

DK 304/72
25.7.

Józef Zderkiewicz

O KRZYWIŹNIE I PROMIENIU β - WYPUKŁOŚCI
W PEWNYCH KLASACH FUNKCJI HOLOMORFICZNYCH I JEDNOLISTNYCH

Praca doktorska wykonana
w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Łódzkiego.

Promotor:

Prof. dr Witold Janowski

Łódź 1972 rok

Józef Zdzienicki

W FUNKCJI KLASACH FUNKCJI HOMOMORFICZNYCH I JEDNOLISTNYCH
O KRZYWIENIE I PROMIENIU β - WYPUKŁOŚCI

Praca doktorska wykonana
w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Łódzkiego.

Promotor:

Prof. dr Witold Janowski



Rps1839

1839

Łódź 1972 rok

S p i s r z e c z y

	strona
W s t ę p	1
R o z d z i a ł I. Oszacowanie krzywizny Kr w kla- sach funkcji S_{α}^0 i $\sum_{\alpha}^0$	5
§ 1. Wprowadzenie	5
§ 2. Oszacowanie krzywizny Kr w klasie S_{α}^0 ..	7
§ 3. Oszacowanie krzywizny Kr w klasie $\sum_{\alpha}^0$	19
 R o z d z i a ł II. O promieniu β - wypukłości w pewnych klasach funkcji holomorficznych i jedno- listnych	 29
§ 1. Sformułowanie postawionego zagadnienia	29
§ 2. O promieniu β - wypukłości rodziny $\sum_{\alpha}^*$	31
 B i b l i o g r a f i a	38

W s t ę p

Wprowadźmy oznaczenia pewnych klas funkcji stosowane w pracy.

S - klasa funkcji $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, holomorficznych i jednolistnych w kole $K = \{z : |z| < 1\}$.

S^* - klasa funkcji $w = f(z) \in S$, odwzorowujących koło K na obszary gwiaździste względem punktu $w = 0$.

S_α^* , $0 \leq \alpha < 1$, - klasa funkcji $f(z) \in S^*$ spełniających warunek $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha$, dla $z \in K$.

W przypadku gdy $\alpha = 0$, $S_0^* = S^*$.

$R(M)$, $M > \frac{1}{2}$, - klasa funkcji $f(z) \in S$ i takich, że $|f'(z) - M| < M$.

V_α , $0 \leq \alpha < 1$, - klasa funkcji $f(z) \in S$ spełniających warunek $\operatorname{Re} f'(z) > \alpha$, $z \in K$.

R_m , $0 < m \leq 1$, - klasa funkcji $f(z) \in S$ i takich, że $f'(z) \in \mathcal{P}_m$, $\mathcal{P}_m$ jest rodziną funkcji postaci

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + z e^{-i\theta}}{1 - mze^{-i\theta}} d\mu(\theta), \text{ gdzie } \mu(\theta) \text{ jest niemalejącą}$$

funkcją z unormowaniem.

$$\mu(0) = \mu(0^+) = 0, \int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1.$$

Σ - klasa funkcji $F(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$,

meromorficznych i jednolistnych w obszarze $|z| > 1$.

Σ^* - klasa funkcji $w = F(z) \in \Sigma$, odwzorowujących koło $|z| > 1$ na

obszary, których dopełnienia są zbiorami gwiaździstymi względem punktu $w=0$.

$\sum_{\alpha, 0 \leq \alpha < 1}^*$ - klasa funkcji $F(z) \in \sum$ spełniających warunek

$$\operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} > \alpha, \text{ dla } |z| > 1.$$

$S^*(k), S_{\alpha}^*(k), S^0(k)$ ($k=1, 2, \dots$) - podklasy k -symetrycznych funkcji $f(z)$ odpowiednio klas S^*, S_{α}^* i S^0 , funkcje te są postaci

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk+1} z^{nk+1}.$$

$\sum(k), \sum^*(k), \sum^0(k)$, ($k=1, 2, \dots$) - podklasy k -symetrycznych funkcji $F(z)$ odpowiednio klas $\sum, \sum^*, \text{ i } \sum^0$, funkcje te są postaci $F(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{nk+1}}{z^{nk+1}}$.

A - rodzina funkcji $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, holomorficznych w kole K i odwzorowujących to koło na obszary będące k -symetrycznymi wielokątami.

B - rodzina funkcji $F(z) \in \sum^0(k)$ odwzorowujących koło $|z| > 1$ na obszary, których dopełnienia są k -symetrycznymi wielokątami.

Temat, którym zajmuje się w niniejszej pracy dotyczy dwóch zagadnień ekstremalnych w klasach funkcji holomorficznych i jednolistnych. Ze względu na odrębność zagadnień umieszczam je w dwóch niezależnych rozdziałach.

W rozdziale pierwszym zajmuje się klasycznym problemem krzywizny Kr obrazów okręgu $|z| = r$ przez funkcje $f(z)$ danej klasy. Problemem krzywizny - chodzi tu o jej dolne i górne oszacowania, zajmowano się jeszcze w początkach lat dwudziestych. Mianowicie w 1921 r.

Bieberbach [2] otrzymał oszacowania krzywizny K_r w klasie S . Oszacowania te nie były jednak ostre. Długo czyniono usilne próby polepszenia wyniku Bieberbacha lecz bez rezultatu. Lata pięćdziesiąte są w zasadzie początkiem systematycznych badań z tego zakresu w klasie S i jej podklasach. W roku 1951 Mironiszczenko [10] otrzymał ostre dolne oszacowanie krzywizny K_r w klasie S lecz tylko w pierścieniu $2 - \sqrt{3} \leq |z| < 1$. W roku 1952 Zmorowicz [14] uzyskuje ostre oszacowania krzywizny K_r w klasie funkcji $S^0(k)$, $S^0 - (2.1)$ rozdz.I i $\sum^0 - (3.1)$ rozdz.I. W tym samym roku Bazylewicz [1] znajduje ostre oszacowania krzywizny K_r w klasie S . W roku 1955 Korycki [8] rozwiązuje problem krzywizny K_{θ_0} w klasie $S(k)$. K_{θ_0} oznacza krzywiznę obrazu promienia R przez funkcję $f(z)$ danej klasy. $R = \{z: z = re^{i\theta_0}\}$, gdzie $0 < r < 1$, zaś θ_0 , $0 \leq \theta_0 < 2\pi$ jest dowolną ustaloną liczbą. Korycki [8] otrzymuje także oszacowania krzywizny K_r w klasach funkcji A i B . Ponieważ funkcje klas $S(k)$, $S(k)$ i $\sum(k)$ można aproksymować odpowiednio funkcjami rodzin A i B , więc w szczególności wyniki otrzymane wcześniej przez Zmorowicza i Bazylewicza odnośnie klas $\sum^0$, $S(k)$ i $S(k)$ przenoszą się bez zmian na klasy A i B .

Ponadto w roku 1957 Korycki [9] uzyskuje ostre oszacowanie od góry krzywizny K_r w klasie $\sum^*(k)$. W roku 1960 w pracy [7] Korycki uogólnia słuszność tego ostatniego wyniku na klasę $\sum(k)$, oraz uzupełnia wspomniany tu już wynik Mironiszczenko na całe koło K . W 1965 r. Zmorowicz [16] uzyskuje ostre oszacowanie krzywizny K_r od góry w klasie funkcji $S_\alpha^*(k)$.

W tym samym roku Erazochi [4] rozwiązuje problem krzywizn K_r i K_{θ_0} w klasie funkcji V_α . Wiele innych matematyków zajmowało

się i aktualnie zajmuje tym zagadnieniem. W roku 1970 W. Janowski [6] otrzymuje dokładne oszacowania krzywizn K_r i K_{θ_0} w klasach $R(M)$ i R_m .

W rozdziale pierwszym niniejszej pracy otrzymuję dokładne oszacowania z góry i z dołu krzywizny K_r w klasie funkcji α -wypukłych S_α^0 , (2.3) rozdz. I. Dolne oszacowanie krzywizny K_r w tej klasie uzyskał na innej drodze w 1970 r. Eenigenburg [3]. Ponadto rozwiązuję problem krzywizny K_r w klasie funkcji $\sum_\alpha^0$, (3.3) rozdz. I. W rozważaniach stosuję metodę Zmorowicza [14]. Przedmiotem badań drugiego rozdziału jest promień β -wypukłości ((1.1) rozdz. II) klasy $\sum_\alpha^*$. Problem wyznaczenia promienia wypukłości rodziny S został rozwiązany przez Nevanlinnę [11] w 1919 r. Udowodnił on mianowicie, że r.o. S - promień wypukłości rodziny S wyraża się wzorem $r.o.S = 2 - \sqrt{3}$.

Odpowiednia funkcja ekstremalna należy do rodziny S^* , więc $r.o.S^* = 2 - \sqrt{3}$.

Analogiczny problem dla rodziny $\sum$ rozwiązał Gołuzin [5] i otrzymał, że $r.o.\sum = 1,78 \dots$. Odpowiednia funkcja ekstremalna nie należy do rodziny $\sum^*$. Dla tej klasy funkcji zagadnienie rozwiązał Robertson [13] i otrzymał, że $r.o.\sum^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Wyznaczenie $r.o.\sum_\alpha^*$ zapoczątkował Robertson ($\alpha = \frac{1}{2}$) [12], a rozwiązał kompletnie to zagadnienie dla każdego α , $0 \leq \alpha < 1$ Zmorowicz [15], który wyznaczył również $r.o.S_\alpha^*$ dla każdego α , $0 \leq \alpha < 1$, [15].

