J A C E K   Ł A T U S K I E W I C Z

P R A C A   D O K T O R S K A

p t

U K Ł A D Y   S T O C H A S T Y C Z N E

do
prof Jerzy Jaroń

ŁODZ 1970

O. Wstęp

Matematyczne teorie układów przełączających i automatów skończonych rozwinęły się jako jedne z podstawowych i ważniejszych rozdziałów współczesnej matematycznej teorii automatycznego sterowania. Na ich bazie rozwiązuje się podstawowe i inżynieryjne problemy konstrukcji złożonych liczących, sterujących i kontrolujących maszyn, złożonych układów automatycznego sterowania, układów cybernetycznych itp. Takie dyscypliny techniczne jak teoria konstrukcji maszyn liczących, sterujących i kontrolujących, automatycznych central telefonicznych itd. w znacznym stopniu mogą być zbudowane w oparciu o matematyczne teorie układów przełączających i automatów skończonych.

Obecnie zwraca się szczególną uwagę na następujące problemy z zakresu tych teorii:

a/ określenie funkcji, które mogą być realizowane oraz oszacowanie koniecznej do tego celu liczby elementów i czasu;

b/ opracowanie wygodnego języka formalnego dla zapisania warunków pracy urządzeń, pozwalającego już w pierwszych etapach syntezy na przeprowadzenie minimalizacji;

c/ kodowanie stanów;

d/ badanie niezawodności urządzeń drogą rozpracowania tak ogólnych problemów teorii automatów stochastycznych jak i inżynieryjnych metod obliczania niezawodności i wyboru pojemności strukturalnego funkcjonalnego nadmiaru przy przeprowadzaniu syntezy.

Szereg teorii matematycznych bada układy dyskretne.Do najbardziej znanych zaliczamy: teorię układów przełączających /[6], [26]/,teorię automatów skończonych /[8],[10],[18],[29]/,teorię maszyn sekwencyjnych /[27]/,teorię sieci logicznych /[1]/ i teorię abstrakcyjnych sieci neuronowych /[32]/.Rozwój tych teorii wykazał,że w zasadzie tworzą one jedną teorię i jest coraz trudniej pewne badania przeprowadzać tylko w jednej z nich.Szczególnie jest to widoczne na przykładzie teorii układów przełączających i automatów skończonych.Jeszcze kilka lat temu M.A.Gawryłow /[5]/ uważał,że istotną różnicą między teorią automatów skończonych a teorią układów przełączających jest nierozpatrywanie przez tą pierwszą urządzeń asynchronicznych.Jednak obecnie ukazyły się nawet monografie poświęcone asynchronicznym automatom skończonym /[13],[24]/.

J.Jaroń w latach pięćdziesiątych zdefiniował tzw.elementarne cybernetyczne izolowane systemy /[14]/,które wychodzą poza wspomniane tu teorie.Bazując na klasycznym ujęciu elementu jako ,,czarnej skrzynki" określa w sposób aksjomatyczny układy oznaczające się dużą ogólnością.W przypadku zdeterminowanych układów cybernetycznych i zdeterminowanych automatów skończonych można łatwo wykazać,że każdy automat skończony daje się zbudować poprzez superpozycję elementarnych izolowanych systemów cybernetycznych. Ciekawszy natomiast jest przypadek,jeśli będziemy rozpatrywali układy stochastyczne i właśnie do tego w dalszym ciągu się ograniczymy.Podana niżej definicja układu stochastycznego powstała w oparciu o definicje układów cybernetycznych podane przez J. Jaronia w pracach [15], [14], [16], [17].

Złożoność i trudność tej tematyki oraz jej doniosłość została dobitnie podkreślona przez S.M.Ulama w monografii [34].

1. Definicja i podstawowe własności układu stochastycznego

Definicja 1.1. Układem stochastycznym będziemy nazywali uporządkowaną ósemkę $\langle X, Y, T, p_x, P_z, g_x, G_z, f \rangle$ zbiorów i funkcji spełniających zależności:

