrak{M}$ (porównaj [51] 3.1.1.).

Definicja 1.3.6. ([51] 3.1.1.) $\varphi \in C_{\mathfrak{M}}(X)$ wtw. dla każdego $h \in \text{hom}(\mathcal{L}, \mathcal{A})$: $h[X] \subseteq D \Rightarrow h(\varphi) \in D$.

Jeśli mamy rodzinę matryc $\mathbf{M}$ tego samego typu to definiujemy:

Definicja 1.3.7. ([51] 3.1.1.) $\varphi \in C_{\mathbf{M}}(X)$ wtw. dla każdej $\mathfrak{M} \in \mathbf{M}$: $\varphi \in C_{\mathfrak{M}}(X)$.

Przykład:

$$\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim),$$

$$\mathfrak{B}_2 = (\{0, 1\}, \bar{\wedge}, \bar{\vee}, \bar{\rightarrow}, \bar{\sim}, \{1\}) \text{ (logika klasyczna),}$$

$$\mathfrak{L}_3 = (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \bar{\wedge}, \bar{\vee}, \bar{\rightarrow}, \bar{\sim}, \{1\}) \text{ (trójwartościowa logika Łukasiewicza),}$$

gdzie operacje $\bar{\wedge}, \bar{\vee}, \bar{\rightarrow}, \bar{\sim}$ są zdefiniowane:

$$\begin{aligned} x \bar{\wedge} y &= \min\{x, y\} \\ x \bar{\vee} y &= \max\{x, y\} \\ x \bar{\rightarrow} y &= \min\{1, 1 - x + y\} \\ \bar{\sim} x &= 1 - x. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Twierdzenie 1.3.8. ([51] Twierdzenie 3.1.3.) Dla dowolnej klasy matryc $\mathbf{M}$: $C_{\mathbf{M}}$ jest strukturalną operacją konsekwencji. ■

Dla konsekwencji C oraz $X \subseteq L$ połóżmy $\mathfrak{M}_C^X = (L, f_1, \dots, f_n, C(X))$. Ponadto niech $\mathbb{L}(C) = \{\mathfrak{M}_C^X : X \subseteq L\}$. Jest to tak zwana **wiązka Lindenbauma**.

Twierdzenie 1.3.9. ([51] Twierdzenie 3.1.5.) Dla dowolnej strukturalnej konsekwencji C : $C = C_{\mathbb{L}(C)}$. ■

Definicja 1.3.10. Przez **inferencję** dla języka $\mathcal{L}$ rozumiemy parę $\langle X_f, \varphi \rangle$, gdzie $X_f \subseteq L$ jest skończonym zbiorem formuł, a φ formułą. Przez **regułę** rozumiemy dowolny zbiór inferencji. Regułę r nazywamy **aksjomatyczną** lub po prostu **aksjomatem**, jeśli warunek $\langle X_f, \varphi \rangle \in r$, implikuje $X_f = \emptyset^2$. W dalszej części określenie reguła będziemy stosować zarówno do aksjomatów jak i do reguł z niepustymi zbiorami przesłanek.

Dla dowolnego zbioru reguł $\mathcal{R}$, ciąg formuł $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ nazwiemy **dowodem** formuły φ ze zbioru X w oparciu o zbiór reguł $\mathcal{R}$ wtw.

- $\varphi_m = \varphi$,
- dla każdego $1 \leq i \leq m$:
 - $\varphi_i \in X$ lub
 - istnieją $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}\}$ oraz $r \in \mathcal{R}$ takie, że $\langle \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}, \varphi_i \rangle \in r$.

Piszemy $\varphi \in C_{\mathcal{R}}(X)$ wtw. istnieje dowód formuły φ ze zbioru X na gruncie reguł ze zbioru $\mathcal{R}$.

Przykład: $\mathcal{L} = (L, \rightarrow)$,
 $r_1 = \{\langle \emptyset, \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \rangle : \varphi, \psi \in L\}$,
 $r_2 = \{\langle \emptyset, (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rangle : \varphi, \psi, \chi \in L\}$,
 $r_{MP} = \{\langle \{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\}, \psi \rangle : \varphi, \psi \in L\}$,
 $C_{\{r_1, r_2, r_{MP}\}}$ – implikacyjna logika Hilberta.

Definicja 1.3.11. Powiemy, że zbiór formuł X jest **zamknięty na regułę** r wtw. dla każdego $\langle Y, \varphi \rangle \in r$: $Y \subseteq X \Rightarrow \varphi \in X$.
 Kładziemy

$$Cn_{\mathcal{R}}(X) = \bigcap \{Y \subseteq L : X \subseteq Y \text{ oraz } Y \text{ jest zamknięty na każdą z reguł } r \in \mathcal{R}\}. \quad (1.17)$$

Dla operacji konsekwencji C niech
 $r_X = \{\langle X_f, \varphi \rangle : X_f \text{ jest skończonym podzbiorem } X \text{ \& } \varphi \in C(X_f)\}$.

$$\mathcal{R}(C) = \{r_X : X \subseteq L\}.$$

Przytoczymy teraz bez dowodów kilka znanych twierdzeń charakteryzujących operacje $Cn_{\mathcal{R}}$, $Cn_{\mathcal{R}}$ oraz $C_{\mathcal{R}(C)}$.

Twierdzenie 1.3.12. $C_{\mathcal{R}}$ jest *finitarną* operacją konsekwencji. ■

Twierdzenie 1.3.13. $Cn_{\mathcal{R}}(X)$ jest *najmniejszym w sensie $\subseteq$ zbiorem formuł zawierającym X i zamkniętym na wszystkie reguły $r \in \mathcal{R}$* . ■

² Innymi słowy, aksjomat to po prostu reguła bezprzesłankowa.

Twierdzenie 1.3.14. $Cn_{\mathcal{R}} = C_{\mathcal{R}}$. ■

Twierdzenie 1.3.15. Dla dowolnej finitarnej konsekwencji C : $C = C_{\mathcal{R}(C)}$. ■

Nazwijmy $X \subseteq L$ **C -teorią** jeśli $C(X) = X$. W przypadku konsekwencji wyrażonej przez relację, warunek ten możemy zapisać: X jest $\vdash$ -teorią, gdy zachodzi implikacja $X \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in X$.

Położmy $Th(C) = \{X \subseteq L : X \text{ jest } C\text{-teorią}\}$ i analogicznie $Th(\vdash) = \{X \subseteq L : X \text{ jest } \vdash\text{-teorią}\}$. Załóżmy, że zbiór formuł Σ spełnia dwa warunki

- i) $\Sigma \not\vdash \varphi$;
- ii) $\forall \psi \notin \Sigma, \psi \vdash \varphi$.

Powiemy wówczas, że Σ jest **zbiorem relatywnie maksymalnym względem φ** . Jeśli istnieje przynajmniej jedna formuła względem której Σ jest relatywnie maksymalny, to powiemy po prostu, że Σ jest **relatywnie maksymalny** (lub by być precyzyjnym, relatywnie $\vdash$ -maksymalny). Rodzina wszystkich relatywnie $\vdash$ -maksymalnych zbiorów oznaczana będzie przez $RMax(\vdash)$. Łatwo jest pokazać, że dowolny element zbioru $RMax(\vdash)$ jest $\vdash$ -teorią, to znaczy jest zamknięty na każdą inferencję relacji $\vdash$.

Przytaczamy bez dowodu lemat, szczególnie użyteczny podczas przeprowadzania dowodów o pełności:

Lemat 1.3.16. (Lemat Lindenbauma)

Jeśli $\vdash$ jest finitarną relacją konsekwencji oraz $\Sigma \not\vdash \varphi$, to istnieje Σ_{φ} – zbiór relatywnie $\vdash$ -maksymalny względem φ , jednocześnie zawierający Σ . ■

1.4 Logiki modalne

Składnia logik modalnych. Większość definicji występujących w tym paragrafie pochodzi z [4].

Definicja 1.4.1. Przez **typ podobieństwa modalnego** rozumiemy parę $\tau = (O, \rho)$, gdzie O jest niepustym zbiorem **operatorów modalnych**, natomiast $\rho : O \rightarrow \mathbb{N}$ funkcją przyporządkowującą operatorowi $\Delta \in O$ ilość jego argumentów $\rho(\Delta)$ (w szczególnym przypadku $\rho(\Delta)$ może być równe 0).

Definicja 1.4.2. Niech Φ będzie zbiorem atomów. Definiujemy **zbiór formuł nad Φ i sygnaturą τ** (symb. $Form(\tau, \Phi)$) w następujący sposób:

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)}) \quad (1.18)$$

to znaczy $Form(\tau, \Phi)$ jest najmniejszym zbiorem zawierającym Φ , zamkniętym na negację $\neg$, koniunkcję $\wedge$ oraz na regułę

$$\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)} \mid \Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)}) \quad (1.19)$$

dla każdego $\Delta \in O$. Powyższa definicja jest na tyle ogólna, by objąć swoim zasięgiem wiele znanych przykładów języków modalnych³. Pozostałe spójniki można zdefiniować

$$\begin{aligned} \perp &:= p \wedge \neg p \\ \varphi \vee \psi &:= \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ \varphi \rightarrow \psi &:= \neg\varphi \vee \psi. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ze względu na częste użycie języka o sygnaturze $(\{\Delta\}, \{\langle\Delta, 1\rangle\})$, zbiór formuł $Form((\{\Delta\}, \{\langle\Delta, 1\rangle\}), \{p_1, p_2, \dots\})$ oznaczать będziemy przez L_Δ , sam zaś operator modalny Δ przez $\Diamond$. W konkretnych formułach będziemy używać raczej zmiennych p, q, r, s, t zamiast zmiennych z indeksami.

W stosunku do języka modalnego używa się określenia **multimodalny** w dwóch znaczeniach:

- gdy $|O| > 1$, tj. gdy sygnatura języka zawiera przynajmniej dwa operatory,
- gdy istnieje $\Delta \in O$ taki, że $\rho(\Delta) > 1$, czyli istnieje przynajmniej jeden operator więcej niż jednoargumentowy.

Jeżeli będziemy używać tego pojęcia, to zawsze podamy o które nam chodzi (np. **język multimodalny o wielu operatorach jednoargumentowych**).

Dla każdego operatora $\Delta \in O$ definiuje się **operator dualny**:

$$\nabla(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)}) := \neg\Delta(\neg\varphi_1, \dots, \neg\varphi_{\rho(\Delta)}). \quad (1.21)$$

Jeśli ∇ jest dualny względem Δ , to rozszerzamy funkcję ρ kładąc $\rho(\nabla) := \rho(\Delta)$.

W przypadku języków monomodalnych, formułę $\Diamond\varphi$ czytamy **możliwe, że** φ . Operator dualny (typu koniecznościowego) powstały zgodnie z definicją $\Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi$, czyli **nieprawda, że możliwe, że nie** φ czytamy po prostu: **konieczne, że** φ . Jeśli dysponujemy większą ilością operatorów jednoargumentowych, zapisujemy je w następujący sposób: $\langle a \rangle$, gdzie a jest jakąś jego ustaloną etykietą. Operator dualny względem takiego operatora oznaczmy: $[a]$.

Często zdarza się, że O w sygnaturze nie jest zwykłym zbiorem, lecz dodatkowo dysponujemy określonymi nań działaniami. Na przykład w języku dla tak zwanej *Propositional Dynamic Logic (PDL)* mamy dany zbiór **programów atomowych** $\{a_1, a_2, \dots\}$ oraz działania dwuargumentowe $\cup$ oraz ; i jedno działanie jednoargumentowe $*$. Wówczas struktura $\langle A, \cup, ;, * \rangle$, gdzie A jest zbiorem generowanym przez $\{a_1, a_2, \dots\}$, stanowi algebrę wolną w swojej klasie.

Logikę modalną często traktuje się jako synonim logiki z modalnościami jednoargumentowymi (tj. typu koniecznościowego i możliwościowego). Jednakże

³ W Rozdziale 4. podamy jeszcze ogólniejszą definicję obejmującą inne niż booleowskie zestawy spójników.

rozwijane są z powodzeniem logiki wyrażone w języku zawierającym dwuargumentowe operatory modalne S (od *since*) oraz U (*until*).

Semantyka relacyjna dla logik modalnych. Aby uchwycić sens i różnorodność logik (nie tylko modalnych), konieczne jest przedstawienie ich semantyki. Najbardziej znaną i najczęściej używaną jest **semantyka relacyjna**. Mimo iż posiada ona pewne istotne ograniczenie (ekspresja), to żadne, nawet najbardziej pobieżne przedstawienie problematyki logiki modalnej, nie może pominąć tego typu semantyk.

Podstawą ich sukcesu są niewątpliwie – intuicyjność oraz względna prostota. Te cechy przekładają się również na uniwersalność zastosowań (od logik czysto modalnych, przez logiki temporalne, do logik deontycznych).

Regułą jest, że przedstawienie pojęć powinno zaczynać się od najbardziej ogólnego. My jednak uznaliśmy, że zaczniemy od najprostszego; zbyt wczesne wprowadzenie najbardziej generalnego pojęcia mogłoby wprowadzić zamieszanie. Zaczniemy zatem od przedstawienia semantyki dla języka zawierającego jeden tylko jednoargumentowy operator modalny $\Diamond$. Przyświeca nam bowiem strategia łagodnego wprowadzania w problematykę, zaczynająca od pojęć znanych.

Definicja 1.4.3. *Niech W będzie niepustym zbiorem, R relacją binarną na nim określoną. Przez **strukturę relacyjną** dla języka $L_\Diamond$ będziemy rozumieć parę postaci $\mathfrak{F} = (W, R)$. Elementy W nazywać będziemy **punktami** bądź **światami**, relację R – relację **osiągalności**. W przypadku gdy $\langle w, v \rangle \in R$ będziemy również mówili, że v jest **widzialny** z punktu (świata) w . Przez **model Kripkego zbazowany na $\mathfrak{F} = (W, R)$** nazywać będziemy strukturę $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, gdzie $V : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ jest wartościowaniem.*

Dla struktury relacyjnej $\mathfrak{F} = (W, R)$ kładziemy $/\mathfrak{F}/ := W$ oraz dla modelu Kripkego $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, R)$: $/\mathfrak{M}/ := /\mathfrak{F}/$.

Definiujemy relację $\Vdash$ **prawdziwości formuły w punkcie modelu**:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{F}, V, w \Vdash p & \text{wtw.} & w \in V(p) \\ \mathfrak{F}, V, w \Vdash \neg\varphi & \text{wtw.} & \mathfrak{F}, V, w \not\Vdash \varphi \\ \mathfrak{F}, V, w \Vdash \varphi \wedge \psi & \text{wtw.} & \mathfrak{F}, V, w \Vdash \varphi \ \& \ \mathfrak{F}, V, w \Vdash \psi \\ \mathfrak{F}, V, w \Vdash \Diamond\varphi & \text{wtw.} & \mathfrak{F}, V, v \Vdash \varphi \\ & & \text{dla pewnego } v \in W, \text{ takiego że } Rww. \end{array}$$

Zwróćmy uwagę, że warunki dla pozostałych definiowanych spójników przedstawiają się następująco:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{F}, V, w \not\Vdash \perp & & \\ \mathfrak{F}, V, w \Vdash \varphi \vee \psi & \text{wtw.} & \mathfrak{F}, V, w \Vdash \varphi \ \text{ lub } \ \mathfrak{F}, V, w \Vdash \psi \\ \mathfrak{F}, V, w \Vdash \Box\varphi & \text{wtw.} & \mathfrak{F}, V, v \Vdash \varphi \\ & & \text{dla każdego } v \in W, \text{ takiego, że } Rww. \end{array}$$

Jedynym warunkiem, oprócz pierwszego, wartym omówienia jest tutaj warunek dla operatora możliwości. Formuła $\Diamond\varphi$ jest prawdziwa w punkcie w (w mo-

delu $\mathfrak{M}$) wtw., gdy istnieje punkt v osiągalny z w , w którym prawdziwa jest formuła φ .

Podobnie – formuła $\Box\varphi$ jest prawdziwa w punkcie w (w modelu $\mathfrak{M}$) wtw., gdy dla każdego punktu v , który jest osiągalny z w prawdziwa jest sama formuła φ .

Mając daną strukturę relacyjną $\mathfrak{F} = (W, R)$ oraz punkt $w \in W$ piszemy

$$\mathfrak{F}, w \models \varphi \quad (1.22)$$

jeśli tylko

$$\mathfrak{F}, V, w \models \varphi \quad (1.23)$$

dla każdego wartościowania V w strukturze relacyjnej $\mathfrak{F}$.

Mówimy wówczas, że φ jest **spełniona** w punkcie w , w strukturze relacyjnej $\mathfrak{F}$.

Podobnie piszemy:

$$\mathfrak{F} \models \varphi \quad (1.24)$$

wtw., gdy

$$\mathfrak{F}, w \models \varphi \quad (1.25)$$

dla każdego $w \in W$. Mówimy wówczas, że φ jest spełniona w strukturze relacyjnej $\mathfrak{F}$.

Możemy również ustalić wartościowanie V i napisać:

$$(\mathfrak{F}, V) \models \varphi \quad (1.26)$$

wtw.

$$(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \varphi \text{ dla każdego } w \in W. \quad (1.27)$$

We wszystkich powyższych przypadkach posługujemy się bardziej kompaktową notacją:

$$\begin{aligned} Th(\mathfrak{M}, w) &:= \{\varphi \in L_{\Diamond} : \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\} \\ Th(\mathfrak{M}) &:= \bigcap_{w \in W} Th(\mathfrak{M}, w) \\ Th(\mathfrak{F}, w) &:= \bigcap \{Th((\mathfrak{F}, V), w) : V \in \mathcal{P}(W)^{\Phi}\} \\ Th(\mathfrak{F}) &:= \bigcap_{w \in W} Th(\mathfrak{F}, w). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Łatwo zauważyć, że zbiory $Th(\mathfrak{M}, w)$, $Th(\mathfrak{M})$, $Th(\mathfrak{F}, w)$, $Th(\mathfrak{F})$ są teoriami, co uzasadnia ich notację.

Dla dowolnych modeli Kripkego $\mathfrak{M} = ((W, R), V)$, $\mathfrak{N} = ((W, S), V')$ oraz punktów $w \in W$, $w' \in W'$ definiujemy relację

$$w \overset{(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})}{\longleftrightarrow} w' \text{ wtw. } Th(\mathfrak{M}, w) = Th(\mathfrak{N}, w'). \quad (1.29)$$

W przypadku gdy modele są ustalone, mają rozłączne dziedziny i wiadomo o jakie modele chodzi, będziemy pisać po prostu $w \rightsquigarrow w'$.

Podobną notację stosujemy dla struktur relacyjnych:

$$w \xrightarrow[\mathfrak{F}, \mathfrak{G}} w' \text{ wtw. } Th(\mathfrak{F}, w) = Th(\mathfrak{G}, w'). \quad (1.30)$$

Modele o modalnościach wieloargumentowych. Mając rozeznanie w modelach Kripkego dla podstawowego języka modalnego możemy uogólnić ten przypadek na szerszą klasę języków.

Założmy, że $\tau = (O, \rho)$ jest typem podobieństwa modalnego.

Definicja 1.4.4. Przez strukturę τ -relacyjną rozumiemy strukturę $\mathfrak{F} = (W, R_\Delta)_{\Delta \in O}$, gdzie W jest niepustym zbiorem, oraz dla każdego $\Delta \in O$, R_Δ jest relacją $\rho(\Delta) + 1$ argumentową na zbiorze W .

Mając dane wartościowanie $V \in \mathcal{P}(W)^\Phi$ w strukturze relacyjnej $\mathfrak{F}$ definiujemy relację **prawdziwości formuły φ w punkcie w w modelu $\mathfrak{M}$** podobnie jak w przypadku jednoargumentowym, jednakże z uwzględnieniem nowych operatorów:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \Vdash \Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)}) \quad & \text{wtw. istnieją } v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W \text{ takie, że} \\ & R_\Delta w v_1 v_2 \dots v_{\rho(\Delta)} \text{ oraz} \\ \mathfrak{M}, v_i \Vdash \varphi_i \text{ dla } i = 1, \dots, \rho(\Delta). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Zgodnie z definicją, prawdziwość dla operatora dualnego może być opisana:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \Vdash \nabla(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\nabla)}) \quad & \text{wtw. dla każdych } v_1, \dots, v_{\rho(\nabla)} \in W \text{ takich, że} \\ & R_\Delta w v_1 v_2 \dots v_{\rho(\nabla)} \text{ zachodzi} \\ \mathfrak{M}, v_i \Vdash \varphi_i \text{ dla pewnego } i = 1, \dots, \rho(\nabla). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Pojęcia przedstawione w (1.22)-(1.23), (1.24)-(1.25), (1.26)-(1.27) oraz (1.28) bez zmian przenoszą się na języki multimodalne.

Mając dany model Kripkego $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ oraz punkt $w \in \mathfrak{F}$, definiujemy relację konsekwencji:

$$\Sigma \models_{\mathfrak{M}, w} \varphi \text{ wtw. } \forall \psi \in \Sigma \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \Rightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi. \quad (1.33)$$

Parametryzując poszczególne elementy, z powyższej definicji otrzymujemy kolejne:

$$\models_{\mathfrak{M}} := \bigcap_{w \in \mathfrak{M}/} \models_{\mathfrak{M},w} \quad (1.34)$$

$$\models_{\mathfrak{F},w} := \bigcap_{V \in \mathcal{P}(/ \mathfrak{F} /)^\Phi} \models_{(\mathfrak{F},V),w} \quad (1.35)$$

$$\models_{\mathfrak{F}} := \bigcap_{w \in \mathfrak{F}/} \models_{\mathfrak{F},w} . \quad (1.36)$$

W logice często zdarza się, że definiujemy konsekwencję za pomocą klasy modeli. Nie inaczej jest w przypadku logik modalnych. Niech bowiem $\mathbf{M}$ będzie jakąś klasą modeli Kripkego. Możemy wówczas położyć

$$\models_{\mathbf{M}} := \bigcap \{ \models_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M} \in \mathbf{M} \}. \quad (1.37)$$

Ponadto definiujemy dla klasy struktur relacyjnych $\mathbf{F}$:

$$\models_{\mathbf{F}} := \bigcap \{ \models_{(\mathfrak{F},V)} : \mathfrak{F} \in \mathbf{F} \text{ \& } V \in \mathcal{P}(/ \mathfrak{F} /)^\Phi \}. \quad (1.38)$$

Możliwe są jeszcze inne definicje, nie rozpatrywane w literaturze (przynajmniej znanej autorowi). Niech bowiem $\mathbf{F}$ będzie klasą struktur relacyjnych oraz $w_0 \in \bigcap \{ / \mathfrak{F} / : \mathfrak{F} \in \mathbf{F} \}$.

Relacją konsekwencji jest również

$$\models_{\mathbf{F},w_0} := \bigcap \{ \models_{\mathfrak{F},w_0} : \mathfrak{F} \in \mathbf{F} \}. \quad (1.39)$$

Podobnie, jeśli $w_0 \in \bigcap \{ / \mathfrak{M} / : \mathfrak{M} \in \mathbf{M} \}$ dla jakiejś klasy modeli Kripkego $\mathbf{M}$:

$$\models_{\mathbf{M},w_0} := \bigcap \{ \models_{\mathfrak{M},w_0} : \mathfrak{M} \in \mathbf{M} \}. \quad (1.40)$$

Powyższe definicje możemy jeszcze uogólnić, gdy $W_0 \subseteq \bigcap \{ / \mathfrak{F} / : \mathfrak{F} \in \mathbf{F} \}$:

$$\models_{\mathbf{F},W_0} := \bigcap_{w_0 \in W_0} \models_{\mathbf{F},w_0} . \quad (1.41)$$

oraz gdy $W_0 \subseteq \bigcap \{ / \mathfrak{M} / : \mathfrak{M} \in \mathbf{M} \}$:

$$\models_{\mathbf{M},W_0} := \bigcap_{w_0 \in W_0} \models_{\mathbf{M},w_0} . \quad (1.42)$$

Powinno być oczywiste, że $\models_{\{\mathfrak{F}\},/\{\mathfrak{F}\}/} = \models_{\mathfrak{F}}$ oraz $\models_{\{\mathfrak{M}\},/\{\mathfrak{M}\}/} = \models_{\mathfrak{M}}$.

Powyższe uogólnienia obejmują definicje (1.37) oraz (1.38) stanowiące **lokalne relacje konsekwencji**, lecz niezależnie można wprowadzać tak zwane **globalne relacje konsekwencji**.

Jeśli będzie dana struktura relacyjna $\mathfrak{F}$ czy też model $\mathfrak{M}$ definiujemy globalną konsekwencję

$$\begin{aligned} \Sigma \models_{\mathfrak{F}}^g \varphi & \quad \text{wtw.} \quad \forall \psi \in \Sigma \models_{\mathfrak{F}} \psi \Rightarrow \models_{\mathfrak{F}} \varphi, \\ \Sigma \models_{\mathfrak{M}}^g \varphi & \quad \text{wtw.} \quad \forall \psi \in \Sigma \models_{\mathfrak{M}} \psi \Rightarrow \models_{\mathfrak{M}} \varphi, \end{aligned} \quad (1.43)$$

jak również dla klas: struktur relacyjnych F oraz modeli M

$$\begin{aligned} \models_F^g & := \bigcap_{\mathfrak{F} \in F} \models_{\mathfrak{F}}^g \\ \models_M^g & := \bigcap_{\mathfrak{M} \in M} \models_{\mathfrak{M}}^g. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Prosta analiza pojęć pozwala stwierdzić, że o ile $\models_F \subseteq \models_F^g$ oraz $\models_M \subseteq \models_M^g$, o tyle odwrotne inkluzje nie muszą mieć miejsca. Jednak w przypadku rozpatrywania logik jako zbiorów tez, powyższe definicje zbiegają się, tzn. $\{\varphi : \models_F \varphi\} = \{\varphi : \models_F^g \varphi\}$ oraz $\{\varphi : \models_M \varphi\} = \{\varphi : \models_M^g \varphi\}$.

Tutaj również pokusimy się o pewne uogólnienia. Nazwijmy parę $(\mathfrak{F}, \mathcal{X})$ **strukturą relacyjną z rodziną wyróżnioną**, jeśli $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(/ \mathfrak{F} /))$. Definiujemy:

$$\begin{aligned} \Sigma \models_{\mathfrak{F}}^{g, \mathcal{X}} \varphi & \quad \text{wtw.} \\ \forall X \in \mathcal{X}, V \in \mathcal{P}(/ \mathfrak{F} / \ast) & [\forall w \in X \forall \psi \in \Sigma (\mathfrak{F}, V), w \Vdash \psi \Rightarrow \forall w \in X (\mathfrak{F}, V), w \Vdash \varphi]. \end{aligned}$$

Analogicznie, nazwijmy strukturę $(\mathfrak{M}, \mathcal{X})$ **modelem z rodziną wyróżnioną**, jeśli $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(/ \mathfrak{M} /))$ i połóżmy:

$$\begin{aligned} \Sigma \models_{\mathfrak{M}}^{g, \mathcal{X}} \varphi & \quad \text{wtw.} \quad \forall X \in \mathcal{X} [\forall w \in X \forall \psi \in \Sigma \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \Rightarrow \forall w \in X \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi]. \\ \text{\textbf{\textit{Łatwo jest zauważyć, że}}} & \models_{\mathfrak{F}}^g = \models_{\mathfrak{F}}^{g, \{\{w\} : w \in / \mathfrak{F} /\}} \quad \text{ i } \models_{\mathfrak{M}}^g = \models_{\mathfrak{M}}^{g, \{\{w\} : w \in / \mathfrak{M} /\}} \quad \text{ oraz} \end{aligned}$$

$\models_{\mathfrak{F}}^g = \models_{\mathfrak{F}}^{g, \{\{w\} : w \in / \mathfrak{F} /\}} \quad \text{ i } \models_{\mathfrak{M}}^g = \models_{\mathfrak{M}}^{g, \{\{w\} : w \in / \mathfrak{M} /\}} \quad \text{ Ponadto jeśli dla każdego } X \in \mathfrak{X} \text{ istnieje } \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{Y} \text{ taki, że } X = \bigcup \mathfrak{Z}, \text{ to } \models_{\mathfrak{F}}^{g, \mathfrak{Y}} \subseteq \models_{\mathfrak{F}}^{g, \mathfrak{X}}.$

Pewne normalne logiki modalne. Zaczniemy od przedstawienia aksjomatyki dla logiki klasycznej, będącej podstawą dla normalnych logik modalnych.

$$(\rightarrow_1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(\rightarrow_2) \quad [\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$$

$$(\wedge_1) \quad \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$$

$$(\wedge_2) \quad \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$$

- $(\wedge_3) \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$
 $(\vee_1) \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$
 $(\vee_2) \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$
 $(\vee_3) (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi)]$
 $(\neg_1) \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \psi)$
 $(\neg_2) (\varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \neg \varphi$
 $(\neg_3) \neg \varphi \vee \varphi$
 $(MP) \varphi \rightarrow \psi, \varphi/\psi.$

Oznaczmy zbiór reguł:

$\{(\rightarrow_1), (\rightarrow_2), (\wedge_1), (\wedge_2), (\wedge_3), (\vee_1), (\vee_2), (\vee_3), (\neg_1), (\neg_2), (\neg_3), (MP)\}$ przez Cl . Jak wiadomo, Cl definiuje relację konsekwencji $\vdash_{Cl}$ identyczną z relacją $\models_{\mathcal{B}_2}$ wyznaczoną przez dwuelementową algebrę Boole'a ze zbiorem wyróżnionym $\{1\}$.

Definicja 1.4.5. Przez $\mathbf{K}$ rozumiemy najmniejszy pod względem inkluzji zbiór formuł zawierający wszystkie podstawienia w języku $L_\Diamond$ aksjomatów logiki klasycznej, zamknięty na regułę (MP) oraz trzy specyficzne reguły:

$$\begin{array}{ll}
 (K) & \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi) \\
 (Dual) & \Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi \\
 (G) & \varphi/\Box\varphi.
 \end{array} \tag{1.45}$$

Jednocześnie definiujemy finitarną relację konsekwencji dla logiki $\mathbf{K}$:

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \varphi \quad \text{wtw.} \quad \begin{array}{l} \text{istnieje skończony podzbiór } \{\chi_1, \dots, \chi_k\} \\ \text{zbioru } \Sigma \text{ taki, że } \chi_1 \wedge \dots \wedge \chi_k \rightarrow \varphi \in \mathbf{K}. \end{array} \tag{1.46}$$

Niech $\mathbf{K}$ będzie klasą wszystkich modeli Kripkego.

Twierdzenie 1.4.6. (Twierdzenie o adekwatności dla $\mathbf{K}$): $\vdash_{\mathbf{K}} = \models_{\mathbf{K}}$. ■

Dowód powyższego twierdzenia, można znaleźć np. w [4]. Wskazuje ono, że najsłabsza logika modalna definiowana za pomocą klasy modeli Kripkego, to właśnie $\mathbf{K}$.

Możemy wzmocnić logikę np. poprzez nałożenie warunków na relację osiągalności, a tym samym zmniejszenie klasy modeli Kripkego. Niech $\mathbf{K4}$ będzie klasą wszystkich modeli Kripkego, w których relacja osiągalności jest przechodnia.

Dodajmy do zbioru reguł $\mathbf{K}$ aksjomat

$$(4) \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi \tag{1.47}$$

i nazwijmy tak otrzymany zbiór $\mathbf{K4}$. Podobnie jak poprzednio

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K4}} \varphi \quad \text{wtw.} \quad \begin{array}{l} \text{istnieje skończony podzbiór } \{\chi_1, \dots, \chi_k\} \\ \text{zbioru } \Sigma \text{ taki, że } \chi_1 \wedge \dots \wedge \chi_k \rightarrow \varphi \in \mathbf{K4}. \end{array} \tag{1.48}$$

Twierdzenie 1.4.7. (*Twierdzenie o adekwatności dla $\mathbf{K4}$*): $\vdash_{\mathbf{K4}} = \models_{\mathbf{K4}}$. ■

Poprzez dodawanie warunków na relację osiągalności możemy definiować, w sposób podany powyżej, wiele różnych logik. W tabeli przedstawiamy kilka logik oraz warunków jakie im odpowiadają

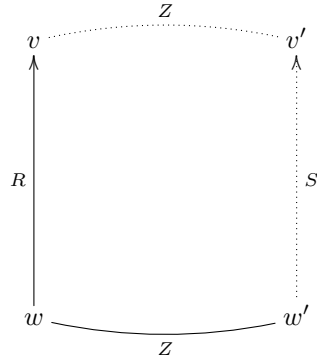
nazwa logiki	warunek relacji	specyficzny aksjomat
B	symetryczna	$(B) \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$
T	zwrotna	$(T) \varphi \rightarrow \Diamond \varphi$
S4	zwrotna i przechodnia	$(B) + (T)$
S5	zwrotna, symetryczna i przechodnia	$(B) + (T) + (4)$

Najważniejsze konstrukcje teoriomodelowe. Jednym z najważniejszych pojęć w teorii modeli dla logik modalnych jest **bisymulacja**. Niech $\mathfrak{F} = (W, R)$ oraz $\mathfrak{G} = (W', S)$ będą strukturami relacyjnymi.

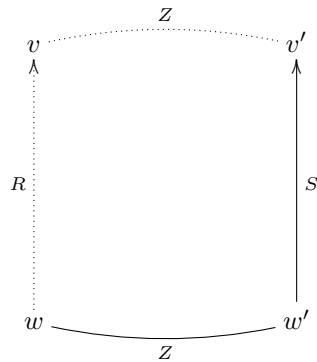
Definicja 1.4.8. Bisymulacja między $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$, to relacja $\emptyset \neq Z \subseteq W \times W'$ spełniająca (dla wZw'):

- i) Rwv to istnieje $v' \in W'$ taki, że $Sw'v'$ oraz vZv' (“forth condition”);
- ii) $Sw'v'$ to dla jakiegoś $v \in W$ zachodzi Rwv i vZv' (“back condition”).

Graficznie pierwszy i drugi warunek bisymulacji można przedstawić na diagramach



“forth condition”



“back condition”

Definicja 1.4.9. **Bisymulacja między modelami Kripkego** $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ oraz $\mathfrak{N} = (\mathfrak{G}, V')$, to każda relacja Z będąca bisymulacją pomiędzy strukturami relacyjnymi $\mathfrak{F}$ oraz $\mathfrak{G}$, spełniająca następujące warunki

iii) jeśli wZw' , to $w \in V(p)$ wtw. $w' \in V'(p)$ dla dowolnej $p \in \Phi$.

Przyjmujemy następującą notację:

- $Z : \mathfrak{F} \leftrightarrow \mathfrak{G}$
jeśli jest bisymulacją między strukturami relacyjnymi $\mathfrak{F}$ oraz $\mathfrak{G}$,
- $Z : \mathfrak{F}, w \leftrightarrow \mathfrak{G}, w'$
jeśli Z jest bisymulacją między strukturami relacyjnymi $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{G}$ oraz wZw' ,
- $Z : (\mathfrak{F}, V) \leftrightarrow (\mathfrak{G}, V')$
jeśli $Z : \mathfrak{F} \leftrightarrow \mathfrak{G}$ oraz $w \in V(p)$ wtw. $w' \in V'(p)$ dla wZw' (czyli Z stanowi bisymulację pomiędzy modelami Kripkego),
- $Z : (\mathfrak{F}, V), w \leftrightarrow (\mathfrak{G}, V'), w'$ wtw. $Z : (\mathfrak{F}, V) \leftrightarrow (\mathfrak{G}, V')$ oraz wZw' .

Możemy również skwantyfikować samą bisymulację pisząc:

- $\mathfrak{F} \leftrightarrow \mathfrak{G}$
jeśli istnieje bisymulacja Z między strukturami relacyjnymi $\mathfrak{F}$ oraz $\mathfrak{G}$,
- $\mathfrak{F}, w \leftrightarrow \mathfrak{G}, w'$
jeśli istnieje bisymulacja Z między strukturami relacyjnymi $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{G}$ oraz wZw' ,
- $(\mathfrak{F}, V) \leftrightarrow (\mathfrak{G}, V')$
jeśli istnieje bisymulacja łącząca modele $(\mathfrak{F}, V)$ oraz $(\mathfrak{G}, V')$,
- $(\mathfrak{F}, V), w \leftrightarrow (\mathfrak{G}, V'), w'$
gdzie $Z : (\mathfrak{F}, V), w \leftrightarrow (\mathfrak{G}, V'), w'$ dla pewnej bisymulacji Z .

Twierdzenie 1.4.10. (Twierdzenie o bisymulacji) Dla dowolnej bisymulacji $Z : \mathfrak{M} \leftrightarrow \mathfrak{N}$ zachodzi $Z \subseteq \overset{\leftrightarrow}{\underset{(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})}{\hookrightarrow}}$. ■

Definicja 1.4.11. Każda funkcja $f : W \longrightarrow W'$ spełniająca:

- i) $Rwv \Rightarrow Sfwfv$;
- ii) $Sfwv' \Rightarrow \exists v \in W (Rwv \ \& \ fv = v')$

jest nazywana **p-morfizmem między $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{G}$** ($f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$).

Jeśli dla $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, $\mathfrak{N} = (\mathfrak{G}, V')$ zachodzić będzie $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$ oraz $w \in V(p)$ wtw. $f(w) \in V'(p)$ dla dowolnej $p \in \Phi$, to powiemy, że **f jest p-morfizmem między $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$** , pisząc przy tym $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$.

Naturalnie, f jest p-morfizmem wtw. f jest bisymulacją będącą funkcją. Stąd i z 1.4.10 otrzymujemy:

Twierdzenie 1.4.12. (Twierdzenie o p-morfizmie). Jeśli $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, to $w \overset{\leftrightarrow}{\hookrightarrow} f(w)$ dla $w \in W$. ■

Rozszerzmy pojęcie bisymulacji na struktury o dowolnej sygnaturze modalnej τ .

Definicja 1.4.13. Niech $\mathfrak{F}$ oraz $\mathfrak{G}$ będą strukturami relacyjnymi typu $\tau = (O, \rho)$. Mówimy, że $\emptyset \neq Z \subseteq / \mathfrak{F} / \times / \mathfrak{G} /$ jest **bisymulacją między $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$** wtw. dla wZw' zachodzą (dla $\Delta \in O$)

- i) jeśli $R_{\Delta}wv_1 \dots v_{\rho(\Delta)}$, to istnieją $v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in / \mathfrak{G} /$ takie, że $R'_{\Delta}w'v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)}$ oraz $v_iZv'_i$ dla $i = 1, \dots, \rho(\Delta)$;
- ii) jeśli $R'_{\Delta}w'v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)}$, to istnieją $v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in / \mathfrak{F} /$ takie, że $R_{\Delta}wv_1 \dots v_{\rho(\Delta)}$ oraz $v_iZv'_i$ dla $i = 1, \dots, \rho(\Delta)$.

Definicja 1.4.14. Niech $\mathfrak{F} = (W, R_{\Delta})_{\Delta \in \tau}$ oraz $\mathfrak{G} = (W', S_{\Delta})_{\Delta \in \tau}$. O funkcji $f : W \rightarrow W'$ powiemy, że jest **p-morfizmem** wtw.

- i) $R_{\Delta}wv_1 \dots v_{\rho(\Delta)}$ implikuje $S_{\Delta}f w f v_1 \dots f v_{\rho(\Delta)}$ dla $w, v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)}$;
- ii) jeśli $S_{\Delta}f(w)v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)}$, to istnieją $v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W$ takie, że $R_{\Delta}wv_1 \dots v_{\rho(\Delta)}$ oraz $f(v_i) = v'_i$ dla $i = 1, \dots, \rho(\Delta)$.

Jak w szczególnym przypadku będziemy pisać $Z : \mathfrak{F} \rightleftharpoons \mathfrak{G}$ oraz $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{G}$.

Należy tutaj nadmienić, że w przypadku każdej sygnatury twierdzenia 1.4.10 i 1.4.12 pozostają w mocy.

Wykażemy teraz kilka faktów dotyczących algebraicznych własności zbioru $B(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$, tzn. zbioru wszystkich bisymulacji między $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$.

Stosunkowo łatwo jest pokazać, że dla dowolnego $\emptyset \neq Z \subseteq B(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$: $\bigcup Z \in B(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$.

Fakt 1.4.15. $(B(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}), \cup)$ jest półkratą, w której dla każdego niepustego podzbioru istnieje kres górny. ■

Nietrudno pokazać, że jeśli $Z_1 \in B(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$, $Z_2 \in B(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$, to $Z_1 \circ Z_2 \in B(\mathfrak{F}, \mathfrak{H})$ jeśli tylko $Z_1 \circ Z_2 \neq \emptyset$, skąd wynika, że zbiór $B(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) \cup \{\emptyset\}$ jest zamknięty na złożenia.

Ponadto dla $Z \in B(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ oraz $\{Z_t\}_{t \in T} \subseteq B(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$: $Z \circ \bigcup_{t \in T} Z_t = \bigcup_{t \in T} (Z \circ Z_t)$.

Fakt 1.4.16. $(B(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \cup \{\emptyset\}, \wedge, \cup)$ jest dystrybutywną kratą zupełną, gdzie $\bigwedge A = \bigcup \{Z \in B(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \cup \{\emptyset\} : \forall S \in A Z \subseteq S\}$. ■

Definicja 1.4.17. Niech $\emptyset \neq W' \subseteq W$ spełnia warunek dla $\Delta \in \tau$,

$$\text{dla } w' \in W' \text{ jeśli } R_{\Delta}w'v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} \text{ to } v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W'. \quad (1.49)$$

Wówczas $\mathfrak{G} = (W', (R|W'))_{\Delta \in \tau}$ nazwiemy **generowaną strukturą relacyjną $\mathfrak{F}$** . symb. $\mathfrak{G} \mapsto \mathfrak{F}$.

Alternatywną charakterystykę generowanej struktury relacyjnej mógłby stanowić:

Fakt 1.4.18. *Następujące warunki są równoważne:*

- i) $\mathfrak{G} \mapsto \mathfrak{F}$;
- ii) $id_{/\mathfrak{G}/} : \mathfrak{F} \leftrightarrow \mathfrak{G}$;
- iii) $id_{/\mathfrak{G}/} : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{F}$. ■

Z powyższego i z 1.4.10 wynika:

Twierdzenie 1.4.19. *(Twierdzenie o generowanej podstrukturze relacyjnej generowanym). Jeśli $\mathfrak{G} \mapsto \mathfrak{F}$ oraz $w' \in W'$, to $Th(\mathfrak{G}, w') = Th(\mathfrak{F}, w')$.* ■

Dla dowolnego $G \subseteq W$ kładziemy

$$\begin{aligned} (G)_{\mathfrak{F}}^0 &= G \\ (G)_{\mathfrak{F}}^{n+1} &= (G)_{\mathfrak{F}}^n \cup \{v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W : \exists w \in (G)_{\mathfrak{F}}^n R_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)}\}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Niech $(G)_{\mathfrak{F}}$ oznacza $\subseteq$ -najmniejszą generowaną podstrukturę relacyjną $\mathfrak{F}$ zawierającą G . Wówczas $(G)_{\mathfrak{F}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (G)_{\mathfrak{F}}^n$.

Inne związki między pojęciami bisymulacji wyrażają następujące twierdzenia

Lemat 1.4.20. $Z[(G)_{\mathfrak{F}}] \subseteq (G)_{\mathfrak{F}}$ dla $Z : \mathfrak{F} \leftrightarrow \mathfrak{F}$.

DOWÓD. Oczywiście na mocy definicji. ■

Twierdzenie 1.4.21. *Niech $\mathfrak{F}' \mapsto \mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}' \mapsto \mathfrak{G}$ oraz $Z : \mathfrak{F} \leftrightarrow \mathfrak{G}$. Wówczas $Z^{-1}[/\mathfrak{G}'/] \mapsto \mathfrak{F}$ oraz $Z[/\mathfrak{F}'/] \mapsto \mathfrak{G}^4$.* ■

Twierdzenie 1.4.22. *Dla $Z : \mathfrak{F} \leftrightarrow \mathfrak{G}$, $G \subseteq W$: $(Z[G])_{\mathfrak{G}} \subseteq Z[(G)_{\mathfrak{F}}]$.*

DOWÓD. Pokazujemy przez indukcję, że dla każdego naturalnego n

$$(Z[G])_{\mathfrak{G}}^n \subseteq Z[(G)_{\mathfrak{F}}]. \quad (1.51)$$

Naturalnie dla $n = 0$ (1.51) przyjmuje postać

$$Z[G] \subseteq Z[(G)_{\mathfrak{F}}], \quad (1.52)$$

czyli naturalnie zachodzi. Załóżmy, że $v' \in (Z[G])_{\mathfrak{G}}^{n+1}$, to znaczy (i) $v' \in (Z[G])_{\mathfrak{G}}^n$ lub (ii) $R'w'v'$ dla pewnego $w' \in (Z[G])_{\mathfrak{G}}^n$. Gdy zachodzi pierwszy przypadek, korzystamy z założenia indukcyjnego. Niech więc zachodzi (ii). Wówczas z założenia indukcyjnego $w' \in Z[(G)_{\mathfrak{F}}]$, skąd wZw' dla jakiegoś $w \in (G)_{\mathfrak{F}}$. Z definicji bisymulacji otrzymujemy istnienie $v \in W$ spełniającego Rwv oraz (iii) vZv' . Lecz z definicji otrzymujemy $v \in (G)_{\mathfrak{F}}$, z (iii) natomiast: $v' \in Z[(G)_{\mathfrak{F}}]$. ■

⁴ Kierując się klarownością notacji, we wniosku umieściliśmy nośniki struktur relacyjnych. Oczywiście, że chodzi tu o zbiory wyposażone w relacje osiągalności. Wierzmy, że Czytelnik z łatwością odtworzy brakujące elementy.

Twierdzenie 1.4.23. *Dla $Z : (W, R) \leftrightarrow (W', S)$, $G \subseteq W$ jeśli R i S są symetryczne, to $(Z[G])_{(W', S)} = Z[(G)_{(W, R)}]$.*

DOWÓD. Inkluzję ($\subseteq$) otrzymujemy na mocy Twierdzenia 1.4.22. Dowodzimy zatem inkluzji ($\supseteq$). Dowód przebiega przez indukcję. Pokazujemy, że dla dowolnego n :

$$Z[(G)_{(W, R)}^n] \subseteq (Z[G])_{(W', S)}. \quad (1.53)$$

Dla $n = 0$ inkluzja naturalnie zachodzi. Niech $w \in (G)_{(W, R)}^{n+1}$ oraz wZw' . Naturalnie wystarczy rozpatrzeć przypadek, gdy dla jakiegoś (i) $v \in (G)_{(W, R)}^n$ zachodzi Rvw . Skoro R jest symetryczna otrzymujemy Rwv i z definicji bisymulacji istnieje $v' \in W'$ spełniający vZv' oraz $Sw'v'$. Z założenia indukcyjnego oraz (i) wynika, że $v' \in (Z[G])_{(W', S)}$. Ponadto z symetrii S wynika, że $Sw'w'$. Ostatecznie otrzymujemy $w' \in (Z[G])_{(W', S)}$. ■

Rozdział 2

Logiki modalne oparte o wielowartościową logikę Łukasiewicza

2.1 Wprowadzenie

Logiki wielowartościowe Łukasiewicza wydają się odpowiednie jako baza dla logik modalnych. Nie bez znaczenia jest fakt, że wielowartościowe logiki Łukasiewicza pozwalają na definiowanie w ich obrębie tak zwanych **spójników charakterystycznych**, to jest takich, które identyfikują wartość logiczną formuły (szczegóły znajdzie Czytelnik w dalszej części rozdziału).

Wielowartościowe logiki modalne były szeroko omawiane w literaturze. Na przykład Thomason w [47] prezentuje bardzo ogólną metodę aksjomatyzacji skończenie wartościowych logik modalnych (**K**). W podobnym duchu przedstawia się artykuł Morgana ([38]), który pokazuje, że zawsze istnieje aksjomatyzacja skończenie wartościowej logiki modalnej, jeśli tylko spełnione są tak zwane **warunki standardowe** dla każdego wartościowania V (zakładamy, że wartości logiczne stanowi zbiór $\{1, 2, \dots, n\}$):

- (1) $V(\varphi \wedge \psi) \in D$ wtw., gdy $V(\varphi), V(\psi) \in D$;
 - (2) $V(\varphi \vee \psi) \notin D$ wtw., gdy $V(\varphi), V(\psi) \notin D$;
 - (3) $V(\varphi \rightarrow \psi) \notin D$ wtw., gdy $V(\varphi) \in D$ oraz $V(\psi) \notin D$;
 - (4) $V(\neg\varphi) \in D$ wtw., gdy $V(\varphi) \notin D$;
 - (5) $V(J_k(\varphi)) \in D$ wtw., gdy $V(\varphi) = k$
- dla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

gdzie J_k jest definiowalną formułą o jednej zmiennej zdaniowej oraz D jest zbiorem wartości wyróżnionych.

W [47] wymagane są warunki (2),(4),(5) oraz dodatkowy warunek charakterystyczny dla operatora modalnego:

$V(\Box\varphi)$ w punkcie (świecie) w jest w zbiorze wartości wyróżnionych D wtw., gdy dla każdego v , będącego następnikiem w względem relacji R – wartość $V(\varphi)$ w punkcie v jest w zbiorze D .