W tej części pracy w oparciu o wyniki pracy Zmorowicza [15], wyznaczam promień β -wypukłości rodziny $\sum_\alpha^*$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, gdzie α_0 jest pewną liczbą z przedziału $(0,1)$.

R o z d z i a ł I

Oszacowanie krzywizny Kr w klasach funkcji S_α^0 i $\sum \alpha$

§ 1. Wprowadzenie

Wiele ważnych podklas funkcji klasy S można określić za pomocą wzorów strukturalnych. Są one postaci

$$f(z) = \Phi(z, \mu(\theta)) , \quad (1.1)$$

gdzie Φ jest pewną funkcją dwóch zmiennych, $\mu(\theta) \in M$, M -rodzina funkcji niemalejących w przedziale $\langle -\bar{1}, \bar{1} \rangle$ z unormowaniem $\mu(-\bar{1}) = \mu(-\bar{1} + 0)$, $\mu(\bar{1}) = 1$. (1.2)

Opierając się na tym przedstawieniu można dowolny rzeczywisty funkcyjonał $J(f(z))$, ($z \in K$, $f \in T$, T - ustalona podklasa rodziny S funkcji (1.1)) zastąpić pewnym funkcyjonałem rzeczywistym:

$$J_1(\mu(\theta)) , \quad (1.3)$$

określonym na rodzinie M . Dzięki temu problem wariacyjny w klasie (1.1) sprowadza się do pewnego problemu wariacyjnego w rodzinie M . W rodzinie M istnieją funkcje nieciągłe, wobec czego klasyczny rachunek wariacyjny nie stanowi na ogół właściwej metody badań zagadnień ekstremalnych w klasach funkcji przedstawianych wzorami strukturalnymi

Do dość szerokiej klasy funkcyjonałów (1.3) stosuje się metodę wprowadzoną przez Zmorowicza [14] . I tak, niech funkcyjonał $J(\mu)$ ma następujące własności:

$$J(\mu + \varepsilon \eta) = J(\mu) + \varepsilon A(\mu, \eta) + \varepsilon^2 B(\mu, \eta) : \varepsilon \quad (1.4)$$

dla dowolnej funkcji $\eta(\theta)$ o wahanii ograniczonym w przedziale

$$\langle -\bar{1}, \bar{1} \rangle , \quad \bar{1} \\ A(\mu, \eta) = \int_{-\bar{1}}^{\bar{1}} F_\mu(\theta) d\eta(\theta) , \quad \eta = \eta(\theta) . \quad (1.5)$$

gdzie $F_\mu(\theta)$ jest funkcją rzeczywistą zmiennej θ w przedziale

$\langle -\bar{\pi}, \bar{\pi} \rangle$ zależną prócz tego od wyboru funkcji $\mu = \mu(\theta)$ rodziny M lecz ta sama dla dwóch funkcji równoważnych rodziny M .

Jeżeli $\text{Var}_{-\bar{\pi} < \theta < \bar{\pi}} \eta(\theta) < U$ i $|\varepsilon| < V$,

gdzie U i V są dostatecznie małymi liczbami dodatnimi, to

$|B(\mu, \eta; \varepsilon)| < B_0$, B_0 jest absolutną stałą dodatnią.

Niech $\Delta J(\mu) = J(\mu + \varepsilon \eta) - J(\mu)$

oraz $\delta J(\mu) = \varepsilon A(\mu, \eta)$. (1.6)

Z (1.4) wynika, że jeżeli $A(\mu, \eta) \neq 0$, to

$\text{sqn } \Delta J(\mu) = \text{sqn } \delta J(\mu)$ dla ε o dostatecznie małym module.

Jeżeli zatem $\mu_0(\theta)$ jest funkcją ekstremalną, tzn. taką, że

$\Delta J(\mu_0) \geq 0$ lub $\Delta J(\mu_0) \leq 0$ to $A(\mu_0, \eta) = 0$. $J(\mu)$ nazywamy warjacją funkcyjonału $J(\mu)$.

Następnie w cytowanej pracy [14] Zmorowicz formułuje i udowadnia dwa następujące twierdzenia:

Twierdzenie (A). Jeżeli dla każdej funkcji $\mu \in M$ funkcja $F_\mu(\theta)$ jest ciągła w przedziale $\langle -\bar{\pi}, \bar{\pi} \rangle$ i ściśle monotoniczna w dostatecznie małym lewo lub prawo-stronnym otoczeniu każdego punktu θ , $\theta \in \langle -\bar{\pi}, \bar{\pi} \rangle$, to funkcja ekstremalna $\mu_0(\theta)$ względem funkcyjonału $J(\mu)$ jest nieciągła w każdym punkcie jej wzrostu.

Punkt θ_1 nazywamy punktem wzrostu funkcji $\mu_0(\theta)$, jeśli dla dowolnego $\delta > 0$ istnieje takie θ_2 , gdzie $-\bar{\pi} \leq \theta_1 < \theta_2 < \bar{\pi}$, $0 < \theta_2 - \theta_1 < \delta$, że $\mu_0(\theta_1) < \mu_0(\theta_2)$.

Twierdzenie (B). Jeżeli θ' jest punktem nieciągłości funkcji ekstremalnej $\mu_0(\theta)$ względem funkcyjonału $J(\mu)$, to $F_{\mu_0}(\theta)$ osiąga ekstremum (absolutne) w punkcie θ' . Ponadto, jeżeli θ'' ,

$\theta' \neq \theta$, są punktami nieciągłości funkcji $\mu_0(\theta)$, to $F_{\mu_0}(\theta') = F_{\mu_0}(\theta'')$.

Wniosek. Funkcja ekstremalna $\mu_0(\theta)$ jest funkcją schodkową o liczbie skoków nie większej niż liczba punktów ekstremalnych funkcji $F_{\mu}(\theta)$, $\theta \in (-\bar{J}, \bar{J})$, dla każdego $\mu \in M$.

W powyższym przez ekstremum rozumie się stałe maksimum albo stałe minimum.

§ 2. Oszacowanie krzywizny Kr w klasie S_{α}^0

Niech S^0 oznacza podklasę S funkcji wypukłych t.j. odwzorowujących koło K na obszary wypukłe. Wiadomo, że $f(z) \in S^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(z) = \int_0^z e^{-2 \int_{-\pi}^{\pi} \log(e^{it} - z) d\mu(t)} dz \quad (2.1)$$

dla pewnej funkcji $\mu(t) \in M$.

Dla dowolnego ustalonego α , $0 \leq \alpha < 1$, oznaczmy przez S_{α}^0 podklasę rodziny S utworzoną z funkcji $f(z)$ takich, że

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \quad \text{dla każdego } z \in K.$$

Ponieważ $f(z) \in S^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Re}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right) > 0$

dla każdego $z \in K$, więc $S_{\alpha}^0 \subset S^0$ dla każdego $\alpha \in (0, 1)$.

Wreszcie, niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną funkcji $p(z)$ holomorficznych w kole K i takich, że

$$p(0) = 1 \text{ oraz } \operatorname{Re} p(z) > 0 \text{ dla } z \in K \quad (2.2)$$

Łatwo stwierdzić, że $f \in S_{\alpha}^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 + \frac{z f''(z)}{(1-\alpha) f'(z)} = p(z)$$

dla pewnej funkcji $p(z) \in \mathcal{P}$.

A więc

$$1 + \frac{z f''(z)}{(1-\alpha) f'(z)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + z e^{-it}}{1 - z e^{-it}} d\mu(t), \quad \mu(t) \in M.$$

Zatem

$$\frac{z f''(z)}{f'(z)} = 2(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z e^{-it}}{1 - z e^{-it}} d\mu(t).$$

Stąd

$$f(z) = \int_0^z e^{-2(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log(e^{it} - z) d\mu(t)} dz \quad (2.3)$$

Niech $z, z \neq 0$, będzie dowolnym ustalonym punktem koła K .

Przyjmijmy $z = r e^{i\vartheta}$, $r > 0$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$ i oznaczmy przez $K_r(\vartheta)$ krzywiznę obrazu okręgu $|z| = r$ w punkcie $w = f(r e^{i\vartheta})$, gdzie $f(z) \in S_{\alpha}^0$. Wiadomo, że

$$K_r(\vartheta) = \frac{\operatorname{Re}\left(1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right)}{|z f'(z)|}, \quad z = r e^{i\vartheta}$$

Nie ograniczając ogólności rozważań można przyjąć $\vartheta = 0$, bowiem gdy $f(z) \in S_{\alpha}^0$, to również $e^{i\vartheta} f(e^{-i\vartheta} z) \in S_{\alpha}^0$ dla dowolnego rzeczywistego ϑ . Oznaczając więc $K_r(\vartheta)$ dla każdego ϑ przez K_r , mamy

$$K_r = \frac{\operatorname{Re}\left(1 + \frac{r f''(r)}{f'(r)}\right)}{r |f'(r)|} \quad (2.4)$$

Na mocy wzoru (2.3) otrzymujemy

$$|f'(r)| = e^{-(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log(1-2r \cos t + r^2) d\mu(t)}$$

oraz

$$1 + \operatorname{Re} \frac{r f''(r)}{f'(r)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-2r \alpha \cos t + (2\alpha-1)r^2}{1-2r \cos t + r^2} d\mu(t). \quad (2.5)$$

Stąd wobec (2.4) i (2.5) dostaniemy

$$Kr = \frac{1}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P(t)}{F(t)} d\mu(t) \cdot e^{(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log F(t) d\mu(t)}, \quad (2.6)$$

gdzie

$$P(t) = 1 - 2r \alpha \cos t + (2\alpha - 1)r^2,$$

$$F(t) = 1 - 2r \cos t + r^2. \quad (2.7)$$

Dla dowolnych ustalonych α , $0 \leq \alpha < 1$ oraz r , $0 < r < 1$ rozważajmy funkcjonaz $J(\mu) = r Kr$ określony na rodzinie M , t.j. funkcjonaz

$$J(\mu) = e^{(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log F(t) d\mu(t)} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P(t)}{F(t)} d\mu(t). \quad (2.8)$$

Niech $\eta(t)$ będzie funkcja taka, że $\mu(t) + \varepsilon \eta(t) \in M$ dla ε dostatecznie małym module.

