K. Zipf's rank-size rule – In search for the best method of point approximation

1 author:

Iwona Jażdżewska
University of Lodz

Jażdżewska, I. (2006). Regula K. Zipfa-poszukiwanie najlepszej metody aproksymacji punktow (K. Zipf's rank-size rule in search of the best method of point approximation). *Czasopismo Geograficzne*, *77*(3), 206-219.

Iwona Jażdżewska
iwona.jazdzewska@uni.lodz.pl

[1]

Reguła (*rank-size rule*) K. Zipfa – poszukiwane najlepszej metody aproksymacji punktów

Zarys treści: Artykuł przedstawia dyskusję na temat konieczności poszukiwań jak najlepiej dopasowanej prostej do układu punktów wyznaczonych za pomocą reguły Zipfa. Pod uwagę wzięto metody aproksymacji punktów za pomocą regresji prostej, ważonej i metody średniego wykładnika. Wskazano w nim na możliwości błędnej interpretacji reguły w przypadku źle dopasowanej prostej. Analizę oparto o dane empiryczne odnoszące się do miejskiej sieci osadniczej w Polsce w drugiej połowie XX wieku. W efekcie stwierdzono, że metoda średniego wykładnika dała najlepiej dopasowaną prostą do układu punktów reprezentujących miasta, ale nie można było na jej podstawie szacować teoretycznej liczby mieszkańców w największym mieście, do tego celu najlepiej nadawała się metoda regresji ważonej. Z kolei metoda regresji prostej dawała tak odmienne wartości współczynnika kontrastu, że niekiedy jej zastosowanie należy uznać za błąd metodyczny.
Słowa kluczowe: reguła K. Zipfa, aproksymacja punktów, metody regresji, miejska sieć osadnicza, Polska

Wstęp

Reguła wielkości-kolejności K. Zipfa opublikowana została pół wieku temu i nadal jest jedną z częściej wykorzystywanych metod analizy sieci osadniczej [Gabaix, 1999]. Do jej zastosowania wystarczy jedynie liczba mieszkańców miast, przez co jest ona dość prosta w obliczeniach. Jej powszechne zastosowanie daje możliwość porównania różnych regionalnych sieci osadniczych lub analizę dynamiki każdej z nich.

Reguła ta zakładała, że wielkość miasta jest zdeterminowana przez wielkość miasta największego w systemie osadniczym. W teoretycznym modelu przedstawionym w 1949 r. przez K. Zipfa, miasta porządkuje się według liczby mieszkańców (od największego do najmniejszego) i nadaje im się rangi od wartości 1 w wzwyż. Następnie określa się teoretyczną wielkości *j*-tego miasta w systemie osadniczym za pomocą wzoru:

$$L_j = L_1 \times j^a, \ (a<0);$$

gdzie – L_1 oznacza liczbę mieszkańców największego miasta, a – jest wykładnikiem kontrastu danego systemu osadniczego

[1] Wydział Nauk Geograficznych
Uniwersytet Łódzki, Polska
Ul. S. Kopcińskiego 31
90-142 Łódź

Wykres konstruowany jest na prostokątnym układzie współrzędnych, na którym oś Y odpowiada wielkości miasta (liczbie mieszkańców) a oś X odpowiada kolejności miasta. Z Powodu dużej liczby miast małych zazwyczaj wykres przedstawiany jest w skali logarytmicznej. W postaci logarytmicznej wzór przyjmuje wówczas postać:

$$\log L_j = b + a\log j, \ (a<0);$$

gdzie – b oznacza punkt przecięcia prostej z osią Y, a – tangens kąta nachylenia prostej do osi X

Według Zipfa harmonijnie rozwinięta sieć osadnicza posiada pewną liczbę miast o określonej wielkości. Taka sytuacja zachodzi gdy wykładnik kontrastu $a = -1$ ($\alpha = -135°$), czyli system osadniczy osiąga stan równowagi, natomiast gdy $|a| > 1$, występuje nadmiar koncentracji ludności w dużych miastach a dla $|a| < 1$ ludność koncentruje się w małych miastach.

Kluczowym problemem metodologicznym jest więc jak najlepsze dopasowanie prostej aproksymującej układ punktów – na co zwracał już wcześniej m.in. K. Dziewoński [1990]. Zwykle, z powodu dużej liczby małych jednostek osadniczych, układ punktów w pewnym miejscu ulega przełamaniu, poniżej niego reguła Zipfa przestaje obowiązywać, co powoduje dodatkowe komplikacje w wyborze metody aproksymacji. Skoro interpretacja wyników zależy od jak najlepszego wykreślenia prostej aproksymującej, to warto podjąć rozważania na temat:

— Jak najlepiej aproksymować prostą do wartości rzeczywistych?.
— Jakie są różnice w interpretacji wyników, w zależności od sposobu aproksymacji?

Metody aproksymacji punktów w polskiej literaturze geograficznej.

Większość polskich badaczy, którzy sięgnęli po regułę wielkości-kolejności K.Zipfa, musiała dokonać wyboru sposobu aproksymacji zbioru punktów reprezentujących miasta w systemie osadniczym kraju. Korzystali oni z następujących metod:

– graficznej [Kania, 1966]
– średniego wykładnika [Kostrubiec, 1971, Drobek, Heffner, 1980, Heffner, 1992]
– najmniejszych kwadratów [Dobrowolski, 1977, Zipser i in. 1976, Heffner, 1992]
– regresji ważonej [Sokołowski 2001].