Osterman [40] aksjomatyzuje oraz przedstawia algorytm rozstrzygania dla trzech wielowartościowych logik (będących wielowartościowymi odpowiednikami logik **T**, **S4**, **S5**), zbazowanych na n -wartościowej logice Łukasiewicza (nazywając je przy tym: ${}_nT$, ${}_nS_4$, ${}_nS_5$). Niektóre z logik prezentowanych w tym rozdziale pokrywają się z tymi proponowanymi przez Ostermana. Zaprezentujemy jednak również wiele logik dotąd nie rozpatrywanych. Ponadto wprowadzimy logikę RU_n , której sens nadaje dopiero wielowartościowość (w dwuwartościowym wydaniu pokrywa się ona z logiką **K**). Myślimy przy tym, że ta logika właściwie wpisuje się w filozoficzną interpretację logik Łukasiewicza w ogóle – liniowo uporządkowany zbiór wartości logicznych może sugerować **stopnie pewności uznania danego zdania za prawdziwe**.

Ponadto prezentujemy konstrukcję **filtracji** dla wielowartościowych logik modalnych Łukasiewicza. Tym samym pozwoli to na przeprowadzenie dowodu, że rozpatrywane wielowartościowe logiki modalne zbazowane na zdaniowej logice Łukasiewicza posiadają tzw. **własność skończonego modelu**. Tym samym będzie to dowód na ich rozstrzygalność.

2.2 Prezentacja języka i logiki

Na samym wstępie wprowadzimy kilka definicji i konwencji notacyjnych występujących w skończenie wartościowych logikach Łukasiewicza. Jednakże przedstawiamy jedynie te fakty, które uznaliśmy za istotne dla wielowartościowych logik modalnych. Zainteresowany Czytelnik może pogłębić swoją wiedzę korzystając z wielu publikacji (na przykład [48] lub [33]).

Oznaczmy przez $\mathbf{L}_n$ ($n \geq 2$) logikę wyznaczoną przez n -wartościową matrycę Łukasiewicza $(\{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}, \neg, \rightarrow, \{1\})$, gdzie

$$\begin{aligned} \neg x &= 1 - x, \\ x \rightarrow y &= \min\{1, 1 - x + y\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

(porównaj np. z [48]). Ponadto definiujemy

$$\begin{aligned} x \vee y &:= (x \rightarrow y) \rightarrow y, \\ x \wedge y &:= \neg(\neg x \vee \neg y). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pierwotnie język dla logiki Łukasiewicza zawiera jedynie spójniki $\neg$ oraz $\rightarrow$. Posługując się powyższą definicją możemy $L_\Diamond$ rozumieć jako język zawierający $\rightarrow$, $\neg$ wraz z $\Diamond$. Rozszerzamy go za pomocą definicji $\varphi \vee \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$, $\varphi \wedge \psi := \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ oraz $\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi$.

Położmy dodatkowo:

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow_0 \psi &:= \psi, \\ \varphi \rightarrow_{k+1} \psi &:= \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow_k \psi), \\ \varphi \leftrightarrow_k \psi &:= (\varphi \rightarrow_k \psi) \wedge (\psi \rightarrow_k \varphi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dla $k \in \mathbb{N}$. Oznaczmy przez $\perp$ dowolną kontrtautologię $\mathbf{L}$, na przykład $\neg(p \rightarrow p)$. Ewentualnie posługując się konwencją z poprzedniego rozdziału: $\perp$ może być spójnikiem pierwotnym. Wówczas $\neg$ jest zdefiniowany przez $\neg\varphi := \varphi \rightarrow \perp$.

Dzięki zachowaniu prawa łączności przez $\vee$, będziemy używać następującego oznaczenia (dla dowolnego, skończonego ciągu formuł $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \dots, \varphi_{k+l}$):

$$\bigvee_{i=k}^{k+l} \varphi_i := \varphi_k \vee \varphi_{k+1} \vee \dots \vee \varphi_{k+l}. \quad (2.4)$$

Lemat 2.2.1. *W dowolnej matrycy Łukasiewicza, $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $x \rightarrow_k y = \min\{1, (1-x) \cdot k + y\}$.*

DOWÓD. Indukcja względem k . Dla $k = 0, 1$ stwierdzenie oczywiste. Załóżmy, że równość zachodzi dla jakiegoś k . Wówczas $x \rightarrow_{k+1} y = x \rightarrow (x \rightarrow_k y) = \min\{1, 1-x+x \rightarrow_k y\} = \min\{1, 1-x+\min\{1, (1-x) \cdot k + y\}\} = \min\{1, (1-x) \cdot (k+1) + y\}$. ■

Powiemy, że zbiór formuł Σ jest **logiką modalną opartą na n -wartościowej logice Łukasiewicza** wtw. $Sb(\Sigma) = \Sigma$ (tzn. Σ jest zamknięty na podstawienia) oraz Σ jest zamknięty na każdą regułę n -wartościowej logiki Łukasiewicza.

Dla $n > 1$ oraz $i \in \{0, \dots, n-1\}$ przez $J_i(p)$ rozumiemy formułę zdefiniowaną w [48] taką, że dla każdego wartościowania prawdziwościowego h języka w n -wartościową matrycę Łukasiewicza zachodzi:

$$\begin{aligned} h(J_i(p)) = 1 &\Leftrightarrow h(p) = \frac{i}{n-1} \\ &\text{oraz} \\ h(J_i(p)) = 0 &\text{ gdy } h(p) \neq \frac{i}{n-1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ponadto, niech I_k będzie formułą taką, że odpowiadająca jej unarna operacja w matrycy Łukasiewicza spełnia:

$$I_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \geq \frac{k}{n-1} \\ 0, & \text{dla } x < \frac{k}{n-1}. \end{cases}$$

Obie operacje (J_k oraz I_k) są wzajemnie definiowalne:

$$\begin{aligned} I_k(x) &:= \bigvee_{i=k}^{n-1} J_i(x) \\ J_k(x) &:= I_k(x) \wedge \neg I_{k+1}(x) \\ &\quad \text{dla } k < n-1 \\ &\text{oraz} \\ J_{n-1}(x) &:= I_{n-1}(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Poniżej pokazujemy, że spójnik I_k jest definiowalny w macierzy Łukasiewicza jedynie za pomocą $\neg$ oraz $\rightarrow$. Poniższe twierdzenie jest adaptacją Lematu 7. z [48].

Twierdzenie 2.2.2. *Dla każdego $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ operacja I_k jest definiowalna w macierzy Łukasiewicza.*

DOWÓD. Definiujemy operacje $H_1(x) = \neg x$, $H_{t+1} = x \rightarrow H_t(x)$. Nie jest trudne wykazanie, że $H_t(x) = \min\{1, (1-x) \cdot t\}$.

Zatem $H_{n-1}(x) = \min\{1, (1-x) \cdot (n-1)\}$ skąd

$$H_{n-1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x < 1 \\ 0, & \text{dla } x = 1 \\ 0, & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Kładziemy $I_{n-1}(x) = \neg H_{n-1}(x)$. Załóżmy, że I_q jest zdefiniowany dla $q \geq k$. Niech r będzie największą liczbą naturalną spełniającą $H_r(\frac{k-1}{n-1}) < 1$, czyli $(1 - \frac{k-1}{n-1}) \cdot r < 1$. Niech p będzie liczbą spełniającą $\frac{p}{n-1} = (1 - \frac{k-1}{n-1}) \cdot r + \frac{1}{n-1}$. Załóżmy nie wprost, że $p < k$, czyli $(1 - \frac{k-1}{n-1}) \cdot r + \frac{1}{n-1} < \frac{k}{n-1}$. Wtedy: $(1 - \frac{k-1}{n-1}) \cdot r < \frac{k-1}{n-1}$, $1 - (1 - \frac{k-1}{n-1}) \cdot r > 1 - \frac{k-1}{n-1}$ oraz $1 > (1 - \frac{k-1}{n-1}) \cdot r + (1 - \frac{k-1}{n-1}) = (1 - \frac{k-1}{n-1}) \cdot (r+1)$; sprzeczność.

Kładziemy $I_{k-1}(x) = \neg I_p(H_r(x))$.

Rozpatrzmy ciąg równoważności:

$$I_p(H_r(\frac{q}{n-1})) = 0 \text{ wtw. } H_r(\frac{q}{n-1}) < \frac{p}{n-1} \text{ wtw. } (1 - \frac{q}{n-1}) \cdot r < \frac{p}{n-1} \text{ wtw. } (1 - \frac{q}{n-1}) \cdot r \leq (1 - \frac{k-1}{n-1}) \cdot r \text{ wtw. } 1 - \frac{q}{n-1} \leq 1 - \frac{k-1}{n-1} \text{ wtw. } k-1 \leq q.$$

Wynika z niego, że $I_{k-1}(x) = 1$ wtw. $x \geq \frac{k-1}{n-1}$ oraz $I_{k-1}(x) = 0$ wtw. $x < \frac{k-1}{n-1}$. ■

J_k oraz I_k są zrelatywizowane do konkretnej macierzy Łukasiewicza (nie istnieje bowiem formuła definiująca obie funkcje J_k w **każdej** algebrze Łukasiewicza). Winny mieć zatem postać J_k^n oraz I_k^n , gdzie n jest mocą macierzy

Łukasiewicza, definiującej daną logikę. Jednakże będziemy pomijać dodatkowe oznaczenia, gdyż nie będzie prowadziło to do niejednoznaczności.

Zanotujemy bez dowodu następujący lemat

Lemat 2.2.3. *Następujące schematy aksjomatów spełnione są w logice Łukasiewicza $\mathbf{L}_n$ dla każdego $n > 1$:*

- i) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi, \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$
- ii) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi))$
- iii) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- iv) $(\varphi \rightarrow_{n-1} \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow_{n-1} \chi) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow_{n-1} \chi))$
- v) $(\varphi \rightarrow_{n-1} (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow_{n-1} \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow_{n-1} \chi))$
- vi) $\bigvee_{i=0}^{n-1} J_i(\varphi)$
- vii) $J_i(\varphi) \wedge J_k(\varphi) \rightarrow \perp$ dla $i \neq k$
- viii) $J_i(\varphi) \wedge I_k(\varphi) \rightarrow \perp$ dla $i < k$
- ix) $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

DOWÓD. Sprawdzenie sprowadza się do prostych wyliczeń. ■

2.3 Logika K_n zbazowana na logice $\mathbf{L}_n$

Zdefiniujmy K_n dla $n > 1$ jako najmniejszą logikę:

- (i) zbazowaną na n -wartościowej logice Łukasiewicza (to znaczy zawierającą wszystkie podstawienia tez logiki $\mathbf{L}_n$);
- (ii) zamkniętą na reguły:

- (MP) $\varphi \rightarrow \psi, \varphi / \psi$
- (G) $\varphi / \Box\varphi$
- (K) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
- ($\Box_k$) $J_k(\Box\varphi) \rightarrow \Box I_k(\varphi)$
- ($\Box_{\leq}$) $J_k(\Box\varphi) \rightarrow (\Diamond J_k(\varphi) \vee \Box\perp)$ dla $k \in \{0, \dots, n-1\}$
- ($\perp$) $\Box\perp \vee \neg\Box\perp$.

Położmy $\vdash_{K_n}$ na oznaczenie relacji konsekwencji zdefiniowanej następująco:

$$\Sigma \vdash_{K_n} \varphi \quad \text{wtw.} \quad \text{istnieje dowód formuły } \varphi \text{ ze zbioru } \Sigma \cup K_n \text{ przy użyciu reguły (MP).} \quad (2.7)$$

Przyjrzyjmy się dokładnie przypadkowi, gdy $n = 2$. Stąd, że $J_0(p) = \neg p$, $J_1(p) = I_1(p) = p$ oraz $I_0(p) = \neg p \vee p$ w dwuwartościowej logice Łukasiewicza (będącej w rzeczywistości logiką klasyczną $\mathcal{Cl}$), powyższe aksjomaty (poza tymi nie zawierającymi parametru k) przyjmują postać

- (i) $(\overleftarrow{\Box}_0) \neg \Box \varphi \rightarrow \Box(\neg \varphi \vee \varphi)$
- (ii) $(\overleftarrow{\Box}_1) \Box \varphi \rightarrow \Box \varphi$
- (iii) $(\Box_{\leq}) \neg \Box \varphi \rightarrow (\Diamond \neg \varphi \vee \Box \perp), \Box \varphi \rightarrow (\Diamond \varphi \vee \Box \perp).$

Nietrudno zauważyć, że powyższe schematy są tezami zwykłej logiki $\mathbf{K}$. W konsekwencji możemy zanotować $K_2 = \mathbf{K}$.

Fakt 2.3.1. *i). $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box \varphi \wedge \Box \psi), (\Box \varphi \wedge \Box \psi) \rightarrow \Box(\varphi \wedge \psi) \in K_n$;
ii). Jeśli $\vdash_{K_n} \varphi \rightarrow_{n-1} \psi$, to $\vdash_{K_n} \Box \varphi \rightarrow_{n-1} \Box \psi$.*

Dowód.

Ad i). Dowiedzimy prawdziwość jedynie pierwszego stwierdzenia (wykazanie drugiego przebiega podobnie): z Lematu 2.2.3 i), oraz z $(G), (K), (MP)$ otrzymujemy: $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box \varphi, \Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Box \psi \in K_n$, ponadto z Lematu 2.2.3 ii) wynika, że $\Box(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\Box \varphi \wedge \Box \psi) \in K_n$;

Ad ii). Wynika z faktu, że dla każdego $i \in \{1, \dots, n-1\}$:

$\vdash_{K_n} \Box(\varphi \rightarrow_{n-i} \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow_{n-i-1} \psi))$ oraz z Lematu 2.2.3 iii). ■

Rozważmy klasę M_n^K struktur $\mathfrak{M}$ następującej postaci:

$\mathfrak{M} = (W, R, V)$ gdzie W jest niepustym zbiorem $R \subseteq W \times W$ oraz V jest odwzorowaniem $V : W \times \mathcal{L} \longrightarrow \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ generowanym przez $V|\Phi$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} V(w, \neg \varphi) &= 1 - V(w, \varphi) \\ V(w, \varphi \rightarrow \psi) &= \min\{1, 1 - V(w, \varphi) + V(w, \psi)\} \\ V(w, \Box \varphi) &= \bigwedge \{V(v, \varphi) : R w v\}. \end{aligned}$$

Wówczas:

$$\begin{aligned} V(w, \varphi \wedge \psi) &= \min\{V(w, \varphi), V(w, \psi)\} \\ V(w, \varphi \vee \psi) &= \max\{V(w, \varphi), V(w, \psi)\} \\ V(w, \Diamond \varphi) &= \bigvee \{V(v, \varphi) : R w v\}. \end{aligned}$$

Stosując notację wprowadzoną w poprzednim rozdziale możemy dwa ostatnie punkty przeformułować w następujący sposób:

$$\begin{aligned} V(w, \Box \varphi) &= \bigwedge_{v \in R[w]} V(v, \varphi) \\ \text{oraz} & \\ V(w, \Diamond \varphi) &= \bigvee_{v \in R[w]} V(v, \varphi). \end{aligned} \tag{2.8}$$

W powyższych definicjach użyliśmy operacji kresu dolnego $\bigwedge$ oraz kresu górnego $\bigvee$. Będziemy używać wszelkich konsekwencji tego faktu, np. $\bigwedge \emptyset = 1$ stąd, że 1 jest największym ograniczeniem dolnym zbioru pustego; dualnie – $\bigvee \emptyset = 0$.

Klasa M_n^K wyznacza relację konsekwencji:

$$\Sigma \models_{M_n^K} \varphi \quad \text{wtw.} \quad \begin{array}{l} \text{dla dowolnego } (W, R, V) \in M_n^K, \quad V(w, \varphi) = 1, \\ \text{jeśli tylko } \forall \psi \in \Sigma V(w, \psi) = 1 \\ \text{dla dowolnego } w \in W. \end{array} \quad (2.9)$$

Stwierdzenie 2.3.2. *i). $\models_{M_n^K} \varphi \Rightarrow \models_{M_n^K} \Box \varphi$, $\models_{M_n^K} \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \psi)$;
ii). dla każdego $\varphi \in Sb(\mathbf{L}_n) : \models_{M_n^K} \varphi$; gdzie $Sb(\Sigma)$ oznacza zbiór podstawień w język modalny, formuł ze zbioru Σ ;
iii). $\models_{M_n^K} J_k(\Box \varphi) \rightarrow \Box I_k(\varphi)$;
iv). $\models_{M_n^K} J_k(\Box \varphi) \rightarrow (\Diamond J_k(\varphi) \vee \Box \perp)$ dla $k \in \{0, \dots, n-1\}$;
v). $\models_{M_n^K} \Box \perp \vee \neg \Box \perp$.*

DOWÓD. Pokazujemy jedynie punkt (i). Pozostałe wymagają jedynie prostych przeliczeń. Implikacja jest oczywista. Załóżmy, że $\not\models_{M_n^K} \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \psi)$. Tak więc dla pewnego $w \in W$:

$$V(w, \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box \varphi \rightarrow \Box \psi)) < 1. \quad (2.10)$$

Z definicji:

$$V(w, \Box \varphi \rightarrow \Box \psi) < V(w, \Box(\varphi \rightarrow \psi)), \quad (2.11)$$

czyli

$$1 - \bigwedge_{v \in R[w]} V(v, \varphi) + \bigwedge_{v \in R(w)} V(v, \psi) < \bigwedge_{v \in R(w)} (\min\{1, 1 - V(v, \varphi) + V(v, \psi)\}), \quad (2.12)$$

oraz:

$$1 - \bigwedge_{v \in R[w]} V(v, \varphi) + \bigwedge_{v \in R(w)} V(v, \psi) < \bigwedge_{v \in R(w)} (1 - V(v, \varphi) + V(v, \psi)). \quad (2.13)$$

Wyprowadzamy zatem

$$1 + \bigwedge_{v \in R[w]} V(v, \psi) < r < \bigwedge_{v \in R(w)} (1 - V(v, \varphi) + V(v, \psi)) + \bigwedge_{v \in R(w)} V(v, \varphi), \quad (2.14)$$

dla pewnego $r \in \mathbb{Q}$.

Istnieje więc $v_0 \in R[w]$, spełniający $1 + V(v_0, \psi) < r$.

Ostatecznie:

$$1 + V(v_0, \psi) < r < 1 - V(v_0, \varphi) + V(v_0, \psi) + V(v_0, \varphi) \quad (2.15)$$

to znaczy

$$V(v_0, \psi) < V(v_0, \psi), \quad (2.16)$$

co jest jawną sprzecznością. ■

Stwierdzenie 2.3.3. *MP jest regułą $\models_{M_n^K}$, tzn. $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models_{M_n^K} \psi$ dla wszystkich formuł φ, ψ .* ■

Twierdzenie 2.3.4. *(Twierdzenie o dedukcji dla K_n). $\Sigma, \varphi \vdash_{K_n} \psi \Leftrightarrow \Sigma \vdash_{K_n} \varphi \rightarrow_{n-1} \psi$.*

DOWÓD. Pokazujemy przez indukcję, że jeśli $\langle \chi_1, \dots, \chi_k \rangle$ jest dowodem formuły ψ ze zbioru $\Sigma \cup \{\varphi\}$, to dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$ istnieje dowód formuły $\varphi \rightarrow_{n-1} \chi_i$ ze zbioru Σ . Jedyne przypadki, który rozpatrzymy, to ten kiedy istnieją $j, m < i$ spełniające $\chi_j = \chi_m \rightarrow \chi_i$. Ale fakt ten wynika bezpośrednio z punktu v) Lematu 2.2.3. Ostatecznie założenie indukcyjne jest prawdziwe dla i . ■

Lemat 2.3.5. *Dla $\Sigma \in RMax(\vdash_{K_n})$: $\varphi \vee \psi \in \Sigma \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma$ lub $\psi \in \Sigma$.*

DOWÓD. Załóżmy, że $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ oraz $\varphi, \psi \notin \Sigma$. Niech χ będzie formułą względem której Σ jest relatywnie maksymalna. Wtedy $\Sigma, \varphi \vdash_{K_n} \chi$, $\Sigma, \psi \vdash_{K_n} \chi$. Skąd $\Sigma \vdash_{K_n} \varphi \rightarrow_{n-1} \chi, \psi \rightarrow_{n-1} \chi$, co razem z Lematem 2.2.3 iv) daje $\Sigma \vdash_{K_n} \chi$; czyli sprzeczność. ■

Lemat 2.3.6. *Dla $\Sigma \in RMax(\vdash_{K_n})$, $\varphi \in L_\Diamond$: istnieje dokładnie jeden $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ taki, że $J_i(\varphi) \in \Sigma$.*

DOWÓD. Lemat jest konsekwencją Lematów: 2.2.3 vi), vii) oraz 2.3.5. ■

Dla $\Sigma \in RMax(\vdash_{K_n})$ i formuły φ połóżmy:

$$\lambda(\Sigma, \varphi) = \text{ten } i, \text{ dla którego zachodzi } J_i(\varphi) \in \Sigma. \quad (2.17)$$

Jak ustaliliśmy (Lemat 2.3.6) λ jest dobrze zdefiniowaną funkcją. Definiujemy relację binarną $\mathcal{R}^{T_n} \subseteq RMax(\vdash_{K_n})^2$:

$$\Sigma \mathcal{R}^{T_n} \Gamma \Leftrightarrow \text{dla każdej formuły } \psi : \lambda(\Sigma, \Box \psi) \leq \lambda(\Gamma, \psi).$$

Lemat 2.3.7. *Jeśli $\Sigma \in RMax(\vdash_{K_n})$ oraz $\Box \perp \notin \Sigma$, to dla każdej formuły $\varphi \in L_\Diamond$: $\Box \Sigma_\varphi := \{I_{\lambda(\Sigma, \Box \psi)}(\psi) : \psi \in L_\Diamond\} \cup \{J_{\lambda(\Sigma, \Box \varphi)}(\varphi)\}$ jest zbiorem niesprzecznym.*

DOWÓD. Załóżmy, że $\Box \perp \notin \Sigma$ oraz $\Box \Sigma_\varphi \vdash_{K_n} \perp$, to znaczy

$$\{I_{k_1}(\sigma_1), \dots, I_{k_m}(\sigma_m), J_k(\sigma)\} \vdash_{K_n} \perp \quad (2.18)$$

dla pewnych $J_{k_1}(\Box \sigma_1), \dots, J_{k_m}(\Box \sigma_m), J_k(\Box \sigma) \in \Sigma$. Łatwo jest pokazać (z pomocą twierdzenia o dedukcji), że:

$$\vdash_{K_n} J_k(\sigma) \wedge \bigwedge_{i=1}^m I_{k_i}(\sigma_i) \rightarrow_{n-1} \perp \quad (2.19)$$

co implikuje:

$$\vdash_{K_n} J_k(\sigma) \rightarrow (\neg \bigwedge_{i=1}^m I_{k_i}(\sigma_i)) \quad (2.20)$$

(przypominamy, że J_k oraz I_k za przeciwdziedzinę mają zbiór $\{0, 1\}$ tak więc możemy zastąpić $\rightarrow_{n-1}$ przez $\rightarrow$)

$$\vdash_{K_n} (\bigwedge_{i=1}^m I_{k_i}(\sigma_i)) \rightarrow \neg J_k(\sigma) \quad (2.21)$$

z Lematu 2.2.3 ix),

$$\vdash_{K_n} (\Box \bigwedge_{i=1}^m I_{k_i}(\sigma_i)) \rightarrow \Box \neg J_k(\sigma) \quad (2.22)$$

z $(G), (K), (MP)$,

$$\vdash_{K_n} (\bigwedge_{i=1}^m \Box I_{k_i}(\sigma_i)) \rightarrow \Box \neg J_k(\sigma) \quad (2.23)$$

z Faktu 2.3.1 i),

$$\Sigma \vdash_{K_n} (\bigwedge_{i=1}^m J_{k_i}(\Box \sigma_i)) \rightarrow (\Box \neg J_k(\sigma) \wedge \neg \Box \perp) \quad (2.24)$$

dzięki $(\overline{\Box}_k)$ i założeniom

$$\Sigma \vdash_{K_n} (\bigwedge_{i=1}^m J_{k_i}(\Box \sigma_i)) \rightarrow \neg J_k(\Box \sigma) \quad (2.25)$$

z $(\Box_{\leq})$.

Tak więc $\neg J_k(\Box \sigma), J_k(\Box \sigma) \in \Sigma$ – czyli sprzeczność. $\blacksquare$

Lemat 2.3.8. Dla $\Sigma \in RMax(\vdash_{K_n})$: Jeśli $\Box \Sigma_{\varphi} \subseteq \Pi \in RMax(\vdash_{K_n})$, to $\Sigma \mathcal{R}^{T_n} \Pi$.

DOWÓD. Załóżmy, że $\Sigma \in RMax(\vdash_{K_n})$ oraz $\Box \Sigma_{\varphi} \subseteq \Pi \in RMax(\vdash_{K_n})$. Wtedy dla $\psi \in L_{\Diamond}$, $\lambda(\Sigma, \Box \psi) \leq \lambda(\Pi, \psi)$, z Lematu 2.2.3 viii). $\blacksquare$

Lemat 2.3.9. (*Lemat fundamentalny dla K_n*).

Dla każdego $\Sigma \in RMax(\vdash_{K_n})$, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$:

- ($\neg$) $\lambda(\Sigma, \neg\varphi) = 1 - \lambda(\Sigma, \varphi)$
- ($\wedge$) $\lambda(\Sigma, \varphi \wedge \psi) = \min\{\lambda(\Sigma, \varphi), \lambda(\Sigma, \psi)\}$
- ($\vee$) $\lambda(\Sigma, \varphi \vee \psi) = \max\{\lambda(\Sigma, \varphi), \lambda(\Sigma, \psi)\}$
- ($\rightarrow$) $\lambda(\Sigma, \varphi \rightarrow \psi) = \min\{1, 1 - \lambda(\Sigma, \varphi) + \lambda(\Sigma, \psi)\}$
- ($\Box$) $\lambda(\Sigma, \Box\varphi) = \bigwedge\{\lambda(\Pi, \varphi) : \Sigma\mathcal{R}^{T_n}\Pi \in RMax(\vdash_{K_n})\}$.

Dowód. Jedynym niebanalnym przypadkiem jest ($\Box$). Jeśli $\Box\perp \in \Sigma$, to z faktu $\vdash_{K_n} \Box\perp \rightarrow \varphi$ wynika

$$\vdash_{K_n} \Box\perp \rightarrow \Box\varphi \text{ oraz } \Box\varphi \in \Sigma. \quad (2.26)$$

Z faktu, że $p \rightarrow_{n-1} J_{n-1}(p)$ jest regułą $\mathfrak{L}_n$,

$$J_{n-1}(\Box\varphi), J_{n-1}(\Box\perp) \in \Sigma \text{ oraz } \lambda(\Sigma, \Box\varphi) = \lambda(\Sigma, \Box\perp) = n-1. \quad (2.27)$$

Ostatecznie nie istnieje Π dla którego zachodziłoby $\Sigma\mathcal{R}^{T_n}\Pi$ czyli $\lambda(\Sigma, \Box\varphi) = n-1 = \bigwedge \emptyset = \bigwedge\{\lambda(\Pi, \varphi) : \Sigma\mathcal{R}^{T_n}\Pi \in RMax(\vdash_{K_n})\}$.

Założmy, że $\Box\perp \notin \Sigma$. Część $\leq$ jest wnioskiem z definicji $\mathcal{R}^{T_n}$. Pozostało nam do wykazania $\geq$. Założmy, że

$$\lambda(\Sigma, \Box\varphi) < \bigwedge\{\lambda(\Pi, \varphi) : \Sigma\mathcal{R}^{T_n}\Pi \in RMax(\vdash_{K_n})\}. \quad (2.28)$$

Tak więc $J_k(\Box\varphi) \in \Sigma$ dla jakiegoś $k < n-1$ oraz $\{\chi : \Box\Sigma_\varphi \vdash_{K_n} \chi\} \not\vdash_{K_n} I_{k+1}(\varphi)$, z Lematu 2.3.7 oraz Lematu 2.2.3 viii). Na bazie lematu Lindenbauma wnioskujemy, że istnieje $\Pi \in RMax(\vdash_{K_n})$ taka, że $\Box_\varphi\Sigma \subseteq \{\chi : \Box_\varphi\Sigma \vdash_{K_n} \chi\} \subseteq \Pi \not\vdash I_{k+1}(\varphi)$. Lecz wtedy Lemat 2.3.8 implikuje $\Sigma\mathcal{R}^{T_n}\Pi$ oraz $\lambda(\Sigma, \Box\varphi) = \lambda(\Pi, \varphi)$; co jest niemożliwe. ■

Twierdzenie 2.3.10. (*Twierdzenie o przystosowaniu dla K_n*). $\vdash_{K_n} \subseteq \models_{M_n^K}$.

Dowód. Wynika z 2.3.2. ■

Przez **model kanoniczny** dla $\vdash_{K_n}$ rozumiemy strukturę $\mathcal{K} = ((RMax(\vdash_{K_n}), \mathcal{R}^{T_n}), (\{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}, \leq), V^{RMax})$, gdzie $V^{RMax} = \lambda|\Phi_{\frac{1}{n-1}}$ (to znaczy $V^{RMax}(\Sigma, p) = \frac{\lambda(\Sigma, p)}{n-1}$ dla relatywnie maksymalnej Σ oraz zmiennej zdaniowej p). Z lematu fundamentalnego dla K_n , $V(\Sigma, \varphi) = \frac{\lambda(\Sigma, \varphi)}{n-1}$.

Twierdzenie 2.3.11. (*Twierdzenie o pełności dla K_n*). $\models_{M_n^K} \subseteq \vdash_{K_n}$.

Dowód. Założmy, że $\Sigma \not\vdash_{K_n} \varphi$. Na mocy lematu Lindenbauma istnieje $\Sigma_0 \in RMax(\vdash_{K_n})$ spełniająca $\Sigma \subseteq \Sigma_0$ i $\varphi \notin \Sigma_0$. Zatem dla każdej $\psi \in \Sigma$ prawdą jest, że $\lambda(\Sigma_0, \psi) = n-1$ oraz $\lambda(\Sigma_0, \varphi) \neq n-1$. Konsekwentnie $V^{RMax}(\Sigma_0, \psi) = 1$ dla $\psi \in \Sigma$ i $V^{RMax}(\Sigma_0, \varphi) \neq 1$. Ostatecznie $\Sigma \not\models_{M_n^K} \varphi$. ■

Korzystając z twierdzenia o adekwatności dla K_n łatwo jest dowieść użyteczny:

Fakt 2.3.12. *Dla każdej formuły modalnej $\varphi(p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_i, r)$:
jeśli $\vdash_K \varphi$, to $\vdash_{K_n} \varphi(J_{k_1}(\psi_1), \dots, J_{k_m}(\psi_m), I_{l_1}(\psi_{m+1}), \dots, I_{l_i}(\psi_{m+i}), \perp)$
dla dowolnych formuł $\psi_1, \dots, \psi_{m+i}$ oraz $k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_i \in \{0, \dots, n-1\}$.*

DOWÓD. Przez kontrapozycję

$$\not\vdash_{K_n} \varphi(J_{k_1}(\psi_1), \dots, J_{k_m}(\psi_m), I_{l_1}(\psi_{m+1}), \dots, I_{l_i}(\psi_{m+i}), \perp). \quad (2.29)$$

Z twierdzenia o pełności:

$$\not\models_{M_n^K} \varphi(J_{k_1}(\psi_1), \dots, J_{k_m}(\psi_m), I_{l_1}(\psi_{m+1}), \dots, I_{l_i}(\psi_{m+i}), \perp), \quad (2.30)$$

to znaczy dla pewnych

$$(W, R, V) \in M_n^K, \quad w \in W :$$

$$V(w, \varphi(J_{k_1}(\psi_1), \dots, J_{k_m}(\psi_m), I_{l_1}(\psi_{m+1}), \dots, I_{l_i}(\psi_{m+i}), \perp)) \neq 1. \quad (2.31)$$

Zdefiniujmy dwuwartościową waluację V' dla (W, R) :

$$\begin{aligned} V'(v, p_j) &:= V(v, J_{k_j}(\varphi_j)) & \text{dla } 1 \leq j \leq m; \\ V'(v, q_j) &:= V(v, I_{l_j}(\varphi_{m+j})) & \text{dla } 1 \leq j \leq i; \\ V'(w, r) &:= 0 & \text{oraz} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$V'(v, s) :=$ dowolne w pozostałych przypadkach.

Jasne jest, że w klasycznym modelu Kripkego zachodzi $V'(w, \varphi) = 0$, czyli posługując się twierdzeniem o przystosowaniu dla $\mathbf{K}$ otrzymujemy $\not\vdash_K \varphi$. ■

UWAGA. Rozpatrzmy zbiór K'_n generowany przez $Sb(\mathbf{L}_n) \cup \{(K), (\perp), (MP), (G)\}$, i konsekwencję $\vdash'_n$ określoną w następujący sposób: $\Sigma \vdash'_n \varphi$ wtw. istnieje dowód φ ze zbioru $\Sigma \cup K'_n$ z użyciem (MP) .

Można wykazać, że $\vdash'_n$ jest tożsama z semantyczną konsekwencją $\models'_n$, różniącą się od $\models_n$ tym jedynie, że wartościowanie rozszerza się w podobny sposób jak w [39], to znaczy

$$\begin{aligned} V''(w, \Box \varphi) &= 1 \text{ wtw., gdy} \\ V''(v, \varphi) &= 1 \text{ dla każdego } v \in R[w] \\ \text{oraz } &= 0 \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{aligned} \quad (2.33)$$

PRZYKŁAD. Stąd, że w trójwartościowej logice Łukasiewicza $J_0(\varphi), J_1(\varphi), J_2(\varphi)$ mogą być zdefiniowane w następujący sposób $\neg \varphi \wedge \neg(\varphi \leftrightarrow \neg \varphi)$, $\varphi \leftrightarrow \neg \varphi$ oraz $\varphi \wedge \neg(\varphi \leftrightarrow \neg \varphi)$ odpowiednio, tak więc K_3 jest aksjomatyzowalny poprzez zbiór:

- (i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- (ii) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- (iii) $(\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

$$\begin{aligned}
(iv) & ((\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi \\
(K) & \Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi) \\
(G) & \varphi/\Box\varphi \\
(MP) & \varphi, \varphi \rightarrow \psi/\psi \\
(\overleftarrow{\Box}_1) & (\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Box\varphi) \rightarrow \Box\neg(\varphi \wedge \neg(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi)) \\
(\overleftarrow{\Box}_2) & \Box\varphi \wedge \neg(\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Box\varphi) \rightarrow \Box(\varphi \wedge \neg(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi)) \\
(\Box_{\leq}) & (\neg\Box\varphi \wedge \neg(\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Box\varphi)) \rightarrow \Diamond((\neg\varphi \wedge \neg(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi)) \vee \Box\perp) \\
& (\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Box\varphi) \rightarrow (\Diamond(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi) \vee \Box\perp), \\
& (\Box\varphi \wedge \neg(\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Box\varphi)) \rightarrow \Diamond((\varphi \wedge \neg(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi)) \vee \Box\perp) \\
& (\perp) \Box\perp \vee \neg\Box\perp.
\end{aligned}$$

Aksjomaty (i)-(iv) razem z (MP) tworzą bazę dedukcyjną dla trójwartościowej logiki Łukasiewicza (porównaj [50] lub [48]).

2.4 Logiki $KD_n, T_n, K4_n, KB_n$

Podobnie jak w przypadku dwuwartościowym możemy ograniczyć klasę struktur relacyjnych, by otrzymać nowe wersje modalnych skończenie wartościowych logik Łukasiewicza. Na przykład, jeśli do K_n dodamy grupę aksjomatów:

$$(D_k) J_k(\Box\varphi) \rightarrow \Diamond J_k(\varphi) \text{ dla każdego } k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (2.34)$$

otrzymujemy aksjomatyzację logiki zdeterminowanej przez klasę n -wartościowych modeli Kripkego M_n^D , w których relacja osiągalności jest serialna, tzn. R spełnia formułę pierwszego rzędu $\forall x \exists y Rxy$.

PRZYKŁAD. Gdy $n = 2$ schemat (D_0) przyjmuje postać $\neg\Box\varphi \rightarrow \Diamond\neg\varphi$ (czyli jest wyprowadzalny w **K**) natomiast $(D_1) = \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$, tak więc w rzeczywistości jest to aksjomat logiki modalnej (D) , stąd $KD_2 = \mathbf{KD}$.

W przypadku gdy $n = 3$ (D_0) , (D_1) oraz (D_2) mogą zostać wypisane jak poniżej:

$$\begin{aligned}
(D_0) & \neg\Box\varphi \wedge \neg(\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Box\varphi) \rightarrow \Diamond(\neg\varphi \wedge \neg(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi)) \\
(D_1) & (\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Box\varphi) \rightarrow \Diamond(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi) \\
(D_2) & \Box\varphi \wedge \neg(\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Box\varphi) \rightarrow \Diamond(\varphi \wedge \neg(\varphi \leftrightarrow \neg\varphi)).
\end{aligned} \quad (2.35)$$

Twierdzenie 2.4.1. (*Twierdzenie o adekwatności dla KD_n*). $\vdash_{KD_n} = \models_{M_n^D}$.

DOWÓD. By wykazać twierdzenie o przystosowaniu wystarczy sprawdzić, że dla każdego modelu z klasy M_n^D spełniony jest aksjomat D_k .

Pobieżna analiza Lematu 2.3.7 pozwala wywnioskować, że dla zbioru formuł $\Sigma \in RMax(\vdash_{KD_n})$ zbiór $\Box\Sigma_\varphi$ jest niesprzeczny. W nawiązaniu do Lematu 2.3.8 otrzymujemy, że dla każdej $\Sigma \in RMax(\vdash_{KD_n})$ istnieje relatywnie maksymalna

Π taka, że $\Sigma \mathcal{R}^{KD_n} \Pi$. W Lemacie 2.3.9 (warunek $(\Box)$) nie rozpatrujemy przypadku gdy $\Box \perp \in \Sigma$. Ostatecznie, został określony model kanoniczny dla $\vdash_{KD_n}$ z serialną relacją osiągalności. ■

Stosunkowo łatwo jest sprawdzić, że formuły $(\Box_{\leq})$ oraz $(\perp)$ nie są niezależne w logice KD_n . Co więcej, formuła $\Box \perp$ implikuje sprzeczność, skąd $\neg \Box \perp \in KD_n$.

Przez T_n **model** rozumiemy dowolny n -wartościowy model, gdzie relacja osiągalności jest zwrotna ($\forall x Rxx$). Klasa M_n^T , wszystkich T_n -modeli wyznacza konsekwencję $\models_{M_n^T}$ na języku $L_{\Diamond}$. Połóżmy $T_n = K_n + (T_0) + (T_1) + \dots + (T_{n-1})$ gdzie $(T_k) \ I_k(\Box \varphi) \rightarrow I_k(\varphi)$.

Twierdzenie 2.4.2. (Twierdzenie o adekwatności dla T_n). $\vdash_{T_n} = \models_{M_n^T}$. ■

DOWÓD. Dla dowiedzenia pełności wystarczy pokazać, że $\mathcal{R}^{T_n}$ jest zwrotna. ■

Przez 4_n -model rozumiemy n -wartościowy model z przechodnią relacją osiągalności – $\forall x, y, z (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$. Klasa M_n^4 wszystkich 4_n -modeli definiuje semantycznie relację konsekwencji $\models_{M_n^4}$. Połóżmy $K4_n = K_n + (4_1) + \dots + (4_{n-1})$ gdzie

$$(4_k) \ I_k(\Box \varphi) \rightarrow I_k(\Box \Box \varphi). \quad (2.36)$$

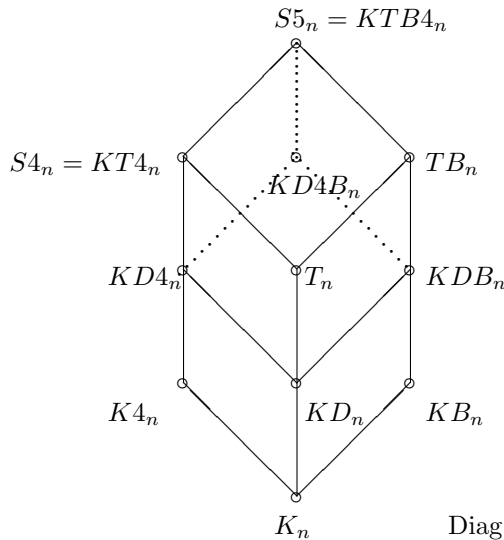
Twierdzenie 2.4.3. (Twierdzenie o adekwatności dla $K4_n$). $\vdash_{4_n} = \models_{M_n^4}$. ■

Przez B_n -model będziemy rozumieć n -wartościowy model Kripkego z symetryczną relacją osiągalności. Klasa M_n^B wszystkich B_n -modeli determinuje relację konsekwencji $\models_{M_n^B}$. Kładziemy $KB_n = K_n + (B)$ gdzie

$$(B) \ \varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi. \quad (2.37)$$

Twierdzenie 2.4.4. (Twierdzenie o adekwatności dla KB_n). $\vdash_{KB_n} = \models_{M_n^B}$. ■

Zbiór rozpatrywanych do tej pory wielowartościowych logik modalnych możemy ustrukturyzować w postaci kraty (dla każdego $n > 1$):



Każda z logik będąca kompozycją logik podstawowych, posiada semantykę będącą teoriomnogościowym przecięciem odpowiednich klas modeli. Na przykład KDB_n może być zdefiniowana przez klasę n -wartościowych modeli Kripkego, których relacja jest serialna i symetryczna (czyli jak w klasycznej, dwuwartościowej logice modalnej).

2.5 Skończenie wartościowa logika Łukasiewicza

Den_n

Powiemy, że relacja binarna $R \subseteq W \times W$ jest **gęsta** wtw., gdy zachodzi $\forall_{x,y} (Rxy \rightarrow \exists_z (Rxz \wedge Rzy))$. Połóżmy M_n^{Den} na oznaczenie klasy n -wartościowych modeli Kripkego z gęstą relacją osiągalności. Definiujemy logikę $KDen_n = K + (Den)$ gdzie

$$(Den) \quad \Box\Box\varphi \rightarrow \Box\varphi. \quad (2.38)$$

Twierdzenie 2.5.1. (*Twierdzenie o adekwatności dla $KDen_n$*). $\vdash_{KDen_n} = \models_{M_n^{\text{Den}}}$.

Dowód. Pokazujemy, że dla $\Sigma, \Pi \in RMax(\vdash_{KDen_n})$, jeśli $\Sigma \mathcal{R}^{KDen_n} \Pi$, istnieje $\Gamma \in RMax(\vdash_{KDen_n})$ spełniająca: $\Sigma \mathcal{R}^{KDen_n} \Gamma \mathcal{R}^{KDen_n} \Pi$. W tym celu wykazujemy najpierw, że zbiór

$$\Gamma^* = \{I_k(\varphi) : J_k(\Box\varphi) \in \Sigma\} \cup \{\Diamond J_k(\varphi) : J_k(\varphi) \in \Pi\} \quad (2.39)$$

jest $\vdash_{KDen_n}$ -niesprzeczny.

Założmy nie wprost, że $\perp$ da się w logice $\vdash_{KDen_n}$ wyprowadzić z Γ^* . Tak więc z faktu, że $\vdash_K \neg \bigwedge_{j=1}^m \Diamond p_j \rightarrow \neg \Diamond \bigwedge_{j=1}^m p_j$ oraz Faktu 2.3.12

$$\vdash_{KDen_n} \bigwedge_{i=1}^{m_1} I_{k_i}(\varphi_i) \rightarrow \neg \Diamond \bigwedge_{j=1}^m J_{l_j}(\psi_j) \quad (2.40)$$

dla jakichś

$$J_{k_i}(\Box\varphi_i) \in \Sigma \ (i = 1, \dots, m_1) \text{ oraz } J_{l_j}(\psi_j) \in \Pi \ (j = 1, \dots, m). \quad (2.41)$$

Z aksjomatów dla K_n Faktu 2.3.12 oraz $\overleftarrow{\Box}_k$ otrzymujemy:

$$\Sigma \vdash_{KDen_n} \Box \neg \Diamond \bigwedge_{j=1}^m J_{l_j}(\psi_j). \quad (2.42)$$

Z definicji $\Diamond$:

$$\Sigma \vdash_{KDen_n} \Box \Box \neg \bigwedge_{j=1}^m J_{l_j}(\psi_j). \quad (2.43)$$

Z Faktu 2.3.12 otrzymujemy:

$$\vdash_{KDen_n} \neg \bigwedge_{j=1}^m J_{l_j}(\psi_j) \rightarrow J_{n-1}(\neg \bigwedge_{j=1}^m J_{l_j}(\psi_j)). \quad (2.44)$$

(Den) oraz (2.43) implikują

$$\Sigma \vdash_{KDen_n} \Box \neg \bigwedge_{j=1}^m J_{l_j}(\psi_j). \quad (2.45)$$

Zatem, korzystając z (2.44) $\Sigma \vdash_{KDen_n} J_{n-1}(\Box \neg \bigwedge_{j=1}^m J_{l_j}(\psi_j))$ i ostatecznie

$$\Pi \vdash_{KDen_n} J_{n-1}(\neg \bigwedge_{j=1}^m J_{l_j}(\psi_j)) \quad (2.46)$$

sprzeczność (2.41) i (2.46).

Wykazaliśmy więc, że zbiór formuł Γ^* jest niesprzeczny, zatem dla jakiegś $\Gamma \in RMax(\vdash_{KDen_n})$: $\Gamma^* \subseteq \Gamma$. Oczywiście jest, że $\Sigma \mathcal{R}^{KDen_n} \Gamma$. Jedyną rzecz, jaka pozostała do wykazania, to

$$\Gamma \mathcal{R}^{KDen_n} \Pi. \quad (2.47)$$

Założmy, że przeciwnie **non**- $\Gamma \mathcal{R}^{KDen_n} \Pi$, czyli że istnieje formuła φ , taka że $\lambda(\Gamma, \Box \varphi) > \lambda(\Pi, \varphi)$, to znaczy $J_m(\Box \varphi) \in \Gamma$, $J_k(\varphi) \in \Pi$ dla jakiegoś $k < m$ oraz z definicji (2.39) $\Diamond J_k(\varphi) \in \Gamma^* \subseteq \Gamma$.

Jednak, łatwo zauważyć, że $\vdash_{K_n} J_m(\Box \varphi) \wedge \Diamond J_k(\varphi) \rightarrow \perp$ – sprzeczność.

■

2.6 Pozostałe wielowartościowe logiki Łukasiewicza:

$$KD'_n, KDC_n, T'_n, 4'_n, KB'_n, K5'_n$$

W poniższej tabeli umieściliśmy logikę stowarzyszoną z odpowiednim warunkiem na relację w taki sposób, że klasa modeli Kripkego spełniających ten warunek definiuje relację konsekwencji wyznaczoną przez tę logikę.

aksjomaty	warunek I -rzędu	nazwa
$(D'_k) \Box(J_k(\Box\varphi) \rightarrow \Diamond J_k(\varphi))$	$\forall_{x,y}(Rxy \rightarrow \exists_z Ryz)$	prawie serialna
$(DC) \Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi$	$\forall_{x,y,z}(Rxy \wedge Rxz \rightarrow y = z)$	funkcyjna
$(T'_k) \Box(I_k(\Box\varphi) \rightarrow I_k(\varphi))$	$\forall_{x,y}(Rxy \rightarrow Ryy)$	prawie zwrotna
$(4'_k) \Box(I_k(\Box\varphi) \rightarrow I_k(\Box\Box\varphi))$	$\forall_{x,y}(Rxy \rightarrow \forall_{u,v}(Ryu \wedge Ruv \rightarrow Ryv))$	prawie przechodnia
$(B') \Box(\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi)$	$\forall_{x,y}(Rxy \rightarrow \forall_z(Ryz \rightarrow Rzy))$	prawie symetryczna
$(5') \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	$\forall_{x,y,z}(Rxy \wedge Rxz \rightarrow Ryz)$	euklidesowa

Dowody o adekwatności dla logik $KD'_n, T'_n, 4'_n, KB'_n$ są niemal identyczne, tak więc dla celów demonstracyjnych wybraliśmy jedną z nich.

Twierdzenie 2.6.1. (*Twierdzenie o adekwatności dla $K4'_n$*). $\vdash_{K4'_n} \models_{M_n^{4'}}$.

Dowód. Część ($\subseteq$) wymaga jedynie prostego sprawdzenia, że aksjomat $(4'_n)$ jest prawdziwy w każdym modelu prawie przechodnim.

Dla dowiedzenia pełności pokażemy, że $\mathcal{R}^{K4'_n}$ jest prawie przechodnia. Załóżmy, że

$$\Sigma \mathcal{R}^{K4'_n} \Pi \mathcal{R}^{K4'_n} \Gamma \mathcal{R}^{K4'_n} \Delta. \quad (2.48)$$

Musimy wykazać, że

$$\Pi \mathcal{R}^{K4'_n} \Delta. \quad (2.49)$$

Z $(4'_k)$ oraz 2.3.12 otrzymujemy

$$I_k(\Box\varphi) \rightarrow I_k(\Box\Box\varphi) \in \Pi. \quad (2.50)$$

Założmy, że $\mathbf{non} - \Pi \mathcal{R}^{K4'_n} \Delta$ oraz zanotujmy następujące fakty (dla dowolnej formuły ψ):

$$\lambda(\Pi, \Box\psi) \leq \lambda(\Gamma, \psi); \quad (2.51)$$

$$\lambda(\Gamma, \Box\psi) \leq \lambda(\Delta, \psi). \quad (2.52)$$

Istnieje zatem formuła φ taka, że $\lambda(\Delta, \varphi) < \lambda(\Pi, \Box\varphi)$, tzn. $J_k(\varphi) \in \Delta$, $J_m(\Box\varphi) \in \Pi$ oraz $k < m$. $I_m(\Box\Box\varphi) \in \Pi$ z (2.50) a na mocy (2.51) otrzymujemy $I_m(\Box\varphi) \in \Gamma$. Tak więc dla pewnego $l \geq 0$: $J_{m+l}(\Box\varphi) \in \Gamma$.