Wówczas na mocy (1.4) i (1.5) po uwzględnieniu równości

$$e^{(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log F(t) d\eta(t)} = 1 + \varepsilon (1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log F(t) d\eta(t) + o(\varepsilon^2)$$

otrzymamy

$$A(\mu, \eta) = e^{(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log F(t) d\eta(t)} \int_{-\pi}^{\pi} \left[(1-\alpha) \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{P(t)}{F(t)} d\mu(t) \right) \log F(t) + \frac{P(t)}{F(t)} \right] d\eta(t)$$

Stąd

$$F_{\mu}(t) = e^{(1-\alpha) \int_{-\bar{J}}^{\bar{J}} \log F(t) d\eta(t)} \left[(1-\alpha) \left(\int_{-\bar{J}}^{\bar{J}} \frac{P(t)}{F(t)} d\mu(t) \right) \log F(t) + \frac{P(t)}{F(t)} \right],$$

gdzie $P(t)$ i $F(t)$ określone są przez (2.7).

Aby wyznaczyć ekstrema funkcyjonału $J(\mu)$ należy przede wszystkim, opierając się na wniosku z twierdzenia B, znaleźć punkty w których funkcja $F_{\mu}(t)$ osiąga ekstrema w przedziale $(-\bar{J}, \bar{J})$.

Lemat 1. Funkcja $F_{\mu}(t)$, $-\bar{J} < t \leq \bar{J}$, osiąga minimum w punktach $t_1 = 0$, $t_2 = -0$, gdzie ± 0 są pierwiastkami równania $A_{\mu} = N(t)$, a maksimum - w punktach $t_3 = 0$ i $t_4 = \bar{J}$.

Dowód. Różniczkując funkcję $F_{\mu}(t)$ względem t otrzymamy

$$F'_{\mu}(t) = \frac{2r(1-\alpha)\sin t}{F(t)} \left(\exp \left[(1-\alpha) \int_{-\bar{J}}^{\bar{J}} \log F(t) d\mu(t) \right] \right) [A_{\mu} - N(t)], \quad (2.9)$$

gdzie

$$A_{\mu} = \int_{-\bar{J}}^{\bar{J}} \frac{P(t)}{F(t)} d\mu(t), \quad N(t) = \frac{1-r^2}{F(t)}.$$

Funkcja $F_{\mu}(t)$ osiąga ekstremum w punkcie $t = t^*$, gdzie $t^* = 0$, $t^* = \bar{J}$ lub t^* jest pierwiastkiem równania

$$A_{\mu} - N(t) = 0 \quad (2.10)$$

o niewiadomej t , $-\bar{J} < t \leq \bar{J}$.

$$\text{Niech } f(x) = \frac{P(\arccos x)}{F(\arccos x)}, \quad 1 \leq x \leq 1.$$

Łatwo sprawdzić, że $f(x)$ jest funkcją rosnącą, wobec czego

$$f(-1) \leq A_{\mu} \leq f(1),$$

więc

$$A_{\mu} - N(0) \leq f(1) - N(0)$$

Ponieważ

$$f(1) - N(0) = - \frac{2\alpha r}{1-r} < 0,$$

Zatem

$$A_\mu - N(0) < 0.$$

Wobec (2.9) otrzymujemy stąd, że $F_\mu(t)$ osiąga w punkcie $t^* = 0$ maksimum.

$$\text{Niech } t^* = \bar{t}$$

więc

$$A_\mu - N(\bar{t}) \geq f(1) - N(\bar{t}) = \frac{2r\alpha}{1+r} > 0.$$

Zatem $F_\mu(t)$ osiąga w punkcie $t^* = \bar{t}$ maksimum.

Równanie (2.10) ma dokładnie dwa pierwiastki w przedziale $(-\bar{t}, \bar{t})$. Istotnie, stwierdzamy najpierw, że funkcja $N(t)$ jest ściśle malejąca w przedziale $(0, \bar{t})$, a następnie, że

$$\min_{t \in (0, \bar{t})} N(t) = N(\bar{t}) \leq A_\mu \leq \max_{t \in (0, \bar{t})} N(t) = N(0)$$

Zatem istnieje dokładnie jeden punkt θ , $\theta \in (0, \bar{t})$ taki, że

$N(\theta) = A_\mu$ i w konsekwencji $A_\mu - N(t) < 0$ dla $t < \theta$ oraz

$A_\mu - N(t) > 0$ dla $t > \theta$, $t \in (0, \bar{t})$. Wobec (2.9) otrzymujemy zatem, że funkcja $F_\mu(t)$ osiąga w punkcie $t = \theta$ minimum, więc

$F_\mu(t)$ osiąga w punkcie $t = -\theta$ również minimum.

Tym samym lemat 1 został udowodniony.

W myśl lematu 1 funkcja $F_\mu(t)$ osiąga w dwóch punktach maksimum, więc na mocy wniosku z twierdzenia B, funkcja $\mu_0(t)$ dla której funkcyjonał $J(\mu)$ osiąga maximum jest funkcją schodkową o co najwyżej dwóch skokach.

Analogicznie, funkcja $\mu_0(t)$ odpowiadająca minimum $J(\mu)$ ma co najwyżej dwa skoki.

Zajmiemy się obecnie wyznaczeniem maksimum funkcjonu $J(\mu)$.

Zauważmy najpierw, że funkcja $\mu_0(t)$ jest postaci

$$\mu_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } -\bar{t} \leq t < 0 \\ \lambda & \text{" } 0 \leq t < \bar{t} \\ 1 & \text{" } t = \bar{t} \end{cases}, \quad (2.11)$$

bowiem ma ona co najwyżej dwa skoki.

Następnie, wobec (2.11), (2.7) i (2.8) mieć będziemy

$$\begin{aligned} J(\mu_0) &= J(r, \alpha, \lambda) = \\ &= \left[\frac{4(1-\alpha)r}{1-r^2} + \frac{1+2\alpha r+(2\alpha-1)r^2}{(1+r)^2} \right] \left(\frac{1-r}{1+r} \right)^{2(1-\alpha)\lambda} \cdot (1+r)^{2(1-\alpha)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$0 < r < 1, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Lemat 2. Niech

$$A = A(r, \alpha) = \frac{4(1-\alpha)r}{1-r} \log \frac{1-r}{1+r} \quad (2.13)$$

$$B = B(r, \alpha) = \frac{2r}{1-r} + [1+(2\alpha-1)r] \log \frac{1-r}{1+r}$$

oraz

$$\begin{aligned} \varphi(r, \alpha) &= - \frac{B(r, \alpha)}{A(r, \alpha)} = \\ &= \frac{-1}{4(1-\alpha)} \left[\frac{1}{r} + 2\alpha + (2\alpha-1)r \right] \frac{1-r}{1+r} - \frac{1}{2(1-\alpha) \log \frac{1-r}{1+r}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\text{dla } 0 < r < 1, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Jeżeli $\varphi(r, \alpha) \geq 1$, to

$$\max J(r, \alpha, \lambda) = J(r, \alpha, 1),$$

gdy zaś $\varphi(r, \alpha) < 1$, wówczas

$$\max J(r, \alpha, \lambda) = J(r, \alpha, \varphi(r, \alpha)).$$

Dowód. Różniczkując funkcję $J(r, \alpha, \lambda)$ względem λ otrzymamy

$$J'_\lambda(r, \alpha, \lambda) = 2(1-\alpha)(1+r)^{2(1-\alpha)+1} \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{2(1-\alpha)\lambda} (A\lambda + B).$$

Z (2.17) wynika bezpośrednio, że $A(r, \alpha) < 0$ dla każdego $0 < r < 1$, $0 \leq \alpha < 1$.

Mamy następnie $B(r, \alpha) > 0$ dla każdego $0 < r < 1$, $0 \leq \alpha < 1$.

Istotnie, wobec

$$B'_r(r, \alpha) = \frac{2r}{1-r} \cdot \frac{3-2\alpha + (2\alpha-1)r}{1-r^2} + (2\alpha-1) \log \frac{1-r}{1+r}$$

oraz

$$B''_{rr}(r, \alpha) = \frac{8(1-\alpha + \alpha r + r^2)}{(1-r)(1-r^2)^2} > 0$$

i z uwagi na równość

$$B'_r(0, \alpha) = 0$$

otrzymujemy, że $B(r, \alpha)$ jest funkcją rosnącą zmiennej r , zatem

$B(r, \alpha) > 0$, bowiem $B(0, \alpha) = 0$.

Z powyższego wynika, że jeżeli $\varphi(r, \alpha) \geq 1$, to

$J'_\lambda(r, \alpha, \lambda) \geq 0$ dla $0 < r < 1$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$, gdy

zaś $\varphi(r, \alpha) < 1$, wówczas $J'_\lambda(r, \alpha, \lambda) \geq 0$ dla

$0 < r < 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 < \lambda \leq \varphi(r, \alpha)$ oraz

$J'_\lambda(r, \alpha, \lambda) \leq 0$ dla $0 < r < 1$, $0 \leq \alpha < 1$, $\varphi(r, \alpha) \leq \lambda \leq 1$.