Jako jedna z pierwszych rozwiązywała ten problem C. Kania [1966], która w sposób graficzny odczytywała współczynnik kątowy pochylenia prostej z narysowanego wykresu. Z kolei B. Kostrubiec [1971] zaproponował dokładniejszy analityczny sposób wyznaczania współczynnika na podstawie ciągu malejących wartości P_j. Każdej miejscowości przyporządkowano dwie współrzędne, liczbę ludności P_j oraz kolejny numer (rangę) j. Autor odrzucił zbyt małe jednostki osadnicze nie objęte działaniem reguły Zipfa, leżące poniżej punktu załamania krzywej. Dla wszystkich jednostek osadniczych (oprócz największego) obliczono wykładniki a według wzoru:

$$a = \frac{\log P_1 - \log P_j}{\log_j};$$ gdzie P_j – liczb ludności w j – tym mieście

Wartość wykładnika potęgi w równaniu Zipfa obliczono uśredniając wartości a:

$$\overline{a_t} = \frac{\sum_{j=2}^{n} a_{jt}}{N-1}.$$

Z tego powodu metoda nazywana jest metodą średniego wykładnika.

Równanie prostej w układzie logarytmicznym ma postać:

$$\log P_j = -a \log_j + \log P_1,$$

A współczynnik kątowy wynosi:

$$tg\alpha = -a.$$

Korzystając z prezentowanej metody, B. Kostrubiec przedstawił interesującą analizę zmian rozmieszczenia osiedli w województwie opolskim w latach 1950, 1960, 1965 [Kostrubiec 1971; s. 40]. Zgodnie z regułą Zipfa szacowaniu wielkości podlegały wszystkie miasta poza największym, metoda Kostrubca nie pozwala na oszacowanie teoretycznej wartości liczby mieszkańców miasta największego, gdyż prosta przechodzi przez punkt na wykresie reprezentujący to miasto. Warto jednak, po pięćdziesięciu latach od publikacji Zipfa, wziąć pod uwagę teoretyczną wielkość miasta największego i wybrać inną metodę aproksymacji, tak jak to uczynili Heffner [1992], Sokołowski [2001].

A. Zagożdżon zauważył, że często zachodzi przypadek, gdy ma się do czynienia ze zbiorem miast o znacznych dysproporcjach wielkości, czyli z kilkoma ich podzbiorami. Zaproponował on zastosowanie zamiast jednej prostej aproksymującej, taką liczbą prostych, z jaką liczbą podzbiorów miast mamy do czynienia [Zagożdżon 1979, s. 65]. Autor sugeruje, że zastosowana metoda pozwoli na uchwycenie tendencji zmian w poszczególnych podzbiorach miast, jednak sam nie stosuje zaproponowanej modyfikacji w analizie sieci osadniczej Polski.

Regułę Zipfa do analizy systemów osadniczych regionów dolin rzecznych, wielkich rzek europejskich wykorzystali w swej pracy W. Drobek i K. Heffner (1980). Do obliczenia wykładnika kontrastu skorzystali oni z metody średniego wykładnika. Jego wartość posłużyła do wyznaczenia grup dolin rzecznych o podobnych cechach sieci miejskiej oraz określenia stopnia wykształcenia ich układu osadniczego.

Po raz kolejny układ hierarchiczny miast Opolszczyzny (w wybranych latach od 1787 do 1983) za pomocą reguły Zipfa badał K. Heffner [1992], który wykorzystał do aproksymacji dwie metody: wspomnianą metodę średniego wykładnika Kostrubca oraz znaną szeroko w literaturze metodę najmniejszych kwadratów. Prosta aproksymująca jest tak dopasowywana do danych empirycznych, aby suma kwadratów odchyleń poszczególnych wartości empirycznych L_j od wartości funkcji *f(x)* równała się minimum. Według tego autora, pierwsza metoda stawia w uprzywilejowanej sytuacji w stosunku do pozostałych miast ośrodek największy, natomiast druga pozwala na lepsze ich porównanie między sobą. Autor analizował kierunki rozwoju systemu miejskiego obliczając dwoma metodami tzw. wykładnik kontrastu, który - jak się okazało – miał różne wartości w zależności od zastosowanej metody. Interesujący jest nie tylko fakt, że wartości wykładnika kontrastu obliczone wybranymi metodami różniły się o ułamek w granicach 0,1 do 0,5, lecz i to, że zmieniała się jego wartość powyżej i poniżej wartości 1. Jest to o tyle ważne, że odpowiada ona systemowi osadniczemu znajdującemu się w stanie idealnej równowagi, a każde odchylenie od wartości 1 daje odmienną interpretację.

Dla jednostek osadniczych znajdujących się poniżej punktu przełamania reguła Zipfa przestaje obowiązywać. W tym momencie badacze stawiają sobie zazwyczaj pytanie: w którym miejscu występuje punkt przełamania, które jednostki należy wziąć pod uwagę, a które pominąć w równaniu regresji prostej aproksymującej, której kąt nachylenia będzie interpretowany. Interesujące rozwiązanie tego problemu zaproponował Sokołowski [2001], który zastosował model regresji ważonej do aproksymacji wykresu wielkości-kolejności Zipfa.