Następnie z (2.52) uzyskujemy $m + l = \lambda(\Gamma, \Box\varphi) \leq \lambda(\Delta, \varphi) = k$ – co stanowi jawną sprzeczność. ■

2.7 Krata wielowartościowych logik modalnych Łukasiewicza

Dla każdej z rozpatrywanych logik Łukasiewicza Λ_n połóżmy $\|\Lambda_n\| = \Lambda_2$ (na przykład $\|S4_n\| = S4$). Zatem $\|\Lambda_n\|$ jest dobrze znaną dwuwartościową logiką modalną (którą można uzyskać poprzez dodanie wszystkich aksjomatów logiki klasycznej).

Ilość logik, które powstają z powyższych poprzez kombinacje wynosi, mniej więcej 200 (dla każdego $n > 1$). Niech $\mathbf{\Lambda}_n$ oznacza zbiór ich wszystkich dla ustalonego n , tak więc

$$\mathbf{\Lambda}_n := \{(KA_1 \dots A_m)_n : A_1, \dots, A_m \in \{D, T, 4, B, Den, D', DC, T', 4', B', 5'\}\} \quad (2.53)$$

(naturalnie, pewne z tych logik mają nieregularną notację, na przykład piszemy $S4_n$ raczej niż $(KT4)_n$). Łatwo jest sprawdzić, że $\langle \mathbf{\Lambda}_n, \subseteq \rangle$ tworzy ograniczoną kratę z elementami: najmniejszym i największym (odpowiednio K_n oraz $(S55'Den(DC))_n = TR_n$ ¹) dla każdego $n > 1$.

Co więcej, znany wynik A. Lindenbauma dotyczący skończenie wartościowych logik Łukasiewicza (Twierdzenie 9, [48]), przenosi się na wielowartościowe logiki modalne:

Twierdzenie 2.7.1. *Następujące warunki są równoważne:*

- (i) $n - 1$ dzieli $m - 1$;
- (ii) dla każdego $\Lambda \in \mathbf{\Lambda}_2 : \vdash_{\Lambda_m} \subseteq \vdash_{\Lambda_n}$;
- (iii) istnieje $\Lambda \in \mathbf{\Lambda}_2$ taki, że $\vdash_{\Lambda_m} \subseteq \vdash_{\Lambda_n}$.

DOWÓD. ((i) $\Rightarrow$ (ii)) Załóżmy, że $n - 1 \nmid m - 1$ oraz $\Sigma \not\vdash_{\Lambda_n} \varphi$; znaczy to, że dla pewnej klasy modeli tworzących semantykę dla $\Lambda_n - \Sigma \not\vdash_{\Lambda_n} \varphi$. Dla pewnego takiego modelu $((W, R), V) - \forall \psi \in \Sigma V(w, \psi) = 1$ oraz $V(w, \varphi) \neq 1$. Jednakże każde wartościowanie w n -wartościowej matrycy Łukasiewicza jest jednocześnie wartościowaniem w m -wartościowej matrycy. Tak więc $\Sigma \not\vdash_{\Lambda_m} \varphi$ oraz $\Sigma \not\vdash_{\Lambda_n} \varphi$.

((ii) $\Rightarrow$ (iii)) Wynika z faktu, że $\mathbf{\Lambda}_2 \neq \emptyset$.

((iii) $\Rightarrow$ (i)) Jeśli $n - 1 \nmid m - 1$, to istnieje formuła φ oraz zbiór formuł niezawierających spójników modalnych Σ taki, że: $\Sigma \vdash_{\mathbf{\Lambda}_m} \varphi$ oraz $\Sigma \not\vdash_{\mathbf{\Lambda}_n} \varphi$ (patrz na przykład [48]). Skąd istnieje wartościowanie h w n -wartościowej matrycy Łukasiewicza: $h[\Sigma] = 1$ i $h(\varphi) \neq 1$. Dla każdej logiki ze zbioru $\mathbf{\Lambda}_n$, $(\{w\}, \{(w, w)\}, V^h)$ jest modelem fałsyfikującym φ , gdzie $V^h(w, p) = h(p)$ dla każdej zmiennej zdaniowej p . ■

¹ TR_n jest n -wartościową logiką trywialną identyczną z T_n z dodanym aksjomatem $(TR) \varphi \rightarrow \Box \varphi$. Semantycznie może być zdefiniowana przez klasę modeli, których relacja osiągalności jest identycznością na zbiorze światów.

Twierdzenie 2.7.2. $\langle \bigcup_{n=2}^{\infty} \Lambda_n, \subseteq \rangle$ jest kratą o następujących własnościach:

- **S5 + DC** jest jej elementem największym (tak zwana **logika trywialna**),
- dla dowolnego niepustego zbioru istnieje element największy w $\langle \bigcup_{n=2}^{\infty} \Lambda_n, \subseteq \rangle$ dany wzorem

$$\sup\{\Lambda_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} := (\sup\{\|\Lambda_{n_k}\| : k \in \mathbb{N}\})_{(n_k-1)_{k \in \mathbb{N}}} \quad (2.54)$$

gdzie $(n_k - 1)_{k \in \mathbb{N}}$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb $n_k - 1$, $k = 1, 2, \dots$, a $\sup$ kres górny w kracie Λ_2 ,

$$\inf\{\Lambda_{n_1}, \Lambda_{n_2}\} = (\inf\{\|\Lambda_{n_1}\|, \|\Lambda_{n_2}\|\})_{[n_1-1, n_2-2]} \quad (2.55)$$

tutaj $[\cdot]$ oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność, zaś $\inf$ jest liczony w Λ_2 ,

- jeśli dla ciągu $\{k_i - 1\}_{i \in \mathbb{N}}$ istnieje najmniejsza wspólna wielokrotność, to $\inf\{\Lambda_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ jest określony oraz

$$\inf\{\Lambda_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} = (\inf\{\|\Lambda_{n_k}\| : k \in \mathbb{N}\})_{[n_k-1]_{k \in \mathbb{N}}}. \quad (2.56)$$

■

2.8 Warunki specjalne dla skończenie wartościowych logik Łukasiewicza

By uzyskać korzyści z rozszerzenia zbioru wartości logicznych, możemy rozpatrywać niestandardowe warunki nakładane na klasy modeli. Na przykład niech M_n^{RU} będzie klasą modeli $\mathfrak{M}$ gdzie, $V^{\mathfrak{M}}$ ma następującą właściwość: dla każdej zmiennej zdaniowej p oraz punktów $w, v \in \mathfrak{M}/$

$$(RU) \quad R w v \Rightarrow |V(v, p) - \frac{1}{2}| \leq |V(w, p) - \frac{1}{2}|. \quad (2.57)$$

Co taki warunek może oznaczać? My proponujemy następującą „temporalną” interpretację – dla każdego punktu w przyszłości (następniku ze względu na relację R) – stopień niepewności co do wartości logicznej jest przynajmniej nie mniejszy niż „teraz” (w poprzedniku ze względu na R). Możemy fakt ten rozpatrywać jako wzrastającą entropię ze względu na R . Łatwo jest zauważyć, że dla każdej formuły φ należącej do $(\neg, \wedge, \vee)$ -reduktu języka, zachodzi fakt:

$$(RU) \quad R w v \Rightarrow |V(v, \varphi) - \frac{1}{2}| \leq |V(w, \varphi) - \frac{1}{2}|. \quad (2.58)$$

Jednakże nie możemy tej własności rozszerzyć na cały język, o czym może świadczyć następujący przykład:

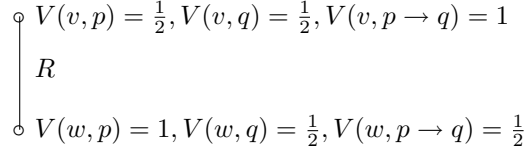


Fig. 3

Co więcej, jeśli $R[v] = \emptyset$, to $V(w, \Box p) = \frac{1}{2} < 1 = V(v, \Box p)$. Lecz nie jest trudno zauważyć, że warunek $R[w] \neq \emptyset$ dla każdego $w \in W$ pozwala na rozciągnięcie (RU) na formuły zawierające operatory modalne (jednak nadal bez $\rightarrow$). Zauważmy, że w każdym dwuwartościowym modelu warunek (RU) zachodzi, tak więc $\models_{M_2^{RU}} = \models_{M_2^K}$.

Rozpatrzmy zbiór aksjomatów:

$$\begin{aligned}
(RU)_k \quad & (I_k(p) \wedge \neg I_{n-k+1}(p)) \rightarrow \Box(I_k(p) \wedge \neg I_{n-k+1}(p)) \\
& + (I_{n-k+1}(p) \wedge \neg I_k(p)) \rightarrow \Box(I_{n-k+1}(p) \wedge \neg I_k(p)),
\end{aligned} \tag{2.59}$$

gdzie p oznacza dowolną zmienną zdaniową.

Położmy

$$KRUn = Kn + \sum_{i=0}^{n-1} (RU)_k. \tag{2.60}$$

Twierdzenie 2.8.1. (*Adekwatność dla KRU_n*). $\vdash_{KRUn} = \models_{M_n^{RU}}$.

DOWÓD. Dowód twierdzenia o przystosowaniu pozostawiamy Czytelnikowi.

Położmy

$$\beta(k, p) = I_k(p) \wedge \neg I_{n-k+1}(p). \tag{2.61}$$

Założmy, że

$$\Sigma \mathcal{R}^{RU_n} \Pi. \tag{2.62}$$

Rozpatrzmy jedynie przypadek, gdy $\lambda(\Sigma, p) \leq \frac{1}{2}$, to jak łatwo sprawdzić $\beta(\lambda(\Sigma, p), p) \in \Sigma$. Natychmiast otrzymujemy $\Box \beta(\lambda(\Sigma, p), p) \in \Sigma$ oraz $\beta(\lambda(\Sigma, p), p) \in \Pi$. Zatem

$$I_{\lambda(\Sigma, p)}(p) \wedge \neg I_{n-\lambda(\Sigma, p)+1}(p) \in \Pi. \tag{2.63}$$

Z powyższego łatwo stwierdzić, że:

$$\lambda(\Pi, p) \in [\lambda(\Sigma, p), n - \lambda(\Sigma, p)]. \tag{2.64}$$

Łatwo jest wykazać, że

$$|\neg \frac{k}{n-1} - \frac{1}{2}| = |1 - \frac{k}{n-1} - \frac{1}{2}| = |\frac{k}{n-1} - \frac{1}{2}|. \quad (2.65)$$

W przypadku, gdy $\frac{\lambda(\Pi, p)}{n-1} \leq \frac{1}{2}$, mamy $\frac{\lambda(\Sigma, p)}{n-1} \leq \frac{\lambda(\Pi, p)}{n-1} \leq \frac{1}{2}$, a zatem $|\frac{\lambda(\Pi, p)}{n-1} - \frac{1}{2}| \leq |\frac{\lambda(\Sigma, p)}{n-1} - \frac{1}{2}|$.
Jeśli zaś $\frac{1}{2} < \frac{\lambda(\Pi, p)}{n-1}$, to

$$1 - \frac{\lambda(\Pi, p)}{n-1} < \frac{1}{2}. \quad (2.66)$$

Z powyższego i (2.64) otrzymujemy

$$\frac{\lambda(\Sigma, p)}{n-1} \leq \neg \frac{\lambda(\Pi, p)}{n-1} < \frac{1}{2}. \quad (2.67)$$

Wówczas z (2.65) mamy

$$|\frac{\lambda(\Pi, p)}{n-1} - \frac{1}{2}| \leq |\frac{\lambda(\Sigma, p)}{n-1} - \frac{1}{2}|. \quad (2.68)$$

■

2.9 Filtracja w skończenie wartościowych logikach Łukasiewicza

Filtracja ([4] §2.3) jest techniką pokazywania rozstrzygalności dla danej logiki. Zastosujemy ją w tym właśnie celu dla wszystkich logik prezentowanych w tym rozdziale. Zaczniemy od definicji podstawowych pojęć będących uogólnieniami pojęć znanych z dwuwartościowej logiki modalnej (lub by być bardziej precyzyjnym – znanych z teorii dwuwartościowych modeli Kripkego).

Definicja 2.9.1. Niech Σ będzie zbiorem formuł zamkniętym na podformuły, $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ natomiast, n -wartościowym modelem Kripkego. Definiujemy relację równoważności na zbiorze W :

$$w \rightsquigarrow_{\Sigma} v \Leftrightarrow \forall \varphi \in \Sigma V(w, \varphi) = V(v, \varphi). \quad (2.69)$$

Oznaczmy przez $[w]_{\Sigma}$ lub $[w]$ klasę abstrakcji zawierającą punkt $w \in W$, a wyznaczoną przez relację równoważności $\rightsquigarrow_{\Sigma}$. Połóżmy $W_{\Sigma} := W / \rightsquigarrow_{\Sigma}$.

Niech $\mathfrak{M}_{\Sigma}^f = (W^f, R^f, V^f)$ będzie modelem, który nie musi być jednoznacznie wyznaczony, spełniającym :

- (i) $W^f = W_{\Sigma}$;
- (ii) $R^f[w][v]$ jeśli Rwv ;
- (iii) $\forall \Diamond \varphi \in \Sigma (R^f[w][v] \Rightarrow V(v, \varphi) \leq V(w, \Diamond \varphi))$;
- (iv) dla każdej zmiennej zdaniowej $p \in \Sigma$: $V^f([w], p) = V(w, p)$.

$\mathfrak{M}_{\Sigma}^f$ nazwiemy **filtracją $\mathfrak{M}$ przez Σ** .

Fakt 2.9.2. Dla każdego zbioru formuł zamkniętego na podformuły, dowolnego n -wartościowego modelu Kripkego $\mathfrak{M} = (W, R, V)$: jeśli $\mathfrak{M}_\Sigma^f$ jest filtracją $\mathfrak{M}$ przez Σ , to $|W_\Sigma| \leq n^{|\Sigma|}$.

DOWÓD. Zdefiniujmy $g : W_\Sigma \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}^\Sigma$ w następujący sposób:
 $g([w])(\varphi) = V(w, \varphi) \cdot (n-1)$. Nie powinno stanowić trudności wykazanie, że g jest iniekcją. ■

Twierdzenie 2.9.3. Dla każdej filtracji $\mathfrak{M}_\Sigma^f = (W_\Sigma, R^f, V^f)$ – dla dowolnej formuły $\varphi \in \Sigma$:

$$V(w, \varphi) = V^f([w], \varphi), \text{ dla każdego } w \in W. \quad (2.70)$$

DOWÓD. Przez indukcję względem budowy formuły φ .

Dla $p \in \Phi$, nasze stwierdzenie wynika bezpośrednio z czwartego warunku filtracji.

Dla spójników booleowskich dowód jest standardowy.

Niech zatem $\varphi = \Diamond\psi$. Z założenia oraz założenia indukcyjnego oraz trzeciego warunku filtracji otrzymujemy:

$$V(w, \Diamond\psi) = \bigvee_{v \in R(w)} V(v, \psi) \leq \bigvee_{[v] \in R^f([w])} V^f([v], \psi) = V^f([w], \Diamond\psi). \quad (2.71)$$

Podobnie, jeśli $R^f[w][v]$, to $V^f([v], \psi) = V(v, \psi) \leq V(w, \Diamond\psi)$, tak więc
 $\bigvee_{[v] \in R^f([w])} V^f([v], \psi) \leq V(w, \Diamond\psi)$. ■

Powiemy, że n -wartościowa logika Λ ma **własność skończonego modelu** (*finite model property*) ze względu na klasę modeli $\mathbf{M}$ wtw., gdy dla każdej formuły φ

$$\begin{aligned} &\text{jeśli } \varphi \notin \Lambda, \text{ to istnieje } (W, R, V) \in \mathbf{M} \\ &\text{takie, że } |W| < \aleph_0 \text{ oraz } V(w, \varphi) < 1 \text{ dla pewnego } w \in W. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Powiemy po prostu, że n -wartościowa logika Λ ma **własność skończonego modelu** wtw., gdy Λ ma własność skończonego modelu ze względu na jakąś klasę modeli $\mathbf{M}$.

Twierdzenie 2.9.4. K_n ma własność skończonego modelu ze względu na $\mathbf{M}_n^K$.

DOWÓD. Załóżmy, że $\varphi \notin K_n$, czyli że istnieje $\mathfrak{M} = (W, R, V) \in \mathbf{M}_n^K$ oraz $w \in W$ takie, że $V(w, \varphi) < 1$. Nawiązując do Faktu 2.9.2 oraz Twierdzenia 2.9.3 wystarczy pokazać, że istnieje filtracja modelu $\mathfrak{M}$ przez

$$\overline{\{\varphi\}} = \{\psi : \psi \text{ jest podformułą } \varphi\}. \quad (2.73)$$

Położmy

$$R^s[w][v] \text{ wtw. istnieją } w_1 \in [w], v_1 \in [v] \text{ takie, że } R w_1 v_1. \quad (2.74)$$

Założmy, że $R^s[w][v]$, czyli zgodnie (2.74) dla pewnych $w_1, v_1 \in W$ zachodzi $w \xleftrightarrow[\{\varphi\}]{} w_1, v \xleftrightarrow[\{\varphi\}]{} v_1$ oraz Rw_1v_1 .

Niech $\Diamond\psi \in \overline{\{\varphi\}}$. Wtedy $V(v, \psi) = V(v_1, \psi) \leq V(w_1, \Diamond\psi) = V(w, \Diamond\psi)$. Dowiedzenie drugiego warunku filtracji nie powinno nastroczać żadnych trudności. ■

Twierdzenie 2.9.5. *Dla każdego $n > 1$, K_n jest rozstrzygalna.*

DOWÓD. Zgodnie z Twierdzeniem 2.9.4, Faktem 2.9.2 oraz Twierdzeniem 2.9.3 wystarczy sprawdzić, czy φ jest prawdziwa w $\sum_{i=1}^{n|\{\varphi\}|} 2^{i^2}$ -elementowej klasie struktur relacyjnych (z dokładnością do izomorfizmu). ■

Twierdzenie 2.9.6. *T_n ma własność skończonego modelu ze względu na M_n^T .*

DOWÓD. Pokazujemy, że jeśli $\mathfrak{M} = (W, R, V) \in M_n^T$, to relacja osiągalności zdefiniowana przez warunek:

$$R^f[w][v] \text{ wtw. } \forall_{\psi \in \Sigma} V(v, \psi) \leq V(w, \Diamond\psi) \quad (2.75)$$

jest zwrotna oraz $\mathfrak{M}_\Sigma^f = (W^f, R^f, V^f)$ jest filtracją dla każdego skończonego zbioru zamkniętego na podformuły.

Warunki drugi i trzeci z definicji filtracji naturalnie zachodzą. Założmy, że $\psi \in L_\Diamond$. Wtedy $V(w, \psi) \leq V(w, \Diamond\psi)$ stąd, że $\psi \rightarrow \Diamond\psi \in T_n$ (co łatwo dowieść w oparciu o Twierdzenie o adekwatności dla $\vdash_{T_n}$). Ostatecznie $R^f[w][w]$. ■

Twierdzenie 2.9.7. *T_n jest rozstrzygalna dla każdego $n \geq 2$.*

DOWÓD. Wynika z 2.9.6. ■

Twierdzenie 2.9.8. *KD_n ma własność skończonego modelu.*

DOWÓD. Niech $\not\models_{\mathfrak{M}} \varphi$ dla pewnego $\mathfrak{M} \in M_n^D$. Definiujemy $R^f[w][v]$ w taki sam sposób jak (2.74). Niech $[w] \in W_{\{\varphi\}}$. Wtedy istnieje $v \in R[w]$ oraz $R^f[w][v]$ zgodnie z oczywistym faktem, że $(W_{\{\varphi\}}, R^f, V^f)$ jest filtracją. ■

Twierdzenie 2.9.9. *KD_n jest rozstrzygalna dla każdego $n \geq 2$.* ■

Twierdzenie 2.9.10. *B_n ma własność skończonego modelu ze względu na M_n^B .*

DOWÓD. Wystarczy pokazać, że konstrukcja prezentowana powyżej zachowuje symetrię. ■

Twierdzenie 2.9.11. *B_n jest rozstrzygalna dla każdego $n \geq 2$.* ■

Pozostawiamy bez dowodu garść twierdzeń dotyczących rozstrzygalności:

Twierdzenie 2.9.12. $K4_n$ ma własność skończonego modelu ze względu na M_n^{K4} . ■

Twierdzenie 2.9.13. Dla dowolnego $n > 1$ logika $K4_n$ jest rozstrzygalna. ■

Twierdzenie 2.9.14. Dla każdego $n \geq 2$, $\Lambda \in \Lambda_n$, Λ ma własność skończonego modelu i jest rozstrzygalna. ■

Twierdzenie 2.9.15. Dla każdego $n \geq 2$, KRU_n ma własność skończonego modelu ze względu na M_n^{RU} .

DOWÓD. Załóżmy, że $\not\models_{KRU_n} \varphi$, to znaczy:

$$\not\models_{M_n^U} \varphi \text{ oraz } V^{\mathfrak{M}}(w_0, \varphi) < 1 \quad (2.76)$$

dla pewnego $\mathfrak{M} = (W, R, V^{\mathfrak{M}}) \in M_n^{RU}$, $w_0 \in W$.

Niech R^f będzie relacją binarną zdefiniowaną poprzez warunek (2.74). Oczywiście $\mathfrak{M}_{\{\varphi\}}^f = (W^f, R^f, V^f)$ tworzy filtrację. Mamy pokazać, że $\mathfrak{M}_{\{\varphi\}}^f \in M_n^{RU}$.

Założmy, że $R^f[w][v]$ oraz $|\frac{V^f([w], p)}{n-1} - \frac{1}{2}| < |\frac{V^f([v], p)}{n-1} - \frac{1}{2}|$. Zgodnie z definicją R^f dla jakichś $w_0 \in [w], v_0 \in [v]$ zachodzi Rw_0v_0 .

Jednakże jest to niemożliwe, na podstawie faktu, że R spełnia (RU) . ■

Twierdzenie 2.9.16. Dla każdego $n \geq 2$ KRU_n jest rozstrzygalna. ■

2.10 Obliczanie ilości relacji przechodnich

Posługując się filtracją jako metodą rozstrzygalności, konieczne jest wskazanie funkcji pozwalającej na obliczenie ilości modeli o zadanych własnościach. Przy okazji chcielibyśmy przedstawić metody to umożliwiające.

W tym paragrafie przyjrzymy się modelom przechodnim.

Obliczanie ilości relacji przechodnich na zbiorze n -elementowym (oznaczymy tę liczbę przez tr_n) było rozpatrywane w literaturze (zobacz na przykład [43]). tr_n jest wyrażalne za pomocą liczby p_n – częściowych porządków na zbiorze n -elementowym.

Niech $[n]$ oznacza największą liczbę naturalną nie większą niż n oraz $\{n\}_k$ drugą liczbę Stirlinga, to jest liczbę podziału zbioru n -elementowego na k niepustych podzbiorów (porównaj [19] Rozdział 6.). Jak łatwo pokazać, x_i^m jest wartością i -cyfry liczby m w jej rozwinięciu binarnym (licząc od zera, to jest dla liczby zapisanej w postaci $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$, gdzie $a_i \in \{0, 1\}$ dla $0 \leq i \leq k$). Zanotujmy:

Lemat 2.10.1. [24] Dla dowolnej liczby naturalnej n :

$$p_n = \sum_{m=0}^{2^{n^2}-1} \prod_{i=0}^{n-1} [x_{ni+i}^m (\prod_{j=0}^{n-1} (1 - x_{ni+j}^m x_{nj+i}^m) (\prod_{r=0}^{n-1} (1 - x_{ni+j}^m x_{nj+r}^m (1 - x_{ni+r}^m)))] \quad (2.77)$$

gdzie $x_i^m = \lfloor 2^{-i} m \rfloor - 2 \lfloor 2^{-i-1} m \rfloor$ oraz

$$tr(n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(n) p_k, \quad (2.78)$$

$$\text{gdzie } \alpha_k(n) = \sum_{s=0}^k \binom{n}{s} \{k-s\}.$$

■

Każda relacja binarna R na zbiorze n -elementowym $\{x_1, \dots, x_n\}$ może być przedstawiona jako liczba naturalna $l(R)$ z przedziału $[0, 2^{n^2})$. Liczba $l(R)$ ma rozwinięcie binarne $a_{n^2} a_{n^2-1} \dots a_1$, które możemy przedstawić w macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{n+n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n \cdot (n-1) + 1} & a_{n \cdot (n-1) + 2} & \dots & a_{n^2} \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

w której

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{gdzie } R x_i x_j \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli interesuje nas wyłącznie ilość relacji przechodnich $tr(n)$, możemy ją wyliczyć bez odwoływania się do częściowego porządku p_n :

$$tr(n) = \sum_{m=0}^{2^{n^2}-1} \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{r=0}^{n-1} [1 - x_{ni+j}^m x_{nj+r}^m (1 - x_{ni+r}^m)]. \quad (2.80)$$

Jeśli nie potrzebujemy wzoru, możemy posłużyć się algorytmem wyliczania $tr(n)$.

Niech $R \subseteq \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\} \times \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}\}$ będzie relacją binarną. Wówczas R można przedstawić w postaci macierzy o wymiarach $n \times k$:

$$M(R) = \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \dots & x_{0,k-1} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \dots & x_{1,k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1,0} & x_{n-1,1} & \dots & x_{n-1,k-1} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

gdzie $x_{i,j} = 1$ dla $R e_i t_j$ oraz $x_{i,j} = 0$ w przeciwnym przypadku.

Dla dwóch macierzy $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i \leq m, j \leq n}$, $\mathbf{B} = [b_{i,j}]_{i \leq n, j \leq k}$ kładziemy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [c_{r,s}]_{r \leq m, s \leq k}$, gdzie $c_{r,s} = \max_{1 \leq l \leq n} \{\min\{a_{r,l}, b_{l,s}\}\}$ lub stosując inną notację $c_{r,s} = \bigvee_{l=0}^n (a_{r,l} \wedge b_{l,s})$.

Poczyńmy jeszcze jedną uwagę dotyczącą notacji – dla każdej macierzy $\mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i \leq m, j \leq n}$ kładziemy $\mathbf{A}_{i,j} = a_{i,j}$.

Pozostawiamy bez dowodu standardowy ($\cdot$ oznacza mnożenie macierzy):

Fakt 2.10.2. *Dla każdego $R \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$*

$$M(R \circ S) = M(R) \cdot M(S). \quad (2.82)$$

■

Wnioskujemy zatem, że $R \subseteq \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}^2$ jest przechodnia wtw., gdy $M(R) \cdot M(R) \leq M(R)$ gdzie $[a_{i,j}]_{i \leq m, j \leq n} \leq [b_{i,j}]_{i \leq m, j \leq n}$ oznacza, że dla każdego $i \leq m, j \leq n$ $a_{i,j} \leq b_{i,j}$.

Dla każdej z liczb $x = 0, 1, \dots, 2^{n^2} - 1$ sprawdzamy, czy $MX(x) \cdot MX(x) \leq MX(x)$, gdzie $MX(x) = [c_{i,j}]_{0 \leq i, j \leq n-1}$. Wartości macierzy $MX(x)$ wyliczamy ze wzoru $c_{i,j} = \lfloor 2^{-(ni+j)} x \rfloor - 2 \lfloor 2^{-(ni+j)-1} x \rfloor$.

Rozdział 3

O pewnych zastosowaniach wielowartościowych logik Łukasiewicza

W tym rozdziale omówimy dwa zagadnienia dotyczące wielowartościowych logik modalnych Łukasiewicza. Z jednej strony przedstawimy wielowartościową wersję tak zwanej logiki **PDL** (od *propositional dynamic logic*), będącej logiką multimodalną, w zamierzeniach opisującej działanie komputera (wykonanie deterministycznego lub niedeterministycznego programu). Z drugiej strony chcemy pokazać, jakie istotne związki łączą pewną trójwartościową logikę modalną Łukasiewicza z **logiką Nelsona**.

3.1 Klasyczna *PDL*

Sygnatura dla *PDL* wyznaczona jest przez zbiór **programów atomowych** *AtomPr* (zakładamy, że *AtomPr* jest przeliczalnie nieskończonym zbiorem). Zbiór Π jest generowany przez reguły:

$$\pi := a \in A \mid \pi_1 \cup \pi_2 \mid \pi_1; \pi_2 \mid \pi^*. \quad (3.1)$$

Definicja 3.1.1. Przez **regularną strukturę relacyjną dla *PDL*** będziemy rozumieć strukturę relacyjną $\mathfrak{F} = (W, R_\pi)_{\pi \in \Pi}$ spełniającą:

- $R_{\pi_1 \cup \pi_2} = R_{\pi_1} \cup R_{\pi_2}$,
- $R_{\pi_1; \pi_2} = R_{\pi_1} \circ R_{\pi_2}$,
- $R_{\pi^*} = R_\pi^*$.

Język *PDL*, symbolicznie $\mathcal{L}_{PDL}$, będzie definiowany jako standardowy język ze zbiorem jednoargumentowych modalności $\{\langle \pi \rangle : \pi \in \Pi\}$. Zbiór formuł języka $\mathcal{L}_{PDL}$ będziemy oznaczać przez L_{PDL} .

W pełnej wersji *PDL* do języka dodaje się modalności $\langle\varphi?\rangle$ dla dowolnej formuły modalnej φ . W standardowej semantyce formułę $[\varphi?]\psi$ definiuje się $\varphi \rightarrow \psi$. My rozpatrujemy wersję *PDL* bez tego operatora.

Dodatkowo kładziemy $\alpha^1 := \alpha$ oraz $\alpha^{n+1} = \alpha; \alpha^n$. Ponadto, niech $[\alpha]\varphi := \neg\langle\alpha\rangle\neg\varphi$.

3.2 Wielowartościowa *PDL*

Zdefiniujemy *PDL*_{*n*} dla $n > 2$ jako najmniejszą logikę:

- (i) zbazowaną na *n*-wartościowej logice Łukasiewicza;
- (ii) zamkniętą na reguły (dla $\alpha \in \Pi$):

$$\begin{aligned}
(MP) \quad & \varphi \rightarrow \psi, \varphi / \psi, \\
(G) \quad & \varphi, / [\alpha]\varphi \\
(K) \quad & [\alpha](\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ([\alpha]\varphi \rightarrow [\alpha]\psi) \\
(\overleftarrow{I_k}) \quad & J_k([\alpha]\varphi) \rightarrow [\alpha]I_k(\varphi) \\
([\alpha]_{\leq}) \quad & J_k([\alpha]\varphi) \rightarrow ([\langle\alpha\rangle]J_k(\varphi) \vee [\alpha]\perp) \text{ dla } k \in \{0, \dots, n-1\} \\
(Comp) \quad & [\alpha; \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha][\beta]\varphi, \\
(Alt) \quad & [\alpha \cup \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi \\
(Mix) \quad & [\alpha^*]\varphi \leftrightarrow \varphi \wedge [\alpha][\alpha^*]\varphi \\
(Ind_n) \quad & [\alpha^*](\varphi \rightarrow_{n-1} [\alpha]J_{n-1}(\varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow_{n-1} [\alpha^*]J_{n-1}(\varphi)).
\end{aligned}$$

Zgodnie z definicją $[\alpha]$ oraz regułami $\mathbf{I}_n$, $(Comp)$ może przyjąć postać $\langle\alpha; \beta\rangle\varphi \leftrightarrow \langle\alpha\rangle\langle\beta\rangle\varphi$. Podobnie (Alt) i (Mix) mogą zostać rozpisane odpowiednio: $\langle\alpha \cup \beta\rangle\varphi \leftrightarrow \langle\alpha\rangle\varphi \vee \langle\beta\rangle\varphi$ oraz $\langle\alpha^*\rangle\varphi \leftrightarrow \varphi \vee \langle\alpha\rangle\langle\alpha^*\rangle\varphi$. Standardowo definiujemy relację konsekwencji $\vdash_{PDL_n}$:

$$\Sigma \vdash_{PDL_n} \varphi \text{ wtw. istnieje dowód } \varphi \text{ ze zbioru } \Sigma \cup PDL_n \text{ przy użyciu } MP. \quad (3.2)$$

Definicja 3.2.1. Przez *PDL*_{*n*} model Kripkego będziemy rozumieć strukturę $=(W, R_\pi, V)_{\pi \in \Pi}$, gdzie $(W, R_\pi)_{\pi \in \Pi}$ jest regularną strukturą relacyjną oraz $V : W \times \Phi \longrightarrow \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, 1\}$. Wartościowanie zostaje rozszerzone w standardowy sposób na pozostałe *PDL*-formuły, to jest jak w przypadku *n*-wartościowej modalnej logiki Łukasiewicza.

Fakt 3.2.2. *i) $\vdash_{PDL_n} [\alpha^m]\varphi \leftrightarrow [\alpha]^m\varphi$ dla $m \geq 1$;*

$$ii) \vdash_{PDL_n} [\alpha^*]\varphi \rightarrow [\alpha]^m\varphi \text{ dla } m \geq 0;$$

$$iii) \vdash_{PDL_n} \langle\alpha^*\rangle J_k(\varphi) \leftrightarrow J_k(\varphi) \vee \langle\alpha\rangle\langle\alpha^*\rangle J_k(\varphi);$$

$$iv) \vdash_{PDL_n} \langle\alpha\rangle I_k(\varphi) \rightarrow I_k(\langle\alpha\rangle\varphi);$$

$$v) \vdash_{PDL_n} J_k(\varphi) \rightarrow I_k(\langle\alpha^*\rangle\varphi);$$

$$vi) \vdash_{PDL_n} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow_{n-1} (J_k(\varphi) \rightarrow I_k(\psi)).$$

DOWÓD. (i) wynika z (*Comp*);
(ii) dowód przez indukcję. Z (*Mix*) wynika $\vdash_{PDL_n} [\alpha][\alpha^*]\varphi \rightarrow [\alpha]\varphi$. Korzystając powtórnie z (*Mix*); otrzymujemy $\vdash_{PDL_n} [\alpha^*]\varphi \rightarrow [\alpha]\varphi$. Załóżmy więc, że (ii) zachodzi dla $m \geq 0, 1$. Z $\vdash_{PDL_n} [\alpha][\alpha^*]\varphi \rightarrow [\alpha][\alpha^*]^m\varphi$ oraz $\vdash_{PDL_n} [\alpha^*]\varphi \rightarrow [\alpha][\alpha^*]\varphi$ otrzymujemy $\vdash_{PDL_n} [\alpha^*]\varphi \rightarrow [\alpha]^{m+1}\varphi$;
(iii) konsekwencja (*Mix*);
(iv) teza wielowartościowej logiki Łukasiewicza;
(v) z (iii) otrzymujemy $J_k(\varphi) \rightarrow \langle \alpha^* \rangle J_k(\varphi)$ oraz z wielowartościowych logik Łukasiewicza $\langle \alpha^* \rangle J_k(\varphi) \rightarrow \langle \alpha^* \rangle I_k(\varphi)$. Z powyższych oraz (iv) otrzymujemy tezę;
(vi) pokażemy, że $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow_{n-1} (J_k(\varphi) \rightarrow I_k(\psi))$ jest schematem n -wartościowej logiki Łukasiewicza. Załóżmy nie wprost, że

$$(V(w, \varphi) \rightarrow V(w, \psi)) \rightarrow_{n-1} (V(w, J_k(\varphi)) \rightarrow V(w, I_k(\psi))) < 1 \quad (3.3)$$

przy jakimś wartościowaniu V oraz punkcie w . Korzystając z Lematu 2.2.1 $V(w, \varphi) \rightarrow V(w, \psi) = 1$ oraz $V(w, J_k(\varphi)) \rightarrow V(w, I_k(\psi)) < 1$ czyli $V(w, \varphi) \leq V(w, \psi)$ oraz $V(w, I_k(\psi)) < V(w, J_k(\varphi))$, co jest niemożliwe. ■

Definicja 3.2.3. Niech Σ będzie dowolnym zbiorem PDL-formuł. Powiemy, że Σ jest zamknięty w sensie Fischera-Ladnera (lub dokładniej n -zamknięty w sensie Fischera-Ladnera) wtw., gdy spełnia warunki:

- i) jeśli $\langle \alpha_1; \alpha_2 \rangle \varphi \in \Sigma$, to $\langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 \rangle \varphi \in \Sigma$;
- ii) jeśli $\langle \alpha_1 \cup \alpha_2 \rangle \varphi \in \Sigma$, to $\langle \alpha_1 \rangle \varphi \vee \langle \alpha_2 \rangle \varphi \in \Sigma$;
- iii) jeśli $\langle \alpha^* \rangle \varphi \in \Sigma$, to $\langle \alpha \rangle \langle \alpha^* \rangle \varphi \in \Sigma$;
- iv) jeśli $\varphi \in \Sigma$ oraz φ nie jest postaci $J_{k_1}(\psi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\psi), I_k(\psi)$, dla pewnych – formuły ψ oraz $k, k_1, \dots, k_m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, to wszystkie bezpośrednie podformuły φ są elementami Σ ;
- v) jeśli $\varphi = J_{k_1}(\psi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\psi)$, to $J_{k_1}(\psi), \dots, J_{k_m}(\psi) \in \Sigma$;
- vi) jeśli $\varphi \in \Sigma$ oraz φ nie jest postaci $J_{k_1}(\psi) \vee J_{k_2}(\psi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\psi)$ ani $I_j(\psi)$ dla pewnych – formuły ψ oraz $k_1, \dots, k_m, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, to $J_k(\varphi), I_k(\varphi) \in \Sigma$, dla $k = 0, 1, \dots, n-1$;
- vii) jeśli $I_k(\varphi) \in \Sigma$, to $J_0(\varphi), J_1(\varphi), \dots, J_{n-1}(\varphi) \in \Sigma$.

Zwróćmy uwagę, że definiens powyższej definicji zawiera spójniki J_k, I_k , które są zrelatywizowane do konkretnej wartości n (mimo iż tego zgodnie z umową nie wyszczególniamy). Tak więc sensownie jest mówić, że jest on n -zamknięty. Ponadto wybieramy pewne ustalone postaci formuł J_k, I_k dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ (patrz Twierdzenie 2.2.2) i tak rozumiemy je w powyższej definicji.

Definicja 3.2.4. Dla dowolnego zbioru formuł Σ niech $FL(\Sigma)$ będzie najmniejszym zbiorem zawierającym Σ Fischer-Ladnerowsko n -zamkniętym.

Dla dowolnej formuły φ definiujemy:

$$\tilde{}_n \varphi = \begin{cases} \bigvee_{\substack{k=0 \\ k \neq i_1, \dots, i_m}}^{n-1} J_k(\psi), & \text{o ile } \varphi = J_{i_1}(\psi) \vee \dots \vee J_{i_m}(\psi); \\ \bigvee_{k=0}^{n-2} J_k(\varphi), & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Definicja 3.2.5. Przez $\tilde{}_n FL(\Sigma)$ rozumiemy najmniejszy zbiór zawierający Σ , zamknięty Fischer-Landerowsko, oraz zamknięty na $\tilde{}_n$ (tzn. $\varphi \in X \Rightarrow \tilde{}_n \varphi \in X$).

Zwróćmy uwagę na następujący fakt: żadna z formuł $J_k(\chi)$, $I_k(\chi)$ nie jest postaci $\varphi \vee \psi$, która to zdefiniowana jest jako $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi$. Nawiązując do dowodu Twierdzenia 2.2.2 głównym spójnikiem zarówno J_k jak i I_k jest $\neg$ (mimo iż w definicji J_k posługujemy się $\wedge$, lecz przypominamy, że $\varphi \wedge \psi := \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$). Zatem jeśli $\varphi \vee \psi \in \tilde{}_n FL(\Sigma)$, to $\varphi, \psi \in \tilde{}_n FL(\Sigma)$.

Definicja 3.2.6. Przez atom nad Σ rozumiemy maksymalny, niesprzeczny podzbiór $\tilde{}_n FL(\Sigma)$. To znaczy A jest atomem nad Σ wtw. $A \subseteq \tilde{}_n FL(\Sigma)$, A jest niesprzeczny oraz jeśli $\varphi \in \tilde{}_n FL(\Sigma) - A$, to $A \cup \{\varphi\}$ jest PDL_n -sprzeczny. Zbiór atomów nad Σ oznaczymy przez $At_n(\Sigma)$ (lub $At(\Sigma)$ gdy nie będzie prowadziło to do nieporozumień).

Fakt 3.2.7. $\Sigma \in Fin$ wtw. $\tilde{}_n FL(\Sigma) \in Fin$.

Dowód. Pokazujemy jedynie $(\Rightarrow)$. Zdefiniujemy: $hg(p) = 0$ dla dowolnej zmiennej zdaniowej p , $hg(\langle \alpha \rangle \varphi) = hg(\neg \varphi) = 1 + hg(\varphi)$, $hg(\varphi \rightarrow \psi) = 1 + \max\{hg(\varphi), hg(\psi)\}$. Ponadto niech $fl(p) = p$, $fl(\neg \varphi) = \neg fl(\varphi)$, $fl(\varphi \rightarrow \psi) = fl(\varphi) \rightarrow fl(\psi)$, $fl(\langle \alpha_1; \alpha_2 \rangle \varphi) = \langle \alpha_1 \rangle \langle \alpha_2 \rangle fl(\varphi)$, $fl(\langle \alpha_1 \cup \alpha_2 \rangle \varphi) = fl(\langle \alpha_1 \rangle \varphi) \vee fl(\langle \alpha_2 \rangle \varphi)$, $fl(\langle \alpha^* \rangle \varphi) = \langle \alpha \rangle \langle \alpha^* \rangle fl(\varphi)$.

Pokazujemy, że zbiór wartości $\{hg(\psi) : \psi \in \tilde{}_n FL(\{\varphi\})\}$ jest ograniczony z góry.

Rozpatrujemy trzy przypadki.

i) formuła φ nie jest postaci $J_{k_1}(\psi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\psi)$ ani $I_k(\psi)$.

Wówczas formuła o największej wartości hg nie może być większa niż $\bigvee_{k=0}^{n-1} J_k(fl(\varphi))$;

ii) $\varphi = J_{k_1}(\psi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\psi)$. Wówczas formułą o największej wartości hg jest $\bigvee_{k=0}^{n-1} J_k(fl(\psi))$;

iii) $\varphi = I_k(\psi)$. Wówczas dla dowolnego $\chi \in \tilde{}_n FL(\{\varphi\})$ zachodzi:

$$hg(\chi) \leq \max\{I_k(\psi), \bigvee_{k=0}^{n-1} J_k(fl(\psi))\}. \quad \blacksquare$$

Lemat 3.2.8. Niech $Max(\vdash_{PDL_n})$ będzie zbiorem wszystkich maksymalnych $\vdash_{PDL_n}$ -teorii (to znaczy relatywnie maksymalnych względem $\perp$). Wówczas:

$$At(\Sigma) = \{\Gamma \cap \sim_n FL(\Sigma) : \Gamma \in Max(\vdash_{PDL_n})\}.$$

Dowód. ($\subseteq$) jeśli $A \in At(\Sigma)$, to $\sim_n FL(\Sigma) \supseteq A \not\vdash_{PDL_n} \perp$, a zatem istnieje $\Gamma \in Max(\vdash_{PDL_n})$ taka, że $A \subseteq \Gamma$; czyli $A = \Gamma \cap \sim_n FL(\Sigma)$.

($\supseteq$) Niech $\Gamma \in Max(\vdash_{PDL_n})$. Jasne jest, że $\Gamma \cap \sim_n FL(\Sigma)$ jest zbiorem niesprzecznym. Załóżmy nie wprost, że nie jest to maksymalny, niespreczny podzbiór $\sim_n FL(\Sigma)$, czyli że istnieje $B \in At(\Sigma)$ spełniający $\Gamma \cap \sim_n FL(\Sigma) \subseteq B$ oraz formuła $\varphi \in B - \Gamma \cap \sim_n FL(\Sigma)$. Załóżmy najpierw, że φ nie jest żadnej z postaci

$$J_{k_1}(\psi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\psi), \quad I_k(\psi). \quad \text{Wówczas } \Gamma, \varphi \vdash_{PDL_n} \perp \text{ oraz } \Gamma \vdash_{PDL_n} \bigvee_{k=0}^{n-2} J_k(\varphi).$$

Zatem $\bigvee_{k=0}^{n-2} J_k(\varphi) \in \Gamma \cap \sim_n FL(\Sigma) \subseteq B$, co prowadzi do sprzeczności.

Niech $\varphi = J_{k_1}(\psi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\psi)$. Wtedy $\Gamma, J_{k_1}(\psi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\psi) \vdash_{PDL_n} \perp$, skąd

$$\Gamma \vdash_{PDL_n} \bigvee_{k_1, \dots, k_m \neq j=0}^{n-1} J_j(\psi). \quad \text{Podobnie jak w poprzednim przypadku}$$

$$\bigvee_{k_1, \dots, k_m \neq j=0}^{n-1} J_j(\psi), \quad J_{k_1}(\psi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\psi) \in B. \quad \text{Co jest niemożliwe.}$$

Jeśli zaś $\varphi = I_k(\psi)$, to $\Gamma \vdash_{PDL_n} \bigvee_{j=0}^{k-1} J_j(\psi)$, a skoro Γ jest maksymalna, to

$\Gamma \vdash_{PDL_n} J_{k_0}(\psi)$ dla jakiegoś $k_0 < k$. Ale wtedy $I_k(\psi), J_{k_0}(\psi) \in B$ co implikuje, że B jest sprzeczna. ■

Lemat 3.2.9. Dla dowolnego zbioru formuł Σ , $A \in At(\Sigma)$:

- i) dla $\varphi \vee \psi \in \sim_n FL(\Sigma)$: $\varphi \vee \psi \in A$ wtw. $\varphi \in A$ lub $\psi \in A$;
- ii) dla $\varphi \in \sim_n FL(\Sigma)$: spośród $\varphi, \sim_n \varphi$ dokładnie jeden jest elementem A ;
- iii) dla $\langle \alpha; \beta \rangle \varphi \in \sim_n FL(\Sigma)$: $\langle \alpha; \beta \rangle \varphi \in A$ wtw. $\langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle \varphi \in A$;
- iv) dla $\langle \alpha \cup \beta \rangle \varphi \in \sim_n FL(\Sigma)$: $\langle \alpha \cup \beta \rangle \varphi \in A$ wtw. $\langle \alpha \rangle \varphi \in A$ lub $\langle \beta \rangle \varphi \in A$;
- v) dla $\langle \alpha^* \rangle \varphi \in \sim_n FL(\Sigma)$: $\langle \alpha^* \rangle \varphi \in A$ wtw. $\varphi \in A$ lub $\langle \alpha \rangle \langle \alpha^* \rangle \varphi \in A$.

Dowód. Z Lematu 3.2.8 wynika, że $A = \Gamma(A) \cap \sim_n FL(\Sigma)$ dla pewnej $\Gamma(A) \in Max(\vdash_{PDL_n})$.

Ad(i)($\Rightarrow$) wynika z faktu, że

$$\vdash_{PDL_n} (\varphi \rightarrow_{n-1} \perp) \rightarrow [(\psi \rightarrow_{n-1} \perp) \rightarrow ((\varphi \vee \psi \rightarrow_{n-1} \perp))]$$

($\Leftarrow$) oczywiste;

Ad(ii) wynika z faktu, że dokładnie jeden z $\varphi, \sim_n \varphi$ jest elementem $\Gamma(A)$ oraz z zamknięcia $\sim_n FL(\Sigma)$ na $\sim_n$;

Ad(iii) wynika z (*Comp*);

Ad(iv) z (*Alt*) oraz z i);

Ad(v) z i). oraz (*Mix*). ■

Lemat 3.2.10. Dla dowolnej $\vdash_{PDL_n}$ -niesprzecznej $\varphi \in \sim_n FL(\Sigma)$ istnieje $A_\varphi \in At(\Sigma)$, dla którego mamy $\varphi \in A_\varphi$.

DOWÓD. Przypadek, gdy Σ jest nieskończony wynika niekonstruktywnie z Lematu Lindenbauma. Załóżmy zatem, że Σ jest skończony, skąd na mocy Faktu 3.2.7 $\sim_n FL(\Sigma) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ dla pewnych $m \in \mathbb{N}$, $\sigma_i \in L_{PDL}$ ($1 \leq i \leq m$). Możemy przy tym założyć, że $\sigma_1 = \varphi$. Definiujemy indukcyjnie zbiory $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq \sim_n FL(\Sigma)$. Kładziemy $A_1 := \{\sigma_1\}$, a następnie dla $1 \leq k < m$ biorąc pod uwagę fakt, że

$$\vdash_{PDL_n} \bigwedge A_k \leftrightarrow (\bigwedge A_k \wedge \sigma_{k+1}) \vee (\bigwedge A_k \wedge \sim_n \sigma_{k+1}) \quad (3.4)$$

stwierdzamy, że jeden ze zbiorów $A_k \cup \{\sigma_{k+1}\}$, $A_k \cup \{\sim_n \sigma_{k+1}\}$ jest niesprzeczny. Wówczas za A_{k+1} kładziemy ów zbiór.