Tym samym lemat 2 został udowodniony.

Lemat 3. Jeżeli $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, to $0 < \varphi(r, \alpha) < \frac{1}{2}$ dla każdego r , $0 < r < 1$.

Dowód. Przyjmijmy

$$t = \log \frac{1+r}{1-r}, \quad 0 < r < 1.$$

znając stąd r i podstawiając do (2.14) otrzymujemy

$$\varphi(r, \alpha) = \psi(t, \alpha) - \frac{\frac{1}{2t} - \frac{1}{e^{2t}-1} - \frac{\alpha}{e^t+1}}{1-\alpha},$$

$$0 \leq \alpha < 1, \quad 0 < t < \infty.$$

okażemy, że $\psi(t, \alpha)$ jest funkcją ściśle malejącą zmiennej t ,
 $0 < t < \infty$ oraz, że

$$0 < \psi(t, \alpha) < \frac{1}{2} \quad (2.15)$$

Tym samym udowodnimy tezę lematu 3.

Lech

$$u(t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{e^t + e^{-t} - 2} \right), \quad 0 < t < \infty.$$

Różniczkując funkcję $\psi(t, \alpha)$ względem t otrzymamy

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\psi'_t(t, \alpha) &= \frac{-1}{2t^2} + \frac{2e^{2t}}{(e^{2t}-1)^2} + \frac{\alpha e^t}{(e^t+1)^2} \leq \\ &\leq \frac{-1}{2t^2} + \frac{2e^{2t}}{(e^{2t}-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{e^t}{(e^t+1)^2} = u(t) \end{aligned}$$

amy następnie

$$u(t) = \frac{V(t)}{2t^2(e^t + e^{-t} - 2)},$$

gdzie $V(t) = t^2 + 2 - e^t - e^{-t}$.

Ponieważ $V'(t) = 2t - e^t + e^{-t}$ oraz $V''(t) = 2 - e^t - e^{-t} < 0$,

atem wobec $V'(0) = 0$ i $V(0) = 0$ wnioskujemy,

że $V(t) < 0$, a więc $u(t) < 0$. W takim razie $\psi(t, \alpha)$ jest funkcją ściśle malejącą zmiennej t .

Równość (2.15) wynika z faktu, że

$$\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t, \alpha) = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t, \alpha) = 0.$$

Lemat 4. Niech

$$\alpha(r) = \frac{1+r}{2r} - \frac{1}{(1+r)\log \frac{1+r}{1-r}}, \quad 0 < r < 1, \quad (2.16)$$

oraz $\varphi(r, \alpha)$ będzie określone wzorem (2.14).

Jeżeli $\frac{1}{2} < \alpha < \alpha(r)$, to $0 < \varphi(r, \alpha) < 1$,

jeżeli zaś $\alpha(r) \leq \alpha < 1$, wówczas $\varphi(r, \alpha) \geq 1$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że $\varphi(r, \alpha)$ jest funkcją rosnącą zmiennej α , $0 \leq \alpha < 1$.

Przy czym

$$1^\circ \quad 0 < \varphi(r, 0) < \frac{1}{2}$$

$$2^\circ \quad \varphi(r, 1) = \infty.$$

Zatem istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $\alpha_0 = \alpha_0(r)$ równania $\varphi(r, \alpha) = 1$ o niewiadomej α , przy czym $\alpha_0 = \alpha(r)$, gdzie $\alpha(r)$ jest określone wzorem (2.24).

Z lematu 3 wynika, że $\alpha(r) > \frac{1}{2}$.

Ponieważ $\varphi(r, \alpha(r)) = 1$

więc

$$\varphi(r, \alpha) < 1 \quad \text{gdy} \quad \frac{1}{2} < \alpha < \alpha(r)$$

oraz

$$\varphi(r, \alpha) \geq 1 \quad \text{gdy} \quad \alpha(r) \leq \alpha < 1.$$

Co kończy dowód lematu 4.

Jako wniosek z lematów 2, 3 i 4 mamy

Lemat 5. Niech $\varphi(r, \alpha)$, $J(r, \alpha, \lambda)$ i $\alpha(r)$ będą określone wzorami (2.14) (2.12) i (2.16).

Jeżeli $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, to

$$\max_{0 \leq \lambda \leq 1} J(r, \alpha, \lambda) = J(r, \alpha, \varphi(r, \alpha)),$$

gdy $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, wówczas

$$\max_{0 \leq \lambda \leq 1} J(r, \alpha, \lambda) = \begin{cases} J(r, \alpha, \varphi(r, \alpha)), & \text{o ile } \frac{1}{2} < \alpha < \alpha(r) \\ J(r, \alpha, 1) & , \text{ o ile } \alpha(r) \leq \alpha < 1. \end{cases}$$

Przy tym, wobec (2.12) i (2.14) jest

$$J(r, \alpha, \varphi(r, \alpha)) = \frac{2r}{(1-r^2)^\alpha \log \frac{1+r}{1-r}} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{\left[\frac{1+(1-2\alpha)r^2}{2r} - \frac{1}{\log \frac{1+r}{1-r}} \right]}$$

$$J(r, \alpha, 1) = \frac{1 - (2\alpha - 1)r}{(1-r)^{2\alpha - 1}}.$$

Twierdzenie 1. Niech $\varphi(r, \alpha)$ i $\alpha(r)$ będą określone odpowiednio wzorami (2.14) i (2.16) oraz S_α^0 będzie rodziną funkcji $f(z)$ postaci (2.3). Niech ponadto Kr oznacza kres górny krzywizny obrazu okręgu $|z| = r$, $0 < r < 1$, w odwzorowaniu $w = f(z)$, $f(z) \in S_\alpha^0$.

Jeżeli $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$, to

$$Kr \leq \frac{2}{(1-r^2)^\alpha \log \frac{1+r}{1-r}} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{\left[\frac{1+(1-2\alpha)r^2}{2r} - \frac{1}{\log \frac{1+r}{1-r}} \right]} \quad (2.17)$$

Jeśli zaś $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, wówczas

$$Kr \leq \begin{cases} \frac{2}{(1-r^2)^\alpha \log \frac{1+r}{1-r}} \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{\left[\frac{1+(1-2\alpha)r^2}{2r} - \frac{1}{\log \frac{1+r}{1-r}} \right]}, & \text{gdy } \frac{1}{2} < \alpha < \alpha(r) \\ \frac{1 - (2\alpha - 1)r}{r(1-r)^{2\alpha - 1}}, & \text{gdy } \alpha(r) \leq \alpha < 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Oszacowania (2.17) i (2.18) są ostre.

Znak równości w (2.17) i (2.18) ma miejsce w punkcie $z = r e^{i\vartheta}$,
 $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, odpowiednio dla funkcji

$$f^*(z) = e^{i\vartheta} f_1(e^{-i\vartheta} z), \text{ jeżeli } 0 \leq \alpha < \alpha(r), \quad (2.19)$$

$$f^{**}(z) = e^{i\vartheta} f_2(e^{-i\vartheta} z), \text{ jeżeli } \alpha(r) \leq \alpha < 1, \quad (2.20)$$

gdzie

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{d\lambda}{(1-\lambda)^{2(1-\alpha)\lambda} (1+\lambda)^{2(1-\alpha)(1-\lambda)}}, \lambda = \varphi(r, \alpha)$$

oraz

$$f_2(z) = \frac{1 - (1-z)^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}.$$

Dowód. Nierówności (2.17) i (2.18) wynikają bezpośrednio z (2.6), (2.8), (2.12) i lematu 5.

Na mocy wzorów (2.2), (2.11), (2.12) oraz lematów 2, 3, 4 otrzymujemy, że funkcje ekstremalne w oszacowaniach (2.17) i (2.18) są odpowiednio postaci (2.19) i (2.20). Co kończy dowód twierdzenia 1.

Minimum funkcyjonału $J(\mu)$ określonego wzorem (2.8) wyznaczymy analogicznie jak maksimum tego funkcyjonału. Wobec lematu 1 i wniosku z twierdzenia B funkcja $\mu_0(t)$ dla której funkcyjonał $J(\mu)$ osiąga minimum jest postaci

$$\mu_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } -\pi \leq t < -\theta \\ \lambda & \text{gdy } -\theta \leq t < \theta \\ 1 & \text{gdy } \theta \leq t \leq \pi \end{cases} \quad (3.21)$$

Lemat 6. Niech $0 < r < 1$, $0 \leq \alpha < 1$, wówczas

$$\min J(\mu) = J(\mu_0) = (1-r^2)^{1-\alpha}. \quad (2.22)$$

Dowód. Wobec (2.21), (2.7) i (2.8) otrzymujemy

$$J(\mu_0) = \frac{P(\theta)}{[F(\theta)]^\alpha}, \quad (2.23)$$

gdzie θ jest pierwiastkiem równania (2.10), dla

$\mu(t) = \mu_0(t)$. Wobec (2.7) i (2.21) z równania (2.10) otrzymujemy łatwo $\theta = \arccos r$, a następnie wzór (2.22).