Sokołowski [2001] wyszedł od jednej z metod aproksymacji wykresu wielkości-kolejności, a mianowicie regresji liniowej (metoda najmniejszych kwadratów), w której wartości parametrów *a* i *b* obliczane są na podstawie wzorów:

$$a = \frac{N\sum x_j y_j - \sum x_j \sum y_j}{N\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2}, \qquad b = \frac{\sum y_j - a\sum x_j}{N}$$

Po uwzględnieniu zmiennych logarytmowanych wzór przyjmuje postać:

$$a = \frac{N\sum \log j \times \log L_j - \sum \log j \sum \log L_j}{N\sum (\log j)^2 - (\sum \log j)^2}, \quad b = \frac{\sum \log L_j - a\sum \log j}{N}.$$

Autor słusznie zwrócił uwagę czytelników na istotny fakt, że nie należy przypisywać każdej jednostce osadniczej jednakowej masy, gdyż w tym wypadku miasto duże (np. milionowe) ma taką samą wagę, jak małe np. miasto o tysiącu mieszkańcach. Aby uwzględnić wielkość miast, zmodyfikował on metodę najmniejszych kwadratów, nadając wagi ($w_j = L_j$) poszczególnym jednostkom osadniczym [Sokołowski 2001]. Parametry równia prostej dla regresji ważonej mają postać prostą:

$$a = \frac{\sum w_j \sum x_j y_j w_j - \sum x_j w_j \sum y_j w_j}{\sum w_j \sum x_j^2 w_j - (\sum x_j w_j)^2}, \quad b = \frac{\sum y_j w_j - a\sum x_j w_j}{\sum w_j}$$

gdzie w_j jest wagą obiektu rangi *j* (na ogół będzie to liczba mieszkańców).

Dla zmiennych logarytmowanych parametry równania prostej mają postać:

$$a = \frac{\sum w_j \sum \log j \times \log L_j w_j - \sum \log j \times w_j \sum \log L_j w_j}{\sum w_j \sum (\log j)^2 w_j - (\sum \log j \times w_j)^2}, \quad b = \frac{\sum \log L_j w_j - a \sum \log j \times w_j}{\sum w_j}.$$

Według autora tej modyfikacji zastosowanie modelu regresji ważonej daje większą realność oszacowań i stabilność parametrów prostej aproksymującej wykres, przez co stwarza większe możliwości porównania różnych systemów osadniczych [Sokołowski 2001]. Aby sprawdzić, czy propozycja autora jest użytecznym narzędziem w badaniach osadniczych, autorka postanowiła zastosować model regresji prostej i ważonej oraz średniego wykładnika do porównania miejskiej sieci osadniczej Polski w drugiej połowie XX wieku w latach: 1950, 1960, 1978, 1988 i 1999.

Poszukiwanie jak najlepszej metody aproksymacji punktów na przykładzie miejskiej sieci osadniczej w Polsce w drugiej połowie XX wieku.

Po II wojnie światowej w Polsce zmieniła się liczba i wielkość miast, skutkiem czego zmieniała się również miejska sieć osadnicza. Według Narodowego Spisu Powszechnego z 1950 r. największym miastem była wówczas Warszawa licząca 803 888 mieszkańców, a najmniejszym Lędyczek, w którym mieszkało jedynie 707 osób. Równanie regresji prostej aproksymującej układ punktów na wykresie ma postać L_j = 6,401 – 1,111log j. Z kolei postać funkcji regresji ważonej aproksymującej układ punktów ma równanie L_j = 5,058 - 0,939log j. Wykładnik kontrastu dla regresji prostej $|a| > 1$, natomiast liczony dla regresji ważonej $|a| < 1$. Zastosowanie metody średniego wykładnika proponowanego przez Kostubca daje kolejną postać równania prostej aproksymującej L_j = 5,9052 – 0,879log j, w której wykładnik kontrastu $|a| < 1$.

Analiza równań prostych wyznaczonych dla miejskiej sieci osadniczej Polski w kolejnych latach: 1960, 1978, 1988 i 1999 wykazuje znaczną różnicę między wartościami wskaźnika kontrastu policzonymi trzema sposobami (Tab. 1). Różnica ta zwiększała się w kolejnych latach, gdyż wartość wykładnika liczonego za pomocą regresji prostej w kolejnych latach wzrastała a w wartość wykładnika liczonego za pomocą regresji ważonej i średniego wykładnika malała. Należy więc zadać pytanie, która metoda daje lepszy wynik badawczy i jest poprawna?

Tabela 1

Tabela 1 Równania prostych aproksymujących układ punktów dla miejskiej sieci osadniczej w Polsce w latach 1950, 1960, 1978, 1988, 1999

rok	Równanie prostej		
	Regresja prosta	Regresja ważona	metoda średniego wykładnika
1950	L_j = 6,401 – 1,111log j	L_j = 6,058 – 0,939log j	L_j = 5,9052 - 0,879log j
1960	L_j = 6,294 – 1,012log j	L_j = 6,179 - 0,923log j	L_j = 6,057 - 0,897log j
1978	L_j = 6,899 – 1,188log j	L_j = 6,312 – 0,899log j	L_j = 6,192 - 0,890log j
1988	L_j = 7,159 – 1,199log j	L_j = 6,343 – 0,880log j	L_j = 6,219 - 0,874log j
1999	L_j = 7,022 - 1,200log j	L_j = 6,346 - 0,872log j	L_j = 6,209 - 0,863log j

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GUS

Odpowiedzi można udzielić, podejmując trud zastosowania kolejnych metod badań nad siecią osadniczą. Pamiętając o tym, że wartość wykładnika kontrastu $|a| > 1$ oznacza koncentrację ludności w dużych miastach systemu, warto sprawdzić jaki odsetek ludności mieszkał w miastach największych.