A.1.1. $1 < \mathrm{card}(X) \leqslant \aleph_0$

A.1.2. $1 < \mathrm{card}(Y) \leqslant \aleph_0$

A.1.3. $1 < \mathrm{card}(T) \leqslant \aleph_0$

A.2.1. $f : T \to T$

A.3.1. $p_x : 2^X \to R$

A.3.2. $P_z = \{ p_z^a \mid a \in X \wedge p_z^a : 2^{\{a\} \times Y} \to R \}$

A.4.1. $p_x(X) = 1$

A.4.2. $a \in X \Rightarrow p_z^a(\{a\} \times Y) = 1$

A.5.1. $A \subset X \Rightarrow p_x(A) \geqslant 0$

A.5.2. $a \in X \Rightarrow (Z \subset \{a\} \times Y \Rightarrow p_z^a(Z) \geqslant 0)$

A.6.1. $((\forall n)(A_n \subset X) \wedge (\forall k,l)(k \neq l \Rightarrow A_k \cap A_l = 0)) \Rightarrow$

$$p_x\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p_x(A_i)$$

A.6.2. $a \in X \Rightarrow (((\forall n)(Z_n \subset \{a\} \times Y) \wedge (\forall k,l)(k \neq l \Rightarrow Z_k \cap Z_l = 0))$

$$\Rightarrow p_z^a\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p_z^a(Z_i)$$

A.7.1. $g_x : T \times X \to X$

A.7.2. $G_z = \{ g_z^a \mid a \in g_x(T \times X) \wedge g_z^a : f(T) \times \{a\} \times Y \to \{a\} \times Y \}$

A.8.1. $g_x(\{t\} \times X) = \bigcup_{a \in X} pr_1(g_z^a(\{f(t)\} \times \{a\} \times Y))$

Uwaga: p_x, p_z, g_x, g_z są symbolami podstawowymi naszego języka, w symbolach p_z^a i g_z^a litera „a" jest indeksem.

Zbiór układów stochastycznych oznaczać będziemy przez Γ.

Lemat 1.1. Trójki uporządkowane $\langle X, 2^X, p_X \rangle$ i $\langle \{a\}\times Y, 2^{\{a\}\times Y}, p_Z^a \rangle$ gdzie $a \in X$, są przestrzeniami stochastycznymi o mierze zupełnej.

Dowód. Rodzina 2^X jest niepusta, zamknięta względem różnicy zbiorów, zamknięta względem przeliczalnej sumy zbiorów i należy do niej zbiór X, więc funkcja p_X jest określona na σ - algebrze zbioru X. Ponieważ p_X jest określona na pierścieniu, nieujemna /A.5.1/, przeliczalnie addytywna /A.6.1/ i dla zbioru pustego równa się zero /bowiem z A.4.1 wynika, że $1 = p_X(X) = p_X(X \cup 0) = p_X(X) + p_X(0) = 1 + p_X(0)$/, więc jest miarą stochastyczną. Spełnia ona także następujący warunek zupełności : $(A \subset B \wedge B \in \mathfrak{X} \wedge p_X(B) = 0) \Rightarrow A \in \mathfrak{X}$.

Z powyższego wynika, że $\langle X, 2^X, p_X \rangle$ jest przestrzenią stochastyczną o mierze zupełnej.

Identyczny dowód jest dla każdej z trójek uporządkowanych $\langle \{a\}\times Y, 2^{\{a\}\times Y}, p_Z^a \rangle$.

Lemat 1.2. $\sum_{a \in X} p_X(\{a\}) \cdot p_Z^a(\{a\}\times B) < \infty$, gdzie $B \subset Y$.

Dowód. Szereg posiada tylko wyrazy nieujemne, a więc dla ustalonego B ciąg sum częściowych jest niemalejący. Dla każdego $a \in X$ $p_Z^a(\{a\}\times B) \leq 1$, więc

$$0 \leq p_X(\{a\})\, p_Z^a(\{a\}\times B) \leq p_X(\{a\}).$$

Szereg $\sum_{a \in X} p_X(\{a\})$ jest zbieżny i jego granica jest równa jedynce /A.6.1 i A.4.1/ , a więc na podstawie kryterium porównawczego nasz szereg jest zbieżny dla każdego $B \subset Y$.

Twierdzenie 1.1. Jeżeli funkcja $p_y : 2^Y \to R$ jest określona następująco:

$$B \subset Y \Rightarrow p_y(B) = \sum_{a \in X} p_x(\{a\})\, p_z^a(\{a\} \times B),$$

to trójka uporządkowana $\langle Y, 2^Y, p_y \rangle$ jest przestrzenią stochastyczną o mierze zupełnej.