Twierdzenie 2. Niech S_α^0 będzie rodziną funkcji postaci (2.3) i niech Kr oznacza kres dolny krzywizny obrazu okręgu $|z| = r$, w odwzorowaniu $w = f(z)$, $f(z) \in S_\alpha^0$, wówczas

$$\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r} \leq Kr, \quad \text{gdzie } 0 < r < 1, \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (2.24)$$

Oszacowanie (2.24) jest ostre. Równość w (2.24) zachodzi w punkcie $z = r e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ dla funkcji

$$f^*(z) = e^{i\vartheta} f(ze^{-i\vartheta}), \quad (2.25)$$

gdzie

$$f(z) = \int_0^z \frac{dz}{(1-ze^{i\theta})^{2(1-\alpha)\lambda} (1-ze^{-i\theta})^{2(1-\alpha)(1-\lambda)}},$$

$$0 \leq \lambda \leq 1, \quad \theta = \arccos r.$$

Dowód. Wobec (2.6), (2.8) i lematu 6 natychmiast dostajemy nierówność (2.24). Z (2.21), (2.22), (2.23) oraz (2.3) wynika, że funkcja ekstremalna jest postaci (2.25).

Tym samym twierdzenie 2 zostało udowodnione.

§ 3. Oszacowanie krzywizny Kr w klasie $\sum_{\alpha}^c$

Niech $\sum$ oznacza klasę funkcji $\Phi(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$

$|z| > 1$, holomorficznych i jednolistnych.

Zaś $\sum^c$ oznaczmy podklasę rodziny $\sum$ utworzoną z funkcji wypukłych $\Phi(z)$ (t.zn. odwzorowujących koło $|z| > 1$ na obszary, których dopełnienia są zbiorami wypukłymi), tj. spełniających warunek

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{z \Phi''(z)}{\Phi'(z)} \right) > 0, \quad |z| > 1.$$

Niech $\Phi(z)$ będzie dowolną funkcją klasy $\sum^c$ i z_0 dowolnym ustalonym punktem koła $|z| > 1$. Wiadomo [14], że ma miejsce następujący wzór strukturalny

$$\Phi(z) = w_0 + \int_{z_0}^z e^{2 \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(1 - \frac{e^{i\theta}}{3} \right) d\mu(\theta)} dz, \quad (3.1)$$

gdzie $\mu(\theta)$ jest niemalejącą funkcją w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$ z unormowaniem

$$\mu(-\pi) = \mu(-\pi + 0), \quad \mu(\pi) = 1, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} d\mu(\theta) = 0. \quad (3.2)$$

Rodzinę wszystkich funkcji $\mu(\theta)$ spełniających warunki (3.2) oznaczmy będziemy M^* , oczywiście $M^* \subset M - M$ rodzina funkcji $\mu(\theta)$ określona w (1.2).

Przez $\sum_{\alpha}^c$, $0 \leq \alpha < 1$ oznaczmy podklasę funkcji $\Phi(z)$ rodziny $\sum^c$, spełniających warunek

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{z \Phi''(z)}{\Phi'(z)} \right) > \alpha, \quad |z| > 1.$$

Podobnie jak dla funkcji klasy S_{α}^0 otrzymujemy wzór strukturalny

ralny w rodzinie $\sum_{\alpha}^0$, analogiczny do wzoru (3.1).

Jest on postaci

$$\Phi(z) = w_0 + \int_{z_0}^z e^{2(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log(1 - \frac{e^{i\theta}}{z}) d\mu(\theta)} dz, \quad (3.3)$$

gdzie $\mu(\theta) \in M$.

Niech z , $|z| > 1$, będzie dowolnym ustalonym punktem. Przyjmij-

my $z = r e^{i\vartheta}$, $r > 1$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ i oznaczmy przez $Kr(\vartheta)$

krzywiznę obrazu okręgu $|z|=r$ w punkcie $w = \Phi(re^{i\vartheta})$,

gdzie $\Phi(z) \in \sum_{\alpha}^0$.

$$Kr(\vartheta) = \frac{\operatorname{Re}(1 + \frac{z \Phi'(z)}{\Phi(z)})}{|z \Phi'(z)|}, \quad z = r e^{i\vartheta} \quad (3.4)$$

Nie ograniczając ogólności rozważań można przyjąć $\vartheta = 0$, bo

wraz z funkcją $\Phi(z) \in \sum_{\alpha}^0$, również funkcja $e^{i\delta} \Phi(e^{-i\delta} z) \in \sum_{\alpha}^0$,

δ jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Oznaczając więc $Kr(0) = Kr$, na mocy wzorów (3.3) i (3.4) mamy

$$Kr = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{P}{F} d\mu}{re^{(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log F d\mu}}, \quad (3.5)$$

gdzie $P = P(\theta) = 1 - 2\alpha R \cos \theta - (2\alpha - 1)R^2$,

$$F = F(\theta) = 1 - 2R \cos \theta + R^2, \quad (3.6)$$

$$R = \frac{1}{r}, \quad \mu = \mu(\theta)$$

Rozważmy funkcjonal $J(\mu)$

$$J(\mu) = r Kr = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{P}{F} d\mu}{\exp \left[(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log F d\mu \right]} \quad (3.7)$$

gdzie μ przebiega rodzinę M^* , $r, r > 1$ i α , $0 \leq \alpha < 1$ są dowolnymi ustalonymi liczbami.

Z definicji rodziny M^* wynika bezpośrednio, że zagadnienie poszukiwania ekstremum funkcyjonału $J(\mu)$ w rodzinie M^* jest równoważne zagadnieniu o wyznaczaniu ekstremum tego funkcyjonału w rodzinie M przy warunkach pobocznych:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \, d\mu = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \, d\mu = 0. \quad (3.8)$$

Przyjmijmy

$$\tilde{J}(\mu) = J(\mu) + C_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \, d\mu + C_2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin \theta \, d\mu, \quad (3.9)$$

gdzie C_1, C_2 są dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Aby wyznaczyć ekstremum funkcyjonału $\tilde{J}(\mu)$ zastosujemy metodę przedstawioną w § 1 pracy.

Na mocy (1.4), (1.5), (1.6) i (3.7) znajdziemy wariancję $\delta \tilde{J}(\mu)$ funkcyjonału (3.9).

$$\delta \tilde{J}(\mu) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ C_{\mu} \left[\frac{P}{F} + (1-\alpha) A_{\mu} \log \frac{1}{F} \right] + C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta \right\} d\eta \quad (3.10)$$

Wobec (3.10), (1.5) i (1.6)

$$F_{\mu}(\theta) = C_{\mu} \left[\frac{P}{F} + (1-\alpha) A_{\mu} \log \frac{1}{F} \right] + C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta, \quad (3.11)$$

$$C_{\mu} = e^{(1-\alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{F} \, d\mu} > 0, \quad A_{\mu} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P}{F} \, d\mu > 0$$

Aby znaleźć ekstremum funkcyjonału $\tilde{J}(\mu)$ należy wobec wniosku z twierdzenia B znaleźć punkty, w których funkcja $F_{\mu}(\theta)$ osiąga ekstrema w przedziale $(-\pi, \pi)$. Wykażemy, że funkcja $F_{\mu}(\theta)$ ma ekstrema najwyżej w czterech punktach przedziału $(-\pi, \pi)$.

Lemat 7. Niech

$$p(\theta) = \frac{1}{F^2} + \frac{A}{F} - C - D \operatorname{otg} \theta, \quad (3.12)$$

gdzie C, D są dowolne liczby rzeczywiste, A jest dowolną liczbą dodatnią, funkcja $F = F(\theta)$ jest określona wzorem (3.6). Wówczas równanie

$$p(\theta) = 0 \quad (3.13)$$

na najwyżej trzy pierwiastki w przedziale $(0, \bar{\eta})$.

Dowód. Różniczkując (3.12) względem θ mamy

$$p'(\theta) = \frac{-2R}{\sin^2 \theta} \cdot q(\theta), \quad (3.14)$$

$$\text{gdzie } q(\theta) = \sin^3 \theta \left(\frac{2}{F^3} + \frac{A}{F^2} \right) - \frac{D}{2R}. \quad (3.15)$$

Ponieważ $-\frac{2R}{\sin^2 \theta} < 0$ w przedziale $(0, \bar{\eta})$, wystarczy zbadać

funkcję $q(\theta)$ w tym przedziale.

Rozpatrzmy najpierw funkcję $q(\theta)$ w przedziale $(0, \bar{\eta}/2)$.

Po zróżniczkowaniu (3.15) względem θ otrzymamy

$$q'(\theta) = 3 \frac{3 + AF}{F^4} \sin^2 \theta \left(\frac{2F + AF^2}{3 + AF} \cos \theta - \frac{4}{3} R \sin^2 \theta \right). \quad (3.16)$$

$$\text{Wobec (3.6) mamy } \cos \theta = \frac{1 + R^2 - F}{2R}.$$

Stąd wyrażenie w nawiasie (3.16) przyjmie postać

$$\frac{H(F)}{Q(F)}, \quad (3.17)$$

$$\text{gdzie } H(F) = 6(1-R^2)^2 + 2A(1-R^2)^2 - 6(1+R^2)F - A(1+R^2)F^2 - AF^3,$$

$$Q(F) = 6R(3 + AF) > 0. \quad (3.18)$$

Z (3.18) mamy

$$H''(F) = -2A(1+R^2+3F). \quad (3.19)$$

Funkcja $F = F(\theta)$ jest rosnąca względem zmiennej θ w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$, $F(0) = (1-R)^2$, $F(\frac{\pi}{2}) = 1+R^2$.

Wobec (3.19) funkcja $H''(F)$ jest malejąca względem zmiennej F oraz $H''[(1-R)^2] = -2A[1+R^2+3(1-R)^2] < 0$.

Zatem $H(F)$ jest funkcją wypukłą w przedziale $\langle (1-R)^2; 1+R^2 \rangle$.