Ostatecznie $\varphi \in A_m \in At(\Sigma)$. ■

Dla $\varphi \in \sim_n FL(\Sigma)$, $A \in At(\Sigma)$ definiujemy:

$$\lambda(A, \varphi) = \begin{cases} k, & \text{o ile } A \vdash_{PDL_n} J_k(\varphi); \\ n-1, & \text{gdy } \varphi \in A. \end{cases}$$

Definicja 3.2.11. Dla skończonego zbioru formuł Σ budujemy model kanoniczny nad $\Sigma : (At(\Sigma), (S_\alpha^\Sigma)_{\alpha \in \Pi}, V^\Sigma)$, gdzie dla $A, B \in At(\Sigma)$, $p \in \Phi$, $\alpha \in \Pi$: $V(A, p) = \frac{\lambda(A, p)}{n-1}$ oraz $AS_\alpha^\Sigma B$ wtw. $\bigwedge A \wedge \langle \alpha \rangle B$ jest $\vdash_{PDL_n}$ -niesprzeczny.

Definicja 3.2.12. Przez regularny PDL-model nad Σ rozumiemy

$$\mathfrak{R}(\Sigma) = (At(\Sigma), (R_\alpha^\Sigma)_{\alpha \in \Pi}, V^\Sigma), \quad (3.5)$$

gdzie $R_\pi^\Sigma = S_\pi^\Sigma$ dla $\pi \in AtomPr$ oraz $(R_\alpha)_{\alpha \in \Pi}$ są generowane przez $(R_\pi)_{\pi \in AtomPr}$. W dalszym ciągu zakładamy, że Σ jest dany i pomijamy jego oznaczenie w indeksach.

Lemat 3.2.13. Dla $A \in At(\Sigma)$, $\pi \in AtomPr$, $\langle \pi \rangle \psi \in \sim_n FL(\Sigma)$:

$$\lambda(A, \langle \pi \rangle \psi) = \bigvee \{\lambda(B, \psi) : R_\pi AB\}. \quad (3.6)$$

DOWÓD. ($\leq$) Jeśli $A \vdash_{PDL_n} [\pi] \perp$, $\lambda(A, \langle \pi \rangle \psi) = 0$. Możemy zatem założyć, że $A \not\vdash_{PDL_n} [\pi] \perp$. Zatem $A \cup \{\neg[\pi] \perp\}$ jest niesprzeczny. Czyli istnieje teoria maksymalna $A^\bullet$ spełniająca:

i) $A^\bullet \cap \sim_n FL(\Sigma) = A$ oraz

ii) $\neg[\pi] \perp \in A^\bullet$.

Założmy najpierw, że ψ nie jest postaci $J_{i_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{i_m}(\chi)$ ani $I_r(\chi)$, zatem $J_k(\psi) \in \sim_n FL(\Sigma)$ dla $k = 0, \dots, n-1$.

Niech $\sim_n FL(\Sigma) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$, gdzie $\sigma_1 = J_k(\psi)$ dla $k = \lambda(A, \langle \pi \rangle \psi)$. Z aksjomatu $[\pi] \leq$ otrzymujemy

$$\vdash_{PDL_n} J_{n-1-k}([\pi] \neg \psi) \rightarrow (\langle \pi \rangle J_{n-1-k}(\neg \psi) \vee [\pi] \perp), \quad (3.7)$$

skąd

$$\vdash_{PDL_n} J_k(\langle \pi \rangle \psi) \rightarrow (\langle \pi \rangle J_k(\psi) \vee [\pi] \perp), \quad (3.8)$$

czyli $\langle \pi \rangle J_k(\psi) \in A^\bullet$. Zatem $A \cup \{\langle \pi \rangle \sigma_1\}$ jest niesprzeczny. Definiujemy indukcyjnie zbiory $B_1, \dots, B_m$ takie, że dla $1 \leq i \leq m$ $\bigwedge A \wedge \langle \pi \rangle \bigwedge B_i$ jest niesprzeczny: $B_1 := \{J_k(\psi)\}$. Niech B_i będzie określony. Wówczas

$$\vdash_{PDL_n} \langle \pi \rangle \bigwedge B_i \leftrightarrow \langle \pi \rangle [(\bigwedge B_i \wedge \sigma_{i+1}) \vee (\bigwedge B_i \wedge \sim_n \sigma_{i+1})]. \quad (3.9)$$

Następnie korzystając z aksjomatów dla n -wartościowych normalnych logik modalnych otrzymujemy:

$$\vdash_{PDL_n} \langle \pi \rangle \bigwedge B_i \leftrightarrow [\langle \pi \rangle (\bigwedge B_i \wedge \sigma_{i+1}) \vee \langle \pi \rangle (\bigwedge B_i \wedge \sim_n \sigma_{i+1})], \quad (3.10)$$

zatem $\bigwedge A \wedge \langle \pi \rangle (\bigwedge B_i \wedge \sigma_{i+1})$ lub $\bigwedge A \wedge \langle \pi \rangle (\bigwedge B_i \wedge \sim_n \sigma_{i+1})$ jest niesprzeczny. Jako B_{i+1} wybieramy $B_i \cup \{\sigma_i\}$ lub $B_i \cup \{\sim_n \sigma_i\}$. Oczywiście $B_m \in At(\Sigma)$ oraz $A \vdash_{PDL_n} J_k(\psi)$.

Żałujemy, że $\psi = J_{k_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\chi)$. Niech $A \vdash_{PDL_n} J_k(\langle \pi \rangle (J_{k_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\chi)))$. Z K_n łatwo jest pokazać, że $k = 0$ lub $k = n-1$. Naturalnie wystarczy rozpatrzeć jedynie ten drugi przypadek. Zatem $A \vdash_{PDL_n} J_{n-1}(\langle \pi \rangle (J_{k_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\chi)))$ oraz

$$\begin{aligned} \vdash_{PDL_n} J_0([\pi] \neg (J_{k_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\chi))) \\ \rightarrow (\langle \pi \rangle J_0(\neg (J_{k_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\chi))) \vee [\pi] \perp) \end{aligned} \quad (3.11)$$

i podobnie jak w przypadku bazowym $A \vdash_{PDL_n} \langle \pi \rangle J_{n-1}(J_{k_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\chi))$ oraz $A \vdash_{PDL_n} \langle \pi \rangle (J_{k_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\chi))$. Dalej postępujemy identycznie, jak to uczyniliśmy wcześniej.

Gdy zaś $\psi = I_k(\chi)$, to korzystamy z faktu, że $J_{k+j}(\chi) \in A$ dla jakiegoś $j \geq 0$.

($\geq$) wynika z faktu, że dla $l > 0$ $\vdash_{PDL_n} J_k(\langle \pi \rangle \psi) \wedge \langle \pi \rangle J_{k+l}(\psi) \rightarrow \perp$ ■

Lemat 3.2.14. Dla $\alpha \in \Pi$: $S_{\alpha^*} \subseteq S_{\alpha}^*$.

DOWÓD. Połóżmy

$$S_{\alpha^*}(A) := \{C \in At(\Sigma) : AS_{\alpha^*}C\} \quad (3.12)$$

oraz

$$\psi_0 := \bigvee_{C \in S_{\alpha^*}(A)} \bigwedge C. \quad (3.13)$$

Niech $AS_{\alpha^*}B$.

Żałujemy nie wprost, że $\psi_0 \wedge \langle \alpha \rangle \bigvee_{k=0}^{n-2} J_k(\psi_0)$ jest $\vdash_{PDL_n}$ -niesprzeczna. Wówczas niesprzeczna jest $\psi_0 \wedge \langle \alpha \rangle \neg J_{n-1}(\bigvee_{C \in S_{\alpha^*}(A)} \bigwedge C)$ oraz $\psi_0 \wedge \langle \alpha \rangle \bigwedge_{C \in S_{\alpha^*}(A)} \neg J_{n-1}(\bigwedge C)$.

W znany już sposób budujemy $B \in At(\Sigma)$ taką, że

$$\psi_0 \wedge \langle \alpha \rangle \left(\bigwedge B \wedge \bigwedge_{C \in S_\alpha^*(A)} \neg J_{n-1}(\bigwedge C) \right) \quad (3.14)$$

jest formułą niesprzeczną. Ale wówczas $B \notin S_\alpha^*(A)$ oraz z niesprzeczności $\psi_0 \wedge \langle \alpha \rangle \bigwedge B$ znajdujemy $C \in S_\alpha^*(A)$ taką, że $CS_\alpha B$. Ale wtedy otrzymujemy $AS_\alpha^* B$. Sprzeczność.

Skoro $\psi_0, \langle \alpha \rangle \bigvee_{k=0}^{n-2} J_k(\psi_0) \vdash_{PDL_n} \perp$, otrzymujemy $\psi_0 \vdash_{PDL_n} \langle \alpha \rangle \bigvee_{k=0}^{n-2} J_k(\psi_0) \rightarrow_{n-1} \perp$, skąd $\vdash_{PDL_n} \psi_0 \rightarrow_{n-1} [\alpha] J_{n-1}(\psi_0)$ oraz $\vdash_{PDL_n} [\alpha^*](\psi_0 \rightarrow_{n-1} [\alpha] J_{n-1}(\psi_0))$. Zatem z (Ind_n) otrzymujemy

$$\vdash_{PDL_n} \psi_0 \rightarrow_{n-1} [\alpha^*] J_{n-1}(\psi_0). \quad (3.15)$$

Z faktu, że $\bigwedge A \wedge \langle \alpha^* \rangle \bigwedge B$ jest niesprzeczny wynika niesprzeczność formuł $\bigwedge A \wedge \langle \alpha^* \rangle (J_{n-1}(\psi_0) \wedge \bigwedge B)$ oraz $\bigwedge A \wedge \langle \alpha^* \rangle \left(\bigvee_{C \in S_\alpha^*(A)} J_{n-1}(\bigwedge C) \wedge \bigwedge B \right)$. Za-

tem dla pewnego $C_0 \in S_\alpha^*(A)$ mamy niesprzeczną formułę $J_{n-1}(\bigwedge C_0) \wedge \bigwedge B$. Ostatecznie niesprzeczna jest również $\bigwedge C_0 \wedge \bigwedge B$. Ale B i C_0 są maksymalne, zatem $B = C_0$. ■

Lemat 3.2.15. Dla $\alpha \in \Pi$: $S_\alpha \subseteq R_\alpha$.

DOWÓD. Przez indukcję względem budowy α . Dla $\alpha \in AtomPr$ warunek otrzymujemy z definicji $\mathfrak{R}(\Sigma)$. Jeśli $\alpha = \beta^*$ oraz $S_\beta \subseteq R_\beta$, to z Lematu 3.2.14 mamy $S_{\beta^*} \subseteq (S_\beta)^* \subseteq (R_\beta)^* = R_{\beta^*}$.

Założmy, że $AS_{\alpha;\beta} B$, czyli że $\bigwedge A \wedge \langle \alpha; \beta \rangle \bigwedge B$ jest niesprzeczny, skąd otrzymujemy niesprzeczność $\bigwedge A \wedge \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle \bigwedge B$.

Dla $\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} = \sim_n FL(\Sigma)$ definiujemy indukcyjnie zbiory $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$:

$\Gamma_1 = \emptyset$,

jeśli Γ_i został zdefiniowany, to

$\bigwedge A \wedge \langle \alpha \rangle (\bigwedge \Gamma_i \wedge \sigma_i \wedge \langle \beta \rangle \bigwedge B)$ jest niesprzeczny lub niesprzeczny jest $\bigwedge A \wedge \langle \alpha \rangle (\bigwedge \Gamma_i \wedge \sim_n \sigma_i \wedge \langle \beta \rangle \bigwedge B)$.

W pierwszym przypadku kładziemy $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\sigma_i\}$, w drugim zaś $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\sim_n \sigma_i\}$.

Naturalnie $\Gamma_m \in At(\Sigma)$, $AS_\alpha \Gamma_m S_\beta B$ i z założenia indukcyjnego: $AR_\alpha \Gamma_m R_\beta B$, skąd $AR_{\alpha;\beta} B$.

Niech wreszcie $AS_{\alpha \cup \beta} B$, czyli $\bigwedge A \wedge \langle \alpha \cup \beta \rangle \bigwedge B$ jest $\vdash_{PDL_n}$ -niesprzeczna. Z (Alt) otrzymujemy niesprzeczność $\bigwedge A \wedge (\langle \alpha \rangle \bigwedge B \vee \langle \beta \rangle \bigwedge B)$. Skąd natychmiast stwierdzamy, że $\bigwedge A \wedge \langle \alpha \rangle \bigwedge B$ lub $\bigwedge A \wedge \langle \beta \rangle \bigwedge B$ jest niesprzeczna, a zatem $AS_\alpha B$ lub $AS_\beta B$. Z założenia indukcyjnego – $AR_\alpha B$ lub $AR_\beta B$ i ostatecznie $AR_{\alpha \cup \beta} B$. ■

Lemat 3.2.16. Dla $A \in At(\Sigma)$, $\langle \alpha \rangle \psi \in \sim_n FL(\Sigma)$:

$$\lambda(A, \langle \alpha \rangle \psi) = \bigvee \{ \lambda(B, \psi) : R_\alpha AB \}.$$

DOWÓD. Najpierw pokażemy, że dla $A \in At(\Sigma)$, $\langle \alpha \rangle \psi \in_n \sim FL(\Sigma)$ zachodzi: $\lambda(A, \langle \alpha \rangle \psi) \leq \bigvee \{ \lambda(B, \psi) : R_\alpha AB \}$. Jeśli ψ nie jest postaci $I_r(\chi)$ ani $J_{k_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\chi)$, to $J_k(\psi) \in_n \sim FL(\Sigma)$ (gdzie $k = \lambda(A, \langle \alpha \rangle \psi)$). Wtedy kładąc $B_1 := \{J_k(\psi)\}$ budujemy w znany już sposób ciąg $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B_m \in At(\Sigma)$, taki że $\bigwedge A \wedge \langle \alpha \rangle \bigwedge B_m$ jest zbiorem $\vdash_{PDL_n}$ -niesprzecznym. Zatem

$$AS_\alpha B_m \quad (3.16)$$

oraz

$$J_k(\psi) \in B_m. \quad (3.17)$$

Lecz z Lematu 3.2.15 oraz (3.16) otrzymujemy $AR_\alpha B_m$.

W przypadku gdy ψ jest postaci $J_{k_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\chi)$, na samym początku dowodu po prostu kładziemy $B_1 := \{\psi\}$. Podobnie gdy $\psi = I_r(\chi)$.

($\geq$) Dowód ze względu na budowę $\alpha \in \Pi$. Dla $\alpha \in AtomPr$ warunek wynika z Lematu 3.2.13.

Pokazujemy, że dla $\alpha = \beta^*$ nierówność również zachodzi (jeśli tylko zachodzi dla β). Przy czym rozpatrujemy jedynie przypadek, gdy ψ nie jest postaci $J_{k_1}(\chi) \vee \dots \vee J_{k_m}(\chi)$ ani postaci $I_r(\chi)$. Pozostałe są analogiczne do przypadku klasycznego (patrz [4] Lemat 4.89). Niech

$$\begin{aligned} A &= C_0 R_\beta C_1 R_\beta \dots C_{i-1} R_\beta C_i = B \\ &\text{oraz} \\ J_k(\psi) &\in B. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Przez indukcję względem i pokazujemy, że $I_k(\langle \beta^* \rangle \psi) \in C_j$ dla $1 \leq j \leq i$.

Jeśli $i = 0$, to $J_k(\psi) \in A$ a z $\vdash_{PDL_n} J_k(\psi) \rightarrow I_k(\langle \beta^* \rangle \psi)$ (który wynika z Faktu 3.2.2 (vi) oraz (Mix)) mamy $I_k(\langle \beta^* \rangle \psi) \in A$. Niech zatem $i > 0$ wówczas $I_k(\langle \beta^* \rangle \psi) \in C_1$, czyli $J_{k+l}(\langle \beta^* \rangle \psi) \in C_1$ dla pewnego l skąd $C_1 \vdash_{PDL_n} \langle \beta^* \rangle J_{k+l}(\psi)$, a zatem $\lambda(A, \langle \beta \rangle \langle \beta^* \rangle \psi) \geq k+l$ (z głównego założenia indukcyjnego) oraz $\lambda(A, \langle \beta^* \rangle \psi) \geq k+l$ z (Mix). Z tego K_n otrzymujemy $I_k(\langle \beta^* \rangle \psi) \in A$. Przypadki gdy $\alpha = \alpha_0 \cup \alpha_1$ oraz $\alpha = \alpha_0; \alpha_1$ nie nastroczają większych trudności. ■

Twierdzenie 3.2.17. $\vdash_{PDL_n} \varphi$ wtw. dla dowolnego PDL_n -modelu Kripkego $\mathfrak{M} = (W, R_\pi, V)_{\pi \in \Pi}$ zachodzi $V(w, \varphi) = 1$ dla dowolnego $w \in W$.

DOWÓD. Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie ($\Rightarrow$). Pokazujemy ($\Leftarrow$). Niech $\not\vdash_{PDL_n} \varphi$. Zatem dla pewnego $k < n-1$ formuła $J_k(\varphi)$ jest PDL_n -niesprzeczna. Niech Σ_φ będzie zbiorem składającym się ze wszystkich podformuł formuły $J_k(\varphi)$ oraz wszystkich formuł postaci $J_k(\chi)$, gdzie χ jest podformułą φ , $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Jasne jest, że w regularnym PDL -modelu nad Σ_φ , $\mathfrak{R}(\Sigma_\varphi) = (At(\Sigma_\varphi), (R_\alpha^{\Sigma_\varphi})_{\alpha \in \Pi}, V^{\Sigma_\varphi})$ zachodzi $V^{\Sigma_\varphi}(A, \varphi) = \frac{k}{n-1} < 1$ dla pewnego $A \in At(\Sigma_\varphi)$ takiego, że $J_k(\varphi) \in A$. ■

3.3 Wielowartościowe logiki Łukasiewicza a logika Nelsona

Wiadomym jest, że logika intuicjonistyczna jest interpretowalna w logice $S4$ (porównaj [35]). W bieżącym paragrafie pokażemy, że logika Nelsona (zdefiniowana poniżej) może być interpretowana w logice $S4_3$. Następnie przeprowadzimy pewne analizy nad samym pojęciem **porządku informacyjnego**. Ponadto, korzystając z mnogości wielowartościowych logik modalnych Łukasiewicza, przedstawimy formalną propozycję uogólnienia logiki Nelsona w ten sposób, by dała się zinterpretować w logice $S4_n$ dla $n > 3$.

Definicja 3.3.1. *Językiem logiki intuicjonistycznej jest $\mathcal{L} = (L, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$. Przez **model Kripkego dla logiki intuicjonistycznej** rozumiemy strukturę $\mathfrak{M} = (W, \leq, V)$, gdzie W jest niepustym zbiorem, $\leq$ quasi-porządkiem na W oraz $V : Var \rightarrow \mathcal{P}(W)$ wartościowaniem spełniającym warunek*

$$\text{jeśli } w \leq v \text{ \& } w \in V(p), \text{ to } v \in V(p). \quad (3.19)$$

Definiujemy prawdziwość formuły φ w punkcie w

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{M}, w \Vdash p & \text{wtw.} & w \in V(p) \\ \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi & \text{wtw.} & \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ \& } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \\ \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi & \text{wtw.} & \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ lub } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \\ \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \rightarrow \psi & \text{wtw.} & \forall v \in W [w \leq v \Rightarrow [\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi \Rightarrow \mathfrak{M}, v \Vdash \psi]] \\ \mathfrak{M}, w \Vdash \sim \varphi & \text{wtw.} & \forall v \in W [w \leq v \Rightarrow \mathfrak{M}, v \not\Vdash \varphi]. \end{array} \quad (3.20)$$

Klasę modeli Kripkego dla logiki intuicjonistycznej oznaczmy przez M_{INT} .

Wiadomo, że relacja konsekwencji $\models_{INT}$ zdefiniowana

$$\begin{array}{ll} \Sigma \models_{INT} \varphi & \text{wtw.} \\ \text{warunek} & \text{dla dowolnego } (W, \leq, V) \in M_{INT} \text{ oraz } w \in W \\ & \forall \psi \in \Sigma \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \text{ implikuje } \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \end{array} \quad (3.21)$$

pokrywa się z logiką intuicjonistyczną zdefiniowaną aksjomatycznie, to jest z logiką wyznaczoną przez zbiór aksjomatów (p. [7], s. 74, [51], s.127):

- i) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- ii) $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$
- iii) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$
- iv) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$
- v) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi)]$
- vi) $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$
- vii) $\varphi \rightarrow \psi \vee \varphi$

$$\text{viii)} \quad (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow [(\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi)]$$

$$\text{ix)} \quad (\varphi \rightarrow \sim \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \sim \varphi)$$

$$\text{x)} \quad \sim (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi$$

oraz regułę (MP) .

Definicja 3.3.2. [51] s.358. Przez **logikę Nelsona** będziemy rozumieć logikę dla języka $\mathcal{L}_N = (L_N, \neg, \sim, \wedge, \vee, \rightarrow)$ będącą rozszerzeniem INT o następujące aksjomaty charakteryzujące spójnik $\neg$:

$$N1 \quad \neg(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \neg\psi$$

$$N2 \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

$$N3 \quad \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$N4 \quad \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$$

$$N5 \quad \neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi).$$

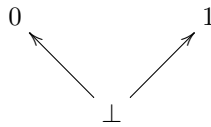
Tak wyznaczoną relację konsekwencji oznaczymy jako $\vdash_N$.

Przez **N-model** będziemy rozumieć strukturę:

$\mathfrak{M} = (W, \leq, V)$, gdzie $(W, \leq)$ jest zbiorem quasi-uporządkowanym, $V : W \times Var \rightarrow \{0, \perp, 1\}$ wartościowaniem spełniającym warunek

$$w \leq v \text{ implikuje } V(w, p) \sqsubseteq V(v, p) \quad (3.22)$$

dla dowolnej zmiennej zdaniowej p . Porządek $\sqsubseteq$ jest zdefiniowany jako zbiór par uporządkowanych $\{\langle \perp, \perp \rangle, \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle \perp, 0 \rangle, \langle \perp, 1 \rangle\}$. W celach poglądowych warto jest go przedstawić na rysunku:



Dzięki temu, łatwo jest zauważyć, że relacja $\sqsubseteq$ da się zinterpretować jak **porządek informacyjny**, gdzie $\perp$ jest wartością odpowiadającą brakowi informacji, zaś 0 i 1 to odpowiednio – prawda i fałsz. Jest oczywiste, że w owym porządku 1 i 0 są ponad $\perp$, ponadto jako informacyjnie nasyczone, nie są ze sobą porównywalne.

Rozszerzamy funkcję V na wszystkie formuły języka $\mathcal{L}_N$:

$$V(w, \neg\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } V(w, \varphi) = 0; \\ 0, & \text{gdy } V(w, \varphi) = 1; \\ \perp, & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
V(w, \varphi \wedge \psi) &= \begin{cases} 1, & \text{gdy } V(w, \varphi) = V(w, \psi) = 1; \\ 0, & \text{gdy } \{V(w, \varphi), V(w, \psi)\} \cap \{0\} \neq \emptyset; \\ \perp, & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases} \\
V(w, \varphi \vee \psi) &= \begin{cases} 1, & \text{jeśli } V(w, \varphi) = 1 \text{ lub } V(w, \psi) = 1; \\ 0, & \text{gdy } V(w, \varphi) = V(w, \psi) = 0; \\ \perp, & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases} \\
V(w, \varphi \rightarrow \psi) &= \begin{cases} 1, & \text{gdy } \forall_{v \geq w} [V(v, \varphi) = 1 \Rightarrow V(v, \psi) = 1]; \\ 0, & \text{w przypadku } V(w, \varphi) = 1 \text{ \& } V(w, \psi) = 0; \\ \perp, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases} \\
V(w, \sim \varphi) &= \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \forall_{v \geq w} V(v, \varphi) \neq 1; \\ 0, & \text{jeśli } V(w, \varphi) = 1; \\ \perp, & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}
\end{aligned}$$

Twierdzenie 3.3.3. *Dla dowolnego N -modelu $\mathfrak{M} = (W, \leq, V)$ własność (3.22) przenosi się na wszystkie formuły, to znaczy dla dowolnej formuły φ :*

$$w \leq v \text{ implikuje } V(w, \varphi) \subseteq V(v, \varphi). \quad (3.23)$$

DOWÓD. Wymagana prosta indukcja ze względu na kształt formuły. ■

Klasa N -modeli definiuje relację konsekwencji $\models_N$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
&\Sigma \models_N \varphi \text{ wtw. dla dowolnego } N\text{-modelu } \mathfrak{M} = (W, \leq, V) \\
&\text{dla dowolnego } w \in W \text{ warunek } \forall_{\psi \in \Sigma} V(w, \psi) = 1 \text{ implikuje} \\
&\quad V(w, \varphi) = 1.
\end{aligned} \quad (3.24)$$

Twierdzenie 3.3.4. $\vdash_N = \models_N$.

Dowód powyższego twierdzenia można znaleźć w §5.3 [51].

Zdefiniujmy translację $\hat{tr} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_\Diamond$ z języka zdaniowego $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim, \neg)$ w modalny język zdaniowy $\mathcal{L}_\Diamond = (L_\Diamond, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \Diamond)$ (naturalnie $\Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi$):

1. $\hat{tr}(p) = p$ dla dowolnej zmiennej zdaniowej p ;
2. $\hat{tr}(\varphi \wedge \psi) = \hat{tr}(\varphi) \wedge \hat{tr}(\psi)$; $\hat{tr}(\varphi \vee \psi) = \hat{tr}(\varphi) \vee \hat{tr}(\psi)$; $\hat{tr}(\neg\varphi) = \neg\hat{tr}(\varphi)$;

3. $\hat{tr}(\varphi \rightarrow \psi) = \Box(J_2(\hat{tr}(\varphi)) \rightarrow \hat{tr}(\psi)) \vee \neg\hat{tr}(\varphi) \vee \hat{tr}(\psi)$;
4. $\hat{tr}(\sim \varphi) = \Box\neg J_2(\hat{tr}(\varphi)) \vee \neg\hat{tr}(\varphi)$.

Oznaczmy przez MPI_3 najmniejszą logikę zawierającą $S4_3$, aksjomaty: U_3) $(J_2(p) \rightarrow \Box J_2(p)) \wedge (J_0(p) \rightarrow \Box J_0(p))$ oraz zamkniętą na reguły:

- MP
- $\varphi/\Box\varphi$.

Jak wiemy, w przypadku trójwartościowej logiki Łukasiewicza, spójniki J_0, J_1, J_2 mogą być zdefiniowane następująco:

- $J_2(p) := p \wedge \neg(p \leftrightarrow \neg p)$,
- $J_1(p) := p \leftrightarrow \neg p$,
- $J_0(p) = \neg p \wedge \neg(p \leftrightarrow \neg p)$.

Określimy relację konsekwencji w następujący sposób:

$$\Sigma \vdash_{MPI_3} \varphi \text{ wtw. } \varphi \text{ jest dowodliwa ze zbioru } MPI_3 \cup \Sigma \text{ przy użyciu reguły } MP. \quad (3.25)$$

Wartość $\perp$ może zostać utożsamiona z $\frac{1}{2}$, a każdy N -model może być rozpatrywany jako struktura $\hat{\mathfrak{M}} = (W, \leq, \hat{V})$ będąca modelem dla trójwartościowej logiki Łukasiewicza, gdzie

$$\hat{V}(w, p) = \frac{1}{2} \text{ wtw. } V(w, p) = \perp. \quad (3.26)$$

Fakt 3.3.5. *Dla dowolnego N -modelu $\mathfrak{M} = (W, \leq, V)$ oraz dowolnych – formuły $\varphi \in L$ i świata $w \in W$:*

$$V(w, \varphi) = \hat{V}(w, \hat{tr}(\varphi)).$$

DOWÓD. Indukcja względem budowy formuły. Pokazujemy jedynie warunek dla implikacji, czyli

$$V(w, \psi \rightarrow \chi) = \hat{V}(w, \Box(J_2(\hat{tr}(\psi)) \rightarrow \hat{tr}(\chi)) \vee \neg\hat{tr}(\psi) \vee \hat{tr}(\chi)). \quad (3.27)$$

Niech prawa strona (3.27) będzie równa 1. Przypadek gdy $\hat{V}(w, \neg\hat{tr}(\psi) \vee \hat{tr}(\chi)) = 1$ jest oczywisty, to znaczy lewa jest również równa 1. Gdy zaś zachodzi $\hat{V}(w, \Box(J_2(\hat{tr}(\psi)) \rightarrow \hat{tr}(\chi))) = 1$, to z definicji waluacji dla $\Box$:

$$\forall v \geq w [\hat{V}(v, \psi) = 1 \Rightarrow \hat{V}(v, \chi) = 1]. \quad (3.28)$$

Z powyższego i z założenia indukcyjnego otrzymujemy $V(w, \psi \rightarrow \chi) = 1$.

Niech $\hat{V}(w, \Box(J_2(\hat{tr}(\psi)) \rightarrow \hat{tr}(\chi)) \vee \neg\hat{tr}(\psi) \vee \hat{tr}(\chi)) = 0$, czyli
 $\hat{V}(w, \neg\hat{tr}(\psi)) = \hat{V}(w, \hat{tr}(\chi)) = 0$. Ostatecznie $\hat{V}(w, \hat{tr}(\psi)) = 1$ oraz
 $\hat{V}(w, \hat{tr}(\chi)) = 0$ i $V(w, \psi \rightarrow \chi) = 0$.

Założmy zatem, że $\hat{V}(w, \Box(J_2(\hat{tr}(\psi)) \rightarrow \hat{tr}(\chi)) \vee \neg\hat{tr}(\psi) \vee \hat{tr}(\chi)) = \perp$.

Jeśli $\hat{V}(w, \Box(J_2(\hat{tr}(\psi)) \rightarrow \hat{tr}(\chi))) = \perp$, to $V(w, \psi \rightarrow \chi) < 1$. Ponadto nie może być $V(w, \psi \rightarrow \chi) = 0$, bowiem mielibyśmy $V(w, \psi) = 1$ oraz $V(w, \chi) = 0$, co implikowałoby $\hat{V}(w, \Box(J_2(\hat{tr}(\psi)) \rightarrow \hat{tr}(\chi))) = 0$.

Ponadto gdy $\hat{V}(w, \Box(J_2(\hat{tr}(\psi)) \rightarrow \hat{tr}(\chi))) = 0$, to $\exists v \geq w [\hat{V}(v, \psi) = 1 \ \& \ V(v, \chi) = 0]$. Zatem $V(w, \psi \rightarrow \chi) \neq 1$ oraz $V(w, \psi \rightarrow \chi) \neq 0$, bo w przeciwnym razie mielibyśmy $\hat{V}(\neg\hat{tr}(\psi) \vee \hat{tr}(\chi)) = 0$. I w konsekwencji byśmy otrzymali $\hat{V}(w, \Box(J_2(\hat{tr}(\psi)) \rightarrow \hat{tr}(\chi)) \vee \neg\hat{tr}(\psi) \vee \hat{tr}(\chi)) = 0$. ■

Twierdzenie 3.3.6. $\Sigma \vdash_N \varphi$ wtw. $\hat{tr}[\Sigma] \vdash_{MPI_3} \hat{tr}(\varphi)$.

DOWÓD. Najpierw należy wykazać, że MPI_3 jest wyznaczona przez klasę trójwartościowych modeli Kripkego, w których relacja osiągalności R jest zwrotna i przechodnia oraz spełnia warunek

$$V(w, p) \in \{0, 1\} \ \& \ R w v \Rightarrow V(v, p) = V(w, p). \quad (3.29)$$

Zatem możemy je utożsamić z N -modelami. Korzystając z Faktu 3.3.5 dowodzimy twierdzenia. ■

Twierdzenie 3.3.6 wskazuje związek jaki łączy logiki $\vdash_N$ oraz $S4_3$, który jest analogiczny do tego, jaki zachodzi pomiędzy logiką intuicjonistyczną a logiką $S4^1$.

Naturalnie, wielowartościowa modalna logika Łukasiewicza nie musi być trójwartościowa. Warto by się w tym miejscu zastanowić, jakiego uogólnienia logiki Nelsona trzeba dokonać, by była ona interpretowalna w modalnej logice Łukasiewicza o większej niż trzy ilości wartości. My pozwolimy sobie przedstawić następującą propozycję:

Dla dowolnej liczby naturalnej n , niech MPI_n będzie logiką zdefiniowaną na języku $\mathcal{L}_\Diamond$ przez następujący zbiór reguł:

- wszystkie reguły logiki $S4_n$,
- U_n) dla dowolnego $a > \frac{1}{2}$: $I_{\geq a}(p) \rightarrow \Box I_{\geq a}(p)$ oraz dowolnego $b < \frac{1}{2}$: $I_{\leq b}(p) \rightarrow \Box I_{\leq b}(p)$. gdzie $a, b \in \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$.

Powyżej użyliśmy następujących oznaczeń: $I_{\geq a}(p) = I_{a \cdot (n-1)}(p)$ oraz $I_{\leq b}(p) = \neg I_{b \cdot (n-1) + 1}(p)$.

Przyjrzyjmy się bliżej intuicjom, jakie stoją za aksjomatami U_n . Jeśli wartość zmiennej zdaniowej p w punkcie w jest większa niż $\frac{1}{2}$, to w każdym punkcie

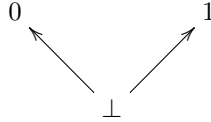
¹Zwracamy jednakże uwagę na fakt, że w trójwartościowym przypadku dodajemy aksjomat U_3 .

v , pozostającym w relacji dostępności z punktem w (światem potomnym) wartość p musi być bliżej wartości 1 (lub dokładniej – $v(p) \geq w(p)$). Symetryczna sytuacja ma miejsce gdy $w(p) < \frac{1}{2}$ (wtedy to $0 \leq v(p) \leq w(p) \leq 1$)².

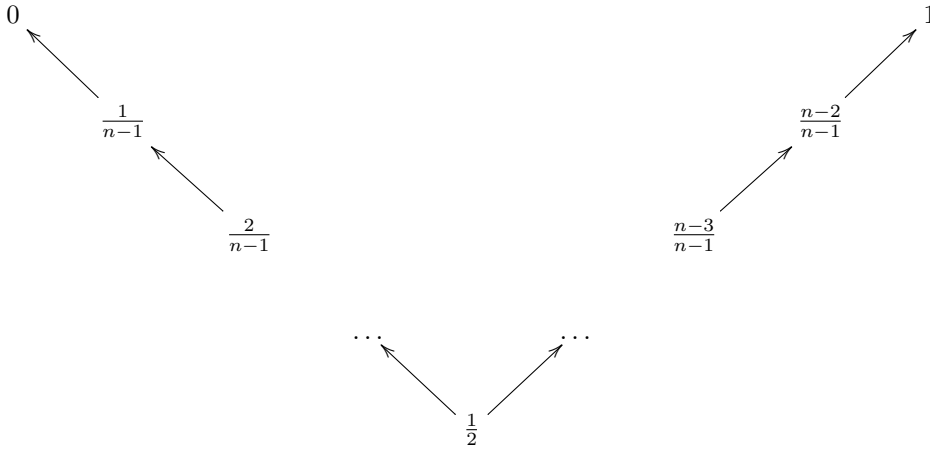
W logikach częściowych istnieją dwa porządki –

- porządek prawdziwości formuł, czyli $0 < \perp < 1$,
- porządek ilości informacji, jakie niosą te formuły.

Drugi z porządków przedstawiliśmy na poniższym rysunku:



Gdy zbiór wartości logicznych ma więcej niż trzy elementy, powiedzmy jest postaci $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$, wtedy to porządek stopni prawdziwości jest zwykłą relacją niewiększości pomiędzy liczbami wymiernymi. Porządek informacyjny mógłby zostać oddany w następujący sposób (rozpatrujemy jedynie przypadek, w którym n jest nieparzyste, równoważnie $-\frac{1}{2} \in \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$):



Porządek ten możemy zdefiniować formalnie:

$$x \sqsubset y \text{ wtw. } \frac{1}{2} \leq x < y \text{ lub } y < x \leq \frac{1}{2}. \quad (3.30)$$

Powyższa definicja ma zastosowanie do zbiorów $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ oraz $[0, 1]$.

²Chodzi nam tu o ujęcie intuicji, która mówi, że jeśli wartość zmiennej zdaniowej w punkcie w jest już zorientowana na 0 lub 1, to w każdym R -następniku może się jej wartość jedynie zbliżyć do tej wartości (to jest do 0 lub 1).

Porządek ilości informacji może zostać uogólniony na wiele sposobów. Jeden z nich został przedstawiony bezpośrednio powyżej. Jednakże chcielibyśmy uzasadnić, że można dopuścić i inne rozwiązania:

„stopień dookreślenia” formuły α jest wyższy od stopnia dookreślenia formuły β wtedy i tylko wtedy, gdy wartość $v(\alpha)$ jest bliżej niż $v(\beta)$ do „wartości maksymalnie zdeterminowanych” (to znaczy wartości 1 i 0).

Ostatnie zdanie nie stanowi definicji i powinno być raczej traktowane jak postulat. Połóżmy $d : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$ dla funkcji wskazującej wspomniany stopień zdeterminowania:

$$d(x) = 1 - \min(1 - x, x). \quad (3.31)$$

Następnie określamy relację $\preceq$ w następujący sposób:

$$x \preceq y \text{ wtw. } d(x) \leq d(y). \quad (3.32)$$

Możemy stwierdzić, że $\preceq$ stanowi dobry przykład porządku informacyjnego. Ponadto nietrudno zauważyć, że $\preceq$ jest zwrotna i przechodnia, lecz nie jest antysymetryczna na zbiorze $[0, 1]$ (mamy $0 \preceq 1$ oraz $1 \preceq 0$ ale $0 \neq 1$).

Mając relację binarną $\sqsubset$ możemy zdefiniować **PI_n^r-model**, dla $n \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\} \cup \{\aleph_1\}$ oraz $r \in (0, 1]$ jako następującą strukturę $(W, \leq, V)$, gdzie

- $W \neq \emptyset$,
- $\leq$ jest quasi porządkiem,
- $V : W \times Var \rightarrow A$, gdzie

$$A = \begin{cases} \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, 1\}, & \text{jeśli } n \in \mathbb{N}; \\ [0, 1] \cap \mathbb{Q}, & \text{gdy } n = \aleph_0; \\ [0, 1], & \text{gdy } n = \aleph_1; \end{cases}$$

- $w \leq v$ implikuje $V(w, p) \sqsubseteq V(v, p)$, gdzie $x \sqsubseteq y$ wtw. $x \sqsubset y$ lub $x = y$.

Za język zdaniowy połóżmy $\mathcal{L}' = (L, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \sim, F)$, gdzie F jest stałą (spójnikiem 0-argumentowym). Wartościowanie V może zostać rozszerzone na cały język $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
V(w, \neg\varphi) &= 1 - V(w, \varphi), \\
V(w, \varphi \wedge \psi) &= \min(V(w, \varphi), V(w, \psi)), \\
V(w, \varphi \vee \psi) &= \max(V(w, \varphi), V(w, \psi)), \\
V(w, \varphi \rightarrow \psi) &= \min(1, \max(\bigwedge_{v \geq w} (1 - I_r(V(v, \varphi)) + V(v, \psi)), \\
&\quad 1 - V(w, \varphi), V(w, \psi)), \\
V(w, F) &= 0, \\
V(w, \sim \varphi) &= V(w \rightarrow F).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

W powyższych wzorach I_r nie oznacza formuły, lecz jest po prostu funkcją $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zdefiniowaną na stronie 37.

Zdefiniujmy funkcję $\hat{tr}_n^r : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_\Diamond$ dla $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\hat{tr}_n^r(\neg\varphi) &= \neg\hat{tr}_n^r(\varphi), \\
\hat{tr}_n^r(\varphi \wedge \psi) &= \min(\hat{tr}_n^r(\varphi), \hat{tr}_n^r(\psi)), \\
\hat{tr}_n^r(\varphi \vee \psi) &= \max(\hat{tr}_n^r(\varphi), \hat{tr}_n^r(\psi)), \\
\hat{tr}_n^r(\varphi \rightarrow \psi) &= \Box(I_r(\hat{tr}_n^r(\varphi)) \rightarrow \hat{tr}_n^r(\psi)) \vee \neg\hat{tr}_n^r(\varphi) \vee \hat{tr}_n^r(\psi), \\
\hat{tr}_n^r(\sim \varphi) &= \hat{tr}_n^r(\varphi \rightarrow \perp).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Wiadomo, że spójniki I_r nie są definiowalne w nieskończenie wartościowej logice Łukasiewicza³. Tak więc w przypadku gdy $n \in \{\aleph_0, \aleph_1\}$ musimy rozszerzyć zbiór spójników pierwotnych o I_r .

Definiujemy logikę $\models_{PI_n^r}$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\Sigma \models_{PI_n^r} \varphi \text{ wtw. dla dowolnego } PI_n^r\text{-modelu } (W, \leq, V) : \\
\forall w \in W [(\forall \psi \in \Sigma V(w, \psi) = 1) \Rightarrow V(w, \varphi) = 1].
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Łatwo jest pokazać fakt analogiczny do 3.3.5 dla $n > 3$.

Twierdzenie 3.3.7. $\Sigma \vdash_{MPI_n} \varphi$ wtw. $\hat{tr}_n^{n-1}[\Sigma] \models_{PI_n^{n-1}} \hat{tr}_n^{n-1}(\varphi)$. ■

Fakt 3.3.8. Dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ następujące warunki są równoważne:

- i) $\Sigma \vdash_N \varphi$;
- ii) $\Sigma \models_{PI_n^{n-1}} \varphi$;
- iii) $\hat{tr}_n^{n-1}(\Sigma) \models_{MPI_n} \hat{tr}_n^{n-1}(\varphi)$.

dla dowolnego zbioru $\mathcal{L}$ -formuł $\Sigma \cup \{\varphi\}$.

³ $\aleph_0$ oraz $\aleph_1$ wartościowe logiki Łukasiewicza są finitarne, tak więc gdyby dla każdego $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ spójnik I_r był definiowany, wtedy dla zbioru formuł $X = \{I_{\geq 1 - \frac{1}{2}}(p), I_{\geq 1 - \frac{1}{3}}(p), \dots, I_{\geq 1 - \frac{1}{k}}(p), \dots\} \vdash_{\aleph_0} p$ istniałby jego skończony podzbiór $X_f \subseteq X$ spełniający $X_f \vdash_{\aleph_0} p$, co jest niemożliwe.

DOWÓD. Wystarczy pokazać, że $\models_{PI_n^{n-1}} = \models_{PI_3^2}$.

Określmy odwzorowanie $f : \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\} \longrightarrow \{0, \perp, 1\}$ w następujący sposób $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ oraz dla $k \notin \{0, 1\}$: $f(k) = \perp$.

Rozpatrzmy dowolny PI_n^{n-1} -model $(W, \leq, V)$ oraz zdefiniujmy PI_3^2 -model $(W, \leq, V^+)$ w następujący sposób $V^+(w, p) = f(V(w, p))$.

Posługując się indukcją ze względu na kształt formuły, można wykazać, że $V^+(w, \varphi) = f(V(w, \varphi))$. Tak więc jeśli zachodzi $\Sigma \not\models_{PI_n^{n-1}} \varphi$, to dla pewnego PI_n^{n-1} -modelu $(W, \leq, V)$, $w \in W$,

$$V(w, \psi) = 1 \text{ dla każdego } \psi \in \Sigma \text{ oraz } V(w, \varphi) \neq 1. \quad (3.36)$$

Wówczas możemy skonstruować PI_3^2 -model $(W, \leq, V^+)$ spełniający

$$\forall \psi \in \Sigma V^+(w, \psi) = 1 \ \& \ V^+(w, \varphi) \neq 1. \quad (3.37)$$

Pokazaliśmy zatem, że $\Sigma \not\models_{PI_3^2} \varphi$.

By wykazać $\models_{PI_n^{n-1}} \subseteq \models_{PI_3^2}$ możemy postąpić podobnie, z tym jednakże wyjątkiem, że definiujemy funkcję $f : \{0, \perp, 1\} \longrightarrow \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ poprzez warunki $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ oraz $f(\perp) = \frac{1}{n-1}$. Można udowodnić, że dla dowolnego PI_3^2 -modelu $(W, \leq, V)$, PI_{n-1}^n -model $(W, \leq, V^*)$ zdefiniowany przez warunek $V^*(w, p) = f(V(w, p))$ posiada własność $V^*(w, \varphi) \approx_n f(V(w, \varphi))$, gdzie $\approx_n$ jest relacją równoważności na zbiorze $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$, zdefiniowaną:

$$r \approx_n s \text{ wtw. } r = s \in \{0, 1\} \text{ lub } r, s \in \{\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}\}. \quad (3.38)$$

Wówczas, jeśli $\Sigma \not\models_{PI_3^2} \varphi$, to dla pewnego PI_{n-1}^n -modelu $(W, \leq, V)$ oraz $w \in W$ mamy $\forall \psi \in \Sigma V(w, \psi) = 1$ oraz $V(w, \varphi) \neq 1$. Zatem $\forall \psi \in \Sigma V^*(w, \psi) = 1$ oraz $V^*(w, \varphi) \neq 1$. ■

Reasumując, dla dowolnego $n > 2$: $\models_{PI_{n-1}^n}$ definiuje tę samą logikę (niezależnie od n). Z drugiej strony $\not\models_{PI_4^2} p \rightarrow p$. Można to łatwo wykazać, posługując się modelem $(\{w\}, \{\langle w, w \rangle\}, V)$, gdzie $V(w, p) = \frac{2}{3}$.

Rozdział 4

Uogólnione modele Kripkego

Modele Kripkego zbudowane na strukturach relacyjnych stanowią jedno z najważniejszych narzędzi semantycznej charakterystyki logik modalnych. Naturalne ich wielowartościowe uogólnienia znane między innymi z [47],[38] czy też [40] nie są jedynymi możliwymi. W takiej generalizacji dużo dalej idzie Fitting ([11], [12], [13]). W jego epistemicznym systemie wartość formuły φ w punkcie w może być rozpatrywana jako zbiór agentów utrzymujących, że jest ona prawdziwa w danym świecie (punkcie). Co więcej, wartościowana jest również relacja osiągalności R (wartość może być interpretowana jako zbiór agentów wierzących, że dwa światy połączone są relacją osiągalności).

My zaś dodatkowo będziemy rozpatrywać **wielowartościowe relacje o liczbie argumentów większej niż 2**. Formalnie „relacje” takie będą funkcjami $R : W^n \rightarrow A$, gdzie W jest zbiorem światów, A natomiast zbiorem wartości logicznych. Wyrażenie $R(w_1, \dots, w_n) = a$ może być interpretowane: $(w_1, \dots, w_n)$ **wchodzi w relację R w stopniu a** lub **punkty $w_1, \dots, w_n$ wchodzi w relację R w stopniu a** .

Wydaje się naturalnym wyposażenie zbioru A w porządek **stopni prawdziwości** $\leq$. Zatem w dalszym ciągu będziemy brać pod uwagę strukturę $(A, \leq)$ będącą algebrą Heytinga.

Niech dany będzie język zdaniowy $\mathcal{L} = (L, f_1, \dots, f_n)$ typu σ , generowany przez zbiór zmiennych zdaniowych Φ . Dla modalnego typu podobieństwa $\tau = (O, \rho)$, kładziemy $ML^{\mathcal{L}}(\tau, \Phi)$ dla języka modalnego zbazowanego na języku $\mathcal{L}$. Zatem zwykły język modalny możemy oznaczyć przez $ML^{(L, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow)}(\tau, \Phi)$, gdzie $\tau = (\{\Box, \Diamond\}, \rho)$ oraz $\rho(\Box) = \rho(\Diamond) = 1$.

Niech $Form^{\mathcal{L}}(\tau, \Phi)$ będzie zbiorem formuł modalnych nad τ oraz Φ , zdefiniowany przez:

$$\varphi := p | f_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma(f_i)}) | \triangle (\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\triangle)}).$$

Stale będziemy używać symbolu τ na oznaczenie zbioru modalności, tzn. dopuszczamy zapis $\Delta \in \tau$.

Rozpatrzmy strukturę $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \leq)$, gdzie $\mathcal{A} = (A, F_1, \dots, F_n)$ jest algebrą podobną do $\mathcal{L}$, oraz $\leq$ jest częściowym porządkiem na zbiorze A takim, że $(A, \leq)$ jest $\vee$ -kratą (tzn. kratą $(A, \wedge, \vee)$, taką że dla każdego niepustego podzbioru A istnieje jego **supremum**). Przez **strukturę $\mathbf{A}$ -relacyjną** będziemy rozumieć strukturę

$$\mathfrak{F} = (W, (R_\Delta)_{\Delta \in \tau}, \mathbf{A}), \quad (4.1)$$

gdzie $W \neq \emptyset$ jest zbiorem punktów i dla każdego $\Delta \in \tau$, R_Δ jest $\mathbf{A}$ -wartościową relacją, to jest funkcją $R_\Delta : W^{\rho(\Delta)+1} \rightarrow A$.