Tabela 2
Zmiany udziału Warszawy i 10 największych miast w Polsce w liczbie ludności miejskiej w drugiej połowie XX wieku

	Odsetek ludności miejskiej	
Rok	Warszawa	10 największych miast
1950	8,3	33,9
1960	8,3	32,3
1978	7,7	29,8
1988	7,1	27,7
1999	6,7	26,2

Źródło opracowanie własne na podstawie danych GUS

W XX wieku w Polsce nastąpił gwałtowny wzrost urbanizacji, okazuje się jednak, że przyrost naturalny oraz migracje do Warszawy i największych polskich miast – mimo, że w liczbach bezwzględnych bardzo wysokie – nie spowodowały zwiększenia odsetka liczby ludności w skali całej miejskiej sieci osadniczej (Tab. 2). Wręcz przeciwnie z roku na rok jego wartość systematycznie spadała, co oznacza, że nie zwiększała się koncentracja ludności miejskiej w dużych miastach. Konsekwencją spadku odsetka liczby ludności, wg reguły Zipfa, powinno być zmniejszanie się wartości współczynnikka kontrastu a. Taka sytuacja zachodzi jedynie w równaniach regresji ważonej i średniego wykładnika. Można zatem wyciągnąć pierwszy pozytywny wniosek na temat wykorzystania regresji ważonej oraz średniego wykładnika w badaniach sieci osadniczej, gdyż wykładniki kontrastu (Tab. 1) miały wartości mniejsze od 1 i systematycznie malały – w przeciwieństwie do równania regresji prostej.

Tabela 3
Wartości sumy kwadratów odchyleń teoretycznej od rzeczywistej liczby mieszkańców miast w Polsce w latach 1950, 1960, 1978, 1988, 1999.

rok	Wartość sumy kwadratów odchyleń teoretycznej od rzeczywistej liczby mieszkańców miast		
	regresja prosta	regresja ważona	metoda średniego wykładnika
1950	34,92E+11	1,329E+11	0,99E+11
1960	8,035E+11	1,716E+11	1,089E+11
1978	518,708E+11	3,574E+11	2,219E+11
1988	2152,36E+11	4,651E+11	2,871E+11
1999	1019,27E+11	5,81E+11	3,308E+11

Źródło: obliczenia własne

Inny sposób dający możliwość oceny zastosowania określonej metody do aproksymacji punktów polega na sprawdzeniu, która prosta jest lepiej dopasowana do punktów na wykresie. Taką możliwość daje porównanie wartości sumy kwadratów odchyleń teoretycznej od rzeczywistej liczby mieszkańców miast. Oceniając który model regresji daje lepsze dopasowanie prostej do punktów, należy wymienić model regresji ważonej, gdyż dla tego modelu odchylenia wielkości teoretycznych od rzeczywistych (zarówno bezwzględne jak i względne) są dlań dużo niższe i lepiej oddają strukturę sieci (Tab. 3). Jednak jeszcze lepsze dopasowanie daje metoda średniego wykładnika zaproponowana przez Kostrubca (1971).

Można zaobserwować, że spośród trzech wybranych metod aproksymacji punktów prosta wyznaczona metodą średniego wykładnika jest najlepiej dopasowana do układu punktów, metoda regresji ważonej daje również dość dobre dopasowanie, najgorzej wypada dopasowanie prostej wykreślonej za pomocą regresji prostej. Skoro pierwsza z wymienionych metod jest najlepiej dopasowana do układu punktów to również najlepiej oddaje wartość kąta α nachylenia prostej do osi X. Można ją więc z powodzeniem polecić do interpretacji wartości wykładnika kontrastu w regule Zipfa.

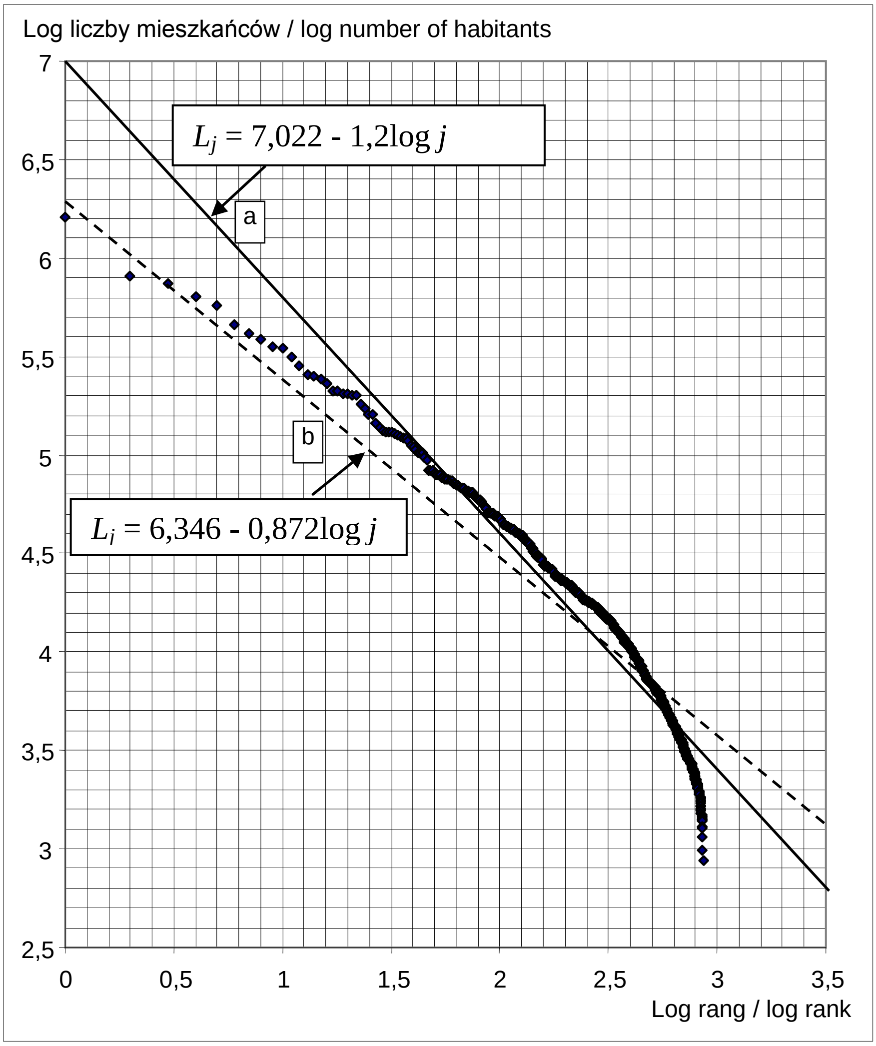
Reguła K.Zipfa stosowana jest również do obliczenia teoretycznej liczby mieszkańców i porównania jej z liczbą rzeczywistą. Obliczeń dokonuje się korzystając z równania prostej aproksymującej. Jak wspomniano wcześniej, metoda średniego wykładnika nie ma zastosowania w określaniu teoretycznej liczby ludności największych miast, gdyż nie daje możliwości oszacowania liczby mieszkańców miasta największego, dlatego dalsze rozważania dotyczą jedynie równań regresji.