Ponieważ

$$H(F(0)) = H[(1-R)^2] = (1-R^2) [12R+2A(1-R^2)^2] + 2AR(1-R)^4 > 0 \quad i$$

$$H(F(\frac{\pi}{2})) = H(1+R^2) = -8R^2 [3 + (1+R^2)A] < 0, \text{ więc funkcja}$$

$H(F(\theta))$ przyjmuje wartość zero dokładnie w jednym punkcie $\theta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Stąd i wobec (3.16), (3.17) i (3.18) wynika

$$\begin{aligned} q'(\theta) &> 0 \quad \text{gdy} \quad 0 < \theta < \theta_1 \\ q'(\theta) &< 0 \quad \text{gdy} \quad \theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Zauważmy następnie, że $q(\theta)$ jest funkcją malejącą w przedziale $\langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$, ponieważ $\sin \theta$ i $\frac{2}{F^3(\theta)} + \frac{A}{F^2(\theta)}$ są funkcjami malejącymi i dodatnimi w tym przedziale.

Wobec powyższego i na mocy (3.20) funkcja $q(\theta)$ jest rosnąca w przedziale $(0, \theta_1)$ i malejąca w przedziale $(\theta_1, \frac{\pi}{2})$, a zatem przyjmuje wartość zero najwyżej w dwóch punktach przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$. Stąd wobec (3.14) $p'(\theta)$ ma najwyżej dwa pierwiastki w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$, a więc $p(\theta)$ ma najwyżej trzy pierwiastki w tym przedziale, co jest tezą lematu 7.

Lemat 8. Niech $P(\theta)$ dane będzie wzorem (3.1

1°. Jeśli $D > 0$, to równanie (3.13) ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(-\pi, 0)$.

2°. Jeśli $D < 0$, to równanie (3.13) ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $(0, \pi)$.

Dowód. Jeżeli $D > 0$, to wobec (3.14) i (3.15) $p'(\theta) < 0$ w przedziale $(-\pi, 0)$, a stąd wynika 1°.

Jeśli zaś $D < 0$, to $p' > 0$ w przedziale $(0, \pi)$, a zatem ma miejsce 2°.

Lemat 9. Jeżeli $F_\mu(\theta)$ jest określone wzorem (3.11), wówczas równanie

$$F'_\mu(\theta) = 0 \quad (3.21)$$

ma co najwyżej cztery pierwiastki w przedziale $(-\pi, \pi)$.

Dowód. Różniczkując funkcję $F_\mu(\theta)$ względem θ otrzymamy

$$F'_\mu(\theta) = -2(1-\alpha)R(1-R^2)C_\mu \sin \theta \left[\frac{1}{F^2} + \frac{A\mu}{(1-R^2)F} \right] - C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta. \quad (3.22)$$

Jeżeli $C_2 = 0$, to równanie (3.21) wobec (3.22) przyjmie postać

$$-2(1-\alpha)R(1-R^2)C_\mu \sin \theta \left[\frac{1}{F^2} + \frac{A}{F} - C \right] = 0, \quad (3.23)$$

gdzie $A = \frac{A\mu}{1-R^2} > 0$, $C = \frac{-C_1}{2(1-\alpha)R(1-R^2)C_\mu}$.

Równanie (3.23) ma pierwiastki $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$.

Ponieważ funkcja $\frac{1}{F^2} + \frac{A}{F} - C$ jest rosnąca w przedziale $(0, \pi)$ i malejąca w przedziale $(-\pi, 0)$, więc przyjmuje wartość zero

najwyżej w dwóch punktach przedziału $(-\bar{J}, \bar{J})$. A więc równanie (3.21) ma najwyżej cztery pierwiastki. Jeżeli $C_2 \neq 0$, to zauważmy najpierw, że θ będące pierwiastkiem równania $\sin \theta = 0$ nie jest rozwiązaniem (3.21).

Zatem równanie (3.21) przyjmie równoważną postać

$$\frac{1}{F^2} + \frac{A}{F} - C - D \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad (3.24)$$

gdzie A, C jest określone w (3.23), $D = \frac{C_2}{2(1-\alpha)R(1-R^2)C_\mu} \neq 0$.

Zauważmy, że równanie (3.24) spełnia założenia lematów 7 i 8.

Na mocy tych lematów natychmiast otrzymujemy, że równanie (3.24) ma najwyżej cztery pierwiastki w przedziale $(-\bar{J}, \bar{J})$. Tym samym udowodniliśmy lemat 9.

W myśl lematu 9 funkcja $F_\mu(\theta)$ osiąga ekstrema najwyżej w czterech punktach przedziału $(-\bar{J}, \bar{J})$, więc wobec wniosku z twierdzenia B, funkcja ekstremalna $\mu_0(t)$ dla której funkcjonał $J(\mu)$ osiąga minimum i maksimum jest schodkowa o nie więcej niż dwóch skokach. Z drugiej strony wobec (3.8) wnioskujemy, że funkcja $\mu_0(t)$ ma dokładnie dwa skoki. W przeciwnym razie $e^{i\theta} = 0$ dla pewnego θ , co jest niemożliwe. Niech θ i $\theta + \beta$, $\beta > 0$, będą punktami nieciągłości funkcji $\mu_0(t)$, a λ i $1 - \lambda$ odpowiednio skokami w tych punktach.

Wobec (3.2) mamy

$$\lambda \cos \theta + (1 - \lambda) \cos (\theta + \beta) = 0$$

$$\lambda \sin \theta + (1 - \lambda) \sin (\theta + \beta) = 0.$$

Stąd otrzymujemy $\beta = \pi$, a następnie $\lambda = \frac{1}{2}$.

Zatem funkcja ekstremalna $\mu_0(t)$ jest postaci

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } -\bar{t} \leq t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{gdy } 0 \leq t < \theta + \beta \\ 1 & \text{gdy } 0 + \beta \leq t \leq \bar{t} \end{cases} \quad (3.25)$$

gdzie θ jest pewną liczbą z przedziału $(-\bar{t}, 0)$.

Obeo (3.25), (3.6) i (3.7) mieć będziemy

$$(\mu_0) = J(R, \alpha, \theta) = \frac{1 + 2\alpha(1 - 2\cos^2\theta)R^2 + (2\alpha - 1)R^4}{[(1 + R^2)^2 - 4R^2\cos^2\theta]^{\frac{3-\alpha}{2}}},$$

$$= \frac{1}{R}, \quad 0 < R < 1, \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Lemat 10. Niech $r > 1$, $0 \leq \alpha < 1$, wówczas

$$\min J(\mu) = J\left(\frac{1}{r}, \alpha, -\frac{\bar{t}}{2}\right) = \frac{1 + 2\alpha\frac{1}{r^2} + (2\alpha - 1)\frac{1}{r^4}}{\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)^{3-\alpha}}$$

$$\max J(\mu) = J\left(\frac{1}{r}, \alpha, 0\right) = \frac{1 - 2\alpha\frac{1}{r^2} + (2\alpha - 1)\frac{1}{r^4}}{\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^{3-\alpha}} \quad (3.27)$$

Dowód. Podstawiając w (3.26) $x = \cos^2\theta$, $0 \leq x \leq 1$,

mamy

$$\min J(\mu) = \min_{-\bar{t} < \theta \leq 0} J(R, \alpha, \theta) = \min_{0 \leq x \leq 1} U(x), \quad (3.28)$$

$$\max J(\mu) = \max_{-\bar{t} < \theta \leq 0} J(R, \alpha, \theta) = \max_{0 \leq x \leq 1} U(x)$$

gdzie $U(x) = S(x) \cdot N(x)$,

$$S(x) = \frac{1 + 2\alpha(1 - 2x)R^2 + (2\alpha - 1)R^4}{(1 + R^2)^2 - 4R^2x}, \quad N(x) = [(1 + R^2)^2 - 4R^2x]^{\alpha - 1}.$$

Łatwo stwierdzić, że funkcje $S(x)$ i $N(x)$ są dodatnie i rosnące w przedziale $0 \leq x \leq 1$, stąd $U(x)$ jest funkcją rosnącą w tym przedziale.

Wobec powyższego, dla $R = \frac{1}{r}$

$$\min_{0 \leq x \leq 1} U(x) = U(0) = \frac{1 + 2\alpha \frac{1}{r^2} + (2\alpha - 1) \frac{1}{r^4}}{\left(1 + \frac{1}{r^2}\right)^{3-\alpha}},$$

$$\max_{0 \leq x \leq 1} U(x) = U(1) = \frac{1 - 2\alpha \frac{1}{r^2} + (2\alpha - 1) \frac{1}{r^4}}{\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^{3-\alpha}},$$

co wobec (3.27) i (3.28) kończy dowód lematu 10.

W ten sposób otrzymaliśmy odpowiednie wartości θ dla funkcji ekstremalnych postaci (3.20),

$$\begin{aligned} \theta &= -\frac{\pi}{2} \quad \text{dla funkcji } \mu_0(t) \text{ odpowiadającej } \min J(\mu), \\ \theta &= 0 \quad \text{dla funkcji } \mu_0(t) \text{ odpowiadającej } \max J(\mu). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Twierdzenie 3. Niech $\sum_{\alpha}^0$, $0 \leq \alpha < 1$, będzie rodziną funkcji wypukłych postaci (3.3) i niech $K_r(\vartheta)$ oznacza krzywą obrazu okręgu $|z| = r$, $r > 1$, w odwzorowaniu $w = \Phi(z)$, $(\Phi(z) \in \sum_{\alpha}^0)$ dla $z = r e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$.