Definicja 4.0.9. Przez **$\mathbf{A}$ -model zbazowany na strukturze $\mathbf{A}$ -relacyjnej** $\mathfrak{F}$ będziemy rozumieć strukturę $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, gdzie $V : W \times \text{Form}^\mathcal{L}(\tau, \Phi) \rightarrow A$ jest odwzorowaniem spełniającym:

$$(i) \quad V(w, f_i(\varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma(f_i)})) = F_i(V(w, \varphi_1), \dots, V(w, \varphi_{\sigma(f_i)})), \\ \text{dla } i \in \{1, \dots, n\};$$

$$(ii) \quad V(w, \Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)})) = \bigvee_{v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W} (R_\Delta w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V(v_i, \varphi_i)).$$

Zauważmy, że odwzorowanie spełniające (i) oraz (ii) jest jednoznacznie zdefiniowane przez $V \mid (W \times \Phi)$.

Przez **$\bigwedge$ -kratę** będziemy rozumieć dowolną kratę, dla której dla dowolnego niepustego podzbioru istnieje jego kres dolny. Naturalnie dowolna $\vee, \bigwedge$ -krata jest kratą zupełną.

UWAGA. Jeśli chcemy rozważyć modalności uniwersalne, musimy przyjąć dodatkowe definicje. Przede wszystkim dzielimy τ na dwa typy podobieństwa $\tau_\square$ oraz $\tau_\Diamond$. Przez strukturę $\mathbf{A}$ -relacyjną będziemy rozumieć strukturę

$$\mathfrak{F} = (W, (R_\Delta)_{\Delta \in \tau_\Diamond}, (R_\nabla)_{\nabla \in \tau_\square}, \mathbf{A}), \quad (4.2)$$

gdzie $\leq_\mathbf{A}$ definiuje kratę zupełną oraz dla dowolnych $a, b \in A$ istnieje element największy (oznaczany $a \rightarrow b$) w zbiorze $\{c \in A : a \wedge c \leq_\mathbf{A} b\}$. Mamy tu zatem do czynienia z algebrą Heytinga. Co więcej, warunek (ii), w wersji dla operatora konieczności ($\nabla \in \tau_\square$), przyjmuje postać:

$$(iii) \quad V(w, \nabla(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\nabla)})) = \bigwedge_{v_1, \dots, v_{\rho(\nabla)} \in W} (R_\Delta w v_1 \dots v_{\rho(\nabla)} \rightarrow \bigvee_{i=1}^{\rho(\nabla)} V(v_i, \varphi_i)).$$

W ogólności Δ oraz ∇ nie są wzajemnie definiowalne w algebrze Heytinga – równość $x \rightarrow y = -x \vee y$ nie jest zawsze spełniona.

Przyjmujemy następujące konwencje notacyjne. Dla danego $\mathbf{A}$ -modelu $\mathfrak{M}$ zakładamy, że jego składniki będą zapisywane w postaci: $W, (R_\Delta)_{\Delta \in \tau_\Diamond}$ oraz V . Podobnie, zakładamy $\mathfrak{N} = (W', (R'_\Delta)_{\Delta \in \tau_\Diamond}, \mathbf{B}, V')$. Jednakże z tym wyjątkiem, że w przypadku, gdy $\mathfrak{N}$ jest $\mathbf{A}$ -modelem, to $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

4.1 Sumy rozłączne i podmodele generowane

Większość przytoczonych tu pojęć i definicji ma swój pierwowzór w przypadku dwuwartościowym. Omówiliśmy je w Rozdziale 1. Można je uzupełnić sięgając np. do [4].

Definicja 4.1.1. *Rozpatrzmy kratę $\mathbf{A}$ z elementem najmniejszym $0_{\mathbf{A}}$. Powiemy, że $\mathbf{A}$ -modele są **rozłączne**, jeśli tylko ich dziedziny są. Dla każdej klasy $\mathbf{M} = \{\mathfrak{M}_t : t \in T\}$ (gdzie $\mathfrak{M}_t = (W_t, (R_{\Delta,t})_{\Delta \in \tau}, \mathbf{A}, V_t)$) rozłącznych $\mathbf{A}$ -modelei, definiujemy **sumę rozłączną** $\biguplus_{t \in T} \mathfrak{M}_t = (\bigcup_{t \in T} W_t, (R_{\Delta})_{\Delta \in \tau}, \mathbf{A}, V^{\oplus \mathbf{M}})$, gdzie*

$$R_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} = \begin{cases} R_{\Delta,t} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)}, & \text{gdy } w, w_1, \dots, w_{\rho(\Delta)} \in W_t \text{ dla } t \in T; \\ 0_{\mathbf{A}}, & \text{w przeciwnym przypadku;} \end{cases}$$

oraz $V^{\oplus \mathbf{M}}$ jest wartościowaniem generowanym przez odwzorowanie $V : (\bigcup_{t \in T} W_t) \times$

$\Phi \longrightarrow A$ takim, że $V(w, p) = V_t(w, p)$ jeśli tylko $w \in W_t$.

Kładziemy $\mathfrak{M} \uplus \mathfrak{N} = \biguplus \{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\}$ lub bardziej ogólnie – $\mathfrak{M}_1 \uplus \mathfrak{M}_2 \uplus \dots \uplus \mathfrak{M}_k = \biguplus_{t \in \{1, \dots, k\}} \mathfrak{M}_t$.

Definicja 4.1.2. (Porównaj także [4]). Niech $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ będą $\mathbf{A}$ -modelami. Powiemy, że $\mathfrak{M}$ jest **podmodelem** $\mathfrak{N}$ wtw. $W \subseteq W'$, $R_{\Delta} = R'_{\Delta} \upharpoonright W^{\rho(\Delta)+1}$ dla $\Delta \in \tau$ i dla każdego $w \in W$, $p \in \Phi$, $V(w, p) = V'(w, p)$. Co więcej, mówimy, że $\mathfrak{M}$ jest **generowanym podmodelem** $\mathfrak{N}$ (symbolicznie $\mathfrak{M} \mapsto \mathfrak{N}$) wtw. $\mathfrak{M}$ jest podmodelem $\mathfrak{N}$ i dla każdego $\Delta \in \tau$ warunki: $w \in W, R'_{\Delta} w v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} > 0_{\mathbf{A}}$ implikują: $\{v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)}\} \subseteq W$.

Zauważmy, że każdy składnik sumy rozłącznej jest jego generowanym podmodelem, to znaczy dla odpowiedniej rodziny $\{\mathfrak{M}_t\}_{t \in T}$, warunek $\mathfrak{M}_{t_0} \mapsto \biguplus_{t \in T} \mathfrak{M}_t$ jest spełniony dla każdego $t_0 \in T$.

Powiemy, że wielowartościowa relacja $R : W^{n+1} \longrightarrow A$ jest **słabo symetryczna** wtw. dla dowolnych $w, v_1, \dots, v_n \in W$ oraz $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$R w v_1 \dots v_{i-1} v_i v_{i+1} \dots v_n > 0_{\mathbf{A}} \quad (4.3)$$

pociąga za sobą

$$R v_i v_1 \dots v_{i-1} w v_{i+1} \dots v_n > 0_{\mathbf{A}}. \quad (4.4)$$

Zauważmy, że warunek ten równoważny jest stwierdzeniu:

$$\text{jeśli } R v_0 v_1 \dots v_n > 0_{\mathbf{A}} \text{ to dla każdej permutacji } s \text{ zbioru } \{0, \dots, n\} : \quad (4.5)$$

$$R v_{s0} v_{s1} \dots v_{sn} > 0_{\mathbf{A}}.$$

Dla dowolnego modelu $\mathfrak{M}$ mówimy, że jest $\mathfrak{M}$ jest **słabo symetryczny** wtw. dla każdego $\Delta \in \tau$, R_{Δ} jest słabo symetryczna.

Powiemy, że R jest **symetryczna** wtw. $Rv_0v_1 \dots v_n = Rv_{s_0}v_{s_1} \dots v_{s_n}$ dla dowolnej permutacji s . Naturalnie jest to pojęcie mocniejsze od słabej symetrii.

Dla dowolnego $\emptyset \neq G \subseteq W$ kładziemy $(G)_{\mathfrak{M}}$ na oznaczenie najmniejszego generowanego podmodelu $\mathfrak{M}$ zawierającego G . Jest to poprawna definicja z uwagi na fakt, że rodzina generowanych pod modeli $\mathfrak{M}$ jest zamknięta na teoriomnogościowe iloczyny. Będziemy przy tym używać notacji $(w_1, \dots, w_n)_{\mathfrak{M}}$ na oznaczenie $(\{w_1, \dots, w_n\})_{\mathfrak{M}}$. Co więcej, identyfikujemy $(G)_{\mathfrak{M}}$ z jego zbiorem punktów.

Dla dowolnego $G \subseteq W$ kładziemy $(G)_{\mathfrak{M}}^0 = G$ i dla $\Delta \in \tau$
 $(G)_{\mathfrak{M}}^{n+1, \Delta} = \{v \in W : \exists \bar{v}\bar{u} \in W^{\rho(\Delta)-1} \exists w \in (G)_{\mathfrak{M}}^n R_{\Delta} w \bar{v} v \bar{u} > 0_{\mathbf{A}}\}$, $(G)_{\mathfrak{M}}^{n+1} = (G)_{\mathfrak{M}}^n \cup \bigcup_{\Delta \in \tau} (G)_{\mathfrak{M}}^{n+1, \Delta}$; ($\bar{v}\bar{u}$ oznacza tutaj konkatenację ciągów).

Lemat 4.1.3. $(G)_{\mathfrak{M}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (G)_{\mathfrak{M}}^n$. ■

Lemat 4.1.4. Dla dowolnego symetrycznego modelu $\mathfrak{M}$ oraz dowolnych $w, v \in W$: $v \in (w)_{\mathfrak{M}}$ wtw. $(v)_{\mathfrak{M}} = (w)_{\mathfrak{M}}$.

DOWÓD. ($\Rightarrow$) wystarczy dowieść, że $w \in (v)_{\mathfrak{M}}$. Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $v \in (w)_{\mathfrak{M}}^k$. Jeśli $k = 0$, to nasze stwierdzenie jest oczywiste. Jeśli $k > 0$, to $R_{\Delta} u \bar{v} v \bar{u} > 0_{\mathbf{A}}$ dla jakiegoś $u \in (w)_{\mathfrak{M}}^{k-1}$. Lecz wtedy $w \in (u)_{\mathfrak{M}}$ oraz ze słabej symetrii $R_{\Delta} v \bar{v} u \bar{u} > 0_{\mathbf{A}}$, tak więc $u \in (v)_{\mathfrak{M}}$, tzn. $w \in (v)_{\mathfrak{M}}$.

($\Leftarrow$) Oczywiście. ■

Twierdzenie 4.1.5. Niech $\mathfrak{M}$ będzie słabo symetrycznym $\mathbf{A}$ -modelem, dla którego istnieje $0_{\mathbf{A}}$. Istnieją wtedy $w_t \in W$, dla $t \in T$ takie, że $\mathfrak{M} = \biguplus_{t \in T} (w_t)_{\mathfrak{M}}$.

DOWÓD. Połóżmy $w \sim v$ wtw. $(w)_{\mathfrak{M}} = (v)_{\mathfrak{M}}$. Wtedy z Lematu 4.1.4 $\mathfrak{M} = \biguplus \{(W', (R \upharpoonright W'^{\rho(\Delta)+1})_{\Delta \in \tau}, \mathbf{A}, V|(W' \times \Phi)) : W' \in W/\sim\}$. Niech $f : W/\sim \rightarrow W$ będzie dowolną funkcją spełniającą $f([w]_{\sim}) \in [w]_{\sim}$. Tak więc $\mathfrak{M} =$

$$\biguplus_{[w]_{\sim} \in W/\sim} (f[w]_{\sim})_{\mathfrak{M}}. \quad \blacksquare$$

4.2 Homomorfizmy i bisymulacje

Mając dane częściowo uporządkowane algebry tego samego typu: $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \leq_{\mathbf{A}})$ oraz $\mathbf{B} = (\mathcal{B}, \leq_{\mathbf{B}})$ takie, że $(A, \leq_{\mathbf{A}})$ oraz $(B, \leq_{\mathbf{B}})$ są $\vee$ -kratami (odpowiednio $\wedge$ -kratami, kratami zupełnymi), połóżmy:

$$\begin{aligned} \text{Hom}^{\text{sup}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &:= \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cap \{f \in B^A : f \text{ zachowuje } \vee \text{ i } \wedge\}, \\ \text{Hom}_{\text{inf}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &:= \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cap \{f \in B^A : f \text{ zachowuje } \wedge \text{ i } \vee\}, \\ \text{Hom}_{\text{inf}}^{\text{sup}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &:= \text{Hom}^{\text{sup}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \cap \text{Hom}_{\text{inf}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Dla uproszczenia reszta rozdziału będzie się odnosić jedynie do zbioru Hom^{sup} oraz modalności typu możliwościowego, lecz wszystkie wyniki dają się łatwo uogólnić na języki zawierające modalności konieczności (rozpatrujemy zbiór wtedy Hom_{inf}) jak również języki zawierające oba typy modalności ($\text{Hom}_{\text{inf}}^{\text{sup}}$).

Definicja 4.2.1. *Załóżmy, że $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \leq_{\mathbf{A}})$, $\mathbf{B} = (\mathcal{B}, \leq_{\mathbf{B}})$ są dwiema uporządkowanymi algebrami tego samego typu oraz $h \in \text{Hom}^{\text{sup}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Jeśli $\mathfrak{M}$ jest $\mathbf{A}$ -modelem oraz $\mathfrak{N}$ jest $\mathbf{B}$ -modelem, powiemy, że funkcja $f : W \rightarrow W'$ stanowi **homomorfizm modeli ze względu na h** , (symb. $f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$) wtw:*

- (i) $hV(w, p) \leq_{\mathbf{B}} V'(fw, p)$ dla $p \in \Phi$;
- (ii) $hR_{\Delta}w_0 \dots w_{\rho(\Delta)} \leq_{\mathbf{B}} R'_{\Delta}fw_0 \dots fw_{\rho(\Delta)}$ dla dowolnego $\Delta \in \tau, w_0 \dots w_{\rho(\Delta)} \in W$.

Definicja 4.2.2. *Niech $\mathbf{A}, \mathbf{B}, h$ będą jak poprzednio. O $f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$ powiemy, że jest **silnym morfizmem modeli ze względu na h** wtw:*

- (i) $hV(w, p) = V'(fw, p)$ dla $p \in \Phi, w \in W$ oraz
- (ii) $hR_{\Delta}w_0 \dots w_{\rho(\Delta)} = R'_{\Delta}fw_0 \dots fw_{\rho(\Delta)}$ dla dowolnego $\Delta \in \tau, w_0 \dots w_{\rho(\Delta)} \in W$.

Gdy silny homomorfizm f ze względu na h będzie iniekcją to powiemy, że f jest **zanurzeniem**, co zapiszemy ($f : \mathfrak{M} \hookrightarrow_h \mathfrak{N}$). Co więcej, gdy f będzie bijekcją powiemy, że jest **izomorfizmem**.

Jeśli będzie istniał izomorfizm $f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$, powiemy po prostu, że $\mathfrak{M}$ oraz $\mathfrak{N}$ są **h -izomorficzne** (symb. $\mathfrak{M} \cong_h \mathfrak{N}$).

Zauważmy, że powyższa definicja oddaje interpretację stopni prawdziwości zawartych w jednej algebrze, w innej algebrze.

Definicja 4.2.3. *Niech $h \in \text{Hom}^{\text{sup}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Powiemy, że $f : W \rightarrow W'$ jest **ograniczonym morfizmem ze względu na h** (symb. $f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$) wtw. zachodzą równocześnie:*

- (i) $h(V(w, p)) = V'(fw, p)$ dla $p \in \Phi, w \in W$;
- (ii) $h(R_{\Delta}wv_1 \dots v_{\rho(\Delta)}) \leq_{\mathbf{B}} R'_{\Delta}fwfv_1 \dots fv_{\rho(\Delta)}$ dla $w, v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W, \Delta \in \tau$;
- (iii) dla każdego $v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W', w \in W$ istnieją $v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W$ takie, że $fv_i = v'_i$ dla $1 \leq i \leq \rho(\Delta)$ $R'_{\Delta}fwv'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \leq_{\mathbf{B}} h(R_{\Delta}wv_1 \dots v_{\rho(\Delta)})$.

Powyższe pojęcie jest w rzeczywistości uogólnieniem ograniczonego morfizmu (*bounded morphism*) z przypadku dwuwartościowego. Łatwo pokazać, że z Definicji 4.2.3 wynika, że f jest „na”. (iii) pociąga za sobą, że dla dowolnego

$v' \in W'$ istnieje jego przeciwobraz względem f . Nie stanowi to poważnego ograniczenia, bowiem zwykle pojęcie ograniczonego morfizmu implikuje, że dowolny model jest odwzorowywany w generowany podmodel, tj. dla dowolnego ograniczonego morfizmu $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, $f[W]$ jest generowanym podmodelem $\mathfrak{N}$.

Twierdzenie 4.2.4. *Jeśli $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$ są, odpowiednio – **A**-, **B**-, **C**-modelami, $f_1 : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$ oraz $f_2 : \mathfrak{N} \rightarrow_g \mathfrak{S}$ ($f_1 : \mathfrak{M} \twoheadrightarrow_h \mathfrak{N}$, $f_2 : \mathfrak{N} \twoheadrightarrow_g \mathfrak{S}$), to $f_2 \cdot f_1 : \mathfrak{M} \rightarrow_{g \cdot h} \mathfrak{S}$, $(f_2 \cdot f_1 : \mathfrak{M} \twoheadrightarrow_{g \cdot h} \mathfrak{S})$.*

Dowód. Rozpatrzmy jedynie przypadek ograniczonego morfizmu. Załóżmy, że $f_1 : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$, $f_2 : \mathfrak{N} \rightarrow_g \mathfrak{S}$. Warunki – pierwszy i drugi, ograniczonego morfizmu naturalnie zachodzą. Sprawdźmy więc trzeci. Niech $v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W''$, zatem istnieją $v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'$ takie, że $f_2(v'_i) = v''_i$ dla $i = 1, \dots, \rho(\Delta)$ oraz $R''_{\Delta} f_2 \cdot f_1(w) v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \leq_{\mathbf{C}} g R'_{\Delta} (f_1(w) v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)})$. Poprzez kolejne użycie punktu (iii) definicji, istnieją $v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} \in W$ takie, że $f_1(v_i) = v'_i$ oraz:

$$R'_{\Delta} f_1(w) v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \leq_{\mathbf{B}} h(R_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)}).$$

Ostatecznie $f_2 \cdot f_1(v_i) = v''_i$ i korzystając z monotoniczności g :

$$R''_{\Delta} f_2 \cdot f_1(w) v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \leq_{\mathbf{C}} g \cdot h R_{\Delta}(w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)}). \quad \blacksquare$$

Definicja 4.2.5. *Niech $\mathfrak{M}$ oraz $\mathfrak{N}$ będą, odpowiednio **A**- oraz **B**-modelami. Niech ponadto $h \in \text{Hom}^{\text{sup}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Dowolną relację binarną $\emptyset \neq Z \subseteq W \times W'$ nazwiemy **bisymulacją ze względu na h łączącą $\mathfrak{M}$ oraz $\mathfrak{N}$** (co oznaczamy poprzez $Z : \mathfrak{M} \leftrightarrow_h \mathfrak{N}$) wtw.:*

- (i) *jeśli wZw' , to $hV(w, p) = V'(w', p)$, dla dowolnej zmiennej zdaniowej p ;*
- (ii) *(forth condition) jeśli wZw' oraz $v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W$, to istnieją $v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'$ takie, że $v_i Z v'_i$ dla $1 \leq i \leq \rho(\Delta)$ oraz $h(R_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)}) \leq_{\mathbf{B}} R'_{\Delta} w' v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)}$;*
- (iii) *(back condition) jeśli wZw' oraz $v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'$, to istnieją $v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W$ takie, że $v_i Z v'_i$ dla $1 \leq i \leq \rho(\Delta)$ oraz $R'_{\Delta} w' v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \leq_{\mathbf{B}} h(R_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)})$.*

Dla dowolnych $w \in W, w' \in W'$ będziemy pisać $Z : \mathfrak{M}, w \leftrightarrow_h \mathfrak{N}, w'$, na oznaczenie faktu, że Z jest bisymulacją łączącą w oraz w' . Ponadto zapiszemy $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow_h \mathfrak{N}, w'$ na oznaczenie faktu, że istnieje bisymulacja jak powyższa. Jeśli $\mathfrak{M}$ oraz $\mathfrak{N}$ będą ustalone, będziemy po prostu pisać $w \leftrightarrow_h w'$ na oznaczenie $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow_h \mathfrak{N}, w'$. Jasne jest, że mając dane trzy dwuwartościowe modele Kripkego $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $\mathfrak{N} = (W', R', V')$, $\mathfrak{S} = (W', R'', V'')$ oraz dwa punkty $w \in W$, $w' \in W'$ może zachodzić $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow \mathfrak{N}, w'$, lecz niekoniecznie $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow \mathfrak{S}, w'$. Zatem bisymulacja jest zrelatywizowana do modeli, a nie ich nośników a nawet struktur relacyjnych.

Twierdzenie 4.2.6. *Rodzina bisymulacji jest zamknięta na złożenia, tzn.*

$$\begin{aligned} &\text{jeśli } Z_1 : \mathfrak{M}, w \leftrightarrow_h \mathfrak{N}, w' \text{ oraz } Z_2 : \mathfrak{N}, w' \leftrightarrow_g \mathfrak{S}, w'' \\ &\text{to } Z_1 \circ Z_2 : \mathfrak{M}, w \leftrightarrow_{g \cdot h} \mathfrak{S}, w''. \end{aligned} \quad (4.6)$$

DOWÓD. Podobny do dowodu Twierdzenia 4.2.4. ■

Bisymulacja stanowi relacyjny odpowiednik ograniczonego morfizmu, między innymi dla każdej wielowartościowej bisymulacji Z zachodzi $\text{dom}(Z) = W$ oraz $\text{codom}(Z) = W'$ (zatem inaczej niż w przypadku klasycznym).

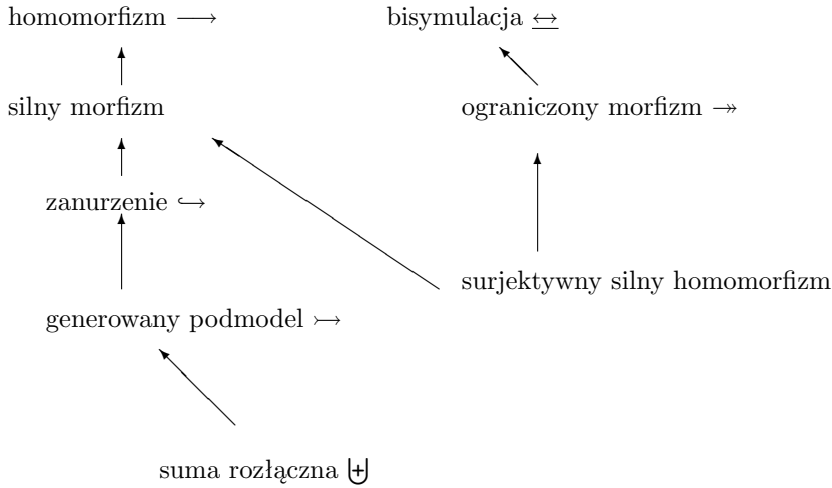
Obecnie przedstawimy kilka twierdzeń ukazujących znaczenie wprowadzonych pojęć oraz związki między nimi. Dla danego $\mathbf{A}$ -modelu, jeśli $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, odwzorowanie identycznościowe $\iota : W \rightarrow W'$ stanowi zanurzenie ze względu na identycznościowy homomorfizm $\mathbf{A}$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $\mathfrak{M}$ oraz $\mathfrak{N}$ są odpowiednio $\mathbf{A}$ - i $\mathbf{B}$ -modelem. Przez definicję, każde zanurzenie jest silnym morfizmem. Co więcej, jeśli $f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$, jest surjektywnym, silnym morfizmem, to $f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$.

Twierdzenie 4.2.7. *Dla dowolnego $f \subseteq W \times W'$:*

$$f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N} \text{ wtw } f : \mathfrak{M} \leftrightarrow_h \mathfrak{N} \text{ oraz } f \text{ jest funkcją.} \quad (4.7)$$
■

Podsumowanie zależności między powyższymi pojęciami zostało oddane na Diagramie 1.



Diag. 1

Twierdzenie 4.2.8. *Dla dowolnej bisymulacji Z ze względu na h łączącej $\mathfrak{M}$ oraz $\mathfrak{N}$:*

$$\forall_{w \in W, w' \in W'} (wZw' \Rightarrow hV(w, \varphi) = V'(w', \varphi)) \text{ dla dowolnej formuły } \varphi. \quad (4.8)$$

DOWÓD. Przez indukcję ze względu na φ . W przypadku, gdy φ jest zmienną stwierdzenie wynika z definicji bisymulacji.

Niech f będzie dowolnym spójnikiem. Jeśli twierdzenie zachodzi dla $\psi_1 \dots, \psi_{\sigma(f)}$, to zachodzi również dla $\varphi = f(\psi_1 \dots, \psi_{\sigma(f)})$. Rzeczywiście, niech wZw' . Otrzymujemy wtedy:

$$\begin{aligned} hV(w, \varphi) &= hV(w, f(\psi_1, \dots, \psi_{\sigma(f)})) = hF^{\mathcal{A}}(V(w, \psi_1), \dots, V(w, \psi_{\sigma(f)})) \\ &= F^{\mathcal{B}}(hV(w, \psi_1), \dots, hV(w, \psi_{\sigma(f)})) = F^{\mathcal{B}}(V'(w', \psi_1), \dots, V'(w', \psi_{\sigma(f)})) \\ &= V'(w', f(\psi_1, \dots, \psi_{\sigma(f)})) = V'(w', \varphi). \end{aligned}$$

Dla $\varphi = \Delta(\psi_1, \dots, \psi_{\rho(\Delta)})$, korzystając z faktów, że wZw' oraz dla każdego $v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W$ istnieją $v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'$ spełniające $v_iZv'_i$ dla $1 \leq i \leq \rho(\Delta)$ oraz $h(R_{\Delta}wv_1 \dots v_{\rho(\Delta)}) \leq_{\mathbf{B}} R'_{\Delta}w'v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)}$ mamy:

$$\begin{aligned} hV(w, \varphi) &= h(V(w, \Delta(\psi_1, \dots, \psi_{\rho(\Delta)}))) = \\ &h(\bigvee_{\mathbf{A}} \{R_{\Delta}wv_1 \dots v_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V(v_i, \psi_i) : v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W\}) = \\ &\bigvee_{\mathbf{B}} \{h(R_{\Delta}wv_1 \dots v_{\rho(\Delta)}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} h(V(v_i, \psi_i)) : v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W\} \leq_{\mathbf{B}} \\ &\bigvee_{\mathbf{B}} \{R_{\Delta}w'v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V'(v'_i, \psi_i) : v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W\} = \\ &V'(w', \Delta(\psi_1, \dots, \psi_{\rho(\Delta)})) = V'(w', \varphi). \end{aligned}$$

Podobnie, z trzeciego warunku bisymulacji:

$$\begin{aligned} V'(w', \varphi) &= \bigvee_{\mathbf{B}} \{R_{\Delta}w'v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V'(v'_i, \psi_i) : v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'\} \leq_{\mathbf{B}} \\ &\bigvee_{\mathbf{B}} \{h(R_{\Delta}wv_1 \dots v_{\rho(\Delta)}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} h(V(v_i, \psi_i)) : v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W\} = hV(w, \varphi). \blacksquare \end{aligned}$$

Definicja 4.2.9. Dla $\mathbf{A}$ -modelu $\mathfrak{M}$, $\mathbf{B}$ -modelu $\mathfrak{N}$, oraz $h \in \text{Hom}^{\text{sup}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$:

$$\forall w \in W, w' \in W' [w \rightsquigarrow_h w' \Leftrightarrow \forall \varphi \in L (hV(w, \varphi) = V'(w', \varphi))]. \quad (4.9)$$

Wniosek 4.2.10. Dla dowolnej bisymulacji Z ze względu na $h : Z \subseteq \rightsquigarrow_h$. $\blacksquare$

Wniosek 4.2.11. Jeśli $f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$, to dla każdego $w \in W : w \rightsquigarrow_h f(w)$.

DOWÓD. Wynika z Twierdzeń 4.2.7 oraz 4.2.8. $\blacksquare$

Wniosek 4.2.12. Jeśli $f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$ jest silnym surjektywnym homomorfizmem, to dla każdego $w \in W : w \rightsquigarrow_h f(w)$. $\blacksquare$

Fakt 4.2.13. Jeśli $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$, to dla dowolnej formuły φ , $w \in W : V(w, \varphi) = V'(w, \varphi)$.

DOWÓD. Łatwo wynika z Definicji 4.0.9, bowiem w liczeniu sumy

$$V(w, \Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)})) = \bigvee_{v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)}} (R_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V(v_i, \varphi_i))$$

nie bierzemy pod uwagę składników $v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)}$ takich, że $R_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} = 0_{\mathbf{A}}$. ■

Do końca bieżącego paragrafu zakładamy, że każda uporządkowana algebra jest *JID* (*join infinitive distributive*), tzn. że zachodzi prawo: $x \wedge \bigvee_{t \in T} y_t = \bigvee_{t \in T} (x \wedge y_t)$.

Dla dowolnego modelu $\mathfrak{M}$ oraz równoważności $\simeq \subseteq \rightsquigarrow_{id} \subseteq W \times W$ definiujemy

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\simeq} &= (W/\simeq, (R_{\Delta}^{\simeq})_{\Delta \in \tau}, \mathbf{A}, V_{\simeq}), \text{ gdzie} \\ R_{\Delta}^{\simeq}[w][v_1] \dots [v_{\rho(\Delta)}] &= \bigvee \{R_{\Delta} v u_1 \dots u_{\rho(\Delta)} : v \in [w], u_i \in [v_i]\} \text{ oraz} \\ V_{\simeq}([w], p) &= V(w, p) \text{ dla } p \in \Phi. \end{aligned}$$

Co więcej, dla relacji binarnej $Z \subseteq W \times W'$, niech $Z^{\bullet} : W \longrightarrow W'$ oznacza dowolną funkcję wyboru w znaczeniu:

$$Z^{\bullet}(v) \in \overrightarrow{Z}[v]. \quad (4.10)$$

Dla $Z : \mathfrak{M} \leftrightarrow_h \mathfrak{N}$ połóżmy $\approx_Z = (Z \circ Z^{-1})^+ \subseteq W \times W$ oraz $\simeq_Z = (Z^{-1} \circ Z)^+ \subseteq W' \times W'$ gdzie $+$ oznacza operację tranzytywnego domknięcia relacji binarnej. Z faktów $\text{dom}(Z) = W$, $\text{codom}(Z) = W'$ wnioskujemy, że obie relacje są równoważnościami.

Twierdzenie 4.2.14. *Dla dowolnej $Z : \mathfrak{M} \leftrightarrow_h \mathfrak{N}$ oraz funkcji $f_Z : W/\approx_Z \longrightarrow W'/\simeq_Z$, $[w] \mapsto [Z^{\bullet}(w)]$ zachodzi $f_Z : \mathfrak{M}_{\approx_Z} \rightarrow_h \mathfrak{N}_{\simeq_Z}$.*

DOWÓD. W powyższym dowodzie korzystamy z faktu, że dla $Z : \mathfrak{M} \leftrightarrow_h \mathfrak{N}$ zachodzi $Z \circ (Z^{-1} \circ Z)^* : \mathfrak{M} \leftrightarrow_h \mathfrak{N}$.

Z założeń wynika, że f_Z jest dobrze zdefiniowana, tzn. nie zależy od funkcji wyboru $\bullet$. Naturalnie zachodzi pierwszy warunek ograniczonego morfizmu. Aby wykazać zachodzenie drugiego, niech $[w], [v_1], \dots, [v_{\rho(\Delta)}] \in W/\approx_Z$ oraz $v \in [w], u_i \in [v_i]$. Istnieją $u'_i \in W'$ takie, że $u_i Z \circ (Z^{-1} \circ Z)^* u'_i$ oraz $h R_{\Delta} v u_1 \dots u_{\rho(\Delta)} \leq_{\mathbf{B}} R'_{\Delta} Z^{\bullet}(v) u'_1 \dots u'_{\rho(\Delta)}$, skąd wynika $h R_{\Delta}^{\approx_Z} [w][v_1] \dots [v_{\rho(\Delta)}] = \bigvee \{h R_{\Delta} v u_1 \dots u_{\rho(\Delta)} : v \in [w], u_i \in [v_i]\} \leq_{\mathbf{B}} \bigvee \{R'_{\Delta} v' u'_1 \dots u'_{\rho(\Delta)} : v' \in [Z^{\bullet}(w)], u'_i \in [Z^{\bullet}(v_i)]\} = R'_{\Delta}^{\approx_Z} f_Z[w] f_Z[v_1] \dots f_Z[v_{\rho(\Delta)}]$.

Niech $[w] \in W/\approx_Z$ oraz $[v'_1], \dots, [v'_{\rho(\Delta)}] \in W'/\simeq_Z$, $v' \in f_Z[w]$, $u'_1 \in [v'_1], \dots, u'_{\rho(\Delta)} \in [v'_{\rho(\Delta)}]$. Z założenia $\text{dom}(Z) = W$, $\text{codom}(Z) = W'$ istnieje $v \in W$, dla którego zachodzi $v Z \circ (Z^{-1} \circ Z)^* v'$, czyli istnieją $v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W$: $R'_{\Delta} v' u'_1 \dots u'_{\rho(\Delta)} \leq_{\mathbf{B}} h R_{\Delta} v v_1 \dots v_{\rho(\Delta)}$ oraz $v_i Z \circ (Z^{-1} \circ Z)^{-1} u'_i$ dla $i = 1, \dots, \rho(\Delta)$.

Ostatecznie: $R'_{\Delta}^{\approx_Z} f_Z[w][v'_1] \dots [v'_{\rho(\Delta)}] = \bigvee \{R'_{\Delta} v' u'_1 \dots u'_{\rho(\Delta)} : v' \in f_Z[w], u'_i \in [v'_i], i = 1, \dots, \rho(\Delta)\} \leq_{\mathbf{B}} \bigvee \{h R_{\Delta} v u_1 \dots u_{\rho(\Delta)} : v \in [w], u_i \in [v_i], i = 1, \dots, \rho(\Delta)\} = h R_{\Delta}^{\approx_Z} [w][v_1] \dots [v_{\rho(\Delta)}]$. ■

4.3 Bisymulacja w sensie H.P.Gumma i T.Schrödera

W tym paragrafie porównamy pojęcia bisymulacji i morfizmu jakie zostały przedstawione w [21] z pojęciami zawartymi w tym rozdziale. Dla porządku będziemy używać nazw **słaby ograniczony morfizm** oraz **słaba bisymulacja** (to jest odstępimy od nazewnictwa zawartego w [21]). Co więcej uogólnimy je, wprowadzając nowy parametr $h \in \text{Hom}_{\text{inf}}^{\text{sup}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ (w [21] rozpatrywany jest jedynie przypadek $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ oraz $h = \text{id}$).

Głównym wnioskiem z bieżącego paragrafu jest to, że bisymulacja przedstawiona przez Gumma i Schrödera posiada pewne ograniczenia stosowalności do logik zdaniowych. Mianowicie – bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 4.3.5 jest to, że warunkiem koniecznym zachowania przez słabą bisymulację prawdziwości formuł, jest posiadania własności JID przez jedną z algebr Heytinga.

Definicja 4.3.1. (Porównaj [21].) Dla dowolnych modeli $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ funkcję $f : W \longrightarrow W'$ będzie zwana **słabym ograniczonym morfizmem ze względu na h** (symb. $f : \mathfrak{M} \xrightarrow{h} \mathfrak{N}$) wtw. dla każdych $w, v_1 \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W, w', v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'$:

- (i) $hV(w, p) = V(fw, p)$ dla $p \in \Phi$;
- (ii) $h(Rwv_1 \dots v_{\rho(\Delta)}) \leq_{\mathbf{B}} R'_{\Delta} f w f v_1 \dots f v_{\rho(\Delta)}$;
- (iii) $R'_{\Delta} f w v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \leq_{\mathbf{B}} h \bigvee \{ R_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} : f v_1 = v'_1, \dots, f v_{\rho(\Delta)} = v'_{\rho(\Delta)} \}$.

Definicja 4.3.2. $Z \subseteq W \times W'$ nazwiemy **słabą bisymulacją ze względu na h** , symb. $Z : \mathfrak{M} \xleftrightarrow{h} \mathfrak{N}$, wtw. dla dowolnych $w, v_1 \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W, w', v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'$ takich, że wZw' :

- (i) $hV(w, p) = V(w', p)$ dla $p \in \Phi$;
- (ii) $hR_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} = \bigvee \{ R'_{\Delta} w' v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \wedge_{\mathbf{B}} hR_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} : v_1 Z v'_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} Z v'_{\rho(\Delta)} \}$;
- (iii) $R'_{\Delta} w' v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} = \bigvee \{ R'_{\Delta} w' v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \wedge_{\mathbf{B}} hR_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} : v_1 Z v'_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} Z v'_{\rho(\Delta)} \}$.

Fakt 4.3.3. Dla dowolnego $f : \mathfrak{M} \xrightarrow{h} \mathfrak{N}$ zachodzi $f : \mathfrak{M} \xleftrightarrow{h} \mathfrak{N}$. ■

Twierdzenie 4.3.4. Dla dowolnej uporządkowanej algebry $\mathbf{B} : \mathbf{B}$ jest JID wtw. dla dowolnego $\mathbf{A}$ -modelu $\mathfrak{M}$ oraz $\mathbf{B}$ -modelu $\mathfrak{N}$, $f : \mathfrak{M} \xrightarrow{h} \mathfrak{N}$ pociąga za sobą $f \subseteq \hookrightarrow_h$.

DOWÓD. ($\Rightarrow$) Dowód poprzez indukcję ze względu na kształt formuły. Pokazujemy jedynie warunek dla Δ .

$$\begin{aligned}
hV(w, \Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)})) &= h\left[\bigvee_{v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W} (R_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V(v_i, \varphi_i))\right] = \\
\bigvee_{v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W} (hR_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} hV(v_i, \varphi_i)) &\leq_{\mathbf{B}} \\
\bigvee_{v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W} (R'_{\Delta} f w f v_1 \dots f v_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V'(f v_i, \varphi_i)) &\leq_{\mathbf{B}} \\
\bigvee_{v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'} (R'_{\Delta} f w v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V'(v'_i, \varphi_i)) &= V'(f w, \Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)})). \\
\text{Ponadto:} \\
V'(w', \Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)})) &= \bigvee_{v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'} [R'_{\Delta} w' v'_1 \dots v'_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V'(v'_i, \varphi_i)] \leq_{\mathbf{B}} \\
\bigvee_{v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'} [\bigvee \{hR_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} : f v_1 = v'_1, \dots, f v_{\rho(\Delta)} = v'_{\rho(\Delta)}\} \wedge \bigwedge_{i=0}^{\rho(\Delta)} V'(v'_i, \varphi_i)] \\
= \bigvee_{v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'} [\bigvee \{hR_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=0}^{\rho(\Delta)} V'(v'_i, \varphi_i) : f v_1 = v'_1, \dots, f v_{\rho(\Delta)} = \\
v'_{\rho(\Delta)}\}] = \\
\bigvee_{v'_1, \dots, v'_{\rho(\Delta)} \in W'} [\bigvee \{hR_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=0}^{\rho(\Delta)} hV(v_i, \varphi_i) : f v_1 = v'_1, \dots, f v_{\rho(\Delta)} = \\
v'_{\rho(\Delta)}\}] \leq_{\mathbf{B}} \bigvee_{v_1, \dots, v_{\rho(\Delta)} \in W} [hR_{\Delta} w v_1 \dots v_{\rho(\Delta)} \wedge \bigwedge_{i=0}^{\rho(\Delta)} hV(v_i, \varphi_i)] = \\
hV(w, \Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)})).
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $x \wedge \bigvee_{t \in T} y_t \not\leq \bigvee_{t \in T} (x \wedge y_t)$. Zdefiniujmy $\mathbf{A}$ -modele $\mathfrak{M}$ oraz $\mathfrak{N}$:
 $W = \{w\} \cup \{v_t\}_{t \in T}$, $W' = \{w', v'\}$ i $R w v_t = y_t$ oraz $R u v = 0$ w przeciwnym przypadku, $R' w' v' = \bigvee_{t \in T} y_t$, $R' u' s' = 0$ w pozostałych przypadkach. Za wartościowania przyjmijmy $V(u, p) = V'(u', p) = x$ dla $u \in W, u' \in W'$ oraz $p \in \Phi$. Rozpatrzmy funkcję $f : W \rightarrow W'$ taką, że $f w = w'$ oraz $f v_t = v'$ dla $t \in T$. Nie jest trudno sprawdzić, że $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{N}$.

Zauważmy ponadto, że:

$$V(w, \Diamond p) = \bigvee_{u \in W} (R w u \wedge V(u, p)) = \bigvee_{t \in T} (x \wedge y_t) \text{ oraz}$$

$$V'(f w, \Diamond p) = V'(w', \Diamond p) = \bigvee_{u' \in W'} (R' w' u' \wedge V'(u', p)) = x \wedge \bigvee_{t \in T} y_t.$$

Ostatecznie – $V'(f w, \Diamond p) \not\leq V(w, \Diamond p)$. ■

Twierdzenie 4.3.5. (Porównaj [21], Twierdzenie 4.3.) Dla dowolnej algebry uporządkowanej $\mathbf{B}$: $\mathbf{B}$ jest JID wtw. dla dowolnych: $\mathbf{A}$ -modelu $\mathfrak{M}$ oraz $\mathbf{B}$ -modelu $\mathfrak{N}$, $Z : \mathfrak{M} \xrightarrow{\leftarrow} \mathfrak{N}$ implikuje $Z \subseteq \leftarrow_h$.

DOWÓD. Podobny do dowodu Twierdzenia 4.3.4. ■

Rozdział 5

Topologiczne A-modele Kripkego

5.1 Semantyka topologiczna dla logik modalnych

Gruntowne omówienie topologicznych semantyk dla logik modalnych Czytelnik znajdzie np. w [3]. Jednak by mógł zrozumieć, na czym polega przedstawione w tym rozdziale uogólnienie topologicznych semantyk dla logik modalnych, przytoczymy kilka definicji dotyczących topologicznej interpretacji dwuwartościowej logiki modalnej.

Niech $(W, \mathcal{O})$ będzie przestrzenią topologiczną (to jest W jest zbiorem, a $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(W)$ rodziną zbiorów otwartych¹). Niech $V : \Phi \longrightarrow \mathcal{P}(W)$. Wówczas przez **model topologiczny** rozumiemy strukturę $\mathfrak{M} = (W, \mathcal{O}, V)$. Prawdziwość formuły w modelu topologicznym $\mathfrak{M} = (W, \mathcal{O}, V)$ definiujemy indukcyjnie:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M}, w \Vdash p & \text{ wtw., gdy } w \in V(p), \\
 & \text{dla dowolnej zmiennej zdaniowej } p \\
 \mathfrak{M}, w \Vdash \neg \varphi & \text{ wtw., gdy } \mathfrak{M}, w \not\Vdash \varphi, \\
 \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \wedge \psi & \text{ wtw., gdy } \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi, \mathfrak{M}, w \Vdash \psi, \\
 \mathfrak{M}, w \Vdash \Box \varphi & \text{ wtw., gdy } \exists U \in \mathcal{O} [w \in U \ \& \ \forall v \in U \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi], \\
 \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond \varphi & \text{ wtw., gdy } \forall U \in \mathcal{O} [w \in U \Rightarrow \exists v \in U \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi].
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Przez **topobisymulację** między modelami topologicznymi $\mathfrak{M} = (W, \mathcal{O}, V)$ oraz $\mathfrak{N} = (W', \mathcal{O}', V')$ rozumiemy niepustą relację $Z \subseteq W \times W'$ spełniającą dla wZw'

- i) $w \in V(p)$ wtw., gdy $w' \in V'(p)$ dla dowolnej zmiennej zdaniowej p ;
- ii) jeśli $w \in U \in \mathcal{O}$, to istnieje $U' \in \mathcal{O}'$ spełniający $\forall v' \in U' \exists v \in U vZv'$;
- iii) jeśli $w' \in U' \in \mathcal{O}'$, to istnieje $U \in \mathcal{O}$ spełniający $\forall v \in U \exists v' \in U' vZv'$.

¹To znaczy, $\emptyset, W \in \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ jest zamknięta na dowolne sumy i skończone iloczyny.

Topobisymulacja, podobnie jak bisymulacja w semantyce relacyjnej, zachowuje prawdziwość formuł.

Twierdzenie 5.1.1. ([1]) *Dla dowolnych modeli topologicznych $\mathfrak{M} = (W, \mathcal{O}, V)$ oraz $\mathfrak{N} = (W', \mathcal{O}', V')$: jeśli $Z \subseteq W \times W'$ oraz Z jest topobisymulacją, to dla wZw' zachodzi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ wtw.}, \text{ gdy } \mathfrak{N}, w' \Vdash \varphi \quad (5.2)$$

dla dowolnej formuły modalnej φ . ■

W rozdziale tym nie tylko przedstawimy uogólnienia powyższych pojęć, ale i wskażemy na pewne związki, odpowiadające temu, co ma miejsce w klasycznych (dwuwartościowych) semantykach dla logik modalnych.

5.2 Semantyka topologiczna dla wielowartościowych logik modalnych

Na użytek bieżącego rozdziału zakładamy, że $\mathcal{L} = (L, f_1, \dots, f_n)$ jest dowolnym językiem zdaniowym, $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \leq)$ jest strukturą taką, że $\mathcal{A} = (A, F_1, \dots, F_n)$ jest algebrą podobną do $\mathcal{L}$ oraz $\leq$ definiuje zupełną algebrę Heytinga na zbiorze A . Ponadto zakładamy, że $(A, \leq)$ jest kratą nietrywialną, to znaczy $1 \neq 0$ oraz algebra spełnia *JID*, to znaczy $x \wedge \bigvee_{t \in T} y_t = \bigvee_{t \in T} (x \wedge y_t)$ dla dowolnych $x, y_t \in A$.

W odróżnieniu od poprzedniego rozdziału, będziemy rozpatrywać jedynie język modalny zawierający tylko dwie modalności $\Box, \Diamond$, a oznaczymy go poprzez $\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}$. Czyli $\mathcal{L}_{\Box, \Diamond}$ jest językiem powstałym poprzez rozszerzenie języka $\mathcal{L}$ o dwa spójniki jednoargumentowe $\Box, \Diamond$. Naturalnie zakładamy, że $\Box, \Diamond \notin \{f_1, \dots, f_n\}$. Podstawowe informacje dotyczące topologii rozmytych można znaleźć w [45].

Definicja 5.2.1. *Przez A -podzbiór W (lub po prostu A -zbiór) będziemy rozumieć dowolną funkcję $f : W \rightarrow A$, gdzie W jest zwykłym zbiorem.*

A -zbiory będziemy oznaczać jak zwykle zbiory, tzn. przez X, Y, Z itp.

Powiemy, że X jest podzbiorem Y (symb. $X \leq Y$) wtw. $X(w) \leq Y(w)$ dla dowolnego $w \in W$.

Dla danych A -zbiorów X oraz Y definiujemy operacje $\wedge, \vee, \rightarrow$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (X \wedge Y)(w) &= X(w) \wedge Y(w) \\ (X \vee Y)(w) &= X(w) \vee Y(w) \\ (X \rightarrow Y)(w) &= X(w) \rightarrow Y(w). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dla rodziny A -zbiorów $\mathfrak{X}$ kładziemy

$$\begin{aligned} (\bigwedge \mathfrak{X})(w) &= \bigwedge_{X \in \mathfrak{X}} X(w) \\ (\bigvee \mathfrak{X})(w) &= \bigvee_{X \in \mathfrak{X}} X(w). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Wyróżniamy ponadto dwie funkcje stałe W oraz $\emptyset$:

$$\begin{aligned} W(w) &= 1 \\ \emptyset(w) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dla powyższych będziemy również pisać 1 na oznaczenie W oraz 0 na oznaczenie $\emptyset$.

Definicja 5.2.2. Przez $(A, \leq)$ -**topologię** będziemy rozumieć każdy zbiór $\mathcal{O} \subseteq A^W$ spełniający:

- i) $W, \emptyset \in \mathcal{O}$;
- ii) Jeśli $X, Y \in \mathcal{O}$, to $X \wedge Y \in \mathcal{O}$;
- iii) $\bigvee_{t \in T} X_t \in \mathcal{O}$ dla dowolnej, indeksowanej rodziny $\{X_t\}_{t \in T}$ dla której $X_t \in \mathcal{O}$ (dla $t \in T$).

Będziemy również pisać A -topologia, $\mathcal{A}$ -topologia, gdy będzie wiadome z kontekstu, o jaki porządek chodzi.