Posługując się równaniem regresji prostej i ważonej, przedstawiono dyskusją nad interpretacją wartości teoretycznych liczby mieszkańców miast w latach 1999 i 1950 w Polsce. W ciągu pół wieku zaszły poważne zmiany w miejskiej sieci osadniczej w Polsce, które powinny znaleźć odzwierciedlenie w zmianach kąta nachylenia prostej i wartości teoretycznych i empirycznych liczby mieszkańców miast.

W roku 1999 było 861 miast, w których największe – Warszawa – liczyło 1618468 mieszkańców, a najmniejsze Wyśmierzyce – 861. Równanie regresji prostej aproksymującej układ punktów na wykresie ma postać $L_j = 7{,}022 - 1{,}2\log j$. Oznacza yo, że kąt nachylenia prostej do osi X wynosi $\alpha = -135{,}97^o$. Z kolei postać funkcji regresji ważonej aproksymującej układ punktów ma równanie $L_j = 6{,}346 - 0{,}872\log j$, a kąt $\alpha = -134{,}37^o$ (ryc. 1). Różnica między nachyleniem prostych do osi X jest dość wysoka i wynosi 1,6º.

Teoretyczna liczba ludności dla 10 największych miast w roku 1999 wyznaczona za pomocą równania regresji prostej i ważonej różni się od rzeczywistej (Tab. 4). W przypadku regresji prostej różnice między teoretyczną a empiryczną liczbą mieszkańców te są tak duże, że budzą poważne wątpliwości w zasadność jej stosowania, gdyż każde z 10 największych miast ma poważne niedobory liczby mieszkańców (Warszawa aż o blisko 9 mln!). Z kolei w przypadku zastosowania regresji ważonej różnice te są dużo niższe i bardziej odpowiadają rzeczywistej liczbie mieszkańców, zwłaszcza jeśli w przypadku czterech największych miast – Warszawy, Łodzi, Krakowa i Wrocławia –

wziętoby pod uwagę liczbę mieszkańców w aglomeracji. Kolejne miasta – Poznań, Szczecin, Bydgoszcz, Lublin i Katowice – mają niewielkie niedobory liczby mieszkańców. Najmniejsza różnica między wartością teoretyczną a rzeczywistą liczbą mieszkańców występuje w Gdańsku (Tab. 4).



Ryc.1 Krzywa kolejności-wielkości miast w Polsce w 1999 r. a – wykres regresji prostej, b – wykres regresji ważonej
Fig.1 Rank-size distribution of Polish towns in 1999 a – linear regression, b – weight regression
Źródło: opracowanie własne

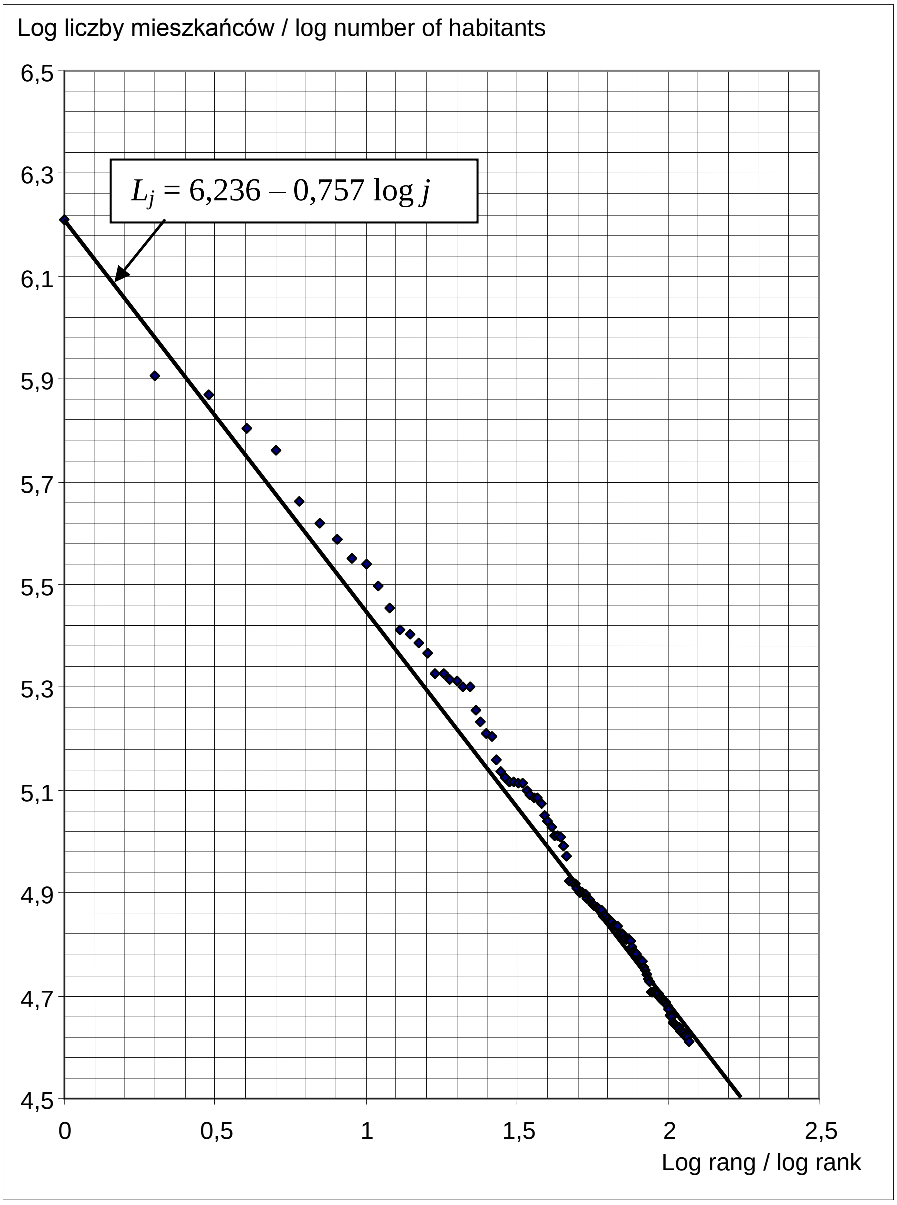
Tabela 4
Rzeczywista teoretyczna liczba ludności w 10 największych miastach w Polsce w 1999 r.