Dowód. Wystarczy wykazać następujące zależności:

1/ p_y jest określona na σ - algebrze zbioru Y ;

2/ $B \subset Y \Rightarrow p_y(B) \geqslant 0$;

3/ $p_y(Y) = 1$;

4/ p_y jest przeliczalnie addytywna ;

5/ $(A \subset B \in \mathcal{Y} \wedge p_y(B) = 0) \Rightarrow A \in \mathcal{Y}$;

Zależność pierwsza wynika z tego, że p_y jest określona na rodzinie wszystkich podzbiorów zbioru Y, a więc na podstawie pierwszej części dowodu lematu 1.1 jest określona na σ - algebrze.

Zależność druga wynika z lematu 1.2.

Zależność trzecia wynika z lematu 1.2 oraz równości :

$$p_y(Y) = \sum_{a \in X} p_x(\{a\})\, p_z^a(\{a\} \times Y) = \sum_{a \in X} p_x(\{a\}) = p_x\Big(\bigcup_{a \in X} \{a\}\Big) = p_x(X) = 1$$

Zależność czwarta wynika z następującej równości :

$$p_y\Big(\bigcup_i B_i\Big) = \sum_{a \in X} p_x(\{a\})\, p_z^a\Big(\{a\} \times \bigcup_i B_i\Big) = \sum_{a \in X} p_x(\{a\})\, p_z^a\Big(\bigcup_i \{a\} \times B_i\Big)$$
$$= \sum_{a \in X} p_x(\{a\}) \cdot \sum_i p_z^a(\{a\} \times B_i) =$$
$$\sum_i \sum_{a \in X} p_x(\{a\})\, p_z^a(\{a\} \times B_i) = \sum_i p_y(B_i)$$

Zależność piąta wynika z tego, że p_y jest określona na wszystkich podzbiorach zbioru Y.

W dalszym ciągu przez p_y oznaczać będziemy funkcję spełniającą założenia twierdzenia 1.1.

Definicja 1.2. Jeżeli A i A' są zbiorami, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ są rodzinami podzbiorów A i A' a $p : \mathcal{A} \to R$ i $p' : \mathcal{A}' \to R$, to funkcja h odwzorowuje trójkę uporządkowaną $\langle A, \mathcal{A}, p\rangle$ na trójkę uporządkowaną $\langle A', \mathcal{A}', p'\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione następujące warunki :

a/ $h(A) = A'$;

b/ $\mathcal{A}' = \{K \mid (\exists B \in \mathcal{A})(h(B) = K)\}$;

c/ $a' \in A' \Rightarrow p'(\{a'\}) = p(\{x \mid h(x) = a'\})$;

Twierdzenie 1.2. Dla każdego $t \in T$ funkcja g_x odwzorowuje przestrzeń stochastyczną $\langle X, 2^X, p_x\rangle$ na pewną przestrzeń stochastyczną.

Dowód. Z definicji 1.2 oraz warunku A.7.1 wynikają zależności :

a/ $g_x(\{t\} \times X) = X' \subset X$;

b/ $\mathcal{A}' = \{K \mid (\exists B \in 2^X)(g_x(\{t\} \times B) = K)\} = 2^{X'}$;

c/ $x' \in X' \Rightarrow p_x'(\{x'\}) = p_x(\{a \mid g_x(\{t\} \times \{a\}) = x'\})$.

Ponieważ p_x' jest określona na $2^{X'}$, więc jest określona na σ - algebrze zbioru X'. Z zależności c/ wynika, że p_x' jest nieujemna, dla zbioru X' jest równa jedynce /bowiem $p_x'(X') = p_x(\{a \mid g_x(\{t\} \times X)\}) = p_x(X) = 1$ /, przeliczalnie addytywna oraz zupełna. Ostatecznie więc $\langle X', 2^{X'}, p_x'\rangle$ jest przestrzenią stochastyczną o mierze zupełnej.

Twierdzenie 1.3. Jeżeli $a \in g_x(T \times X)$, to dla każdego $t \in f(T)$ funkcja g_z^a odwzorowuje przestrzeń stochastyczną

$\langle \{a\} \times Y, 2^{\{a\} \times Y}, p_z^a \rangle$ na przestrzeń stochastyczną $\langle \{a\} \times B, 2^{\{a\} \times B}, q_z^a \rangle$, gdzie $B \subset Y$ i

$q_z^a : 2^{\{a\} \times B} \to R.$

Dowód. Z aksjomatu A.8.1 wynika, że obraz g_z^a będzie równy a B, dalszy ciąg dowodu jest identyczny jak dla twierdzenia poprzedniego.