Definicja 5.2.3. Przez **topologiczny $\mathbf{A}$ -model Kripkego** rozumiemy układ $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, gdzie $\mathfrak{F} = (W, \mathcal{O})$, $W \neq \emptyset$ oraz $\mathcal{O}$ jest $\mathcal{A}$ -topologią na W oraz V wartościowaniem, przyporządkowującym elementom $W \times \mathcal{L}_{\square, \Diamond}$ elementy zbioru A^2 , spełniającym ponadto warunki (w poniższych wzorach $F^{\mathcal{A}}$ jest interpretacją spójnika f w algebrze $\mathcal{A}$):

$$\begin{aligned} V(w, f(\varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma(f)})) &= F^{\mathcal{A}}(V(w, \varphi_1), \dots, V(w, \varphi_{\sigma(f)})) \\ V(w, \Diamond \varphi) &= \bigwedge_{U \in \mathcal{O}} [U(w) \rightarrow \bigvee_{v \in W} (U(v) \wedge V(v, \varphi))] \\ V(w, \square \varphi) &= \bigvee_{U \in \mathcal{O}} [U(w) \wedge \bigwedge_{v \in W} (U(v) \rightarrow V(v, \varphi))]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Definicja 5.2.4. Niech $R : W \times W \rightarrow A$. O wielowartościowej relacji R powiemy, że jest **A-zwrotna** (lub po prostu **zwrotna**) wtw. $Rww = 1$ dla dowolnego $w \in W$. Powiemy, że jest **A-przechodnia** (przechodnia) wtw. $Rwv \wedge Rvu \leq Rwu$ dla dowolnych $w, v, u \in W$.

Jeśli R spełnia oba te warunki, to powiemy po prostu, że jest **A-quasi porządkująca** (quasi porządkująca).

Od tej pory zakładamy, że R jest quasi porządkująca.

Dowolny $X \in A^W$ nazwiemy **R -skierowanym w górę** wtw. dla $w, v \in W$ zachodzi $X(w) \wedge Rww \leq X(v)$.

Fakt 5.2.5. Dla dowolnej $\mathbf{A}$ -struktury $\mathfrak{F} = (W, R)$, $\mathcal{O}_R$ jest $\mathcal{A}$ -topologią na W , gdzie $\mathcal{O}_R$ jest rodziną R -skierowanych podzbiorów W . ■

²Zatem możemy zapisać $V(\bullet, \varphi) \in A^W$.

Dla dowolnej $\mathcal{A}$ -topologii $\mathcal{O}$ na W definiujemy $R_{\mathcal{O}} : W \times W \longrightarrow A$:

$$R_{\mathcal{O}}wv = \bigwedge_{U \in \mathcal{O}} (U(w) \rightarrow U(v)).$$

Fakt 5.2.6. $R_{\mathcal{O}}$ jest $\mathbf{A}$ -zwrotna i przechodnia oraz każdy $\mathcal{O}$ -otwarty zbiór jest $R_{\mathcal{O}}$ -skierowany.

DOWÓD. Dwie pierwsze własności są oczywiste. Sprawdzamy trzecią. Jeśli $X \in \mathcal{O}$, to

$$X(w) \wedge R_{\mathcal{O}}wv = X(w) \wedge \bigwedge_{U \in \mathcal{O}} (U(w) \rightarrow U(v)) \leq X(w) \wedge (X(w) \rightarrow X(v)) \leq X(v). \quad \blacksquare$$

Fakt 5.2.7. Dla dowolnej relacji R , $X \in \mathcal{O}_R$ zachodzi równość $X(v) = \bigvee_{w \in W} (X(w) \wedge Rvw)$.

DOWÓD. ($\leq$) wynika z faktu, że $X(v) = X(v) \wedge 1 = X(v) \wedge Rvv$.

($\geq$) Niech $w \in W$, wówczas stąd, że X jest skierowany mamy $X(w) \wedge Rvw \leq X(v)$, a zatem $\bigvee_{w \in W} (X(w) \wedge Rvw) \leq X(v)$. $\blacksquare$

Definicja 5.2.8. Niech $w \in W$ oraz $\lambda \in A$. Przez **A-punkt** będziemy rozumieć funkcję $w_{\lambda} : W \longrightarrow A$ spełniającą

$$w_{\lambda}(v) = \begin{cases} \lambda, & \text{o ile } w = v; \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Dla A -zbioru X będziemy pisać $w_{\lambda} \in X$ zamiast $w_{\lambda} \leq X$. Przez **otoczenie punktu** w_{λ} (lub dokładniej $\mathcal{O}$ -otoczenie) będziemy rozumieć dowolny $X \in \mathcal{O}$ spełniający $w_{\lambda} \in X$ (lub równoważnie – $w_{\lambda} \leq X$, czyli $\lambda \leq X(w)$).

Fakt 5.2.9. Niech R będzie relacją wielowartościową. Dla dowolnego $\mathbf{A}$ -punktu w_{λ} , $V_{w_{\lambda}}^R \in W^A$ zdefiniowany $V_{w_{\lambda}}^R(v) = Rvw \wedge \lambda$ jest najmniejszym elementem w zbiorze $\langle \{V \in \mathcal{O}_R : w_{\lambda} \in V\}, \leq \rangle$.

DOWÓD. Jasne jest, że $V_{w_{\lambda}}^R(w) = \lambda$, czyli $w_{\lambda} \in V_{w_{\lambda}}^R$. Niech $x, y \in W$. Wówczas $V_{w_{\lambda}}^R(x) \wedge Rxy = Rwx \wedge \lambda \wedge Rxy \leq Rwy \wedge \lambda = V_{w_{\lambda}}^R(y)$, a zatem $V_{w_{\lambda}}^R$ jest R -skierowany. Niech zatem X będzie zbiorem R -skierowanym takim, że $w_{\lambda} \in X$, t.j. $\lambda \leq X(w)$. Jeśli $v \in W$, to wówczas $V_{w_{\lambda}}^R(v) = Rvw \wedge \lambda \leq X(w) \wedge Rvw \leq X(v)$, skąd $V_{w_{\lambda}}^R \leq X$. $\blacksquare$

WNIOSEK 1. $V_{w_{\lambda}}^R = \bigwedge \{V \in \mathcal{O}_R : w_{\lambda} \in V\}$. $\blacksquare$

WNIOSEK 2. Dla $X \in \mathcal{O}_R$: $X = \bigvee_{w \in W} V_{w_{X(w)}}^R$.

DOWÓD. Wynika z Faktów 5.2.7 oraz 5.2.9. $\blacksquare$

Twierdzenie 5.2.10. *Dla dowolnego $\mathbf{A}$ -modelu Kripkego $\mathfrak{M} = ((W, R), V)$, w którym R jest $\mathbf{A}$ -zwrotna i $\mathbf{A}$ -przechodnia, $w \in W$ oraz formuły φ zachodzi*

$$V(w, \varphi) = V^t(w, \varphi) \quad (5.7)$$

gdzie V^t jest wartościowaniem w topologicznym $\mathbf{A}$ -modelu Kripkego $\mathfrak{M}^t = ((W, \mathcal{O}_R), V^t)$ dla którego zachodzi $V(w, p) = V^t(w, p)$ dla $p \in \Phi$.

DOWÓD. Tezę pokazujemy przez indukcję ograniczając się naturalnie do formuł, których główny funktor jest operatorem modalnym.

Definiujemy $U_w \in A^W$:

$$U_w(v) := R w v. \quad (5.8)$$

Jak łatwo sprawdzić $U_w \in \mathcal{O}_R$. Zatem mamy: $V^t(w, \Diamond \varphi) = \bigwedge_{U \in \mathcal{O}_R} (U(w) \rightarrow \bigvee_{v \in W} (U(v) \wedge V^t(v, \varphi))) \leq \bigvee_{v \in W} (U_w(v) \wedge V^t(v, \varphi)) \leq \bigvee_{v \in W} (R w v \wedge V^t(v, \varphi)) = \bigvee_{v \in W} (R w v \wedge V(v, \varphi)) = V(w, \Diamond \varphi)$.

Niech będą dane dowolne $U_1 \in \mathcal{O}_R$, $v_1 \in W$. Wobec faktu, że U_1 jest R -skierowany w górę oraz z założenia indukcyjnego mamy

$$R w v_1 \wedge V(v_1, \varphi) \wedge U_1(w) \leq U_1(v_1) \wedge V^t(v_1, \varphi) \leq \bigvee_{v \in W} (U_1(v) \wedge V^t(v, \varphi)).$$

Wobec dowolności v_1 stwierdzamy, że

$$\begin{aligned} \bigvee_{v \in W} (R w v \wedge V(v, \varphi)) \wedge U_1(w) &\leq \bigvee_{v \in W} (U_1(v) \wedge V^t(v, \varphi)), \text{ czyli} \\ \bigvee_{v \in W} (R w v \wedge V(v, \varphi)) &\leq U_1(w) \rightarrow \bigvee_{v \in W} (U_1(v) \wedge V^t(v, \varphi)), \text{ a ponieważ } U_1 \text{ było} \\ &\text{wybrane całkowicie arbitralnie, ostatecznie otrzymujemy} \\ V(w, \Diamond \varphi) &= \bigvee_{v \in W} (R w v \wedge V(v, \varphi)) \leq \bigwedge_{U \in \mathcal{O}_R} (U(w) \rightarrow \bigvee_{v \in W} (U(v) \wedge V^t(v, \varphi))) = \\ &V^t(w, \Diamond \varphi). \end{aligned}$$

Podobnie stwierdzamy dla $\Box$. Niech $U_1 \in \mathcal{O}_R$, $v_1 \in W$:

$$\begin{aligned} U_1(w) \wedge R w v_1 \wedge \bigwedge_{v \in W} (U_1(v) \rightarrow V^t(v, \varphi)) &\leq \\ U_1(w) \wedge R w v_1 \wedge (U_1(v_1) \rightarrow V^t(v_1, \varphi)) &\leq U_1(v_1) \wedge (U_1(v_1) \rightarrow V^t(v_1, \varphi)) \leq \\ V^t(v_1, \varphi), \text{ a zatem} \\ U_1(w) \wedge \bigwedge_{v \in W} (U_1(v) \rightarrow V^t(v, \varphi)) &\leq R w v_1 \rightarrow V(v_1, \varphi) \text{ skąd, wobec dowolności} \\ \text{przy wyborze } v_1 \text{ mamy} \\ U_1(w) \wedge \bigwedge_{v \in W} (U_1(v) \rightarrow V^t(v, \varphi)) &\leq \bigwedge_{v \in W} (R w v \rightarrow V(v, \varphi)) = V(w, \Box \varphi). \end{aligned}$$

Dalej otrzymujemy

$$V^t(w, \Box \varphi) = \bigvee_{U \in \mathcal{O}_R} (U(w) \wedge \bigwedge_{v \in W} (U(v) \rightarrow V^t(v, \varphi))) \leq \bigwedge_{v \in W} (R w v \rightarrow V(v, \varphi)),$$

skąd już mamy $V^t(w, \Box \varphi) \leq V(w, \Box \varphi)$.

Druga nierówność wynika z poniższego (kładziemy $U_w(v) = R w v$. Jak wiemy U_w jest zbiorem R -skierowanym)

$$\begin{aligned}
V(w, \Box\varphi) &= \bigwedge_{v \in W} (Rwv \rightarrow V(v, \varphi)) = U_w(w) \wedge \bigwedge_{v \in W} (U_w(v) \rightarrow V^t(v, \varphi)) \leq \\
&\bigvee_{U \in \mathcal{O}_R} (U(w) \wedge \bigwedge_{v \in W} (U(v) \rightarrow V^t(v, \varphi))) = V^t(w, \Box\varphi). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definicja 5.2.11. *O $\mathbf{A}$ -przestrzeni topologicznej $(W, \mathcal{O})$ powiemy, że jest **przestrzenią Aleksandroffa** wtw. dla dowolnej rodziny $\{U_t\}_{t \in T}$ zbiorów $\mathcal{O}$ -otwartych, $\bigwedge_{t \in T} U_t \in \mathcal{O}$.*

Można pokazać, że $\mathcal{O}_R$ jest przestrzenią Aleksandroffa.

Dla w_λ niech $U_{w_\lambda} \in \mathcal{O}$ oznacza najmniejsze otoczenie w_λ (o ile istnieje) tzn.

$$w_\lambda \in U_{w_\lambda} \ \& \ \forall U \in \mathcal{O} (w_\lambda \in U \Rightarrow U_{w_\lambda} \leq U). \quad (5.9)$$

Odnotujmy bez dowodu następujący:

Lemat 5.2.12. *Dla dowolnej $\mathbf{A}$ -relacji R , zwrotnej i przechodniej, $(W, \mathcal{O}_R)$ jest przestrzenią Aleksandroffa.* $\blacksquare$

Lemat 5.2.13. *Niech dla każdego w_λ istnieje U_{w_λ} . Zbiór U jest zbiorem otwartym wtw. dla każdego $w_\lambda \in U$, $U_{w_\lambda} \leq U$.*

Dowód. Załóżmy, że dla każdego w_λ istnieje U_{w_λ} .

($\Rightarrow$) Wynika bezpośrednio z (5.9).

($\Leftarrow$) Z założenia, dla każdego $w \in W$ istnieje $U_{w_{U(w)}} \in \mathcal{O}$. Pokazujemy, że $U = \bigvee_{w \in W} U_{w_{U(w)}}$. Z założenia $U_{w_{U(w)}} \leq U$ dla $w \in W$. Zatem $\bigvee_{w \in W} U_{w_{U(w)}} \leq U$. Ponadto, $(\bigvee_{w \in W} U_{w_{U(w)}})(v) \geq (U_{v_{U(v)}})(v) \geq U(v)$. Ostatecznie: $U = \bigvee_{w \in W} U_{w_{U(w)}} \in \mathcal{O}_R$. $\blacksquare$

Lemat 5.2.14. *$(W, \mathcal{O})$ jest przestrzenią Aleksandroffa wtw. dla każdego $\mathbf{A}$ -punktu w_λ istnieje jego najmniejsze otoczenie.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Niech w_λ będzie $\mathbf{A}$ -punktem. Wówczas $w_\lambda \in \bigwedge \{U \in \mathcal{O} : \lambda \leq U(w)\} \in \mathcal{O}$, jest najmniejszym $\mathcal{O}$ -otoczeniem w_λ .

($\Leftarrow$) Mając dowolną rodzinę $\{U_t\}_{t \in T}$ zbiorów $\mathcal{O}$ -otwartych, jeśli $w_\lambda \in \bigwedge_{t \in T} U_t$, to $\forall t \in T, w_\lambda \in U_t$, a zatem $\forall t \in T (U_{w_\lambda} \leq U_t)$, czyli $w_\lambda \in U_{w_\lambda} \leq \bigwedge_{t \in T} U_t$. Korzystając z Lematu 5.2.13 otrzymujemy tezę. $\blacksquare$

Twierdzenie 5.2.15. *(i) Dla dowolnej $\mathbf{A}$ -relacji R , $\mathbf{A}$ -zwrotnej i $\mathbf{A}$ -przechodniej: $R = R_{\mathcal{O}_R}$;*

(ii) Dla dowolnej $\mathbf{A}$ -topologii $\mathcal{O}$ na W : $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{R_{\mathcal{O}}}$. Ponadto jeśli $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{R_{\mathcal{O}}}$, to $(W, \mathcal{O})$ jest przestrzenią Aleksandroffa.

Dowód. Ad(i) Dla dowolnych $w, v \in W$, $U_1 \in \mathcal{O}_R$ mamy: $Rwv \wedge U_1(w) \leq U_1(v)$, a zatem $Rwv \leq U_1(w) \rightarrow U_1(v)$, czyli $Rwv \leq \bigwedge_{U \in \mathcal{O}_R} (U(w) \rightarrow U(v)) \leq U_w(w) \rightarrow$

$U_w(v) = Rww \rightarrow Rvw = 1 \rightarrow Rvw = Rvw$ (gdzie U_w jest zdefiniowany w (5.8))
czyli $R = R_{\mathcal{O}_R}$.

Ad(ii) Dla $w \in W$, $U_1 \in \mathcal{O}$: $U_1(w) \wedge R_{\mathcal{O}}wv = U_1(w) \wedge \bigwedge_{U \in \mathcal{O}} (U(w) \rightarrow U(v)) \leq$

$U_1(w) \wedge (U_1(w) \rightarrow U_1(v)) \leq U_1(v)$, a zatem $U_1 \in \mathcal{O}_{R_{\mathcal{O}}}$.

Druga część wynika z faktu, że $\mathcal{O}_{R_{\mathcal{O}}}$ jest zamknięta na dowolne przecięcia. ■

Inaczej niż w przypadku binarnej (zwykłej) topologii Twierdzenia 5.2.15 p.(ii) nie da się odwrócić. Wskazuje na to następujący

PRZYKŁAD 1. Niech $W = \{a, b\}$ oraz $\mathbf{A} = ([0, 1], \wedge, \vee, \leq)$, gdzie $\leq$ jest zwykłym porządkiem między liczbami rzeczywistymi z przedziału $[0, 1]$. Zatem w tym przypadku $x \rightarrow y = 1$ wtw. $x \leq y$ oraz $x \rightarrow y = y$, gdy $y < x$. Ponadto niech $\mathcal{O} = \{0, 1\}$ (gdzie 0, 1 są funkcjami stałymi). Oczywiście $\mathcal{O}$ jest przestrzenią Aleksandroffa. Jasne jest, że $R_{\mathcal{O}}wv = 1$ dla $w, v \in \{a, b\}$ oraz $V_{a\frac{1}{2}}^{R_{\mathcal{O}}}(w) = \frac{1}{2}$ dla $w \in \{a, b\}$ (patrz definicja w Fakcie 5.2.9). Zatem $V_{a\frac{1}{2}}^{R_{\mathcal{O}}} \in \mathcal{O}_{R_{\mathcal{O}}}$, lecz $V_{a\frac{1}{2}}^{R_{\mathcal{O}}} \notin \mathcal{O}$.

Definicja 5.2.16. Niech będą dane – $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, \mathcal{O}, V)$ topologiczny $\mathbf{A}$ -model Kripkego oraz $\mathfrak{M} = (\mathfrak{G}, \mathcal{O}', V')$ topologiczny $\mathbf{B}$ -model Kripkego oraz $h \in \text{Hom}^{\text{sup}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Powiemy, że $\emptyset \neq Z \subseteq W \times W'$ jest **stowarzyszona z h topobisymulacją** wtw. dla $w \in W$, $w' \in W'$, $p \in \Phi$

(i) $hV(w, p) = V'(w', p)$;

(ii) $\forall U \in \mathcal{O} \exists U' \in \mathcal{O}' hU(w) \leq_{\mathbf{B}} U'(w') \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'(v') \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} hU(v))$;

(iii) $\forall U' \in \mathcal{O}' \exists U \in \mathcal{O} U'(w') \leq_{\mathbf{B}} hU(w) \wedge \bigwedge_{v \in W} (hU(v) \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v]} U'(v'))$.

W powyższym przypadku zapisujemy $Z : \mathfrak{M} \xleftrightarrow{h}^{\text{top}} \mathfrak{M}$ oraz $Z : \mathfrak{M}, w \xleftrightarrow{h}^{\text{top}} \mathfrak{M}, w'$.

Lemat 5.2.17. W dowolnej algebrze Heytinga zachodzi:

$$x \rightarrow y \leq x \wedge z \rightarrow y \wedge z. \quad (5.10)$$

DOWÓD. $(x \rightarrow y) \wedge (x \wedge z) \leq x \wedge y \wedge z \leq y \wedge z$, skąd otrzymujemy $(x \rightarrow y) \wedge x \wedge z \leq y \wedge z$ co implikuje tezę. ■

Lemat 5.2.18. W dowolnej algebrze Heytinga spełniającej JID

$$\begin{aligned} &\text{jeśli } x \leq y_t \rightarrow z \text{ dla } t \in T, \\ &\text{to } x \leq \bigvee_{t \in T} y_t \rightarrow z. \end{aligned} \quad (5.11)$$

DOWÓD. Niech dla $t \in T$ zachodzi $x \leq y_t \rightarrow z$. Zatem również $x \wedge y_t \leq z$. Stąd, że algebra spełnia JID otrzymujemy

$$x \wedge \bigvee_{t \in T} y_t = \bigvee_{t \in T} (x \wedge y_t) \leq z. \text{ Zatem } x \leq \bigvee_{t \in T} y_t \rightarrow z.$$

■

Twierdzenie 5.2.19. *Jeśli $\mathfrak{M}, w_1 \xleftrightarrow{top}_h \mathfrak{N}, w'_1$, to $w \rightsquigarrow_h w'$.*

DOWÓD. Indukcja ze względu na budowę formuły. Pokazujemy jedynie dla $\Box$ i $\Diamond$.
Niech $U'_1 \in \mathcal{O}'$, wówczas na mocy (iii) warunku topobisymulacji

$$U'_1(w'_1) \leq_{\mathbf{B}} hU_1(w_1) \wedge \bigwedge_{v \in W} (hU_1(v) \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v]} U'_1(v')) \quad (5.12)$$

dla pewnego $U_1 \in \mathcal{O}$.

Weźmy dowolny punkt $v_1 \in W$. Wówczas, z podstawowych własności algebr Heytinga oraz założenia indukcyjnego mamy

$$\begin{aligned} \bigwedge_{v \in W} (hU_1(v) \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v]} U'_1(v')) &\leq_{\mathbf{B}} hU_1(v_1) \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v_1]} U'_1(v') \leq_{\mathbf{B}} \\ hU_1(v_1) \wedge hV(v_1, \varphi) &\rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v_1]} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi)). \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność wynika z Lematu 5.2.17, równości $hV(v_1, \varphi) = V'(v', \varphi)$ dla $v_1 Z v'$ oraz *JID*.

Zatem, korzystając z Lematu 5.2.18:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{v \in W} (hU_1(v) \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v]} U'_1(v')) &\leq_{\mathbf{B}} \\ \bigvee_{v \in W} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi)) &\rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v_1]} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi)), \end{aligned}$$

skąd i z Lematu 5.2.17 natychmiast wynika

$$\begin{aligned} hU_1(w_1) \wedge \bigwedge_{v \in W} (hU_1(v) \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v]} U'_1(v')) &\leq_{\mathbf{B}} \\ hU_1(w_1) \wedge [\bigvee_{v \in W} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi))] &\rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v_1]} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi)). \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę – ostatnią nierówność oraz (5.12) dochodzimy do wniosku, że $U'_1(w'_1) \leq_{\mathbf{B}} hU_1(w_1) \wedge [\bigvee_{v \in W} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi))] \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v_1]} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi))$.

Następnie korzystając z nierówności:

$$x \wedge (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow y) \rightarrow z \quad (5.13)$$

prawdziwej w każdej algebrze Heytinga otrzymujemy

$$U'_1(w'_1) \leq_{\mathbf{B}} [hU_1(w_1) \rightarrow \bigvee_{v \in W} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi))] \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v_1]} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi)).$$

Zaraz potem

$$\begin{aligned} hV(w_1, \Diamond \varphi) &= \bigwedge_{U \in \mathcal{O}} [hU(w_1) \rightarrow \bigvee_{v \in W} (hU(v) \wedge hV(v, \varphi))] \leq_{\mathbf{B}} \\ hU_1(w_1) \rightarrow \bigvee_{v \in W} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi)) &\leq_{\mathbf{B}} U'_1(w'_1) \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v_1]} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi)), \end{aligned}$$

bowiem w dowolnej algebrze Heytinga:

$$x \leq (y \rightarrow z) \rightarrow t \text{ implikuje } (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow t) \quad (5.14)$$

czyli

$$\begin{aligned} hV(w_1, \Diamond \varphi) &\leq_{\mathbf{B}} U'_1(w'_1) \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v_1]} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi)), \text{ a skoro } U'_1 \text{ był wy-} \\ &\text{brany najzupełniej dowolnie} \\ hV(w_1, \Diamond \varphi) &\leq_{\mathbf{B}} \bigwedge_{U' \in \mathcal{O}'} [U'(w'_1) \rightarrow \bigvee_{v' \in Z[v_1]} (U'(v') \wedge V'(v', \varphi))] \leq V'(w'_1, \Diamond \varphi). \end{aligned}$$

Niech zatem $U_1 \in \mathcal{O}$, czyli (z (ii) warunku topobisymulacji) dla pewnego $U'_1 \in \mathcal{O}'$

$$hU_1(w) \leq_{\mathbf{B}} U'_1(w') \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} hU_1(v)). \quad (5.15)$$

Niech $v'_1 \in W$. Podobnie jak w poprzednim przypadku

$$\begin{aligned} \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} hU_1(v)) &\leq_{\mathbf{B}} U'_1(v_1) \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v'_1]} hU_1(v) \leq_{\mathbf{B}} \\ U'_1(v'_1) \wedge V'(v'_1, \varphi) &\rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v'_1]} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi)) \text{ oraz} \\ \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} hU_1(v)) &\leq_{\mathbf{B}} \\ \bigvee_{v' \in W'} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi)) &\rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi)) \text{ i następnie} \\ U'_1(w'_1) \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} hU_1(v)) &\leq_{\mathbf{B}} \\ U'_1(w'_1) \wedge (\bigvee_{v' \in W'} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi))) &\rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi)). \end{aligned}$$

Z (5.15) otrzymujemy

$$hU_1(w) \leq_{\mathbf{B}} U'_1(w'_1) \wedge (\bigvee_{v' \in W'} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi))) \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi)).$$

Dochodzimy zatem do nierówności (korzystając ponownie z (5.13))

$$hU_1(w) \leq_{\mathbf{B}} (U'_1(w'_1) \rightarrow \bigvee_{v' \in W'} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi))) \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi)).$$

Ponadto mamy

$$\begin{aligned} V'(w'_1, \Diamond \varphi) &= \bigwedge_{U' \in \mathcal{O}'} [U'(w'_1) \rightarrow \bigvee_{v' \in W'} (U'(v') \wedge V'(v', \varphi))] \leq_{\mathbf{B}} \\ U'_1(w'_1) \rightarrow \bigvee_{v' \in W'} (U'_1(v') \wedge V'(v', \varphi)) &\leq_{\mathbf{B}} hU_1(w_1) \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v'_1]} (hU_1(v) \wedge hV(v, \varphi)) \\ \text{oraz wobec dowolności } U_1: V(w'_1, \Diamond \varphi) &\leq_{\mathbf{B}} hV(w_1, \Diamond \varphi). \end{aligned}$$

Przed dowiedzeniem, że prawdziwość twierdzenia przenosi się z formuły φ na $\Box \varphi$, wykażemy następujące stwierdzenie:

W dowolnej algebrze Heytinga spełniającej *JID* prawdziwa jest nierówność

$$(x \rightarrow \bigvee_{t \in T} y_t) \wedge \bigwedge_{t \in T} (y_t \rightarrow z) \leq x \rightarrow z. \quad (5.16)$$

Dla każdego $t_0 \in T$ mamy $y_{t_0} \wedge \bigwedge_{t \in T} (y_t \rightarrow z) \leq z$, czyli $\bigvee_{t \in T} y_t \wedge \bigwedge_{t \in T} (y_t \rightarrow z) \leq z$, skąd $x \wedge (x \rightarrow \bigvee_{t \in T} y_t) \wedge \bigwedge_{t \in T} (y_t \rightarrow z) = x \wedge \bigvee_{t \in T} y_t \wedge \bigwedge_{t \in T} (y_t \rightarrow z) \leq z$. Tak więc otrzymujemy (5.16).

Niech $U_1 \in \mathcal{O}$. Istnieje zatem $U'_1 \in \mathcal{O}$:

$$hU_1(w_1) \leq_{\mathbf{B}} U'_1(w'_1) \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} hU_1(v)). \quad (5.17)$$

Weźmy dowolny $v'_1 \in W'$. Dokonując podstawienia
 $T \mapsto Z^{-1}[v'_1]$
 $x \mapsto U'_1(v'_1)$
 $y_t \mapsto hU_1(v)$
 $z \mapsto V'(v'_1, \varphi)$, w (5.16) oraz korzystając z założenia indukcyjnego mamy

$$\begin{aligned} & (U'_1(v'_1) \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v'_1]} hU_1(v)) \wedge \bigwedge_{v \in W} (hU_1(v) \rightarrow hV(v, \varphi)) \leq_{\mathbf{B}} \\ & (U'_1(v'_1) \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v'_1]} hU_1(v)) \wedge \bigwedge_{v \in Z^{-1}[v'_1]} (hU_1(v) \rightarrow hV(v, \varphi)) \leq_{\mathbf{B}} \\ & U'_1(v'_1) \rightarrow V'(v'_1, \varphi), \text{ a skoro } v'_1 \text{ było dowolne} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} hU_1(v)) \wedge \bigwedge_{v \in W} (hU_1(v) \rightarrow hV(v, \varphi)) \\ & \leq_{\mathbf{B}} \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow V'(v', \varphi)). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Mnożąc obie strony nierówności (5.18) przez $U'_1(w'_1)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} & U'_1(w'_1) \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} hU_1(v)) \wedge \bigwedge_{v \in W} (hU_1(v) \rightarrow hV(v, \varphi)) \\ & \leq_{\mathbf{B}} U'_1(w'_1) \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow V'(v', \varphi)). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Korzystając z podstawowych własności algebr Heytinga

$$\begin{aligned} & U'_1(w'_1) \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow \bigvee_{v \in Z^{-1}[v']} hU_1(v)) \leq_{\mathbf{B}} \\ & \bigwedge_{v \in W} (hU_1(v) \rightarrow hV(v, \varphi)) \rightarrow [U'_1(w'_1) \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow V'(v', \varphi))]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Stąd i z (5.17) otrzymujemy

$$hU_1(w_1) \leq_{\mathbf{B}} \bigwedge_{v \in W} (hU_1(v) \rightarrow hV(v, \varphi)) \rightarrow [U'_1(w'_1) \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow V'(v', \varphi))]$$

oraz

$$hU_1(w_1) \wedge \bigwedge_{v \in W} (hU_1(v) \rightarrow hV(v, \varphi)) \leq_{\mathbf{B}} U'_1(w'_1) \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'_1(v') \rightarrow V'(v', \varphi)) \leq_{\mathbf{B}} \bigvee_{U' \in \mathcal{O}'} [U'(w'_1) \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'(v') \rightarrow V'(v', \varphi))].$$

$U_1 \in \mathcal{O}$ był dowolny, tak więc

$$\bigvee_{U \in \mathcal{O}} [hU(w_1) \wedge \bigwedge_{v \in W} (hU(v) \rightarrow hV(v, \varphi))] \leq_{\mathbf{B}} \bigvee_{U' \in \mathcal{O}'} [U'(w'_1) \wedge \bigwedge_{v' \in W'} (U'(v') \rightarrow V'(v', \varphi))],$$

a znaczy to tyle, co $hV(w_1, \Box \varphi) \leq_{\mathbf{B}} V'(w'_1, \Box \varphi)$.

Wykazanie, że $V'(w'_1, \Box \varphi) \leq hV(w_1, \Box \varphi)$ przebiega analogicznie. ■

Rozdział 6

Macierze kratowe

6.1 Zastosowania algebr liniowych w teorii krat

Algebra liniowa ma szerokie zastosowanie w teorii logik rozmytych (por. np. [9] czy [28]). Nie ma istotnych różnic między zwykłymi macierzami a macierzami zawierającymi wartości z przedziału $[0, 1]$. Z drugiej strony, rozpatrując macierze zawierające inne niż liczbowe wartości, możemy wprowadzić nowe typy operacji na owych macierzach. Na przykład, jeśli na kracie określona jest niestandardowa operacja F , to indukuje ona operację na rodzinie macierzy zawierających operacje z tej kraty.

Ponadto, reprezentacja macierzowa modeli Kripkego oraz relacji binarnych, jako łatwo podlegająca odtworzeniu w typach danych występujących w popularnych językach programowania (np. *Array*), pozwala na łatwą implementację procedur:

- obliczających wartość formuły we wszystkich punktach danego modelu,
- sprawdzających, czy dana relacja binarna, łącząca zadane modele Kripkego, jest bisymulacją.

Bieżący rozdział jest w istocie dokładnym opisem owych procedur, niezależnym od języka programowania. Ponadto wymienione dowody wskazują, że nasz opis jest adekwatny do tychże procedur.

Na początek przytoczmy kilka definicji.

Ciągi liczb naturalnych będziemy oznaczać przez $\bar{w}$, $\bar{u}$ itd. Ponadto kładziemy $|\langle u_1, \dots, u_k \rangle| = k$ oraz $|\langle \rangle| = 0$. Element ciągu występujący na pozycji i oznaczymy przez $\bar{u}_i$, to znaczy $\langle u_1, \dots, u_k \rangle_i = u_i$. Małe litery greckie z kreską na górze $\bar{\xi}$ oznaczać będą ciągi liczb porządkowych (zarówno skończone jak i nieskończone).

Ponadto będziemy stosować oznaczenie $\bar{\xi} < \bar{\kappa}$ w przypadku, gdy $\bar{\xi}$ oraz $\bar{\kappa}$ są tej samej długości i dla każdego $0 < i \leq |\bar{\xi}|$: $\xi_i < \kappa_i$. Podobnie kładziemy $\bar{\xi} \leq \bar{\kappa}$ gdy $\xi_i \leq \kappa_i$ dla każdego $0 < i \leq |\bar{\xi}|$. Co więcej, jeśli $\bar{\xi} = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$,

to w_{ξ} oznaczać będzie $\langle w_{\xi_1}, w_{\xi_2}, \dots, w_{\xi_n} \rangle$. Przypominamy, że piszemy $\bar{u} \cdot \bar{v}$ na oznaczenie konkatencji ciągów $\bar{u}$ oraz $\bar{v}$.

Niech $\mathcal{K} = (K, \wedge, \vee)$ stanowi kratę oraz będą dane liczby naturalne $k_1, \dots, k_m$. Przez **macierz typu** $k_1, \dots, k_m$ **nad** $\mathcal{K}$ będziemy rozumieć dowolne odwzorowanie $a : [k_1] \times \dots \times [k_m] \longrightarrow K$, gdzie $[n] = \{1, \dots, n\}$. Każdą macierz da się zapisać w postaci $[a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}$. Jeśli $k_t = k_{t+1} = \dots = k_{t+j} = k'$, wtedy będziemy używać notacji:

$$[a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_{t-1} \leq k_{t-1} i_t, i_{t+1} \dots i_{t+j} \leq k' i_{t+j+1} \leq k_{t+j+1} \dots i_m \leq k_m}. \quad (6.1)$$

Na przykład, zamiast

$$[a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}]_{i_1 \leq 5 \ i_2 \leq 4 \ i_3 \leq 4 \ i_4 \leq 4 \ i_5 \leq 2}, \quad (6.2)$$

położymy

$$[a_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}]_{i_1 \leq 5 \ i_2, i_3, i_4 \leq 4 \ i_5 \leq 2}. \quad (6.3)$$

$\mathbf{M}(\mathcal{K})$ będzie oznaczać klasę wszystkich macierzy nad $\mathcal{K}$. Jej podklasę zawierającą macierze typu $k_1, \dots, k_m$ oznaczmy przez $\mathbf{M}_{k_1 \times \dots \times k_m}(\mathcal{K})$.

Dla $A = [a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m} \in \mathbf{M}(\mathcal{K})$ kładziemy $A_{i_1 \dots i_m} = a_{i_1 \dots i_m}$, a dla $1 \leq j \leq m, 1 \leq t \leq k_j$:

$$A_{\hat{j}(t)} = [b_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_{j-1} \leq k_{j-1} i_j \leq k_j - 1, i_{j+1} \leq k_{j+1} \dots i_m \leq k_m}, \quad (6.4)$$

gdzie:

$$b_{i_1 \dots i_m} = \begin{cases} a_{i_1 \dots i_m}, & \text{dla } i_j < t \\ a_{i_1 \dots i_{j-1} i_j + 1 i_{j+1} \dots i_m}, & \text{gdy } t \leq i_j. \end{cases} \quad (6.5)$$

$A_{\hat{j}(t)}$ po prostu różni się do wyjściowej macierzy jedynie tym, że zostały z niej usunięte wszystkie elementy $a_{i_1 \dots i_{j-1} t i_{j+1} \dots i_m}$ (dla danego t).

Podobnie dla $A = [a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}, 1 \leq j \leq m$ kładziemy

$$A_{i_1 \dots i_{j-1} \downarrow i_{j+1} \dots i_m} = [a_{i_1 \dots i_m}]_{i_j \leq k_j} \quad (6.6)$$

dla macierzy jednowymiarowej gdzie $\{i_1, \dots, i_m\} - \{i_j\}$ są ustalonymi wartościami.

Co więcej, jeśli w $\mathcal{K}$ istnieje element najmniejszy $\mathbf{0}_{\mathcal{K}}$, kładziemy wtedy $a_{\langle k_1 \dots k_m \rangle}(i_{t_1} \dots i_{t_m})$ dla macierzy $A \in \mathbf{M}_{k_1 \dots k_m}(\mathcal{K})$ dla której $A_{i_{t_1} \dots i_{t_m}} = a$ oraz $A_{i_1 \dots i_m} = \mathbf{0}_{\mathcal{K}}$ w pozostałych przypadkach.

Dla dowolnej macierzy A , przez A^T oznaczmy jej **transpozycję**.

Dla danych $a \in K, A = [a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m} \in \mathbf{M}(\mathcal{K})$ definiujemy **produkt**

$$aA = [a \wedge a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}. \quad (6.7)$$

Podobnie możemy zdefiniować operację

$$a \vee A = [a \vee a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}. \quad (6.8)$$

Jeśli A jest taka sama jak powyższa i $B = [b_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}$, możemy zdefiniować

$$A * B = [a_{i_1 \dots i_m} * b_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m} \quad (6.9)$$

gdzie $*$ $\in \{\wedge, \vee\}$.

Uogólniając, niech $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \leq_{\mathbf{A}})$, gdzie $\mathcal{A} = (A, F_1, \dots, F_n)$ jest algebrą uporządkowaną. Odtąd zakładamy, że $(A, \leq_{\mathbf{A}})$ spełnia *JID*. Dla dowolnego $i \leq n$ oraz $A_1 = [a_{i_1, \dots, i_m}^1]_{i_1 \leq k_1, \dots, i_m \leq k_m}, \dots, A_{\sigma(F_i)} = [a_{i_1, \dots, i_m}^{\sigma(F_i)}]_{i_1 \leq k_1, \dots, i_m \leq k_m}$ kładziemy:

$$F_i^{k_1, \dots, k_m}(A_1, \dots, A_{\sigma(F_i)}) = [F_i(a_{i_1, \dots, i_m}^1, \dots, a_{i_1, \dots, i_m}^{\sigma(F_i)})]_{i_1 \leq k_1, \dots, i_m \leq k_m}. \quad (6.10)$$

Wtedy $\mathcal{A}^{k_1, \dots, k_m} = (\mathbf{M}_{k_1 \times \dots \times k_m}(A), F_1^{k_1, \dots, k_m}, \dots, F_n^{k_1, \dots, k_m})$ stanowi algebrę podobną do $\mathcal{A}$, a nawet $\mathcal{A}^{k_1, \dots, k_m} \in \text{IP}(\mathcal{A})$ (tzn. jest izomorficzną kopią pewnego produktu kartezjańskiego algebry $\mathcal{A}$) oraz $\mathbf{A}^{k_1, \dots, k_m} = (\mathcal{A}^{k_1, \dots, k_m}, \leq_{\mathbf{A}^{k_1, \dots, k_m}})$ jest algebrą uporządkowaną, gdzie

$$\begin{aligned} [a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m} \leq_{\mathbf{A}^{k_1, \dots, k_m}} [b_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m} \\ \text{wtw.} \\ a_{i_1 \dots i_m} \leq_{\mathbf{A}} b_{i_1 \dots i_m} \text{ dla } i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m. \end{aligned} \quad (6.11)$$

W dalszym ciągu będziemy pomijać indeksy, pisząc po prostu F zamiast $F^{k_1, \dots, k_m}$.

Dla $A = [a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}$ oraz $B = [b_{j_1 \dots j_n}]_{j_1 \leq l_1 \dots j_n \leq l_n}$ definiujemy **produkt tensorowy**:

$$A \otimes B = [a_{i_1 \dots i_m} \wedge b_{j_1 \dots j_n}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m, j_1 \leq l_1 \dots j_n \leq l_n}, \quad (6.12)$$

oraz **dualny produkt tensorowy**:

$$A \oplus B = [a_{i_1 \dots i_m} \vee b_{j_1 \dots j_n}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m, j_1 \leq l_1 \dots j_n \leq l_n}. \quad (6.13)$$

Łatwo jest zauważyć, że

$$[a] \otimes A = aA \quad (6.14)$$

oraz

$$[a] \oplus A = a \vee A, \quad (6.15)$$

gdzie $[a]$ jest macierzą typu 1 zawierającą a jako jedyny element.

Niech będą dane $A = [a_{i_1 \dots i_m}]_{i \leq \bar{k}}$ oraz $B = [b_{j_1 \dots j_n}]_{j \leq \bar{l}}$. Dla liczby naturalnej p takiej, że $p \leq \min\{m, n\}$ oraz $k_{m-p+s} = l_s$ dla $1 \leq s \leq p$ kładziemy

$$A \otimes^p B = [c_{h_1 \dots h_{m+n-2p}}]_{\bar{h} \leq \langle k_1 \dots k_{m-p} l_{p+1} l_{p+2} \dots l_n \rangle} \quad (6.16)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} c_{h_1 \dots h_{m+n-2p}} = \\ \bigvee \{ a_{h_1 \dots h_{m-p} i_{m-p+1} i_{m-p+2} \dots i_m} \wedge b_{i_{m-p+1} i_{m-p+2} \dots i_m h_{m-p+1} h_{m-p+2} \dots h_{m+n-2p}} : \\ \langle i_{m-p+1} i_{m-p+2} \dots i_m \rangle \leq \langle k_{m-p+1} k_{m-p+2} \dots k_m \rangle \}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Jak nietrudno zauważyć, wartość $c_{h_1 \dots h_{m+n-2p}}$ wyliczana jest w następujący sposób:

suma $\bigvee$ przebiega po wszystkich ciągach $i_{m-p+1}, i_{m-p+2}, \dots, i_m$, które są wspólne dla p ostatnich wskaźników macierzy A i p początkowych wskaźników macierzy B . Pozostałe wskazują współrzędne otrzymanej macierzy $A \otimes^p B$.

Podobnie:

$$A \oplus^p B = [c_{h_1 \dots h_{m+n-2p}}]_{\bar{h} \leq \langle k_1 \dots k_{m-p} l_{p+1} l_{p+2} \dots l_n \rangle} \quad (6.18)$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_{h_1 \dots h_{m+n-2p}} = \\ \bigwedge \{ a_{h_1 \dots h_{m-p} i_{m-p+1} i_{m-p+2} \dots i_m} \rightarrow b_{i_{m-p+1} i_{m-p+2} \dots i_m h_{m-p+1} h_{m-p+2} \dots h_{m+n-2p}} : \\ \langle i_{m-p+1} i_{m-p+2} \dots i_m \rangle \leq \langle k_{m-p+1} k_{m-p+2} \dots k_m \rangle \}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

W przypadku gdy $p = n$ napiszemy $AB := A \otimes^p B$ ($\overrightarrow{AB} := A \oplus^p B$) a macierz skonstruowana w ten sposób nazywana będzie **produktem skalarnym (prawie dualnym produktem skalarnym)** A oraz B .

Przytaczamy bez dowodu następujące:

Stwierdzenie 6.1.1. *Załóżmy, że $\mathcal{K}$ jest kratą oraz $\bar{k} = \langle k_1, \dots, k_m \rangle$ niepustym ciągiem liczb naturalnych. Wtedy:*

- i) $(\mathbf{M}_{\bar{k}}(\mathcal{K}), \wedge, \vee)$ jest kratą;
- ii) $(\mathbf{M}_{\bar{k}}(\mathcal{K}), \wedge, \vee)$ jest kratą dystrybutywną jeśli tylko $\mathcal{K}$ jest taką kratą;
- iii) jeśli $\mathcal{K}$ jest zupełna, to $(\mathbf{M}_{\bar{k}}(\mathcal{K}), \wedge, \vee)$ jest również zupełna;
- iv) jeśli $\mathbf{1}_{\mathcal{K}}$ ($\mathbf{0}_{\mathcal{K}}$) jest największym (najmniejszym) elementem w $\mathcal{K}$, to $[\mathbf{1}_{\mathcal{K}}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}$ ($[\mathbf{0}_{\mathcal{K}}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}$) jest elementem największym (najmniejszym) w $(\mathbf{M}_{\bar{k}}(\mathcal{K}), \wedge, \vee)$;
- v) dla każdego filtra $\mathfrak{f}$ (ideału $\mathfrak{i}$) w $\mathcal{K}$, $\mathbf{M}_{\bar{k}}(\mathfrak{f})$ ($\mathbf{M}_{\bar{k}}(\mathfrak{i})$) jest filtrem (ideałem) w $(\mathbf{M}_{\bar{k}}(\mathcal{K}), \wedge, \vee)$. (Przypominamy, że każdy filtr i każdy ideał w kratce jest podkratą, tak więc nasza notacja jest usprawiedliwiona). ■

Lemat 6.1.2. *Niech będą dane dwie macierze $A = [a_{i_1 \dots i_k}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}$, $B = [b_{i_1 \dots i_k}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m} \in \mathbf{M}_{k_1 \dots k_m}(\mathcal{K})$. Wtedy:*

- i) $a_{\langle k_1 \dots k_m \rangle}(i_{t_1} \dots i_{t_m}) \leq A$ implikuje $a_{\langle k_1 \dots k_m \rangle}(i_{t_1} \dots i_{t_m}) \leq B$ dla każdego $a \in K, i_{t_1} \leq k_1 \dots i_{t_m} \leq k_m$ wtw. $A \leq B$;
- ii) $a_{\langle k_1, \dots, k_m \rangle}(i_{t_1} \dots i_{t_m}) \otimes^p b_{\langle l_1 \dots l_n \rangle}(j_{r_1} \dots j_{r_n}) =$
 $a \wedge b_{\langle k_1 \dots k_{m-p} l_{m+p+1} \dots l_n \rangle}(i_{t_1} \dots i_{t_{m-p}} j_{r_{p+1}} \dots j_{r_n});$
- iii) jeśli $\mathcal{K}$ jest kratą dystrybutywną i następujące operacje są zdefiniowane, to
 $A \otimes^p (B \vee C) = A \otimes^p B \vee A \otimes^p C;$
 $(B \vee C) \otimes^p A = B \otimes^p A \vee C \otimes^p A;$
 $B \leq C \Rightarrow A \otimes^p B \leq A \otimes^p C \ \& \ B \otimes^p A \leq C \otimes^p A.$

DOWÓD. Ad (i) $(\Rightarrow)$ $(a_{i_1 \dots i_m})_{\langle k_1 \dots k_m \rangle}(i_1 \dots i_m) \leq A$ co implikuje $(a_{i_1 \dots i_m})_{\langle k_1 \dots k_m \rangle}(i_1 \dots i_m) \leq B$ dla każdego $\langle i_1 \dots i_m \rangle \in [k_1] \times \dots \times [k_m]$. Skąd $a_{i_1 \dots i_k} \leq b_{i_1 \dots i_k}$ dla dowolnych $i_1 \leq k_1, \dots, i_m \leq k_m$, zatem $A \leq B$.
 $(\Leftarrow)$ Oczywiście.

Ad(ii)

$$a_{\langle k_1, \dots, k_m \rangle}(i_{t_1} \dots i_{t_m}) \otimes^p b_{\langle l_1 \dots l_n \rangle}(j_{r_1} \dots j_{r_n}) =$$

$$[c_{i_1 \dots i_{m-p} j_{p+1} \dots j_n}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_{m-p} \leq k_{m-p} j_{p+1} \leq l_{p+1} \dots j_n \leq l_n}, \text{ gdzie}$$

$$c_{i_1 \dots i_{m-p} j_{p+1} \dots j_n} =$$

$$\bigvee \{ (a_{\langle k_1, \dots, k_m \rangle}(i_{t_1} \dots i_{t_m}))_{i_1 \dots i_m} \wedge (b_{\langle l_1 \dots l_n \rangle}(j_{r_1} \dots j_{r_n}))_{j_1 \dots j_n} :$$

$$i_{m-p+1} \leq k_{m-p+1} \dots i_m \leq k_m \ \& \ i_{m-p+s} = j_s \text{ dla } 1 \leq s \leq p \}.$$

Tak więc

$$c_{i_1 \dots i_{m-p} j_{p+1} \dots j_n} = a \wedge b \text{ wtw. } i_q = i_{t_q} \text{ dla } 1 \leq q \leq m-p \text{ oraz } j_q = j_{r_q} \text{ dla } p < q \leq n.$$

Ad (iii) Wymaga prostych wyliczeń. ■

Następne dwa proste fakty przytaczamy bez dowodów.

Stwierdzenie 6.1.3. *Dla dowolnego $A, B, C \in \mathbf{M}(\mathcal{K})$:*

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C. \quad (6.20)$$

■

Stwierdzenie 6.1.4. *Jeśli dla dowolnego $\langle i_1, \dots, i_m \rangle$ istnieje $a_{i_1 \dots i_m} \rightarrow b_{i_1 \dots i_m}$, to $A \rightarrow B$ także jest zdefiniowany oraz $A \rightarrow B = [a_{i_1 \dots i_m} \rightarrow b_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}$.* ■

6.2 Modele Kripkego i bisymulacje

W bieżącym paragrafie pokażemy, że możliwe jest wyliczanie wartości formuły modalnej w modelu Kripkego, za pomocą wprowadzonych operacji. Co więcej, zaprezentujemy macierzowy warunek bisymulacji dla wielowartościowych modeli Kripkego.