Ranga	Miasto	liczba ludności			odchylenie wielkości teoretycznych określonych za pomocą			
		rzeczywista	teoretyczna określona za pomocą		regresji	regresji ważonej	regresji	regresji ważonej
			regresji	regresji ważonej	bezwzględne		względne (%)	
1.	Warszawa	1618468	10528281	2217070	8909813	598602	550,5	37,0
2.	Łódź	806728	4582504	1211526	3775776	404798	468,0	50,2
3.	Kraków	740666	2816971	850768	2076305	110102	280,3	14,9
4.	Wrocław	637877	1994565	662042	1356688	24165	212,7	3,8
5.	Poznań	578235	1525985	545000	947750	-33235	163,9	-5,7

5.	Gdańsk	458988	1226105	464905	767117	5917	167,1	1,3
7.	Szczecin	416988	1019031	406442	602043	-10546	144,4	-2,5
8.	Bydgoszcz	386855	868147,6	361775	481293	-25080	124,4	-6,5
9.	Lublin	356251	753715,3	326470	397464	-29781	111,6	-8,4
10.	Katowice	345934	664194,9	297817	318261	-48117	92,0	-13,9

Źródło: opracowanie własne, na podstawie danych GUS.

Po zastosowaniu modyfikacji Sokołowskiego [2001], która okazała się godną polecenia do obliczeń teoretycznej liczby mieszkańców miast, warto zwrócić uwagę na możliwość wyznaczenia punktu przełamania na wykresie Zipfa. Można zaproponować aby był to punkt przecięcia dwóch prostych regresji. W przypadku wykresu przedstawiającego sieć miast w 1999 r., byłby to punkt reprezentujący 117 (ranga) miasto Świdnik z 40 797 mieszkańcami. Skoro reguła Zipfa przestaje obowiązywać poniżej punktu przełamania, to należałoby wyznaczyć równanie regresji ważonej dla 117 największych miast w Polsce. Ma ono postać $L_j = 6{,}236 - 0{,}757 \log j$, a kąt $\alpha = -134{,}44^o$.



Ryc. 2 Wykres wielkości-kolejności 117 największych miast w Polsce w 1999 r., wykres regresji ważonej
Fig 2. Rank-size distribution of Polish 117 the biggest town in 1999, weight regression
Źródło: opracowanie własne

Wartość odchyleń wielkości teoretycznych od rzeczywistych jest najmniejsza spośród trzech wyznaczonych równań regresji, czyli równanie to jest najlepiej dopasowane do układu punktów. Liczba mieszkańców Warszawy różni się od rzeczywistej jedynie o 100 tys., co stanowi jedynie 6,6% jej wielkości (Tab 5). Najbardziej niedopasowana do równania regresji jest Łódź z 800 tys. mieszkańców, która, wg reguły Zipfa, powinna liczyć ponad 1 mln mieszkańców, czyli około 200 tys. osób więcej. Pozostałe miasta pierwszej dziesiątki mają niewielki niedobór liczby mieszkańców, a wśród nich Kraków ma ich liczbę najbardziej zbliżoną do wartości teoretycznych.

Tabela 5
Rzeczywista i teoretyczna liczba ludności w 10 największych miastach w Polsce w 1999 r.
(równanie regresji ważonej $L_j = 6{,}236 - 0{,}757 \log j$ dla 117 miast)

Ranga	Miasto	liczba ludności		odchylenie wielkości teoretycznych	
		rzeczywista	teoretyczna	bezwzględne	względne (%)
1.	Warszawa	1618468	1725441	106973	6,6
2.	Łódź	806728	1021194	214466	26,6
3.	Kraków	740666	751379	10713	1,4
4.	Wrocław	637877	604389	-33488	-5,2
5.	Poznań	578235	510486	-67749	-11,7
5.	Gdańsk	458988	444700	-14288	-3,1
7.	Szczecin	416988	395738	-21250	-5,1
8.	Bydgoszcz	386855	357705	-29150	-7,5
9.	Lublin	356251	327203	-29048	-8,2
10.	Katowice	345934	302129	-43805	-12,7

Źródło: opracowanie własne

Aby nie formułować zbyt pochopnych wniosków wysnutych na podstawie analizy miejskiej sieci osadniczej w 1999 r., powtórzono procedurę badawczą dla miast w 1950 r. (Tab. 6 i 7). I tym razem odchylenia od wartości empirycznych obliczone za pomocą regresji ważonej były dużo niższe i lepiej oddające własności systemu miast w Polsce, niż liczone za pomocą regresji prostej. Interesujący jest fakt, że teoretycznie w 1950 r. Warszawa liczyła ponad 300 tys. mieszkańców za mało, a Łódź ponad 20 tys. za dużo.