Twierdzenie 1.4. Jeżeli funkcja $g_y : f(T) \times Y \to Y$ jest określona następująco :

$$B \subset Y \Rightarrow g_y(\{f(t)\} \times B) = \bigcup_{a \in X} pr_2 g_z^a(\{f(t)\} \times \{a\} \times B),$$

to odwzorowuje ona przestrzeń stochastyczną $\langle Y, 2^Y, p_y \rangle$ na przestrzeń stochastyczną.

Dowód. Z twierdzenia 1.1 wynika, że $\langle Y, 2^Y, p_y \rangle$ jest przestrzenią stochastyczną. Dowód dalszej części twierdzenia jest identyczny jak twierdzenia 1.2.

Z podanych wyżej twierdzeń wynika, że funkcje g_x, g_y oraz g_z^a, gdzie $a \in g_x(T \times X)$ stanowią pewne uogólnienia pojęcia fukcji stochastycznej, a to ze względu na dwie podane niżej własności :

a/ dla ustalonego $t \in T$ /przekroju funkcji/ otzrymujemy odpowiednik zmiennej losowej ale o wartościach niekoniecznie ze zbioru liczb rzeczywistych ;

b/ dla ustalonego $x \in X$ /względnie $y \in Y$ lub $\langle a, y \rangle \in \{a\} \times Y$ / otrzymujemy odpowiednik realizacji funkcji stochastycznej /trajektorii funkcji stochastycznej /ale o wartościach niekoniecznie ze zbioru liczb rzeczywistych.

Jedno z pierwszych uogólnień funkcji stochastycznej podane jest w pracy W.Grenandera [11],który rozpatruje twierdzenia graniczne na strukturach algebraicznych,w szczególności na grupach. Bada on rozkład prawdopodobieństwa na strukturze w której określona jest co najmniej jedna binarna operacja algebraiczna ciągła w odpowiedniej topologii.

Z powyższych rozważań wynika,że układ stochastyczny można traktować jako trójkę uporządkowaną $\langle g_x, G_z, f \rangle$,gdzie g_x jest funkcją stochastyczną na zbiorze X,zwanym dalej alfabetem wejściowym ; G_z jest zbiorem funkcji stochastycznych określonych na odpowiednich pozbiorach iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$,a f jest funkcją zależności ,,czasowych" między g_x a G_z.Układowi stochastycznemu można przyporządkować funkcję stochastyczną g_y określoną na zbiorze Y,zwanym dalej alfabetem wyjściowym układu stochastycznego.

Ze względu na aksjomat A.S.2 dla ustalonego $t \in T$ istnieje przedstawienie algebraiczne układu stochastycznego o następującej postaci tablicowej :

	X \ Y	y_1	y_2	...	y_m	...
p_1	x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	...
p_2	x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	...
.	.	.	.	...	.	...
.	.	.	.	...	.	...
p_n	x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	...
.	.	.	.	...	.	...
.	.	.	.	...	.	...

gdzie :

$$p_i = p_X(\{x_i\}) \quad \text{oraz} \quad p_{ij} = p_Z^{x_i}(\{\langle x_i, y_j\rangle\}).$$

Przy założeniu,że elementy zbiorów X i Y są odpowiednio uporządkowane,można rozpatrywać tylko prawdopodobieństwa pojawienia sią liter alfabetu wejściowego oraz prawdopodobieństwa pojawienia się elementów iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$.W dalszym ciągu jednowierszową macierz prawdopodobieństw pojawiania się elementów alfabetu wejściowego X w chwili $t \in T$ oznaczać będziemy przez $X(t)$ i nazywać macierzą wejść układu stochastycznego w chwili t,natomiast dwuwymiarową macierz prawdopodobieństw pojawiania się par należących do iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$ w chwili $t \in T$ oznaczać będziemy przez ~~Rx~~ $R(\hat{t})$,gdzie $\hat{t} = f(t)$ i nazywać macierzą przejść układu stochastycznego w chwili $\hat{t}$.

Z definicji 1.1 i twierdzenia 1.1 wynika,że X t oraz R $\hat{t}$ są macierzami stochastycznymi.