Wówczas

$$\frac{1 + 2\alpha \frac{1}{r^2} + (2\alpha - 1) \frac{1}{r^4}}{r \left(1 + \frac{1}{r^2}\right)^{3-\alpha}} \leq K_r(\vartheta) \leq \frac{1 - 2\alpha \frac{1}{r^2} + (2\alpha - 1) \frac{1}{r^4}}{r \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^{3-\alpha}} \quad (3.30)$$

Oszacowania (3.30) są ostre. Równość w dolnym oszacowaniu zachodzi

dzi w punkcie $z = r e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ dla funkcji

$$\Phi^*(z) = w_0 + \int_{z_0}^z \left(1 + \frac{e^{2i\vartheta}}{3^2}\right)^{1-\alpha} dz, \quad (3.31)$$

zaś równość w górnym oszacowaniu (3.30) zachodzi w punkcie

$z = r e^{i\vartheta}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ dla funkcji

$$\Phi^{**}(z) = w_0 + \int_{z_0}^z \left(1 - \frac{e^{2i\vartheta}}{3^2}\right)^{1-\alpha} dz. \quad (3.32)$$

Dowód. Nierówności (3.30) bezpośrednio otrzymujemy z (3.5), (3.7) i lematu 10. Wobec (3.3) oraz (3.29) łatwo wyznaczyć odpowiednie funkcje ekstremalne (3.31) i (3.32).

Twierdzenie 3 zostało udowodnione.

Uwaga 1. Kładąc $\alpha = 0$ w oszacowaniu (3.30) otrzymujemy znane oszacowanie krzywizny $K_r(\vartheta)$ w klasie Σ^0 otrzymane przez Zmorowicza [14],

$$\frac{1 - \frac{1}{r^2}}{r(1 + \frac{1}{r^2})^2} \leq K_r(\vartheta) \leq \frac{1 + \frac{1}{r^2}}{r(1 - \frac{1}{r^2})^2}.$$

R o z d z i a ł II

O promieniu β - wypukłości w pewnych klasach funkcji holomorfinicznych i jednolistnych

§ 1. Sformułowanie postawionego zagadnienia.

Niech T będzie dowolną podklasą funkcji rodziny S oraz β będzie dowolną ustaloną liczbą z przedziału $0 \leq \beta < 1$.

Niech

$$r(f) = \sup_r \left\{ r : \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \beta, \quad |z| < r \right\}.$$

Liczbę

$$\beta - r.o.T = \inf_{f \in T} r(f)$$

nazywać będziemy promieniem β - wypukłości rodziny T . W szczególnym przypadku gdy $\beta = 0$, otrzymujemy promień wypukłości rodziny T i oznaczamy $0 - r.o.T = r.o.T$.

Ponieważ funkcja $G(z) = \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right)$

jest ciągła względem zmiennej z oraz $G(0) = 1 > \beta$, zatem tak określona liczba $\beta - r.o.T$ na pewno istnieje i jest dodatnia.

Oznaczmy przez

$$\Omega(r) = \inf_{\substack{|z|=r \\ f(z) \in T}} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right).$$

Stąd promień β - wypukłości rodziny T jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania

$$\Omega(r) - \beta = 0. \quad (1.1)$$

Wiadomo [5], że jeśli $f(z) \in S$ lub $f(z) \in S^*$ to ma miejsce następujące ostre oszacowanie

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq \frac{1-4r+r^2}{1-r^2} = \Omega(r), \quad |z| = r.$$

Jeśli $f(z) \in S_{\alpha}^0$, $0 \leq \alpha < 1$, to

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \geq \frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r} = \Omega(r), \quad |z| = r.$$

Na mocy tych oszacowań i wobec równania (1.1) natychmiast otrzymujemy

$$\beta - r.o.S = \beta - r.o.S^* = \frac{2 - \sqrt{3 + \beta^2}}{1 + \beta}, \quad (1.2)$$

$$\beta - r.o.S_{\alpha}^0 = \frac{1 - \beta}{1 + \beta - 2\alpha}, \quad \alpha < \beta \quad (1.3)$$

§ 2. o promieniu β - wypukłości rodziny $\sum \alpha^*$

Niech $\sum \alpha^*$, $0 \leq \alpha < 1$ oznacza klasę funkcji $F(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$, holomorficznych i jednolistnych w pierścieniu $K_0 = \{z : 0 < |z| < 1\}$ spełniających warunek

$$\operatorname{Re} \left\{ - \frac{z F'(z)}{F(z)} \right\} > \alpha, \quad z \in K_0. \quad (2.1)$$

Niech β , $0 \leq \beta < 1$ będzie dowolną ustaloną liczbą.

Oznaczmy

$$r(F) = \sup_r \left\{ r : - \operatorname{Re} \left(1 + \frac{z F''(z)}{F'(z)} \right) > \beta, \quad 0 < |z| < r \right\}.$$

Liczbę

$$\beta - r.o. \sum \alpha^* = \inf_{F \in \sum \alpha^*} r(F)$$

nazywać będziemy promieniem β -wypukłości rodziny $\sum \alpha^*$. Jeśli

$\beta = 0$, to otrzymujemy promień wypukłości rodziny $\sum \alpha^*$ i oznaczamy

$$0 - r.o. \sum \alpha^* = r.o. \sum \alpha^*.$$

Ponieważ funkcja $Q(z) = - \operatorname{Re} \left(1 + \frac{z F''(z)}{F'(z)} \right)$

jest ciągła w pierścieniu K_0 oraz $\lim_{z \rightarrow 0} Q(z) = 1 > \beta$, zatem tak

określona liczba $\beta - r.o. \sum \alpha^*$ na pewno istnieje i jest dodatnia.

W roku 1965 w pracy [15] Zmorowicz wyznaczył promień wypukłości rodziny $\sum \alpha^*$, $0 \leq \alpha < 1$.

Oplerając się na wynikach tej pracy wyznaczamy promień β -wypukłości rodziny $\sum \alpha^*$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, gdzie α_0 jest pewną liczbą z przedziału $0 < \alpha_0 < 1$.

I tak niech funkcja $F(z) \in \sum \alpha^*$. Na mocy warunku (2.1) mamy

$$- \frac{z F'(z)}{F(z)} = \alpha + (1 - \alpha) p(z), \quad (2.2)$$

gdzie $p(z)$ jest pewną funkcją rodziny $\mathcal{P}$ określonej w (2.2)
rozdz.I.

Z równości (2.2) otrzymujemy

$$-\left(1 + \frac{z F''(z)}{F'(z)}\right) = (1-\alpha) (p(z) + h) - \frac{z P'(z)}{p(z)+h} \quad , \quad (2.3)$$

$$h = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad .$$

Niech

$$\Omega_{\alpha}(r) = \min_{F \in \sum_{\alpha}^*} \min_{|z|=r < 1} \operatorname{Re} \left\{ - \left[1 + \frac{z F''(z)}{F'(z)} \right] \right\} \quad (2.4)$$

Wówczas promień β - wypukłości rodziny $\sum_{\alpha}^*$ jest najmniejszym dodatnim pierwiastkiem równania.

$$\Omega_{\alpha}(r) - \beta = 0 \quad (2.5)$$

Wobec (2.3) i (2.4) mamy

$$\Omega_{\alpha}(r) = \min_{p(z) \in \mathcal{P}} \min_{|z|=r < 1} \operatorname{Re} \left[(1-\alpha)(p(z)+h) - \frac{z p'(z)}{p(z)+h} \right] \quad .(2.6)$$

Zmorowicz wykazał [15] , że minimum (2.6) jest równe minimum funkcji $l(R)$, $a+h-\rho \leq R \leq a+h+\rho$,

gdzie

$$l(R) = (1-\alpha)R + \frac{1+ah}{R} - a, \quad (2.7)$$

$$a = \frac{1+r^2}{1-r^2} \quad , \quad \rho = \frac{2r}{1-r^2} \quad , \quad h = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad . \quad (2.8)$$

Różniczkując (2.7) względem zmiennej R stwierdzamy, że

$$l'(R) < 0 \quad \text{gdy} \quad 0 < R < R_0 \quad , \quad (2.9)$$

$$l'(R) > 0 \quad \text{gdy} \quad R > R_0 \quad ,$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{1+a h}{1-\alpha}} \quad (2.10)$$

Z (2.8) i (2.10) łatwo wynika, że nierówność $a + h - \varphi < R_0$ ma miejsce dla każdego r , $0 < r < 1$ i α , $0 \leq \alpha < 1$.

Jednakże nierówność

$$R_0 \leq R_1, \quad R_1 = a + h + \varphi \quad (2.11)$$

nie zawsze jest spełniona.

Wobec powyższego oraz z (2.6), (2.9), (2.10) i (2.11) mamy

$$\Omega_{\alpha}(r) = \underset{a+h-\varphi \leq R \leq a+h+\varphi}{\text{minimum}} \quad l(R) = \begin{cases} l(R_0) & \text{gdy } a+h-\varphi \leq R_0 \leq a+h+\varphi \\ l(R_1) & \text{gdy } a+h+\varphi \leq R_0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Opierając się na przedstawionych wyżej wynikach udowodnimy następujący lemat.

Lemat 11. Niech $\sum \alpha^*$, $0 \leq \alpha < 1$, będzie rodziną funkcji $F(z)$ zdefiniowaną w (2.1), a $l(R)$ będzie funkcją określoną wzorem (2.7). Niech ponadto R_0 , R_1 będą określone odpowiednio wzorami (2.10), (2.11) oraz

$$b(r) = \frac{1}{2} + \frac{1 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s(r)}{1-r}}}{r}, \quad 0 < r < 1, \quad (2.13)$$

$$s(r) = -r^3 + 5r^2 + 8r + 4 > 0, \quad 0 < r < 1. \quad (2.14)$$

Wówczas

$$\Omega_{\alpha}(r) = \begin{cases} l(R_0) & \text{gdy } 0 \leq \alpha \leq \frac{b(r)}{1+b(r)} \\ l(R_1) & \text{gdy } \frac{b(r)}{1+b(r)} \leq \alpha < 1 \end{cases}, \quad (2.15)$$

gdzie $\Omega_{\alpha}(r)$ określone jest równością (2.4).