Tabela 6
Rzeczywista i teoretyczna liczba ludności w 10 największych miastach w Polsce w 1950 r.

Ranga	Miasto	liczba ludności			odchylenie wielkości teoretycznych określonych za pomocą			
			teoretyczna określona za pomocą		regresji	regresji ważonej	regresji	regresji ważonej
		rzeczywista	regresji	regresji ważonej	bezwzględne		względne (%)	
1.	Warszawa	803888	2515935	1143328	1712047	339440	213,0	42,2
2.	Łódź	620183	1164468	596455	544285	-23728	87,8	-3,8
3.	Kraków	343638	742020	407635	398382	63997	115,9	18,6
4.	Poznań	320670	538959	311161	218289	-9509	68,1	-3,0
5.	Wrocław	308925	420579	252354	111654	-56571	36,1	-18,3

5.	Gdańsk	194633	343435	212656	148802	18023	76,5	9,3
7.	Szczecin	178907	289359	184006	110452	5099	61,7	2,8
8.	Katowice	175496	249450	184006	73954	8510	42,1	4,8
9.	Bytom	173955	218843	184006	44888	10051	25,8	5,8
10.	Zabrze	172355	194660	184006	22305	11651	12,9	6,8

Źródło: opracowanie własne.

Punkt przecięcia tych prostych regresji wypadł w miejscu, gdzie położone było 100. miasto pod względem wielkości, a mianowicie Nysa. Równanie regresji ważonej L_j = 6,001–0,867log j obliczone dla 100 największych miast było dużo lepiej dopasowane. Co ciekawe, tym razem Warszawa liczyła o prawie 200 tys. mieszkańców za mało w stosunku do wartości teoretycznej, a Łódź o 70 tys. za dużo. Zważywszy że był to okres powojennej odbudowy zniszczonej Warszawy, podczas którego Łódź pełniła tymczasowo funkcję „stolicy kraju", można stwierdzić, że teoretyczna liczba mieszkańców była odpowiednia i wskazywała na kierunki przyszłych zmian liczby mieszkańców tych miast.

Tabela 7
Rzeczywista i teoretyczna liczba ludności w 10 największych miastach w Polsce w 1950 r. (równanie regresji ważonej L_j = 6,001–0,867log j dla 100 miast)

Kolejność miast wg liczby ludności	Miasto	liczba ludności		odchylenie wielkości teoretycznych	
		rzeczywista	teoretyczna	bezwzględne	względne (%)
1.	Warszawa	803888	1002656	198768	24,7
2.	Łódź	620183	549596	-70587	-11,4
3.	Kraków	343638	386638	43000	12,5
4.	Poznań	320670	301256	-19414	-6,1
5.	Wrocław	308925	248243	-60682	-19,6
5.	Gdańsk	194633	211932	17299	8,9
7.	Szczecin	178907	211932	33025	18,5
8.	Katowice	175496	211932	36436	20,8
9.	Bytom	173955	211932	37977	21,8
10.	Zabrze	172355	211932	39577	23,0

Źródło: opracowanie własne.

Proste wyznaczone za pomocą regresji ważonej są najlepiej dopasowane do układu i mogą być z powodzeniem stosowane do dyskusji na temat teoretycznej liczby mieszkańców wszystkich miast. Jeżeli rozważania dotyczą miast o największej liczbie ludności w sieci osadniczej to najsłuszniej będzie skorzystać z ostatniej propozycji, w której zmniejszono – w punkcie przecięcia wykresu funkcji regresji prostej i ważonej– liczbę miast w równaniu regresji.

Wnioski

W badaniach miejskiej sieci osadniczej reguła kolejności-wielkości (*rank-size*) K. Zipfa jest bardzo dobrym narzędziem badawczym, o ile pamięta się o najlepszym dopasowaniu prostej do danych empirycznych. Zwrócił już na to uwagę K. Dziewoński [1990, s.154], który pisał, że „W końcowym efekcie będziemy mieli kilka krzywych (równań), które będą mniej więcej odpowiadać danym reprezentujących nasz system. Trzeba będzie dokonać koniecznego wyboru zanim przejdziemy do interpretacji wyników. Oczywiście trzeba będzie wybrać najlepiej dopasowaną krzywą".

Przedstawione powyżej przykłady zastosowania odmiennych metod aproksymacji punktów (średniego wykładnika, regresji prostej i ważonej) potwierdzają, że wyznaczone z ich pomocą proste są lepiej lub gorzej dopasowane do danych empirycznych, co w konsekwencji prowadzi do odmiennych wniosków. Z tych rozważań wynika, że zanim przystąpimy do interpretacji reguły Zipfa, powinniśmy mieć pewność, że równanie prostej jest jak najlepiej dopasowane do danych a to można stwierdzić tylko przez porównanie kilku prostych wyznaczonych różnymi metodami.

Najlepiej dopasowaną prostą okazała się ta, która została wyznaczona metodą średniego wykładnika proponowaną przez Kostrubca. Może ona z powodzeniem służyć do wyznaczenia kąta nachylenia prostej do osi X, analizy dynamicznej i porównania sieci osadniczych, nie daje jednak możliwości szacowania teoretycznej liczby mieszkańców miasta największego.