W przypadku, gdy $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będą liczbami porządkowymi macierz typu $< \alpha_1, \dots, < \alpha_k$ nad $\mathcal{K}$ będzie to odwzorowanie postaci $a : \alpha_1 \times \dots \times \alpha_k \longrightarrow K$ (korzystamy tutaj ze znanego faktu, że każda liczba porządkowa jest zbiorem zawierającym liczby porządkowe mniejsze od niej (porównaj na przykład [26])). Rodzinę takich macierzy będziemy oznaczać przez $\mathbf{M}_{<\alpha_1 \times \dots \times \alpha_k}(\mathcal{K})$. Mimo użycia liczb nieskończonych, wszystkie dotychczasowe definicje pozostają w mocy.

Definicja 6.2.1. Niech $\mathfrak{F} = (W, (R_\Delta)_{\Delta \in \tau_\Diamond}, (R_\nabla)_{\nabla \in \tau_\Box})$ będzie dowolną strukturą $\mathbf{A}$ -relacyjną oraz α będzie dowolnym typem porządkowym zbioru W . Zatem możemy zapisać: $W = \{w_\xi\}_{\xi < \alpha}$.

Niech ponadto $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ będzie wielowartościowym modelem Kripkego. Zdefiniujemy odwzorowanie $[\bullet]_{\mathfrak{M}} : \text{Form}(\varphi, \tau) \longrightarrow \mathbf{M}_{<\alpha}(\mathbf{A})$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} [p]_{\mathfrak{M}} &= [V(w_\xi, p)]_{\xi < \alpha} \text{ dla } p \in \Phi \\ [f(\varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma(f)})]_{\mathfrak{M}} &= F([\varphi_1]_{\mathfrak{M}}, \dots, [\varphi_{\sigma(f)}]_{\mathfrak{M}}) \\ [\Delta(\varphi_1 \dots, \varphi_{\rho(\Delta)})]_{\mathfrak{M}} &= [\Delta] \bigotimes_{i=1}^{\rho(\Delta)} [\varphi_i]_{\mathfrak{M}} \text{ dla } \Delta \in \tau_\Diamond \\ [\nabla(\varphi_1 \dots, \varphi_{\rho(\nabla)})]_{\mathfrak{M}} &= [\nabla] \bigoplus_{i=1}^{\rho(\nabla)} [\varphi_i]_{\mathfrak{M}} \text{ dla } \nabla \in \tau_\Box. \end{aligned} \quad (6.21)$$

W powyższych wzorach posłużyliśmy się oznaczeniem:

$[\#] = [R_{\#} w_{\xi_0} w_{\xi_1} \dots w_{\xi_{\rho(\#)}}]_{\xi_0, \dots, \xi_{\rho(\#)} < \alpha}$. Ponadto f jest spójnikiem, zaś F odpowiada mu operacją w algebrze.

Twierdzenie 6.2.2. Dla dowolnego modelu Kripkego $\mathfrak{M}$ z nośnikiem W , $\varphi \in \text{Form}(\varphi, \tau) : [\varphi]_{\mathfrak{M}} = [V(w_\xi, \varphi)]_{\xi < \alpha}$.

Dowód. Indukcja ze względu na długość formuły. Dla $p \in \Phi$ stwierdzenie oczywiste. Dla spójnika f zachodzi na mocy równości:

$$\begin{aligned} [f(\varphi_1, \dots, \varphi_{\sigma(f)})]_{\mathfrak{M}} &= [F(V(w_\xi, \varphi_1), \dots, V(w_\xi, \varphi_{\sigma(f)}))]_{\xi < \alpha} \\ &= F([\varphi_1]_{\mathfrak{M}}, \dots, [\varphi_{\sigma(f)}]_{\mathfrak{M}}). \end{aligned}$$

Dla $\Delta \in \tau_\Diamond$:

$$[\Delta] \bigotimes_{i=1}^{\rho(\Delta)} [\varphi_i]_{\mathfrak{M}} = [R_\Delta w_{\xi_0} w_{\bar{\xi}}]_{\xi_0 < \alpha, \bar{\xi} < \alpha^{\rho(\Delta)}} \left[\bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V(w_{\xi_i}, \varphi_i) \right]_{\bar{\xi} < \alpha^{\rho(\Delta)}} =$$

$$\left[\bigvee_{\bar{\xi} < \alpha^{\rho(\Delta)}} (R_\Delta w_{\xi_0} w_{\bar{\xi}} \wedge \bigwedge_{i=1}^{\rho(\Delta)} V(w_{\xi_i}, \varphi_i)) \right]_{\xi_0 < \alpha} = [V(w_\xi, \Delta(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)}))]_{\xi < \alpha}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{Dla } \nabla \in \tau_{\square}: \xrightarrow{\hspace{10cm}} \\
& [\nabla] \bigoplus_{i=1}^{\rho(\nabla)} [\varphi_i] \mathfrak{M} = [R_{\nabla} w_{\xi_0 \bar{\xi}}]_{\xi_0 < \alpha, \bar{\xi} < \alpha^{\rho(\nabla)}} \left[\bigvee_{i=1}^{\rho(\nabla)} V(w_{\xi_i}, \varphi_i) \right]_{\bar{\xi} < \alpha^{\rho(\nabla)}} = \\
& \left[\bigwedge_{\bar{\xi} < \alpha^{\rho(\nabla)}} (R_{\nabla} w_{\xi_0} w_{\bar{\xi}} \rightarrow \bigvee_{i=1}^{\rho(\nabla)} V(w_{\xi_i}, \varphi_i)) \right]_{\xi_0 < \alpha} = [V(w_{\xi}, \nabla(\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho(\Delta)}))]_{\xi < \alpha}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Niech $\mathbf{A} = [a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 \dots i_m \leq k_m}$, $\mathbf{B} = [b_{j_1 \dots j_n}]_{j_1 \leq l_1 \dots j_n \leq l_n}$ oraz $\bar{u} = \langle u_1 \dots, u_t \rangle$, $\bar{v} = \langle v_1, \dots, v_t \rangle$ spełniając warunki $1 \leq u_1 < \dots < u_t \leq m$, $1 \leq v_1 < \dots < v_t \leq n$ oraz $k_{u_1} = l_{v_1}, \dots, k_{u_t} = l_{v_t}$.

Kładziemy $\bar{i} \downarrow (\bar{u})$ dla ciągu powstałego z $\bar{i}$ poprzez usunięcie wyrazów znajdujących się na pozycjach: $u_1, u_2, \dots, u_t$, to jest dla

$i_1, i_2, \dots, i_{u_1-1}, i_{u_1+1}, \dots, i_{u_2-1}, i_{u_2+1}, \dots, i_{u_t-1}, i_{u_t+1}, \dots, i_m$ i podobnie dla $\bar{j} \downarrow (\bar{v})$. Połóżmy:

$$\mathbf{A} \otimes_{\bar{v}}^{\bar{u}} \mathbf{B} = [c_{\bar{i} \downarrow (\bar{u}) \bar{j} \downarrow (\bar{v})}]_{\bar{i} \downarrow (\bar{u}) \leq k \downarrow (\bar{u}), \bar{j} \downarrow (\bar{v}) \leq \bar{j} \downarrow (\bar{v})}, \quad (6.22)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
& c_{\bar{i} \downarrow (\bar{u}) \bar{j} \downarrow (\bar{v})} = \\
& \bigvee \{ a_{i_1 \dots i_m} \wedge b_{j_1 \dots j_n} : i_{u_1} \leq k_{u_1} \dots i_{u_t} \leq k_{u_t}, j_{v_1} \leq l_{v_1} \dots j_{v_t} \leq l_{v_t} \\
& \quad \& \forall p \in \{1, \dots, t\} i_{u_p} = j_{v_p} \}.
\end{aligned} \quad (6.23)$$

Powyższa definicja jest najbardziej skomplikowaną w tym rozdziale. Jednakże jest całkiem podobna do definicji $\otimes^p$ wprowadzonej wcześniej, z tym jednak zastrzeżeniem, że niekoniecznie pokrywają się p ostatnie i -indeksy z początkowymi j -indeksami, lecz suma $\bigvee$ przebiega dla indeksów wspólnych dla współrzędnych $i_{u_1}, i_{u_2}, \dots, i_{u_t}$ w $a_{i_1 \dots i_m}$ oraz $j_{v_1}, j_{v_2}, \dots, j_{v_t}$ w $b_{j_1 \dots j_n}$. Są one wspólne w tym znaczeniu, że $i_{u_p} = j_{v_p}$ dla $p = 1, \dots, t$. Łatwo jest zauważyć, że $\otimes_{\bar{v}}^{\bar{u}}$ określa tę samą operację co $\otimes^p$, jeśli tylko $\bar{u} = \langle m - p + 1, m - p + 2, \dots, m \rangle$ oraz $\bar{v} = \langle 1, 2, \dots, p \rangle$.

Niech dana będzie struktura **A**-relacyjna $\mathfrak{F} = (W, (R_{\Delta})_{\Delta \in \tau})$ i struktura **B**-relacyjna $\mathfrak{G} = (W', (S_{\Delta})_{\Delta \in \tau})$. Niech ponadto α będzie jakimś typem porządkowym zbioru W , β natomiast dowolnie wybranym typem porządkowym zbioru W' . Niech wreszcie $Z \subseteq W \times W'$. W dalszym ciągu macierz $\mathbf{Z} \in \mathbf{M}_{<\beta, <\alpha}(\{0, 1\})$ będzie reprezentować zwykłą relację binarną Z , w tym znaczeniu, że $\mathbf{Z}_{i,j} = 1$ wtw., gdy $w_j Z v_i$ zachodzi dla dowolnych $i < \beta$, $j < \alpha$, gdzie $W = \{w_i\}_{i < \alpha}$ oraz $W' = \{v_i\}_{i < \beta}$.

Co więcej, dla $X \subseteq Y$ niech $\chi_X : Y \rightarrow \{0, 1\}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru X , tzn. $\chi_X(a) = 1$ jeśli $a \in X$ oraz $\chi_X(a) = 0$ gdy $a \notin X$. Przypominamy, że dla dowolnej relacji binarnej Z , zapis $Z^{\sim}$ wskazuje jej konwers.

Twierdzenie 6.2.3. *Jeśli $Z : \mathfrak{F} \leftrightarrow_h \mathfrak{G}$, to dla każdego $\Delta \in \tau$:*

$$(i) \mathbf{Z} \otimes_{\langle 1 \rangle}^{\langle 2 \rangle} [hR_{\Delta}] \leq_{\mathbf{B}} [S_{\Delta}] \otimes_{\langle 1, 3, \dots, 2\rho(\Delta)-1 \rangle}^{\langle 2, 3, \dots, \rho(\Delta)+1 \rangle} (\bigotimes^{\rho(\Delta)} \mathbf{Z});$$

$$(ii) \mathbf{Z}^T \otimes_{(1)}^{(2)} [S_\Delta] \leq_{\mathbf{B}} [hR_\Delta] \otimes_{(1,3,\dots,2\rho(\Delta)-1)}^{(2,3,\dots,\rho(\Delta)+1)} (\bigoplus^{\rho(\Delta)} (\mathbf{Z}^T)).$$

Co więcej, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$1) Z[W] = W', Z^{-1}[W'] = W;$$

$$2) \text{ dla każdego niepustego } X \subseteq A: \sup_{\leq_{\mathbf{A}}} (X) \in X;$$

$$3) \text{ dla każdego niepustego } \sup_{\leq_{\mathbf{B}}} (Y) \in Y;$$

to powyższa implikacja może zostać zastąpiona równoważnością¹.

Dowód.

Założmy, że $Z : \mathfrak{F} \leftrightarrow_h \mathfrak{G}$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} \otimes_{(1)}^{(2)} [hR_\Delta] &= [\chi_{Z\sim}(w'_{\xi_0}, w_{\lambda_0})]_{\xi_0 < \beta, \lambda_0 < \alpha} \otimes_{(1)}^{(2)} [hR_\Delta w_{\lambda_0} w_{\bar{\lambda}}]_{\xi_0 < \alpha, \bar{\lambda} < \alpha^{\rho(\Delta)}} = \\ &= [\bigvee_{\lambda_0 < \alpha} (\chi_{Z\sim}(w'_{\xi_0}, w_{\lambda_0}) \wedge hR_\Delta w_{\lambda_0} w_{\bar{\lambda}})]_{\xi_0 < \beta, \bar{\lambda} < \alpha^{\rho(\Delta)}}. \end{aligned}$$

Co więcej:

$$\begin{aligned} [S_\Delta] \otimes_{(1,3,\dots,2\rho(\Delta)-1)}^{(2,3,\dots,\rho(\Delta)+1)} (\bigotimes^{\rho(\Delta)} \mathbf{Z}) &= \\ [S_\Delta w'_{\xi_0} w'_{\bar{\xi}}]_{\xi_0 < \beta, \bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}} \otimes_{(1,3,\dots,2\rho(\Delta)-1)}^{(2,3,\dots,\rho(\Delta)+1)} \bigotimes^{\rho(\Delta)} [\chi_{Z\sim}(w'_{\xi_0}, w_{\lambda_1})]_{\xi_0 < \beta, \lambda_1 < \alpha} &= \\ [S_\Delta w'_{\xi_0} w'_{\bar{\xi}}]_{\xi_0 < \beta, \bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\otimes_{(1,3,\dots,2\rho(\Delta)-1)}^{(2,3,\dots,\rho(\Delta)+1)} \left[\bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_{Z\sim}(w'_{\xi_j}, w_{\lambda_j}) \right]_{\xi_1 < \beta, \lambda_1 < \alpha, \dots, \xi_{\rho(\Delta)} < \beta, \lambda_{\rho(\Delta)} < \alpha} \\ &= \left[\bigvee_{\bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}} (S_\Delta w'_{\xi_0} w'_{\bar{\xi}} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_{Z\sim}(w'_{\xi_j}, w_{\lambda_j})) \right]_{\xi_0 < \beta, \bar{\lambda} < \alpha^{\rho(\Delta)}}. \end{aligned}$$

Wybermy dowolne $\xi_0 < \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_{\rho(\Delta)} < \alpha$ i połóżmy

$$\Xi_L = \bigvee_{\lambda_0 < \alpha} (\chi_{Z\sim}(w'_{\xi_0}, w_{\lambda_0}) \wedge hR_\Delta w_{\lambda_0} w_{\lambda_1} \dots w_{\lambda_{\rho(\Delta)}}). \quad (6.24)$$

Gdy $\Xi_L > 0$, to dla pewnego wskaźnika $\lambda_0 < \alpha$ otrzymujemy $\chi_{Z\sim}(w'_{\xi_0}, w_{\lambda_0}) = 1$ oraz $w_{\lambda_0} Z w'_{\xi_0}$. Przez definicję bisymulacji istnieją $\xi_1, \dots, \xi_{\rho(\Delta)} < \beta$ spełniające $w_{\lambda_1} Z w'_{\xi_1}, \dots, w_{\lambda_{\rho(\Delta)}} Z w'_{\xi_{\rho(\Delta)}}$, skąd $\chi_{Z\sim}(w'_{\xi_1}, w_{\lambda_1}) = \dots = \chi_{Z\sim}(w'_{\xi_{\rho(\Delta)}}, w_{\lambda_{\rho(\Delta)}}) = 1$ oraz:

$$hR_\Delta w_{\lambda_0} w_{\lambda_1} \dots w_{\lambda_{\rho(\Delta)}} \leq_{\mathbf{B}} S_\Delta w'_{\xi_0} w'_{\xi_1} \dots w'_{\xi_{\rho(\Delta)}}.$$

¹Zwróćmy uwagę, że dwa ostatnie warunki są równoważne stwierdzeniu, że konwersy $\leq_{\mathbf{A}}$ oraz $\leq_{\mathbf{B}}$ są dobrymi porządkami.

Jako wniosek otrzymujemy:

$$\Xi_L \leq_{\mathbf{B}} \bigvee_{\bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}} (S_{\Delta} w'_{\xi_0} w'_{\bar{\xi}} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_{Z \sim} (w'_{\xi_j}, w_{\lambda_j})). \quad (6.25)$$

Czyli zachodzi (i). Teraz dążymy do wykazania (ii):

$$\mathbf{Z}^{\mathbf{T}} \otimes_{(1)}^{(2)} [S_{\Delta}] = [\chi_Z(w_{\lambda_0}, w'_{\xi_1})]_{\lambda_0 < \alpha, \xi_1 < \beta} \otimes_{(1)}^{(2)} [S_{\Delta} w'_{\xi_0} w'_{\bar{\xi}}]_{\xi_0 < \beta, \bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}} = \\ [\bigvee_{\xi_0 < \beta} (\chi_Z(w_{\lambda_0}, w'_{\xi_0}) \wedge S_{\Delta} w'_{\xi_0} w'_{\bar{\xi}})]_{\lambda_0 < \alpha, \bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}}.$$

Ponadto:

$$\begin{aligned} [hR_{\Delta}] \otimes_{(1,3,\dots,2\rho(\Delta)-1)}^{(2,3,\dots,\rho(\Delta)+1)} (\bigotimes^{\rho(\Delta)} \mathbf{Z}^{\mathbf{T}}) = \\ [hR_{\Delta} w_{\lambda_0} w_{\bar{\lambda}}]_{\lambda_0 < \alpha, \bar{\lambda} < \alpha^{\rho(\Delta)}} \otimes_{(1,3,\dots,2\rho(\Delta)-1)}^{(2,3,\dots,\rho(\Delta)+1)} \bigotimes^{\rho(\Delta)} [\chi_Z(w_{\lambda_0}, w'_{\xi_1})]_{\lambda_0 < \alpha, \xi_1 < \beta} = \\ [hR_{\Delta} w_{\lambda_0} w_{\bar{\lambda}}]_{\lambda_0 < \alpha, \bar{\lambda} < \alpha^{\rho(\Delta)}} \otimes_{(1,3,\dots,2\rho(\Delta)-1)}^{(2,3,\dots,\rho(\Delta)+1)} \left[\bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_Z(w_{\lambda_j}, w'_{\xi_j}) \right]_{\lambda_1 < \alpha, \xi_1 < \beta, \dots, \lambda_{\rho(\Delta)} < \alpha, \xi_{\rho(\Delta)} < \beta} = \\ \left[\bigvee_{\bar{\lambda} < \alpha^{\rho(\Delta)}} (hR_{\Delta} w_{\lambda_0} w_{\bar{\lambda}} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_Z(w_{\lambda_j}, w'_{\xi_j})) \right]_{\lambda_0 < \alpha, \bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}}. \end{aligned}$$

Weźmy dowolne $\lambda_0 < \alpha, \xi_1, \dots, \xi_{\rho(\Delta)} < \beta$ i podstawmy:

$$\Xi_L = \bigvee_{\xi_0 < \beta} (\chi_Z(w_{\lambda_0}, w'_{\xi_0}) \wedge S_{\Delta} w'_{\xi_0} w'_{\xi_1} \dots w'_{\xi_{\rho(\Delta)}}). \quad (6.26)$$

Jeśli $\Xi_L > 0$, to dla pewnego wskaźnika $\xi_0 < \beta$ otrzymujemy $\chi_Z(w_{\lambda_0}, w'_{\xi_0}) = 1$. Stąd $w_{\lambda_0} Z w'_{\xi_0}$. Przez definicję bisymulacji, istnieją $\lambda_1, \dots, \lambda_{\rho(\Delta)} < \alpha$ spełniające $w_{\lambda_1} Z w'_{\xi_1}, \dots, w_{\lambda_{\rho(\Delta)}} Z w'_{\xi_{\rho(\Delta)}}$, skąd $\chi_Z(w_{\lambda_1}, w'_{\xi_1}) = \dots = \chi_Z(w_{\lambda_{\rho(\Delta)}}, w'_{\xi_{\rho(\Delta)}}) = 1$ oraz spełniające:

$$S_{\Delta} w'_{\xi_0} w'_{\xi_1} \dots w'_{\xi_{\rho(\Delta)}} \leq_{\mathbf{B}} hR_{\Delta} w_{\lambda_0} w_{\lambda_1} \dots w_{\lambda_{\rho(\Delta)}}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$\Xi_L \leq_{\mathbf{B}} \bigvee_{\bar{\lambda} < \alpha^{\rho(\Delta)}} (hR_{\Delta} w_{\lambda_0} w_{\bar{\lambda}} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_Z(w_{\lambda_j}, w'_{\xi_j})). \quad (6.27)$$

Stwierdzamy, że (ii) również zachodzi.

Załóżmy, że zachodzi (i), (ii) oraz 1), 2), 3). Pokazujemy, że Z jest bisymulacją ze względu na h .

Weźmy dowolne $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{\rho(\Delta)} < \alpha$, $\xi_0 < \beta$ takie, że $w_{\lambda_0} Z w'_{\xi_0}$.

W przypadku gdy $0 = hR_{\Delta} w_{\lambda_0} w_{\lambda_1} \dots, w_{\lambda_{\rho(\Delta)}}$, naturalnie istnieją $\gamma_1, \dots, \gamma_{\rho(\Delta)} < \beta$ takie, że

$$hR_{\Delta}w_{\lambda_0}w_{\lambda_1}\dots,w_{\lambda_{\rho(\Delta)}} \leq_{\mathbf{B}} S_{\Delta}w'_{\xi_0}w'_{\gamma_1}\dots w'_{\gamma_{\rho(\Delta)}} \quad (6.28)$$

oraz

$$w_{\lambda_i}Zw'_{\gamma_i} \text{ dla } i = 1 \dots, \rho(\Delta). \quad (6.29)$$

Jeśli $0 < hR_{\Delta}w_{\lambda_0}w_{\lambda_1}\dots,w_{\lambda_{\rho(\Delta)}}$, to dzięki (i) (patrz (6.25))

$$0 < \bigvee_{\lambda_0 < \alpha} (hR_{\Delta}w_{\lambda_0}w_{\lambda_1}\dots,w_{\lambda_{\rho(\Delta)}} \wedge \chi_{Z\sim}(w'_{\xi_0},w_{\lambda_0})) \leq_{\mathbf{B}} \\ \bigvee_{\bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}} (S_{\Delta}w'_{\xi_0}w'_{\xi} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_{Z\sim}(w'_{\xi_j},w_{\lambda_j})).$$

Tak więc z założenia wynika, że dla pewnych $\gamma_1, \dots, \gamma_{\rho(\Delta)} < \beta$, spełniających (patrz założenie 3))

$$S_{\Delta}w'_{\xi_0}w'_{\gamma_1}\dots w'_{\gamma_{\rho(\Delta)}} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_{Z\sim}(w'_{\gamma_j},w_{\xi_j}) = \\ \sup_{\leq_{\mathbf{A}}} \{(S_{\Delta}w'_{\xi_0}w'_{\xi} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_{Z\sim}(w'_{\xi_j},w_{\lambda_j})) : \bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}\} \in \\ \{(S_{\Delta}w'_{\xi_0}w'_{\xi} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_{Z\sim}(w'_{\xi_j},w_{\lambda_j})) : \bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}\}$$

zachodzi:

$$0 < hR_{\Delta}w_{\lambda_0}w_{\lambda_1}\dots,w_{\lambda_{\rho(\Delta)}} \leq_{\mathbf{B}} \\ \bigvee_{\bar{\xi} < \beta^{\rho(\Delta)}} (S_{\Delta}w'_{\xi_0}w'_{\xi} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_{Z\sim}(w'_{\xi_j},w_{\lambda_j})) = \\ S_{\Delta}w'_{\xi_0}w'_{\gamma_1}\dots w'_{\gamma_{\rho(\Delta)}} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_{Z\sim}(w'_{\gamma_j},w_{\xi_j}).$$

Z powyższych nierówności wynika

$$hR_{\Delta}w_{\lambda_0}w_{\lambda_1}\dots,w_{\lambda_{\rho(\Delta)}} \leq_{\mathbf{B}} S_{\Delta}w'_{\xi_0}w'_{\gamma_1}\dots w_{\gamma_{\rho(\Delta)}} \wedge \bigwedge_{j=1}^{\rho(\Delta)} \chi_{Z\sim}(w'_{\gamma_j},w_{\lambda_j}) \leq_{\mathbf{B}} \\ S_{\Delta}w'_{\xi_0}w'_{\gamma_1}\dots w_{\gamma_{\rho(\Delta)}} \quad (6.30)$$

oraz

$$\begin{aligned} & w_{\lambda_1}Zw'_{\gamma_1} \\ & w_{\lambda_2}Zw'_{\gamma_2} \\ & \dots \\ & w_{\lambda_{\rho(\Delta)}}Zw'_{\gamma_{\rho(\Delta)}}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Dowiedliśmy, że Z spełnia pierwszy warunek bisymulacji. Podobnie można pokazać, że zachodzi i drugi. ■

6.3 Przykład

Obecnie postaramy się wykazać zastosowanie przedstawionych właśnie metod. Po pierwsze, podamy sposób reprezentacji macierzy o większej niż 2 liczbie wymiarów w 2-wymiarowej przestrzeni. Następnie przedstawimy dwa modele Kripkego nad dwiema różnymi uporządkowanymi algebrami. Na samym końcu za pomocą macierzy zdefiniujemy relację binarną, wykazując, że jest ona bisymulacją.

Definicja 6.3.1. *Położmy*

$$\begin{aligned} \text{flat}_1([a_{i_1 \dots i_m}]_{\vec{i} \leq \vec{k}}) &= [[a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1} i_2 \leq k_2 i_3 \leq k_3 \dots i_m \leq k_m] \\ \text{flat}_2([a_{i_1 \dots i_m}]_{\vec{i} \leq \vec{k}}) &= [[a_{i_1 \dots i_m}]_{i_1 \leq k_1 i_2 \leq k_2} i_3 \leq k_3 \dots i_m \leq k_m]. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Jasne jest, że powyższe odwzorowania są izomorfizmami. Ponieważ wprowadzamy je jedynie ze względów prezentacyjnych, będziemy utożsamiać $\text{flat}_1(A)$ oraz $\text{flat}_2(A)$ z A .

Zdefiniujmy kilka modeli Kripkego. Po pierwsze niech $A = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ oraz $F : A \longrightarrow A$ zdefiniowane będą jak w poniższej tabeli.

Po drugie niech $B = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, gdzie $F' : B \longrightarrow B$ również została zdefiniowana w tabeli poniżej.

x	$F(x)$	x	$F'(x)$
0	1	0	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{3}{4}$	0	1	0
1	0		

W obu przypadkach definiujemy:

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1 & \text{dla } a \leq b \\ b & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Niech $h : A \longrightarrow B$ będzie odwzorowaniem $0 \mapsto 0$; $\frac{1}{4} \mapsto \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \mapsto \frac{2}{3}$; $\frac{3}{4} \mapsto 1$; $1 \mapsto 1$. Proste wyliczenia prowadzą do wniosku, że jest to homomorfizm $\mathcal{A} = (A, F, \rightarrow)$ i $\mathcal{B} = (B, F', \rightarrow)$, zachowujący ponadto $\sup$ i $\inf$ (ze względu na $\leq$).

Następnie położmy $W = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ oraz $W' = \{x'_1, x'_2, x'_3\}$. Zdefiniujmy za pomocą macierzy dwie wielowartościowe relacje (gdzie dla R elementy W występują w porządku, w jakim „zostały umieszczone” w zbiorze W , a dla

R' w zbiorze W'). W macierzy $[R]$, $\mathbf{0}$ oznaczać będzie wektor $[0, 0, 0, 0, 0]^T$ oraz $[0, 0, 0]^T$, gdy zostanie umieszczony w macierzy R' .

$$[R] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [R'] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Na przykład trzeci wiersz drugiej kolumny macierzy $[R]$ zawiera wektor wartości Rwx_3x_2 dla $w \in W$. Pierwszym elementem W jest x_1 , czyli $Rx_1x_3x_2 = \frac{1}{4}$ oraz $Rwx_3x_2 = 0$ dla $w \in W/\{x_1\}$.

Położmy $\mathfrak{F} = (W, R, \mathbf{A})$ oraz $\mathfrak{G} = (W', R', \mathbf{B})$. Zdefiniujmy $Z \subseteq W \times W'$ przez następującą macierz:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

Niech ponadto:

$$[V(w_1, p), V(w_2, p), V(w_3, p), V(w_4, p), V(w_5, p)] = [\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{2}, 0, 1] \quad (6.34)$$

oraz

$$[V(w_1, q), V(w_2, q), V(w_3, q), V(w_4, q), V(w_5, q)] = [0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{4}]. \quad (6.35)$$

Rozpatrzmy formułę $\varphi = p \rightarrow F(\Delta(Fq, q))$. Wówczas $[Fq]_{(\mathfrak{F}, V)} = [V(x_1, Fq), V(x_2, Fq), V(x_3, Fq), V(x_4, Fq), V(x_5, Fq)] = [1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0]$. Łatwo wyliczamy, że

$$[Fq]_{(\mathfrak{F}, V)} \otimes [q]_{(\mathfrak{F}, V)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zgodnie z Definicją 6.2.1 $[\Delta(Fq, q)]_{(\mathfrak{F}, V)} = [R]([Fq]_{(\mathfrak{F}, V)} \otimes [q]_{(\mathfrak{F}, V)})$. Czyli

$$[\Delta(Fq, q)]_{(\mathfrak{F}, V)} = [R] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Taką macierz możemy obliczyć w następujący sposób:

Wektorem szukanym jest $[\Delta(Fq, q)]_{(\mathfrak{F}, V)}$. Aby znaleźć jego i_0 -tą wartość, znajdujemy wszystkie miejsca w $[R]$ o współrzędnych s, t (które przy naszej dwuwymiarowej reprezentacji są wektorami postaci $\vec{v}_{st} = [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$), gdzie wektor $\vec{v}$ ma i_0 -tą wartość różną od zera. Jeśli nie ma takich wartości, to $([\Delta(Fq, q)]_{(\mathfrak{F}, V)})_{i_0} = 0$. Jeśli istnieją takie wartości, to tworzymy macierz $[(\vec{v}_{st})_{i_0}]_{st \leq 5}$. Następnie wyliczamy wartość

$$([\Delta(Fq, q)]_{(\mathfrak{F}, V)})_{i_0} = \bigvee_{s, t \leq 5} ((\vec{v}_{st})_{i_0} \wedge ([Fq]_{(\mathfrak{F}, V)} \otimes [q]_{(\mathfrak{F}, V)})_{st}). \quad (6.36)$$

W konsekwencji otrzymujemy $[\Delta(Fq, q)]_{(\mathfrak{F}, V)} = [\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}]$ oraz $[F(\Delta(Fq, q))]_{(\mathfrak{F}, V)} = [\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}]$. Ostatecznie $[\varphi]_{(\mathfrak{F}, V)} = [\frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}]$.

Sprawdzamy, czy relacja Z reprezentowana przez macierz $\mathbf{Z}$ jest bisymulacją.

$$\mathbf{Z} \otimes_{\langle 1 \rangle}^{\langle 2 \rangle} [hR] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes_{\langle 1 \rangle}^{\langle 2 \rangle} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Z drugiej strony, } \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z} & 0 & \mathbf{Z} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z} & 0 & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

oraz

$$[R'] \otimes_{\langle 1,3 \rangle}^{\langle 2,3 \rangle} (\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \otimes_{\langle 1,3 \rangle}^{\langle 2,3 \rangle} \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z} & \mathbf{0} & \mathbf{Z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z} & \mathbf{0} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ? \end{bmatrix} & ? & ? \\ ? & \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ ? \\ ? \end{bmatrix} & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ ? & ? & ? & \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} & ? \end{bmatrix}$$

W powyższej tabeli umieściliśmy ? dla wartości nieistotnych dla naszych celów. Drugi warunek bisymulacji może być pokazany w podobny sposób.

Rozdział 7

Ekspresyjność wielowartościowych automatów i gramatyk

Automaty wielowartościowe mają długą historię w *computer science*¹. Na przykład w [17] zdefiniowane zostały tak zwane **BL-automaty**. Głównym założeniem leżącym u podstaw ich konstrukcji jest to, że ich stany wartościowane są w BL-algebrach, które z kolei są specjalnymi przypadkami krat rezydualnych (wszystkie niezbędne definicje dostarczymy w dalszej części). W tym rozdziale pokażemy, że takie automaty mogą być symulowane (oczywiście w pewnym sensie) przez zwykłe automaty skończone. Rozpatrujemy przy tym jedynie skończone BL-algebry.

W drugiej części rozdziału będziemy rozpatrywać probabilistyczne gramatyki w postaci, w jakiej zostały zdefiniowane w [44]. Gramatyki takie różnią się od tych zdefiniowanych w [27] – głównie tym, że na każdym etapie ich wyprowadzania istnieje rozkład wyznaczony na zbiorze reguł, które mogą zostać zastosowane.

Gramatyki probabilistyczne mogą zostać użyte do definiowania zwykłych języków – gdy $a \in [0, 1]$, to $L(G, a)$ jest językiem składającym się ze wszystkich słów mających wyprowadzenie o stopniu wyższym niż a . Łatwo jest pokazać, że dla $a \in (0, 1)$ $L(G, a)$ jest językiem skończonym. Zatem istnieje gramatyka (nieprobabilistyczna), która generuje język $L(G, a)$. W bieżącym rozdziale pokażemy, że dowolna gramatyka probabilistyczna może być aproksymowana przez gramatykę składającą się jedynie z liczb wymiernych (patrz Twierdzenie 7.3.3).

Wprowadzenie wielowartościowości do teorii gramatyk ma przynajmniej dwa wymiary: praktyczny i czysto teoretyczny. Gramatyki probabilistyczne (por.

¹Pojęcie *Computer science* nie ma dobrego odpowiednika w języku polskim. Termin **nauka o komputerach** brzmi nieco sztucznie, a termin **informatyka** w języku polskim odnosi się raczej do zastosowań *computer science*.

[44]) mogą ujmować rzeczywiste zjawiska językowe. Na przykład rozpatrzmy wyrażenie wraz z jego analizą syntaktyczną:

$$\begin{array}{cc} \text{bystry} & \text{student.} \\ \frac{n}{n} & n \end{array}$$

Dodajmy na początku funktor „bardzo” (w tym przypadku jest on typu $\frac{n/n}{n/n}$). Otrzymujemy zatem syntaktycznie poprawną nazwę:

$$\begin{array}{ccc} \text{bardzo} & \text{bystry} & \text{student.} \\ \frac{n/n}{n/n} & \frac{n}{n} & n \end{array}$$

Możemy kontynuować nasze postępowanie i utworzyć wyrażenia „bardzo bardzo bystry student”, „bardzo bardzo bardzo bystry student” itd. Jednakże wraz z długością wyrażenia staje się ono coraz bardziej nienaturalne. Gramatyki probabilistyczne mogą stowarzyszać z wyrażeniem jego prawdopodobieństwo (lub – jak to woli – stopień jego naturalności). Gramatyka taka może akceptować wyrażenie „bardzo^k bystry student” (dla $k > 1$), lecz z mniejszym stopniem niż wyrażenie „bardzo bystry student”. Z drugiej strony inna gramatyka może zmniejszać wartość wyrażen mieszających różne dziedziny semantyczne – na przykład mając formę zdaniową „Jeśli X , to Y ”, możemy zastąpić X przez zdanie z języka arytmetyki $\forall_{x,y,z}(x < y \implies x + z < y + z)$ i zmienną Y przez zdanie o pogodzie „Jutro rano wstanie słońce”. Otrzymujemy: „Jeśli $\forall_{x,y,z}(x < y \implies x + z < y + z)$, to jutro rano wstanie słońce”.

Zwróćmy uwagę, że w [27, s. 423] symbole nieterminalne występujące w fuzzy gramatyce nazywa się **fuzzy kategoriami syntaktycznymi**.

Powyższe wyjaśnienie istnienia gramatyk probabilistycznych ma charakter zdecydowanie filozoficzny. Chcemy jednak nadmienić, że gramatyki probabilistyczne stosowane są w takich dziedzinach jak rozpoznawanie mowy, obrazów czy tak zwanego *pattern recognition* (zainteresowany Czytelnik może sięgnąć do [42, 5]). Podejmują one między innymi problematykę niejednoznaczności gramatycznej wyrażen. Jako przykład możemy podać, że istnieją przynajmniej dwie struktury gramatyczne dla zdania: *I saw the boat with the telescope* (przykład zaczerpnięty z [16]). Jednakże mogą one różnić się prawdopodobieństwem odwołania intencji wypowiadającego zdanie.

7.1 Związki logik modalnych z automatami skończonymi. Gramatyki

Wprowadzimy kilka definicji z zakresu teorii automatów. Szersze przedstawienie problematyki Czytelnik znajdzie np. w [23]. Ponadto pokażemy, w jaki sposób automaty mogą być rozumiane jako uszczegółowienie modeli Kripkego.

Definicja 7.1.1. *Niech dany będzie alfabet Σ , to znaczy skończony zbiór symboli. Przez Σ^+ będziemy rozumieć skończone i niepuste ciągi wyrażen ze zbioru*

Σ . Zgodnie z konwencją występującą w teorii automatów, skończone ciągi będziemy oznaczać poprzez $x_1x_2\ldots, x_n$ zamiast $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Ponadto kładziemy: $\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\lambda\}$, gdzie λ oznacza słowo puste. Elementy zbioru $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ będziemy nazywać **językami nad Σ** .

Przez **automat skończony** (symb. FA) nad Σ rozumiemy strukturę $\mathcal{A} = (Q, \delta, q_0, F)$, gdzie Q jest skończonym zbiorem stanów, $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ funkcją przejścia, $q_0 \in Q$ stanem początkowym oraz $F \subseteq Q$ wyróżnionym podzbiorem stanów **końcowych** (terminalnych).

Rozszerzamy funkcję δ na cały zbiorów Σ^*

$$\begin{aligned} \delta^*(q, \lambda) &= \{q\}, \\ \delta^*(q, \sigma) &= \delta(q, \sigma), \\ \delta^*(q, \bar{\sigma}\sigma) &= \{p \in Q : \exists r \in Q (r \in \delta^*(q, \bar{\sigma}) \ \& \ p \in \delta(r, \sigma))\}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Każdy automat wyznacza język nad Σ

$$L(\mathcal{A}) = \{\bar{\sigma} \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, \bar{\sigma}) \cap F \neq \emptyset\}. \quad (7.2)$$

Definicja 7.1.2. Przez **deterministyczny automat skończony** (symb. DFA) nad Σ rozumiemy $\mathcal{A} = (Q, \delta, q_0, F)$, gdzie $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$. Podobnie jak w ogólnym przypadku rozszerzamy δ

$$\begin{aligned} \delta^*(q, \lambda) &= q, \\ \delta^*(q, \bar{\sigma}\sigma) &= \delta(\delta(q, \bar{\sigma}), \sigma). \end{aligned} \quad (7.3)$$

DFA definiuje język

$$L(\mathcal{A}) = \{\bar{\sigma} \in \Sigma^* : \delta^*(q_0, \bar{\sigma}) \in F\}. \quad (7.4)$$

Aby odnotować związek łączący logiki modalne z teorią automatów połączmy: $\mathcal{A} = (Q, \delta, q_0, F)$ oraz zdefiniujmy model Kripkego $\mathfrak{M}(\mathcal{A}) = (Q, r_a, V)_{a \in \Sigma}$, gdzie $r_a(q, r)$ wtw. $r \in \delta(q, a)$ oraz $V(t_F) = F$.

Wówczas:

Fakt 7.1.3. $\mathfrak{M}(\mathcal{A}), q_0 \Vdash \langle \sigma_0 \rangle \langle \sigma_1 \rangle \ldots \langle \sigma_k \rangle t_F$ wtw. $\sigma_0 \sigma_1 \ldots \sigma_k \in L(\mathcal{A})$. ■

Nie przeczymy, że przedstawiony tu związek może wydawać się dość luźny. Jest on taki, ponieważ zajmujemy się jedynie podstawową logiką modalną. Silniejsze pokrewieństwo łączy bardziej złożone logiki modalne. Na przykład *LTL* z automatami Büchingiego. Jednakże pokazanie tego związku wymagałoby dodatkowej publikacji. Prosimy więc Czytelnika, by traktował ten rozdział jako próbę przybliżenia do takiej potencjalnej teorii.

Definicja 7.1.4. Przez **gramatykę** rozumiemy strukturę $G = (N, T, P, S)$ gdzie N jest zbiorem symboli nieterminalnych, T – zbiorem symboli terminalnych, $N \cap T = \emptyset$, $S \in N$ jest wyróżnionym symbolem początkowym, $P \subseteq (N \cup T)^* N (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$ nazywamy zbiorem **produkcji gramatyki**.

Elementy zbioru P oznaczamy poprzez $\alpha \rightarrow_G \beta$ lub $\alpha \rightarrow \beta$ (gdy G będzie ustalona) zamiast $\langle \alpha, \beta \rangle$. Definiujemy indukcyjnie relację **wyprowadzenia** w gramatyce G :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_0 &\Rightarrow_G \bar{\sigma}_0 \\ \bar{\sigma}_0 &\Rightarrow_G \bar{\sigma}_1 x \bar{\sigma}_2 \text{ \& } x \rightarrow y \in P \text{ implikuje} \\ \bar{\sigma}_0 &\Rightarrow_G \bar{\sigma}_1 y \bar{\sigma}_2. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Gramatyka definiuje język $L(G) := \{\bar{\sigma} \in T^* : S \Rightarrow_G \bar{\sigma}\}$.

W dalszym ciągu będziemy pisać δ zamiast δ^* .

7.2 BL-automaty

Ogólną teorię fuzzy automatów można znaleźć w [37].

Definicja 7.2.1. Operacja binarna $*$ na zbiorze $[0, 1]$ będzie zwana **t-normą** wtw. dla dowolnych $a, b, c, d \in [0, 1]$:

- (i) $a * b = b * a$;
- (ii) $a \leq c, b \leq d$ implikuje $a * b \leq c * d$;
- (iii) $a * (b * c) = (a * b) * c$;
- (iv) $a * 1 = a$.

Binarna operacja $\oplus$ na zbiorze $[0, 1]$ będzie zwana **t-konormą** wtw. będzie spełniała (i)-(iii) oraz $a \oplus 0 = 0$ dla dowolnych $a, b, c, d \in [0, 1]$.

Definicja 7.2.2. [22] Przez **kratę rezydualną** rozumiemy algebrę $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$, gdzie

(i) $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ jest kratą z elementami: największym z najmniejszym, dla której porządek kratowy będzie oznaczany poprzez $\leq$;

(ii) $(L, *, 1)$ jest przemenną półgrupą z jedyneką 1, tzn. operacja $*$ jest przemienna, łączna oraz 1 jest elementem neutralnym $*$;

(iii) $*$ oraz $\rightarrow$ tworzą parę rezydualną, tzn. $z \leq x \rightarrow y$ wtw. $x * z \leq y$ dla $x, y, z \in L$.

Korzystając z łączności operacji $*$ w kratce rezydualnej, dla dowolnych jej elementów $a_1, \dots, a_k$ piszemy $*_{i=0}^k a_i$ zamiast $(\dots (a_1 * a_2) * \dots) * a_k$. Ponadto zakładamy, że $*$ wiąże silniej niż $\wedge, \vee$ oraz $\rightarrow$.

Definicja 7.2.3. Dowolna krata rezydualna $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$ będzie określana jako **BL-algebra** wtw. spełnia równości:

- (i) $x \wedge y = x * (x \rightarrow y)$;
- (ii) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$.

Lemat 7.2.4. [22] W dowolnej BL-algebrze, zachodzą następujące fakty (dla dowolnych x, y, z):

- (i) jeśli $x \leq y$, to $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$;
- (ii) $x \leq y \rightarrow (x * y)$;
- (iii) jeśli $x \leq y$, to $x * z \leq y * z$;
- (iv) $(x \vee y) * z = (x * z) \vee (y * z)$.

DOWÓD. Dla (i) z Definicji 7.2.3 otrzymujemy $(z \rightarrow x) * z \leq x$. Tak więc $(z \rightarrow x) * z \leq y$ jeśli tylko $x \leq y$. Z rezydualności $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$. (ii) wynika z faktu, że $x * y \leq x * y$ oraz Definicji 7.2.2. Dla (iii) założmy, że $x \leq y$. Wtedy (ii) implikuje $y \leq z \rightarrow (y * z)$ i $x \leq z \rightarrow (y * z)$. Z rezydualności $x * z \leq y * z$. Dowód (iv) jest nieco dłuższy. Naturalnie $x * z \leq x * z$, co implikuje $x \leq z \rightarrow (x * z)$ i $x \leq z \rightarrow (x * z) \vee (y * z)$ zgodnie z (i). Podobnie możemy pokazać, że $y \leq z \rightarrow (x * z) \vee (y * z)$, zatem $x \vee y \leq z \rightarrow (x * z) \vee (y * z)$ i ponownie korzystając z rezydualności $(x \vee y) * z \leq (x * z) \vee (y * z)$. Dla odwrotnego kierunku: $x * z, y * z \leq (x \vee y) * z$ z (iii), czyli $(x * z) \vee (y * z) \leq (x \vee y) * z$. Ostatecznie wyprowadziliśmy wymaganą równość. ■

Powyższy lemat będzie wykorzystywany w dalszym ciągu. W międzyczasie rozpatrzmy przykład BL-algebry. Głównymi reprezentantami klasy BL-algebr są algebry postaci $([0, 1], \min, \max, *, \rightarrow, 0, 1)$ gdzie $*$ jest ciągłą t-normą, oraz $x \rightarrow y := \sup\{z \in [0, 1] : x * z \leq y\}$. Jeśli $*$ jest zdefiniowany jako $x * y := \max\{0, x + y - 1\}$, otrzymujemy wtedy MV-algebrę ([22]).

Jeśli $\mathcal{A} = (Q, q_0, \delta, F)$ jest zwykłym automatem skończonym (symb. FA), to kładziemy:

- $\text{states}(\mathcal{A}) = Q$
- $\text{init}(\mathcal{A}) = q_0$
- $\text{trans}(\mathcal{A}) = \delta$
- $\text{terminal}(\mathcal{A}) = F$.

Dla FA: $\mathcal{A} = (Q, q_0, \delta, F)$ połóżmy $Q(0) = \{q_0\}$, $Q(k+1) = Q(k) \cup \{q \in Q : \exists p \in Q(k), \sigma \in \Sigma \langle p, \sigma, q \rangle \in \delta\}$ oraz $Q(\omega) = \bigcup_{k=0}^{\infty} Q(k)$. Ostatecznie niech $p(\mathcal{A}) = (Q(\omega), q_0, \delta \cap (Q(\omega) \times \Sigma \times Q(\omega)), Q(\omega) \cap F)$. Tak więc $p(\mathcal{A})$ jest zredukowanym automatem, zawierającym jedynie stany osiągalne. Co więcej, $L(\mathcal{A}) = L(p(\mathcal{A}))$.

Definicja 7.2.5. Niech $\mathcal{A} = (Q, q_0, \delta, F)$ oraz $\mathcal{B} = (Q', q'_0, \delta', F')$ będą dwoma FA. Przez bisymulację pomiędzy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ rozumiemy relację $Z \subseteq Q \times Q'$ spełniającą:

- 1) $q_0 Z q'_0$;
- 2) dla $\langle q, q' \rangle \in Z$, $\sigma \in \Sigma$:
 - a) jeśli $p \in \delta(q, \sigma)$, to istnieje $p' \in \delta'(q', \sigma)$ taki, że $p Z p'$;
 - b) jeśli $p' \in \delta'(q', \sigma)$, to istnieje $p \in \delta(q, \sigma)$ taki, że $p Z p'$;
 - c) $q \in F$ wtw. $q' \in F'$.

W przypadku gdy Z jest bisymulacją pomiędzy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$, zapiszemy $Z : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$. Fakt istnienia relacji Z , takiej że $Z : \mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$ będzie odnotowywany przez $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$.

Twierdzenie 7.2.6. Jeśli $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, to $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

DOWÓD. Jeśli $\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B}$, to może zostać pokazane przez indukcję ze względu na długość $\bar{\sigma}$, że dla każdego $q \in \delta(q_0, \bar{\sigma})$ istnieje $q' \in \delta'(q'_0, \bar{\sigma})$ taki, że $q Z q'$ i symetrycznie dla $q' \in \delta'(q'_0, \bar{\sigma})$ istnieje $q \in \delta(q_0, \bar{\sigma})$ oraz $q Z q'$. Z Definicji 7.2.5 2) c) wynika teza. ■

Nie jest trudno sprawdzić, że klasa bisymulacji zawiera identyczność i jest zamknięta na złożenie. Zatem stwierdzamy, że klasa tworzy kategorię, w której morfizmami są bisymulacje.

Definicja 7.2.7. [17] Dla dowolnej BL-algebry $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$ i jej reduktu $K = (L, \wedge, *, 0, 1)$ przez $K - \Sigma$ -**automat** będziemy rozumieć strukturę $\mathcal{B} = (Q, I, T, E)$, gdzie Q jest skończonym zbiorem stanów, $I \in L^Q$ **stanem początkowym** oraz $T \in L^Q$ jest **stanem terminalnym**, E jest funkcją $Q \times \Sigma \times Q \rightarrow L$.

Funkcja E reprezentowana będzie przez macierz $[E_{pq}]_{p,q \in Q}$, gdzie dla każdych $p, q \in Q$, $E_{pq} : \Sigma \rightarrow L$: $E_{pq}(\sigma) = E(p, \sigma, q)$.