2.Układ stochastyczny a stochastyczne automaty skończone

W latach sześćdziesiątych rozpoczęto badania z zakresu teorii stochastycznych automatów skończonych.Stochastyczne automaty skończone zdefiniowali m.in. N.M.Lewin /[22]/,M.O.Rabin /[31]/ i P.H. Starke /[33]/.Definicje Lewina i Starka są uogólnieniem definicji zdeterminowanych automatów skończonych Mealy'ego /[25]/ i Moore'a /[27]/ na przypadek,gdy funkcje zminności i wyjścia są stochastyczne.Natomiast Rabin bazuje na definicji zdeterminowanego automatu skończonego,podanej przez niego m.in. w pracy /[31]/.Podamy w sposób sformalizowany te wszystkie definicje zdeterminowanych automatów skończonych.

Definicja 2.1.Zdeterminowanym automatem skończonym Mealy'ego nazywamy uporządkowaną siódemkę $\langle X,Y,S,T,s_0,\delta,\lambda\rangle$,gdzie zbiory X,S i Y są skończone,T jest zbiorem nieujemnych liczb całkowitych,$s_0 \in S$, $\delta : S \times X \to S$ i $\lambda : S \times X \to Y$ oraz są spełnione następujące równania kanoniczne :

$$s(t) = \delta(s(t-1),x(t))$$
$$y(t) = \lambda(s(t-1),x(t))$$

Zdeterminowany automat skończony Moore'a różni się od zdeterminowanego automatu skończonego Mealy'ego jedynie układem równań kanonicznych,które przyjmują postać :

$$s(t) = \delta(s(t-1),x(t))$$
$$y(t) = \lambda(s(t))$$

Starke w swoich definicjach zdeterminowanych automatów skończonych zamiast funkcji δ i λ przyjmuje jedną funkcję $h : S \times X \to Y \times S$,

dla
ale automatów skończonych Moore'a i Mealy'ego równania kanoniczne zachowuje bez zmian.

Natomiast sformalizowana definicja Rabina jest następująca :

Definicja 2.2.Zdeterminowanym automatem skończonym Rabina nazywamy uporządkowaną piątkę $\langle X,S,M,s_0,F\rangle$,gdzie S jest zbiorem skończonym, $M : S \times X \to S, s_0 \in S$ i $F \subset S$.

Opierając się na poważszych definicjach,ich autorzy wprowadzają definicje stochastycznych automatów skończonych.

W tym celu Lewin wprowadza następujące dodatkowe elementy do definicji 1.1 :

a/ wektor stanów początkowych $\vec{\beta}(0) = [\beta_1(0), \beta_2(0),\dots,\beta_N(0)]$, gdzie $\beta_i(0)$ jest prawdopodobieństwem przebywania w i-tym stanie w momencie $t = 0$;

b/ zbiór macierzy zmienności stanów $P(x_k) = [p_{ij}(x_k)]$,gdzie $k = 1,2,\dots,m$ i $p_{ij}(x_k)$ jest prawdopodobieństwem przejścia ze stanu $s(i)$ w stan $s(j)$ w momencie t przy pojawieniu się litery x_k alfabetu wejściowego ;

c/ zbiór macierzy zmienności wyjść $R(x_k) = [r_{ij}(x_k)]$,gdzie $k = 1,2,\dots,m$ i $r_{ij}(x_k)$ jest prawdopodobieństwem pojawienia się w momencie t litery y_j alfabetu wyjściowego przy stanie $s(i)$ i literze x_k alfabetu wejściowego.

Natomiast Starke opierając się na swojej definicji zdeterminowanego automatu skończonego zamiast funkcji h wprowadza funkcjonał stochastyczny nad zbiorami $Y \times S$.

Rabin w swojej definicji stochastycznego automatu skończonego przyjmuje,że $M : S \times X \to [0,1]^{n+1}$,gdzie

$$M(s,x) = [p_0(s,x), p_1(s,x), \ldots, p_n(s,x)] \quad i$$

$$0 \leq p_i(s,x) \quad \text{oraz} \quad \sum_i p_i(s,x) = 1$$

Żaden z autorów powyższych definicji nie podaje przestrzeni stochastycznej,na której są określone wystepujące w nich funkcje stochastyczne,co w pewnym stopniu utrudnia porównanie stochastycznych automatów skończonych z układami stochastycznymi.Tym niemniej takie porównanie przeprowadzimy dla stochastycznych automatów skończonych Lewiny.Dla stochastycznych automatów skończonych Starkego można otrzymać wyniki porównania identyczne.Aby porównać układy stochastyczne ze stochastycznymi automatami skończonymi Rabina wystarczy przyjąć,że zbiory X i Y układu stochastycznego są równe i traktować je jako zbiory stanów,natomiast każdą z macierzy przejść układu stochastycznego traktować jako element zbioru wejść stochastycznego automatu skończonego Rabina.