Można uznać, że regresja ważona jest dobrze dopasowana do punktów na wykresie i może służyć zarówno do wyznaczania wykładnika kontrastu jak i obliczeń teoretycznej liczby mieszkańców miast. Z kolei kąt nachylenia prostej wyznaczonej za pomocą regresji ważonej dla grupy miast największych, niewiele się różni kąta nachylenia wyznaczonego dla wszystkich miast, ale daje lepsze dopasowanie do punktów reprezentujących na wykresie miasta o dużej liczbie mieszkańców. Wskazano na punkt przełamania na wykresie K. Zipfa, który znajduje się na przecięciu linii regresji prostej i ważonej. Metodą regresji ważonej dla miast znajdujących się powyżej punktu przełamania można stosować do rozważań na temat teoretycznej liczby mieszkańców jedynie tej grupy miast. Należy pamiętać o czym wspominali Dziewoński [1990] i Zagożdżon [1979], że system osadniczy może się składać z kilku podsystemów.

Bibliografia

Dobrowolski M. 1977, Ocena przydatności reguły wielkości i kolejności w testowaniu doboru modeli symulacyjnych obliczeń prognostycznych oraz przyczynek do ich interpretacji, Komunik. Instyt. Arch.Polit. Wr., nr 119, (za: Drobek, Heffner 1980)

Drobek W., Heffner K., 1980 zastosowanie reguły wielkości i kolejności do analizy systemów osadniczych regionów dolin rzecznych, Czasopismo Geograficzne nr 51, z.4 s.383-400

Dziewoński K. 1990, *Koncepcje i metody badawcze z dziedziny osadnictwa*. Prace Geograficzne nr 154, PAN IGEiPZ, Zakład Narodowy im. Ossolińskich, Wydawnictwo PAN, Wrocław, Warszawa, Kraków, Gdańsk, Łódź., s.289

Gabaix X., 1999, *Zipf's law for cities: an explanation*, Quarterly Journal of Economics, vol. 119, s.739-767

Heffner K., 1992, Przekształcenia *układu hierarchicznego miast Opolszczyzny,* Acta Universitatis Wratislaviensis 1238; Studia Geograficzne 52, s. 149-171

Kania C., 1966 *,Metoda analizy „wielkości i kolejności" osiedli na przykładzie województwa opolskiego*. Czasopismo Geograficzne, t. 37, z. 3, s. 311-323.

Kostrubiec B. 1971, *Analiza matematyczna zbioru osiedli województwa opolskiego,* [w:] S. Golachowski (red.) Struktury i procesy osadnicze. Region opolski. PWN, Instytut Śląski w Opolu, Opole – Wrocław, s. 9-66.

Sokołowski D., 2001, *Zastosowanie modelu regresji ważonej do aproksymacji wykresu wielkości-kolejności,* [w:] H. Rogacki (red.), Koncepcje teoretyczne i metody badań geografii społeczno-ekonomicznej i gospodarki przestrzennej, Bogucki Wydawnictwo Naukowe, Poznań, s. 169-178

Zagożdżon A. 1979, *Ośrodki regionalne i subregionalne Polski. Charakterystyka ogólna i niektóre problemy metodologiczne*. Acta Universitatis Wratislaviensis 513; Studia Geograficzne 33,
Zipf K. [1949, *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Cambridge, MA, Addison-Wesley] (za: Gabaix 1999)
Zipser T i inni 1976, Prognoza symulacyjna struktury przestrzennej Polski na lata 1990-2000 (II etap, część 1) Komunik. Instyt. Arch.Polit. Wr., nr 101 (za : Drobek, Heffner 1980)

K. Zipf's rank-size rule in search of the best method of point approximation

Summary

The K. Zipf's rank-size rule is considered by many researchers as the most suitable method of analyzing urban settlement systems. In fact, this is a relatively simple method that allows for analyzing the dynamics of an urban systems or comparing different urban systems. The only data required to use this method is the urban population number. This is one of the most important characteristics of settlement system, as each harmoniously developed settlement system has a certain number of towns of a given size. This paper discusses the question of defining the optimal approximation line corresponding to a set of points determined by the K. Zipf's rank-size rule. It is used for assessment of the settlement system and for estimating theoretical urban population. As the interpretation of the results depends on the most accurate tracing the approximation line, it seems appropriate to consider the following issues:

- How to trace the approximation line so as it represent most exactly the real values?
- How does the interpretation vary depending on the approximation method?

To discuss these questions three approximation methods have been selected: linear regression, weighted linear regression, and the average exponent method. The date used in the analysis was the population number in Polish towns in the years 1950, 1960, 1978, 19988, 1999.
The average exponent method turned out to be most representative for the set of points, but this method can not be used for estimating the theoretical population number in the largest city. The best method serving this purpose was the weighted regression. This method can be successfully used, however, to recon the angle between the approximation line and the x-axis, the dynamic analysis and comparing settlement systems. It can be concluded that weighted regression well corresponds to the set of points on the diagram and can be used as well to determine the contrast exponent and estimate theoretical urban population number.
It is also possible to take into consideration the largest cities in the settlement system and to confine the analysis to trace the line (weighted regression) for this group of cities. The number of cities can be limited by finding the intersection of the two lines representing simple linear regression and weighted regression, and other groups of towns can be formed in a similar way. The angle formed by the line traced for the group of the largest cities is not much different from the previous one, but it represents more exactly these cities on the diagram. Therefore it can be used for analyzing the theoretical urban population only within this group of cities. It should be remembered, as it was pointed to by Dziewoński (1990) and Zagożdżon (1979), that settlement system may be composed of a few subsystems and the method can be modified in order to analyze one of the subsystems.
The simple linear regression method yields greatly varying values of the contrast exponent and the interpretation of the results is very controversial. Therefore in some cases using this method should be considered as a methodical error.