Dowód. Z (2.11) i (2.12) wynika, że w celu udowodnienia (2.15) wystarczy rozważyć nierówność

$$a + h + \varphi \geq \sqrt{\frac{1 + ah}{1 - \alpha}}. \quad (2.16)$$

Uwzględniając podstawienia (2.8) w tej nierówności, następnie podnosząc stronami do kwadratu i porządkując względem potęg h otrzymamy

$$K(h) = Ah^2 + Bh + C \geq 0, \quad (2.17)$$

gdzie

$$A = \frac{2r^2}{1-r^2} > 0, \quad B = -\frac{2r(2+r)}{1-r^2} < 0, \quad C = -\frac{4r}{(1-r)^2} < 0, \quad (2.18)$$

dla każdego r , $0 < r < 1$.

Obliczając wyróżnik Δ trójmianu $K(h)$ mamy

$$\Delta = B^2 - 4AC = 4 \frac{r^2 s(r)}{(1-r^2)^2(1-r)},$$

$s(r)$ jest określone wzorem (2.14).

Ponieważ $s(r) > 0$, więc wyróżnik trójmianu $K(h)$ jest dodatni.

Stąd na mocy (2.18) trójmian $K(h)$ ma dwa miejsca zerowe $h_1 < 0$

i $h_2 > 0$ dla każdego r , $0 < r < 1$.

Zatem nierówność (2.17), a więc i (2.16) ma miejsce gdy

$$h \geq h_2 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} = b(r), \quad (2.19)$$

gdzie $b(r)$ jest dane wzorem (2.13).

Z (2.12), (2.19) oraz związku $\alpha = \frac{h}{1+h}$ (patrz 2.8) otrzymujemy

tezę lematu 11.

Lemat 12. Niech $b(r)$ będzie określone wzorem (2.13) oraz

r_0 , $0 < r_0 < 1$ będzie pierwiastkiem równania

$$2r^3 + r^2 - 1 = 0 \quad (2.20)$$

Wówczas r_0 jest punktem minimum absolutnego funkcji $b(r)$ w prze-

dziale $0 < r < 1$.

Dowód. Różniczkując funkcję $b(r)$, po łatwych przekształceniach otrzymamy

$$b'(r) = \frac{k(r)}{r^2(1-r)\sqrt{(1-r)s(r)}}, \quad (2.21)$$

gdzie $k(r) = r^3 + 4r^2 + r - 2 - (1-r)\sqrt{(1-r)s(r)}$.

Równanie

$$b'(r) = 0 \quad (2.22)$$

jest równoważne równaniu

$$k(r) = 0 \quad (2.23)$$

Ponieważ

$$k(0) = -4, \quad k(1) = 4, \quad (2.24)$$

więc równanie (2.23) ma co najmniej jeden pierwiastek r_0 , $0 < r_0 < 1$.

Równanie (2.23) napiszmy w postaci

$$r^3 + 4r^2 + r - 2 = (1-r)\sqrt{(1-r)s(r)}.$$

Podnosząc stronami do kwadratu to równanie, a następnie dokonując redukcji wyrazów podobnych i dzieląc stronami przez r^2 otrzymamy równanie (2.20). Równanie to ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty r_0 , $0 < r_0 < 1$, który jest także jedynym pierwiastkiem równania (2.22).

Stąd wobec (2.21) i (2.24) mamy

$b'(r) < 0$ gdy $0 < r < r_0$ oraz $b'(r) > 0$ gdy $r_0 < r < 1$, a następnie tezę lematu 12.

Na mocy lematów 11 i 12 otrzymujemy

Twierdzenie 4. Niech $b(r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{s(r)}{1-r}}$,

$$s(r) = -r^3 + 5r^2 + 8r + 4, \quad 0 < r < 1, \quad r_0, \quad 0 < r_0 < 1,$$

jest pierwiastkiem równania $2r^3 + r^2 - 1 = 0$, $\alpha_0 = \frac{b(r_0)}{1+b(r_0)}$,

zaś β jest dowolną ustaloną liczbą z przedziału $0 \leq \beta < 1$.

Wówczas promień β -wypukłości rodziny $\sum^* \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ wyraża się następującym wzorem

$$\beta - r.o. \sum^* \alpha = \sqrt{\frac{2\alpha - 1 - \beta + 2\sqrt{\alpha^2 - \alpha(1+\beta)} - 1}{2\alpha + 1 - \beta + 2\sqrt{\alpha^2 - \alpha(1+\beta)} - 1}}. \quad (2.25)$$

Dowód. Z lematu 12 wynika, że

$$b(r_0) \leq b(r), \quad \text{stad } \alpha_0 = \frac{b(r_0)}{1+b(r_0)} \leq \frac{b(r)}{1+b(r)},$$

dla każdego r , $0 < r < 1$. Następnie wobec lematu 11 (wzór (2.15))

mamy

$$\Omega_\alpha(r) = 1(R_0) \quad \text{gdy } 0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \leq \frac{b(r)}{1+b(r)}, \quad 0 < r < 1.$$

Stąd wobec (2.5) promień β -wypukłości rodziny $\sum^* \alpha$,

$0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ otrzymamy jako najmniejszy dodatni pierwiastek równania

$$1(R_0) - \beta = 0. \quad (2.26)$$

Uwzględniając (2.7) i (2.10) w (2.26) otrzymamy równanie

$$2\sqrt{(1-\alpha)(1+\alpha)} - \alpha - \beta = 0.$$

Z kolei z tego równania wyznaczamy

$$\alpha = 2\alpha - \beta \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \alpha(1+\beta)} + 1.$$

Łatwo stwierdzamy, że $2\alpha - \beta + 2\sqrt{\alpha^2 - \alpha(1+\beta)} + 1 > 1$

oraz $2\alpha - \beta - 2\sqrt{\alpha^2 - \alpha(1+\beta) + 1} < 1$ dla każdego α i β ,
 $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$.

Ponieważ $a = \frac{1+r^2}{1-r^2} > 1$, zatem przyjmujemy

$$\frac{1+r^2}{1-r^2} = 2\alpha - \beta + 2\sqrt{\alpha^2 - \alpha(1+\beta) + 1} \quad (2.27)$$

Wyznaczając dodatni pierwiastek równania (2.27) dostajemy wzór (2.25), a tym samym tezę twierdzenia 4.

Uwaga 1

1°. Kładąc $\alpha = 0$ we wzorze (2.25) otrzymujemy wzór na promień β - wypukłości rodziny Σ^*

$$\beta - r.o. \Sigma^* = \sqrt{\frac{1-\beta}{3-\beta}}$$

2°. Kładąc $\alpha = \beta = 0$ w tym wzorze dostajemy promień wypukłości rodziny Σ^*

$$r.o. \Sigma^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad .$$

Jest to znany wynik Robertsona z roku 1963 [13] .

B I B L I O G R A F I A

1. Базилевич И.Е., Результаты в семинаре МГУ по теории функций комплексного переменного /1952/.
2. Bieberbach L., *Neure Forschungen im Gebiete der konformen Abbildung*, Glasnik hrv. prirod. drustva, XXXIII /1921/.
3. Eenigenburg P., On the radius curvature for convex analytic functions, Can. J. Math., vol. XXII, Nr 3 /1970/ p. 486-491.
4. Эзрохи Т.Г., О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий в классе функций с ограниченным вращением, Укр. матем. журнал, т.XVII, № 6, /1965/, 91-99.
5. Голузин Г.М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва 1966, гл.IV, §5, 165-166.
6. Janowski W., On the curvature of level-lines and their orthogonal trajectories in certain classes of functions with bounded distortion, Ann.Polon. Math., /to appear/.
7. Корицкий Г.В., К вопросу о кривизне линий уровня при однолистных конформных отображениях, УМН, т.15, вып.5/95/, 1960, 179-182.
8. Корицкий Г.В., О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий при конформных отображениях, Мат. сборник т.37 /79/, № 1/1955/, 103-116.
9. Корицкий Г.В., О кривизне линий уровня при конформных отображениях, ДАН СССР 115/4/, /1957/.
10. Мирошниченко Я.С., Об одной задаче теории однолистных функций, Учен. зап. Сталинск. пед. института, вып. 1, 1951, 63-75.
11. Nevanlinna R., Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises, Översikt av Finska Vetenskaps - Societentes Forhandlingar, T.62 /1919-1920/, Awd. N. 07.

12. Robertson M. S., Some radius of convexity problems, Michigan Math.J., 10, Nr 3/1963/, p. 231-236.
13. Robertson M.S., Extremal problems for analytic functions with positive real part applications, Trans. Amer. Math. Soc., 106, Nr 2 /1963/, 236-253.
14. Зморович В.А., О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций, Укр. Мат. Журнал, т.IV, №3/1952/, p.276-296.
15. Зморович В.А., О границах выпуклости звездных функций порядка α в круге $|z| < 1$ и круговой области $0 < |z| < 1$, Мат. сборник, т.68/110/, № 4/1965/, p.518-526.
16. Зморович В.А., Об одном классе экстремальных задач, связанных с регулярными функциями с положительной вещественной частью в круге $|z| < 1$, Укр. Мат. Журнал, т.17, №4/1965/ 12-20.