Aby znaleźć zależności między układem stochastycznym a stochastycznym automatem skończonym wprowadzimy dwa działania typu mnożenia na macierzach trójwymiarowych postaci $[a_{ijk}]_{p,q,r}$.
Dla uogólnienia dalszych rozważań przyjmiemy,że pojawienie się litery x_i alfabetu wejściowego w chwili t jest określone z prawdopodobieństwem $\alpha_i(t)$.

Definicja 2.3.Niech $[a_{ijk}]_{P,Q,R}$ i $[b_{ijk}]_{W,T,U}$ będą macierzami trójwymiarowymi.Jeśli P = 1 i Q = W,to jest określone działanie $[a_{ijk}]_{P,Q,R} \circ [b_{ijk}]_{W,T,U}$ natomiast,jeśli R =1 i Q = U,to jest określone działanie $[a_{ijk}]_{P,Q,R} \square [b_{ijk}]_{W,T,U}$,gdzie

$$[a_{ijk}]_{1,Q,R} \circ [b_{ijk}]_{Q,T,U} = [c_{ijk}]_{R,T,U} \text{ i } c_{rjk} = \sum_{s=1}^{Q} a_{1sr}\, b_{sjk} ,$$

$$[a_{ijk}]_{P,Q,1} \square [b_{ijk}]_{W,T,Q} = [c_{ijk}]_{W,T,P} \text{ i } c_{ijz} = \sum_{s=1}^{Q} a_{zs1}\, b_{ijs} .$$

Lemat 2.1. Jeżeli $R = 1$ i $U = 1$, to

$$[a_{ijk}]_{1,Q,R} \circ [b_{ijk}]_{W,T,U} = [a_{ij}]_{1,Q}\, [b_{ij}]_{W,T}$$

Dowód. $c_{rjk} = \sum_{s=1}^{Q} a_{1sr}\, b_{sjk}$, ponieważ $R = 1$ i $U = 1$, więc $r = 1$ i $k = 1$. Z tego wynika, że

$$c_{1j1} = \sum_{s=1}^{Q} a_{1s1}\, b_{sj1} = \sum_{s=1}^{Q} a_{1s}\, b_{sj}$$

cbdo.

Lemat 2.2. Jeżeli jest dany stochastyczny automat skończony Mealy'ego o macierzy wejść $[\alpha_{ijk}(t)]_{1,m,1}$, macierzy stanów $[\beta_{ijk}(t)]_{1,N,1}$ i macierzy zmienności stanów $[p_{ijk}]_{N,N,m}$, to zachodzi rekurencyjny związek :

$$[\beta_{ijk}(t+1)]_{1,N,1} = [\beta_{ijk}(t)]_{1,N,1} \circ$$

$$\left([\alpha_{ijk}(t+1)]_{1,m,1} \square [p_{ijk}]_{N,N,m}\right)$$

gdzie $t = 0,1,2,\ldots$

Dowód. Z definicji stochastycznego automatu skończonego Mealy'ego wynika, że

$$\beta_{1j1}(t+1) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{N} \beta_{1s1}(t)\, p_{sjk}\, \alpha_{1k1}(t+1) =$$

$$\sum_{s=1}^{N} \beta_{1s1}(t) \sum_{k=1}^{m} \alpha_{1k1}(t+1)\, p_{sjk}$$

cbdo.

Lemat 2.3. Jeżeli jest dany stochastyczny automat skończony Mealy'ego o macierzy wejść $[\alpha_{ijk}(t)]_{1,m,1}$, macierzy stanów początkowych $[\beta_{ijk}(0)]_{1,N,1}$ i macierzy zmienności stanów $[p_{ijk}]_{N,N,m}$, to zachodzi związek

$$[\beta_{ijk}(t)]_{1,N,1} = [\beta_{ijk}(0)]_{1,N,1} \circ \prod_{u=1}^{t} \left([\alpha_{ijk}(u)]_{1,m,1} \,\square\, [p_{ijk}]_{N,N,m}\right)$$

Dowód indukcyjny.