Dla dowolnych elementów $p_0, \dots, p_n$ z Q oraz ścieżki² $\pi = p_0 p_1 \dots p_n$ przyporządkowana będzie funkcja $\|\pi\|^{\mathcal{B}} : \Sigma^n \rightarrow L$, w taki sposób, że dla dowolnych $\bar{\sigma} = \sigma_0 \dots \sigma_{n-1} \in \Sigma^n$:

$$\|\pi\|^{\mathcal{B}}(\bar{\sigma}) = *_{i=0}^{n-1} E_{p_i p_{i+1}}(\sigma_i).$$

Dla dowolnych $p, q \in Q$ połóżmy $P^n(p, q) = \{p\} \times Q^{n-1} \times \{q\}$. Nieformalnie $P^n(p, q)$ jest zbiorem wszystkich ścieżek długości $n+1$ zaczynających się na p , kończących zaś w q .

Dla $K - \Sigma$ -automatu $\mathcal{B}$, definiujemy funkcję $|\mathcal{B}| : \Sigma^* \rightarrow L$ w następujący sposób:

$$|\mathcal{B}|(\bar{\sigma}) = \bigvee_{p,q \in Q} \bigvee_{\pi \in P^{|\bar{\sigma}|}(p,q)} I(p) * \|\pi\|^{\mathcal{B}}(\bar{\sigma}) * T(q).$$

Wartość $|\mathcal{B}|(\bar{\sigma})$ nazwiemy **stopniem akceptacji słowa** $\bar{\sigma} \in \Sigma^*$.

Dla dowolnego L -podzbioru B zbioru Σ^* (tzn. $B \in L^{\Sigma^*}$) powiemy, że B jest **rozpoznawalne** wtw. istnieje $K - \Sigma$ -automat $\mathcal{B}$, taki że $|\mathcal{B}| = B$.

²Przez **ścieżkę** rozumiemy po prostu ciąg skończony.

Konkretne przykłady BL-automatów Czytelnik znajdzie w [17].

Dla BL-algebr $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$ i $\mathcal{L}' = (L', \wedge', \vee', *', \rightarrow', 0', 1')$ oraz ich reduktów $K = (L, \wedge, *, 0, 1)$ i $K' = (L', \wedge', *', 0', 1')$ kładziemy $\text{HOM}^{sup}(K, K')$ na oznaczenie rodziny wszystkich homomorfizmów zachowujących $\vee$, tzn. takich, że $h \in \text{hom}(K, K')$ dla których zachodzi:

$$\text{jeśli } A \subseteq L, \text{ to } h[\vee A] = \vee h[A].$$

Definicja 7.2.8. Niech $\mathcal{A} = (Q, I, T, E)$ będzie K - Σ -automatem oraz $\mathcal{B} = (Q', I', T', E')$ będzie K' - Σ -automatem (K oraz K' jak powyżej). Ponadto niech $h \in \text{HOM}^{sup}(K, K')$. Dowloną niepustą relację $Z \subseteq Q \times Q'$ nazwiemy **h -bisymulacją pomiędzy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$** , jeśli tylko dla dowolnej $\langle p, p' \rangle \in Z$:

- i) $h(I(p)) = I'(p')$ oraz $h(T(p)) = T'(p')$;
- ii) dla dowolnych $\sigma \in \Sigma$ oraz $q \in Q$ istnieje $q' \in Q'$ taki, że qZq' oraz $h(E_{pq}(\sigma)) \leq E'_{p'q'}(\sigma)$;
- iii) dla dowolnych $\sigma \in \Sigma$ oraz $q' \in Q'$ istnieje $q \in Q$ taki, że qZq' oraz $E'_{p'q'}(\sigma) \leq h(E_{pq}(\sigma))$.

$Z : \mathcal{A} \leftrightarrow_h \mathcal{B}$ oznaczać będzie, że Z jest h -bisymulacją pomiędzy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$.

Twierdzenie 7.2.9. Niech $Z : \mathcal{A} \leftrightarrow_h \mathcal{B}$. Wtedy:

- i) jeśli $Z^{-1}[Q'] = Q$, to $h(|\mathcal{A}|(\bar{\sigma})) \leq |\mathcal{B}|(\bar{\sigma})$ dla dowolnego $\bar{\sigma} \in \Sigma^*$;
- ii) jeśli $Z[Q] = Q'$, to $|\mathcal{B}|(\bar{\sigma}) \leq h(|\mathcal{A}|(\bar{\sigma}))$ dla dowolnego $\bar{\sigma} \in \Sigma^*$;
- iii) jeśli $Z^{-1}[Q'] = Q$ oraz $Z[Q] = Q'$, to $h(|\mathcal{A}|(\bar{\sigma})) = |\mathcal{B}|(\bar{\sigma})$.

DOWÓD. Ad i) Z definicji

$$|\mathcal{A}|(\bar{\sigma}) = \bigvee_{p, q \in Q} \bigvee_{\pi \in P^{|\bar{\sigma}|}(p, q)} I(p) * ||\pi||^{\mathcal{A}}(\bar{\sigma}) * T(q). \quad (7.6)$$

Niech $p, q \in Q$ oraz $\pi \in P^{|\bar{\sigma}|}(p, q)$, czyli $\pi = q_1 q_2 \dots q_{|\sigma|} q_{|\sigma|+1}$, gdzie $q_1 = p$, $q_{|\sigma|+1} = q$.

Pokazujemy, że dla $m = 2, \dots, |\sigma| + 1$ istnieją $q'_1, q'_2, \dots, q'_m \in Q'$ takie, że:

$$\begin{aligned} h[*_{i=1}^{m-1} E_{q_i q_{i+1}}(\sigma_i)] &\leq *_{i=1}^{m-1} E'_{q'_i q'_{i+1}}(\sigma_i) \\ \text{oraz } q_i Z q'_i &\text{ dla } i = 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Dla $m = 2$, z faktu że $Z^{-1}[Q'] = Q$ istnieje $q'_1 \in Q'$ taki, że $q_1 Z q'_1$. Z definicji h -bisymulacji znajdujemy $q'_2 \in Q'$ spełniający $h(E_{q_1 q_2}(\sigma_1)) \leq E'_{q'_1 q'_2}(\sigma_1)$. Załóżmy, że (7.7) zachodzi. Dowodzimy dla $m + 1$. Z definicji istnieje $q'_{m+1} \in Q'$ taki, że $q_{m+1} Z q'_{m+1}$ oraz $h(E_{q_m q_{m+1}}(\sigma_{m+1})) \leq E'_{q'_m q'_{m+1}}(\sigma_{m+1})$. Wtedy:

$$\begin{aligned}
h[\overset{*}{\underset{i=1}{\overset{m}{E}}}_{q_i q_{i+1}}(\sigma_i)] &= h[\overset{*}{\underset{i=1}{\overset{m-1}{E}}}_{q_i q_{i+1}}(\sigma_i)] * h[E_{q_m q_{m+1}}(\sigma_m)] \\
&\leq \overset{*}{\underset{i=1}{\overset{m-1}{E}}}_{q'_i q'_{i+1}}(\sigma_i) * E'_{q'_m q'_{m+1}}(\sigma_m) = \overset{*}{\underset{i=1}{\overset{m}{E}}}_{q'_i q'_{i+1}}(\sigma_i) \\
&\text{oraz } q_i Z q'_i \text{ dla } i = 1, \dots, m+1
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Dowiedliśmy (7.7), skąd już łatwo wynika nasze stwierdzenie.

Ad ii) Podobnie jak powyżej.

Ad iii) Wynika z punktów i) oraz ii). ■

Jeśli K jest ustalony, to klasa $K - \Sigma$ -automatów z id -bisimulacją jako morfizmem tworzy kategorię.

Pokażemy teraz, że istnieje sposób symulacji³ BL-automatów nad skończoną algebrą.

Niech $\mathcal{B} = (Q, I, T, E)$ będzie BL-automatem nad skończoną algebrą $K = (L, \wedge, *, 0, 1)$. Połóżmy dla $a_0 \in L$

$$\Theta_{a_0}(\mathcal{B}) = (L^Q, \langle I(q) \rangle_{q \in Q}, \delta, F_{a_0}) \text{ gdzie:}$$

- i) $\delta(\langle a_q \rangle_{q \in Q}, \sigma) = \langle \bigvee_{p \in Q} a_p * E_{pq}(\sigma) \rangle_{q \in Q};$
- ii) $F_{a_0} = \{ \langle a_q \rangle_{q \in Q} \in L^Q : a_0 \leq \bigvee_{q \in Q} a_q * T(q) \}.$

Pokazujemy, że dla każdego $\bar{\sigma} = \sigma_1 \dots \sigma_k \in \Sigma^*$

$$\delta(\langle I(q) \rangle_{q \in Q}, \sigma_1 \dots \sigma_k) = \langle \bigvee_{p \in Q} \bigvee_{\pi \in P^k(p, q)} I(p) * \|\pi\|^{\mathcal{B}}(\sigma_1 \dots \sigma_k) \rangle_{q \in Q}. \tag{7.9}$$

Naturalnie, gdy $k = 1$, to zgodnie z definicją $\Theta_{a_0}(\mathcal{B})$.

$$\delta(\langle I(q) \rangle_{q \in Q}, \sigma_1) = \langle \bigvee_{p \in Q} I(p) * E_{pq}(\sigma_1) \rangle_{q \in Q}. \tag{7.10}$$

Zatem (7.9) zachodzi.

Załóżmy, że dla jakiegoś $j < k$ zachodzi (7.9). Wówczas

$$\delta(\langle I(q) \rangle_{q \in Q}, \sigma_1 \dots \sigma_j) = \langle \bigvee_{p \in Q} \bigvee_{\pi \in P^j(p, q)} I(p) * \|\pi\|^{\mathcal{B}}(\sigma_1 \dots \sigma_j) \rangle_{q \in Q}. \tag{7.11}$$

³W pewnym szczególnym sensie.

Zatem

$$\begin{aligned}
& \delta(\langle I(q) \rangle_{q \in Q}, \sigma_1 \dots \sigma_j \sigma_{j+1}) = \delta(\delta(\langle I(q) \rangle_{q \in Q}, \sigma_1 \dots \sigma_j), \sigma_{j+1}) = \\
& \delta(\langle \bigvee_{p \in Q} \bigvee_{\pi \in P^j(p,q)} I(p) * ||\pi||^{\mathcal{B}}(\sigma_1 \dots \sigma_j) \rangle_{q \in Q}, \sigma_{j+1}) = \\
& \langle \bigvee_{q \in Q} [\bigvee_{p \in Q} \bigvee_{\pi \in P^j(p,q)} I(p) * ||\pi||^{\mathcal{B}}(\sigma_1 \dots \sigma_j)] * E_{qr}(\sigma_{j+1}) \rangle_{r \in Q} \stackrel{(*)}{=} \\
& \langle \bigvee_{q \in Q} \bigvee_{p \in Q} \bigvee_{\pi \in P^j(p,q)} I(p) * ||\pi||^{\mathcal{B}}(\sigma_1 \dots \sigma_j) * E_{qr}(\sigma_{j+1}) \rangle_{r \in Q} = \\
& \langle \bigvee_{q \in Q} [\bigvee_{p \in Q} \bigvee_{\pi \in P^{j+1}(p,r)} I(p) * ||\pi||^{\mathcal{B}}(\sigma_1 \dots \sigma_j \sigma_{j+1})] \rangle_{r \in Q} = \\
& \langle \bigvee_{p \in Q} \bigvee_{\pi \in P^{j+1}(p,r)} I(p) * ||\pi||^{\mathcal{B}}(\sigma_1 \dots \sigma_j \sigma_{j+1}) \rangle_{r \in Q}.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Równość (*) wynika z Lematu 7.2.4 (iv).

Tak więc jeśli zdefiniujemy zwykły dwuwartościowy język $L_{a_0}(\mathcal{B}) = \{\bar{\sigma} \in \Sigma^* : a_0 \leq |\mathcal{B}|(\bar{\sigma})\}$, to zachodzi

Twierdzenie 7.2.10. $L_{a_0}(\mathcal{A}) = L(\Theta_{a_0}(\mathcal{A}))$. ■

Twierdzenie 7.2.10 wynika z 5.2 [10]. My jednak zaprezentowaliśmy elementarny dowód konstrukcyjny, niewymagający wprowadzenia solidnej porcji teorii formalnych szeregów potęgowych (dla zainteresowanych tą problematyką polecamy [2]).

7.3 Gramatyki probabilistyczne

Definicja 7.3.1. Niech $\mathcal{A} = (A, \oplus, *, 1)$ będzie algebrą typu $(2, 2, 0)$, gdzie operacje $\oplus, *$ są łączne. Połóżmy $\mathcal{A}^{(k)} = \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k : \bigoplus_{i=1}^k a_i = 1\}$. Jeśli $\mathcal{A}$ będzie znana z kontekstu, zamiast $\mathcal{A}^{(k)}$ będziemy pisać $A^{(k)}$. Przez **A-gramatykę** G rozumiemy strukturę $G = (N, T, P, S, \delta, \gamma, \phi, \mathcal{A})$, gdzie N, T są rozłącznymi alfabetami (odpowiednio – symboli nieterminalnych i terminalnych), $S \in N$, P jest zbiorem produkcji. Zakładamy, że produkcje są etykietowane elementami zbioru $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ (tzn. jest dana funkcja $\text{label}_G : P \rightarrow F$), $\delta, \gamma \in A^{(k)}$ oraz $\phi : F \rightarrow A^{(k)}$. Mając w G rozumianej jako zwykła gramatyka, wyprowadzenie D postaci $S = x_0 \Rightarrow_G x_1 \Rightarrow_G \dots \Rightarrow x_n \Rightarrow_G x_{n+1}$ przy użyciu reguł mających za etykiety $f_{j_0}, f_{j_1}, \dots, f_{j_n}$ definiujemy $\phi_G(D) = pr_{j_0}(\delta) * a_1 * \dots * a_n$ oraz $\psi_G(D) = pr_{j_0}(\delta) * a_1 * \dots * a_n * pr_{j_n}(\gamma)$, gdzie $a_i = pr_{j_i}(\phi(f_{j_{i-1}}))$ dla $i = 1, \dots, n$. pr_i oznacza projekcję i -tego składnika, tzn. $pr_i((a_1, \dots, a_k)) = a_i$. Projekcje będą oznaczane również w skróconej postaci przez $(a_1, \dots, a_k)_i = a_i$.

Gdy G jest ustalona, indeks dolny w ψ_G zostanie pominięty.

W powyższej definicji rozkład δ określa prawdopodobieństwo zastosowania pierwszej reguły (a raczej prawdopodobieństwo etykiety, jaką posiada ta reguła). Zastosowanie reguły na każdym etapie derywacji wyznacza prawdopodobieństwo użycia reguły w następnym kroku, czyli $\phi(f)$, gdzie f jest regułą

użytą poprzednio. Co więcej, jeśli reguła z etykietą f jest ostatnią użytą, wtedy wektor γ wskazuje jej „finitarność”⁴.

Jeśli mamy daną $\mathcal{A} = ([0, 1], \oplus, *, 1)$, gdzie $\oplus$ jest t-konormą oraz $*$ jest t-normą, to G będziemy nazywać **t-gramatyką**. Niech $[0, 1]_p^{(k)}$ oznacza zbiór wszystkich ciągów $(a_1, \dots, a_k) \in [0, 1]^{(k)}$ takich, że nie istnieje $i = 1, \dots, k$ oraz $a'_i < a_i$ spełniające $(a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_k) \in [0, 1]^{(k)}$. G nazwiemy **probabilistyczną t-gramatyką**, jeśli $\delta, \gamma \in [0, 1]_p^{(k)}$ oraz każdy wiersz ϕ , brany jako k -wymiarowy wektor, jest elementem $[0, 1]_p^{(k)}$.

Niech A będzie interwałem $[0, 1]$ wyposażonym w naturalny porządek $<$. Kładziemy wówczas dla $a \in A$:

$$L(G, a) =$$

$$\{x \in T^* : x \text{ jest wyprowadzalne z } S \text{ za pomocą derywacji } D \text{ takiej, że } \psi(D) > a\}.$$

Z punktu widzenia gramatyk probabilistycznych ważniejsze od zbiorów $L(G, a)$ są prawdopodobieństwa wyprowadzeń wyrażeń. W dalszym ciągu pokażemy, że dla dowolnej gramatyki probabilistycznej, jej wyprowadzenia mogą być aproksymowane przez gramatyki probabilistyczne składające się jedynie z liczb wymiernych.

Rozpatrzmy klasę $M_{n,n}([0, 1])$ $n \times n$ -macierzy elementów ze zbioru $[0, 1]$ oraz wyróżnimy jej właściwą podklasę $M_{n,n}^{(p)}$ składającą się ze wszystkich macierzy $[a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ spełniających dla $i \in \{1, \dots, n\}$: $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$.

Niech $\mathbf{B}_0 = [a_1, \dots, a_n]$, $\mathbf{B}_1 = [b_1, \dots, b_n]$ będą probabilistycznymi wektorami (tzn. $0 \leq a_i, b_i \leq 1$ oraz $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$), symbolicznie $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1 \in M_{1,n}^{(p)}$, oraz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j \leq n} \in M_{n,n}^{(p)}$.

Dla układu $\mathcal{G} = (\mathbf{B}_0, \mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ definiujemy funkcję $g_{\mathcal{G}} : \bigcup_{k=1}^{\infty} \{1, \dots, n\}^k \rightarrow [0, 1]$ w następujący sposób:

$$g_{\mathcal{G}}(m_1, \dots, m_k) = a_{m_1} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} a_{m_i, m_{i+1}} \cdot b_{m_k}. \quad (7.13)$$

Lemat 7.3.2. *Dla dowolnych $\mathcal{G} = (\mathbf{B}_0, \mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$, $\epsilon > 0$, $\delta \in (0, 1)$ istnieje $\mathcal{G}' = (\mathbf{B}'_0, \mathbf{A}', \mathbf{B}'_1)$, którego matryce składają się jedynie z liczb wymiernych, spełniający: jeśli $g_{\mathcal{G}}(m_1, \dots, m_k) > \delta$, to $|g_{\mathcal{G}}(m_1, \dots, m_k) - g_{\mathcal{G}'}(m_1, \dots, m_k)| < \epsilon$.*

⁴Definicje probabilistycznych gramatyk występujących w literaturze (zobacz na przykład [44]) nie zawierają składnika γ . Jednakże wszystkie prezentowane tu wyniki możemy łatwo zaadaptować do konstrukcji nie uwzględniającej wektora γ .

DOWÓD. Niech

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots a_{1,n-1} & a_{1,n} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_{1,i} \\ & \dots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} \dots a_{n,n-1} & a_{n,n} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_{n,i} \end{bmatrix}$$

$$\text{oraz } \mathbf{B}_0 = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} a_i], \mathbf{B}_1 = [b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i].$$

Niech ponadto $\epsilon > 0, \delta \in (0, 1)$. Pokazujemy, że istnieją:

$$\mathbf{C}_0 = [a'_1, \dots, a'_n], \mathbf{C}_1 = [b'_1, \dots, b'_n] \in M_{1,n}^{(p)}, \mathbf{B} = [f_{i,j}]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_{n,n}^{(p)} \quad (7.14)$$

spełniające

$$\text{jeśli } g_{\mathcal{G}}(m_1, \dots, m_k) > \delta, \text{ to } |g_{\mathcal{G}}(m_1, \dots, m_k) - g_{\mathcal{G}'}(m_1, \dots, m_k)| < \epsilon, \quad (7.15)$$

gdzie $\mathcal{G}' = (\mathbf{C}_0, \mathbf{B}, \mathbf{C}_1)$.

STWIERDZENIE. Ilość takich $\bar{m}$ spełniających $g_{\mathcal{G}}(\bar{m}) > q$ oraz $\bar{m}$ niezawierających 1 jest skończona dla każdego $q \in (0, 1)$. (7.16)

Niech μ będzie największą z liczb a_{ij} , b_i , a_i ($1 \leq i, j \leq n$) mniejszą od 1. Jeśli k jest liczbą naturalną taką, że $q < \mu^k < 1$, to $\log_{\mu} \mu^k < \log_{\mu} q$ (ponieważ $\mu < 1$). Tak więc $k < \log_{\mu} q$, skąd $|\bar{m}| < 1 + \log_{\mu} q$ dla każdego $\bar{m}$ spełniającego $g_{\mathcal{G}}(\bar{m}) > q$. To dowodzi naszego stwierdzenia.

Dla dowolnego ciągu $\bar{m} = m_1 \dots m_k \in [n]^k$ zdefiniujemy funkcję $g^{\bar{m}} : [0, 1]^{(n+1) \cdot (n-1)} \rightarrow [0, 1]$ w następujący sposób:

dla dowolnego ciągu liczb

$$\bar{x} = x_1 \dots, x_{n-1} x_{11} x_{12} \dots x_{1,n-1} \dots, x_{n1} x_{n2} \dots, x_{n,n-1} y_1 \dots y_{n-1} \\ \in [0, 1]^{(n-1) + n \cdot (n-1) + (n-1)} = [0, 1]^{(n+2) \cdot (n-1)} \text{ oznaczmy:}$$

$$g^{\bar{m}}(\bar{x}) = L_0(m_1) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} L_1(m_i, m_{i+1}) \cdot L_2(m_k), \text{ gdzie:}$$

$$L_0(k) = \begin{cases} x_k & \text{o ile } 1 \leq k < n \\ 1 - \sum_{i=0}^{n-1} x_i & \text{gdzie } k = n \end{cases} \quad (7.17)$$

$$L_1(k, j) = \begin{cases} x_{k,j} & \text{o ile } j < n \\ 1 - \sum_{i=0}^{n-1} x_{k,i} & \text{o ile } j = n \end{cases} \quad (7.18)$$

$$L_2(k) = \begin{cases} y_k & \text{o ile } 1 \leq k < n \\ 1 - \sum_{i=0}^{n-1} y_i & \text{gdzie } k = n. \end{cases} \quad (7.19)$$

Niech $(\bar{c}^i)_{i=0}^\infty = (d_1^i, \dots, d_{n-1}^i, e_{11}^i, \dots, e_{n-1,1}^i, \dots, e_{1n}^i, \dots, e_{n-1,n}^i, f_1^i, \dots, f_{n-1}^i)_{i=0}^\infty$ będzie ciągiem składającym się z liczb wymiernych z przedziału $[0, 1]$ zbieżnym do $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_{1,1}, \dots, a_{1,n-1}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n-1}, b_1, \dots, b_{n-1})$.

Z (7.16) wynika, że istnieje tylko skończona ilość $\bar{m}$ niezawierających 1, spełniających $g_G(\bar{m}) > \delta$. Połóżmy M_δ na oznaczenie zbioru takich $\bar{m}$.

Dla dowolnego $\bar{m} \in M_\delta$ funkcja $g^{\bar{m}}$ jest ciągła, zatem istnieje $i_{\bar{m}} \in \mathbb{N}$ spełniający

$$|g_G(\bar{m}) - g^{\bar{m}}(\bar{c}^i)| < \epsilon \quad (7.20)$$

dla dowolnego $i > i_{\bar{m}}$.

Położmy $i_{max} = \max\{i_{\bar{m}} : \bar{m} \in M_\delta\}$.

Łatwo jest zauważyć, że podstawiając
 $a'_1 = d_1^{i_{max}+1}, \dots, a'_{n-1} = d_{n-1}^{i_{max}+1}, e_{i,j} = e_{i,j}^{i_{max}+1}, b'_1 = f_1^{i_{max}+1}, \dots, b'_{n-1} = f_{n-1}^{i_{max}+1}$
otrzymujemy (7.14). ■

Twierdzenie 7.3.3. *Dla dowolnej probabilistycznej t-gramatyki G z konormą $x \oplus y = \min\{1, x+y\}$ oraz zwykłym mnożeniem jako normą, dla $\delta \in (0, 1)$, $\epsilon > 0$ istnieje probabilistyczna t-gramatyka $q(G)$, której produkcje są wartościowane w liczbach wymiernych taka, że dla dowolnego wyprowadzenia D , spełniającego $\psi_G(D) > \delta$ zachodzi $|\psi_G(D) - \psi_{q(G)}(D)| < \epsilon$.*

DOWÓD. Nasze twierdzenie wynika z 7.3.2 przez podstawienie: $\delta_i = c_i$, $pr_j(\phi(f_i)) = b_{i,j}$, $\gamma_i = d_i$. ■

Z Twierdzenia 7.3.3 wynika, że dla dowolnej gramatyki probabilistycznej możliwe jest dowolne aproksymowanie jej niezerowych wyprowadzeń (lub dokładniej – wyprowadzeń o z góry ustalonym rozsądnym prawdopodobieństwie δ) przez gramatykę probabilistyczną o wartościach wymiernych.

W dalszej części pokażemy, że gramatyka probabilistyczna może być symulowana przez tak zwaną **gramatykę regularnie kontrolowaną**, która jest gramatyką dwuwartościową. Zawiera ona jako komponent język regularny, mający za zadanie niedopuszczanie pewnych wyprowadzeń.

Definicja 7.3.4. ([8]) *Przez regularnie kontrolowaną gramatykę (regularly controlled grammar) będziemy rozumieć strukturę $G = (N, T, S, P, R)$ gdzie N, T są niepustymi rozłącznymi zbiorami (jak w przypadku zwykłej gramatyki: odpowiednio – symboli terminalnych i nieterminalnych), $S \in N$, P – zbiorem zwykłych produkcji, R zbiorem regularnym nad P .*

O $\bar{\sigma} \in T^*$ mówimy, że jest **akceptowane przez G** wtw. istnieje wyprowadzenie

$$S \Rightarrow_{p_1} \bar{\sigma}_1 \Rightarrow_{p_2} \bar{\sigma}_2 \Rightarrow_{p_3} \dots \Rightarrow_{p_n} \bar{\sigma}_n = \bar{\sigma} \text{ takie, że } p_1 p_2 \dots p_n \in R \quad (7.21)$$

gdzie $\Rightarrow_{p_i}$ oznacza tu bezpośrednią derywację przy użyciu produkcji p_i .

Twierdzenie 7.3.5. Dla dowolnej bezkontekstowej gramatyki G istnieją:

i) przeliczalnie nieskończony ciąg $\{G_i\}_{i \in \omega}$ regularnie kontrolowanych gramatyk;

ii) odwzorowanie $g : [0, 1] \rightarrow \omega$ takie, że $L(G, r) = L(G_{g(r)})$.

DOWÓD. Niech $s : [0, 1] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \omega$ będzie dowolną bijekcją. Zgodnie z 7.3.3 wystarczy, że nasze twierdzenie zostanie udowodnione dla gramatyk zbazowanych na liczbach wymiernych.

Niech $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Zbudujemy regularnie kontrolowaną gramatykę G' spełniającą: $L(G, r) = L(G')$.

Położmy $G' = (N', T, S, P', R_r)$, gdzie $N' = N \cup \{x' : x \in T\}$, $P' = \{x^\circ \rightarrow y_1^\circ \dots y_m^\circ : x \rightarrow y_1 \dots y_m \in P\} \cup \{x' \rightarrow x : x \in T\}$. Używamy przy tym następującego oznaczenia:

$$x^\circ = \begin{cases} x, & \text{dla } x \in N; \\ x', & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (7.22)$$

Położmy

$$Z(x \rightarrow y_1 \dots y_m) = i \text{ wtw. } x \rightarrow y_1 \dots y_m \text{ jest etykietowana przez } f_i. \quad (7.23)$$

Ostatnim składnikiem G' jest $R_r =$

$$\{p_1^\circ \dots p_n^\circ q_1 \dots q_m \in (P')^* : p_1, \dots, p_n \in P, \delta_{Z(p_1)} \cdot \prod_{l=1}^{n-1} \phi(f_{Z(p_l)})_{Z(p_{l+1})} \cdot \gamma_{Z(p_n)} > r; q_1, \dots, q_m \in \{x' \rightarrow x : x \in T\}\}.$$

$$\text{OBSERWACJA. } R_r \text{ językiem regularnym nad } P'. \quad (7.24)$$

Naturalnie zbiór wszystkich wartości $\delta_{l_1} \cdot \phi(f_{l_1})_2 \cdot \phi(f_{l_2})_3 \cdot \dots \cdot \phi(f_{l_{n-1}})_n$ oraz $\delta_{l_1} \cdot \phi(f_{l_1})_2 \cdot \phi(f_{l_2})_3 \cdot \dots \cdot \phi(f_{l_{n-1}})_n \cdot \gamma_{l_n}$ większych niż r (który będziemy oznaczać przez $\tilde{r}$), jest skończony. Zdefiniujmy deterministyczny automat $A = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$, gdzie $Q = \{q_{i,a} : 1 \leq i \leq k, a \in \tilde{r}\} \cup \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = P'$, $F = \{q_1\}$ oraz δ' definiujemy jako:

$$(1) \delta'(q_0, x^\circ \rightarrow y_1^\circ \dots y_m^\circ) = q_{Z(x \rightarrow y_1 \dots y_m), \delta_{Z(x \rightarrow y_1 \dots y_m)}};$$

$$(2) \delta'(q_{i,a}, x^\circ \rightarrow y_1^\circ \dots y_m^\circ) = q_{Z(x \rightarrow y_1 \dots y_m), a \cdot \phi(f_i)_{Z(x \rightarrow y_1 \dots y_m)}};$$

$$(3) \delta'(q_{i,a}, x' \rightarrow x) = q_1 \text{ jeśli tylko } a \cdot \gamma_i > r \text{ oraz}$$

$$(4) \delta'(q_1, x' \rightarrow x) = q_1.$$

Nie jest trudno zauważyć, że A akceptuje te i tylko te słowa, których prefiks $p_1^\circ \dots p_n^\circ$ spełnia $p_1, \dots, p_n \in P, \delta_{Z(p_1)} \cdot \prod_{l=1}^n \phi(f_{Z(p_l)})_{Z(p_{l+1})} \cdot \gamma_{Z(p_n)} > r$ oraz kończące się dowolnie długą sekwencją reguł zastępujących $x' \rightarrow x$, tak więc $L(A) = R_r$. Zatem zachodzi (7.24).

Spróbujmy zrozumieć zasadę działania gramatyki G' . Stosuje ona produkcje ze zbioru P' , lecz w taki sposób, że dopuszcza jedynie wyprowadzenia, takie że $\delta_{Z(p_1)} \cdot \prod_{l=1}^n \phi(f_{Z(p_l)})_{Z(p_{l+1})} \cdot \gamma_{Z(p_n)} > r$. Innymi słowy G' symuluje G . Na tym etapie mamy wyprowadzone słowo $x'_1 \dots x'_n$ dla pewnego wyrażenia $x_1 \dots x_n$ wyprowadzalnego w G z dowolnym stopniem prawdopodobieństwa. Wtedy G' kończy wyprowadzanie słowa nad T wtw. wszystkie x'_i zostały zastąpione przez x_i dzięki regułom postaci: $x \rightarrow x'$. Zatem $L(G, r) = L(G')$. Ostatecznie położmy $r \mapsto G_{s(r)} \cong G'$. ■

Jasne jest, że dowód Twierdzenia 7.3.5 jest konstruktywny. W podobny sposób możemy dowieść:

Twierdzenie 7.3.6. *Istnieje odwzorowanie g pomiędzy klasą par uporządkowanych $\langle G^p, r \rangle$ i ω , gdzie G^p jest gramatyką probabilistyczną, $r \in [0, 1]$ jest takie, że $L(G_{g(\langle G^p, r \rangle)}) = L(G^p, r)$, dla pewnego kanonicznego ciągu regularnie kontrolowanych gramatyk $\{G_n\}_{n \in \omega}$.*

□

Zakończenie

Jak zapewne zdążył się Czytelnik zorientować, ujęcie wielowartościowości w logikach modalnych oraz teorii automatów i gramatyk przedstawione powyżej nie jest ujęciem wyczerpującym, stanowiącym monografię. Naszym celem było przedstawienie, również nowych, wyników dotyczących przede wszystkim logik modalnych opartych o wielowartościowe logiki Łukasiewicza oraz ogólnej teorii wielowartościowych logik modalnych¹. Pokazaliśmy również, że wielowartościowa logika Łukasiewicza może stanowić bazę dla logiki dynamicznej *PDL*. Wskazaliśmy ponadto na związki pomiędzy logikami wielowartościowymi Łukasiewicza a logiką Nelsona, proponując przy tym propozycję uogólnienia logiki Nelsona, tak by była interpretowalna w logice $S4_n$ dla $n > 3$. Postaraliśmy się przedstawić dotąd nie eksploatowany temat wielowartościowej semantyki topologicznej dla wielowartościowych logik modalnych, który to, skromnym zdaniem autora, niesie duży potencjał badawczy.

Postaraliśmy się podjąć i rozwinąć pomysł Fittinga, zawarty w [14], polegający na macierzowej reprezentacji wielowartościowych modeli Kripkego. Pozostaje mieć nadzieję, że żmudne macierzowe obliczenia nie zniechęciły zbyt wielu Czytelników, szczególnie biorąc pod uwagę możliwość przyszłej implementacji sprawdzającej, czy dana macierz reprezentuje bisymulację między modelami Kripkego (naturalnie implementacji opartej o proponowaną reprezentację). W ostatnim rozdziale przedstawiliśmy pewne zależności pomiędzy siłą ekspresji standardowych automatów i gramatyk z ich wielowartościowymi odpowiednikami.

¹Której większość została już ujęta w [15].

Skorowidz

$\text{Hom}_{\text{inf}}^{\text{sup}}$, 10, 82, 88, 121

$\emptyset$, 13

$\mathcal{P}$, 13

$\subseteq$, 13

$-$, 13

$\cap$, 13

$\in$, 13

$\cup$, 13

$\langle a, b \rangle$, 13

$\subset$, 13

$R[C]$, $R^{-1}[D]$, 14

$\bigcup$, 14

$R^{\sim}$, R^{-1} , 14

$\not\subseteq$, 14

Fin , 14

$\times$, 14

dom , codom , 14

$\bigcap$, 14

End , 15, 18

$\bigcup A_t$, 15

$t \in T$

$f(a)$, fa , 15

$\prod A_t$, 15

$t \in T$

xRy , 15

$f : A \twoheadrightarrow B$, 15

$f : A \longrightarrow B$, $f \in B^A$, 15

pr_{t_0} , 15

$Rx_1x_1 \dots x_n$, 15

$\langle a_t \rangle_{t \in T}$, 15

$g \cdot f$, 16

R^n , 16

R^+ , R^* , 16

$R \circ T$, 16

$\mathcal{O}^m(A)$, 17

hom , 18

$/A/$, 18

$\preceq$, $\prec$, 18

$(G)_{\mathcal{A}}$, 18

$\vdash$, 19

C , 20

$Cn_{\mathcal{R}}$, 21

Th , 22, 25

$RMax$, 22

$\text{Form}(\tau, \Phi)$, 22

$\Vdash$, 24

$\models$, 26–28

$\overset{\sim}{\sim}$, 26

$(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$

K, 29

S5, 30

B, 30

K4, 30

S4, 30

T, 30

$\leftrightarrow$, 31

$\rightarrow$, 31

$\rhd$, 32

$(G)_{\mathfrak{F}}$, 33

$L_{\diamond}$, 37

I_k , 37

J_i , 37

K_n , 39, 47

$\mathfrak{L}_n$, 39

$\vdash_{K_n}$, 39

$\bigvee$, 40

$\mathbf{M}_n^K$, 40

$\bigwedge$, 40

$\models_{\mathbf{M}_n^K}$, 41, 47

$\mathbf{M}_n^D$, 46

KD_n , 46

$\vdash_{KD_n}$, 46

$\models_{\mathbf{M}_n^D}$, 46

$\models_{\mathbf{M}_n^T}$, 47

T_n , 47

$\mathbf{M}_n^4$, 47

$\vdash_{T_n}$, 47
 KB_{4n} , 47
 M_n^T , 47
 M_n^B , 47
 $\models_{M_n^B}$, 47
 $\vdash_{KB_n}$, 47
 $\vdash_{4n}$, 47
 $\vdash_{KDen_n}$, 48
 M_n^{Den} , 48
 Den_n , 48
 $\models_{M_n^{Den}}$, 48
 T'_n , 50
 $\vdash_{K4'_n}$, 50
 KD'_n , 50
 $\models_{M_n^{4'}}$, 50
 KB'_n , 50
 $4'_n$, 50
 $M_n^{4'}$, 50
 M_n^{RU} , 52
 $\models_{M_n^{RU}}$, 53
 KRU_n , 53
 $\vdash_{KRU_n}$, 53
PDL, 61
 $\vdash_{PDL_n}$, 62
 $\models_{INT}$, 70
 $\vdash_N$, 71
 $\sqsubseteq$, 71
 MPI_3 , 73
 $\models_{PI_n^r}$, 77
 $f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$, 83
 $f : \mathfrak{M} \hookrightarrow_h \mathfrak{N}$, 83
 $f : \mathfrak{M} \rightarrow_h \mathfrak{N}$, 83
 $\bar{w}$, $\bar{u}$, 103
 $\mathbf{M}(K)$, 104
 $A_{j(t)}$, 104
 $A_{i_1 \dots i_{j-1} \downarrow i_{j+1} \dots i_m}$, 104
 $\oplus$, 105
 $\otimes$, 105
A
 $\mathcal{A}$ -gramatyka, 127
alfabet, 120
algebra, 18
wolno generowana, 18
algebra Heytinga, 8–10, 19, 79, 80, 92,
97, 98, 100
algebry nośnik, 18
algebry podobne, 18
A-model, 80
automat, 119–121

BL-automat, 119, 125, 126
deterministyczny
skończony, 131
fuzzy, 122
 $K - \Sigma$ -automat, 124–126
skończony, 119–121
deterministyczny, 121
wielowartościowy, 119

B

bisymulacja, 9, 30–34, 82, 84–86, 88,
108, 110, 111, 113, 116, 117,
123–125

C

computer science, 119

D

dowód, 21
druga liczba Stirlinga, 57
dualny produkt tensorowy, 105

E

endomorfizm, 18
epimorfizm, 16

F

FA

zob. automat skończony 123
filtracja, 7, 8, 36, 54–57
finite model property
zob. własność skończonego
modelu 55
formuł zbiór, 19
formuła, 22
funkcja dominacji, 9
funktor modalny, 6

G

generowany podmodel, 81
gramatyka, 121
gramatyki probabilistyczne, 119, 128

H

homomorfizm, 18
homomorfizm ze względu na h , 83

I

inferencja, 21

J

język, 121
język zdaniowy, 19

JID, 92

K

konkatenacja ciągów, 82

krata rezydualna, 122

$\bigwedge$ -krata, 80

L

Lemat Lindenbauma, 22

lingwistyka formalna, 121

lingwistyka matematyczna

seelingwistyka formalna, 121

logika intuicjonistyczna, 8, 70, 74

logika Łukasiewicza, 37

logika modalna

semantyka, 24

logika Nelsona, 8, 61, 70, 71, 74

logiki modalne, 5, 8

logiki wielowartościowe, 5, 7, 8, 35,

36, 47, 49, 51, 61–63, 70, 79

Ł

łańcuch, 16

Łukasiewicz, 5, 7, 8, 35–39, 45, 46, 48,

51, 52, 54, 61–63, 70, 73, 74,

77

M

macierz typu $k_1, \dots, k_m$, 104

matryca, 20

matryca Łukasiewicza, 36

modalności aletyczne, 6

model Kripkego, 24

model słabo symetryczny, 81

MongoDB, 7

monomorfizm, 16

multimodalność, 23

MV-algebra, 123

N

N-model, 71

NoSQL, 7

O

ograniczony morfizm ze względu na h ,

83

operacja

konsekwencji, 19

finitarna, 20

strukturalna, 20

operator

modalny

typu koniecznościowego, 23

operator modalny, 22

P

p-morfizm, 9, 31, 32

podalgebra, 18

podmodel, 81

porządek informacyjny, 71

porządek stopni prawdziwości, 79

produkt tensorowy, 105

program atomowy, 61

propositional dynamic logic, 61

wielowartościowa, 62

przestrzeń Aleksandroffa, 96

przestrzeń topologiczna, 11

R

relacja

antysymetryczna, 17

częściowo-porządkująca, 17

funkcyjna, 50

konsekwencji, 19

finitarna, 20

strukturalna, 20

liniowo porządkująca, 17

osiągalności, 24

prawie przechodnia, 50

prawie serialna, 50

prawie symetryczna, 50

prawie zwrotna, 50

przechodnia, 17

przeciwsymetryczna, 17

przeciwwrotna, 17

quasi-porządkująca, 17

symetryczna, 17

wielowartościowa, 79

zwrotna, 17

relacja binarna, 13

relacja dominacji, 9, 11

relacja euklidesowa, 50

relacja: słabo symetryczna

(wielowartościowa), 81

S

silny homomorfizm ze względu na h ,

83

słaba bisymulacja, 88

SQL, 7

struktura **A**-relacyjna, 80
 struktura relacyjna, 9, 24–28, 30–32
 dla *PDL*, 61
 generowana, 32
 struktura τ -relacyjna, 26
 suma rozłączna, 81

T

teoria, 22
 teoria automatów, 11
 teoria gramatyk, 11
 t-gramatyka, 128
 t-konorma, 122
 t-norma, 122
 topobisymulacja, 97
 topologiczny **A**-model, 93
 topologie rozmyte, 92
 typ podobieństwa modalnego, 22

W

wielowartościowa logika modalna, 37
 logika dynamiczna
 zob. propositional dynamic
 logic 62
 wielowartościowe logiki modalne, 6, 8,
 11, 35, 36, 47, 51, 61, 67, 74
 własność skończonego modelu, 55

Z

zanurzenie, 83
 zbiór , 13
 relatywnie maksymalny, 22
 zamknięty na regułę r , 21
 zbiór Fischer-Ladnerowsko
 n -zamknięty, 63
 zbiór uporządkowany, 17

Bibliografia

- [1] Aiello M., van Benthem J., *Logical Patterns in Space*. [W:] *Words, Proofs and Diagrams*, ss. 5–25, CSLI Publications, 2002.
- [2] Berstel J., Reutenauer C., *Rational Series and Their Languages*. EATCS Monographs in Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988.
- [3] Bezhanishvili G., van Benthem J., *Modal Logics of Space*. [W:] M. Aiello, I. Pratt-Hartmann, J. van Benthem (eds.), *Handbook of Spatial Logics*, ss. 217–298, Springer Netherlands, 2007.
- [4] Blackburn P., de Rijke P., Venema Y., *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001.
- [5] Casacuberta F., de la Higuera C., *Computational Complexity of Problems on Probabilistic Grammars and Transducers*. [W:] A.L. Oliveira (ed.), *Grammatical Inference: Algorithms and Applications*, volume 1891, *Lecture Notes in Computer Science*, ss. 15–24, Springer Berlin Heidelberg, 2000.
- [6] Chodorow K., *MongoDB: The Definitive Guide*. O'Rely, 2013.
- [7] Czelakowski J., *Protoalgebraic Logics*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [8] Dassow J., *Grammars with Regulated Rewriting*. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 148:249–273, 2004.
- [9] Dehghan M., Ghatte M., Hashemi B., *Some Computations on Fuzzy Matrices: an Application in Fuzzy Analytical Hierarchy Process*. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 16(5):715–733, 2008.
- [10] Droste M., Gastin P., *On Aperiodic and Star-Free Formal Power Series in Partially Commuting Variables*. *Theory Comput. Syst.*, 42(4):608–631, 2008.
- [11] Fitting M., *Many-Valued Modal Logics*. *Fundamenta Informaticae*, XV:235–254, 1991.

- [12] Fitting M., *Many-Valued Modal Logics II*. Fundamenta Informaticae, XVII:55–74, 1992.
- [13] Fitting M., *Tableaus for Many-Valued Modal Logic*. Studia Logica, 55(1):63–68, 1995.
- [14] Fitting M., *Bisimulations and Boolean Vectors*. [W:] P. Balbiani, N.-Y. Suzuki, M. Zakharyashev (eds.), *Advances in Modal Logic*, ss. 97–125, King's College Publications, 2003.
- [15] Frankowski S., *General Approach to Many Valued Kripke Models*. Bulletin of the Section of Logic, 35(1):11–26, 2006.
- [16] Geman S., Johnson M., *Probabilistic Grammars and Their Applications*. [W:] *International Encyclopedia of the Social & Behavioral Sciences*, ss. 12075–12082, 2001.
- [17] Gerla B., *Many-Valued Logic and Semirings*. Neural Networks World, 5:467–480, 2003.
- [18] Gerth R., Peled D., Vardi M.Y., Wolper P., *Simple On-the-fly Automatic Verification of Linear Temporal Logic*. [W:] Protocol Specification Testing and Verification, ss. 3–18, Chapman & Hall, 1995.
- [19] Graham R.L., Knuth D.E., Patashnik O., *Matematyka konkretna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.
- [20] Grodziński E., *Filozoficzne podstawy logiki wielowartościowej*. PWN, 1989.
- [21] Gumm H.P., Schröder T., *Monoid-Labeled Transition Systems*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 4(1):185–204, 2001.
- [22] Hájek P., *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publisher, 1998.
- [23] Hopcroft J.E., Motwani R., Ullman J.D., *Wprowadzenie do teorii automatów, języków i obliczeń*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2013.
- [24] Klaška J., *History of the Number of Finite Posets*. Acta Univ.M.Bellii Math, 9:73–84, 1997.
- [25] Kofler M., *The Definitive Guide to MySQL5*. Appress, 2005.
- [26] Kuratowski K., Mostowski A., *Teoria mnogości*. PWN, 1978.
- [27] Lee E.T., Zadeh L.A., *Note on Fuzzy Languages*. Inform. Sci., 1:421–434, 1969.
- [28] Liao Ch.-J., *Matrix Representation of Belief States: an Algebraic Semantics for Belief Logics*. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 12(5):613–633, 2004.

- [29] Lipski W., *Logical Problems Related to Incomplete Information in Databases*. Technical Report 138, Laboratoire de Recherche en Informatique, 1983.
- [30] Łukasiewicz J., *O logice trójwartościowej*. Ruch Filozoficzny, 5:170–171, 1920.
- [31] Łukasiewicz J., *Selected Works*. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1970.
- [32] Łukasiewicz J., *A system of modal logic*. The Journal of Computing Systems, 1(3):111–149, 1953.
- [33] Malinowski G., *Logiki wielowartościowe*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2006.
- [34] Marciszewski W., *Logiki intensjonalne. XXXIV. Modalność*. [W:] *Logika formalna. Zarys encyklopedyczny*, ss. 311–319, PWN, 1987.
- [35] McKinsey J.C.C., Tarski A., *Some Theorems About the Sentential Calculi of Lewis and Heyting*. The Journal of Symbolic Logic, 13(1):1–25, 1948.
- [36] Mendrala D., Szeliga M., *SQL. Praktyczny kurs*. Helion, 2011.
- [37] Mordeson J.N., Malik D.S., *Fuzzy Automata and Languages: Theory and Applications*. Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [38] Morgan Ch.G., *Local and Global Operators and Many Valued Modal Logics*. Notre Dame Journal of Formal Logic, XX(2):401–411, 1979.
- [39] Morikawa O., *Some Modal Logics Based on a Three-Valued Logic*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 30(1):130–137, 1989.
- [40] Osterman P., *Many-Valued Modal Propositional Calculi*. Zeitsch. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., 34(4):334–354, 1988.
- [41] Osterman P., *Modal Logic and Incomplete Information*. Lecture Notes in Computer Science, 305(4):181–196, 1988.
- [42] Pereira F., Riley M., Sproat R., *Weighted Rational Transductions and Their Application to Human Language Processing*. [W:] *Proceedings of the Workshop on Human Language Technology, HLT '94*, ss. 262–267, Stroudsburg, PA, USA, 1994. Association for Computational Linguistics.
- [43] Pfeiffer G., *Counting Transitive Relations*. Journal of Integer Sequences, 7, 2004.
- [44] Salomaa A., *Probabilistic and Weighted Grammars*. Information and Control, 15:529–544, 1969.
- [45] Shostak A.P., *Two Decades of Fuzzy Topology, Basic Ideas, Notions and Results*. Russian Mathematical Surveys, 44(6):125–186, 1989.

- [46] Smiley T.J., *On Łukasiewicz's Ł-Modal System*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 2:149–153, 1961.
- [47] Thomason S., *Possible Worlds and Many Truth Values*. Studia Logica, 37(2):195–204, 1978.
- [48] Urquhart P., *Basic Many-Valued Logics*. [W:] F. Guenther, D. Gabbay (eds.), *Handbook of Philosophical Logic: Volume II: Extensions of Classical Logic*, ss. 1–88, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 2002.
- [49] Vardi M.Y., *Automata-Theoretic Techniques for Temporal Reasoning*. [W:] *Handbook of Modal Logic*, ss. 971–989, Elsevier, 2006.
- [50] Wajsberg M., *Aksjomatyzacja trójwartościowego rachunku zdań*. Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, 24:125–148, 1931.
- [51] Wójcicki R., *Theory of Logical Calculi. Basic Theory of Consequence Operations*. Kluwer Academic Publishers, 1988.

Od redakcji

Szymon Frankowski (ur. 10 lutego 1976 r. w Łodzi) ukończył studia filozoficzne w 2002 r. Doktoryzował się z filozofii w roku 2007 na Uniwersytecie Łódzkim. Obecnie pracuje jako adiunkt w Katedrze Logiki i Metodologii Nauk Uniwersytetu Łódzkiego. Publikuje w międzynarodowych czasopismach, takich jak *Bulletin of the Section of Logic*, *Logic and Logical Philosophy*. W obręb jego zainteresowań badawczych wchodzi niestandardowe operacje konsekwencji oraz logiki nieklasyczne (w szczególności logiki modalne i logiki wielowartościowe). Od wielu lat podejmuje próby fuzji różnych logik w celu uzyskania nowych, ciekawszych i bardziej adekwatnych konstrukcji.