Dla t = 1 otrzymujemy

$$[\beta_{ijk}(1)]_{1,N,1} = [\beta_{ijk}(0)]_{1,N,1} \circ \left([\alpha_{ijk}(1)]_{1,m,1} \,\square\, [p_{ijk}]_{N,N,m}\right)$$

a więc na podstawie lematu poprzedniego twierdzenie jest prawdziwe.

Dla t = n + 1 otrzymujemy na podstawie lematu 2.2 następujące równości :

$$[\beta_{ijk}(n+1)]_{1,N,1} = [\beta_{ijk}(n)]_{1,N,1} \circ \left([\alpha_{ijk}(n+1)]_{1,m,1} \,\square\, [p_{ijk}]_{N,N,m}\right) = \left([\beta_{ijk}(0)]_{1,N,1} \circ \prod_{u=1}^{n} \left([\alpha_{ijk}(u)]_{1,m,1} \,\square\, [p_{ijk}]_{N,N,m}\right)\right) \circ \left([\alpha_{ijk}(n+1)]_{1,m,1} \,\square\, [p_{ijk}]_{N,N,m}\right) = [\beta_{ijk}(0)]_{1,N,1} \circ \prod_{u=1}^{n+1} \left([\alpha_{ijk}(u)]_{1,m,1} \,\square\, [p_{ijk}]_{N,N,m}\right)$$

cbdo.

Lemat 2.4. Jeżeli jest dany stochastyczny automat skończony Mealy'ego o macierzy wejść $[\alpha_{ijk}(t)]_{1,m,1}$, macierzy stanów $[\beta_{ijk}(t)]_{1,N,1}$ i macierzy zmienności wyjść $[r_{ijk}]_{N,n,m}$, to macierz wyjściowa $[\gamma_{ijk}(t)]_{1,m,1}$ wyraża się wzorem :

$$[\gamma_{ijk}(t)]_{1,n,1} = [\alpha_{ijk}(t)]_{1,m,1} \circ ([\beta_{ijk}(t-1)]_{1,N,1} \circ [r_{ijk}]_{N,n,m}$$

Dowód. Z definicji stochastycznego automatu skończonego Mealy'ego wynikają następujące równości :

$$\gamma_{1j1}(t) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{N} \beta_{1l1}(t-1)\, r_{ljk}\, \alpha_{1k1}(t) =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{1k1}(t) \sum_{l=1}^{N} \beta_{1l1}(t-1)\, r_{ljk}$$

cbdo.

Twierdzenie 2.1. Jeżeli X jest alfabetem wejściowym a Y - alfabetem wyjściowym układu stochastycznego oraz stochastycznego automatu skończonego Mealy'ego, to warunkiem wystarczającym, aby dla każdego t macierze wyjściowe tak w układzie jak i automacie były identyczne jest spełnienie następujących warunków :

1/ $(\forall\ t \in T)(f(t) = t)$

2/ $R(t^{\wedge}) = [\beta_{ijk}(t-1)]_{1,N,1} \circ [r_{ijk}]_{N,n,m}$

3/ $X(t) = [\alpha_{ijk}(t)]_{1,m,1}$

Dowód. Twierdzenie wynika z lematów 2.2, 2.3, 2.4 oraz z definicji układu stochastycznego.

Lemat 2.5. Jeżeli jest dany stochastyczny automat skończony Moore'a o macierzy wejść $[\alpha_{ijk}(t)]_{1,m,1}$, macierzy stanów $[\beta_{ijk}(t)]_{1,N,1}$, macierzy zmienności stanów $[p_{ijk}]_{N,N,m}$ i macierzy zmienności wyjść $[r_{ijk}]_{N,n,1}$, to macierz wyjściowa $[\gamma_{ijk}(t)]_{1,n,1}$ wyraża się wzorem:

$$[\gamma_{ijk}(t)]_{1,n,1} = [\alpha_{ijk}(t)]_{1,m,1} \circ (([\beta_{ijk}(t-1)]_{1,N,1} \circ [p_{ijk}]_{N,N,m}) \circ [r_{ijk}]_{N,n,1})$$

gdzie $t = 1,2,3,..$

Dowód. Z definicji stochastycznego automatu skończonego Moore'a wynika, że

$$\gamma_{1j1} = \sum_{z=1}^{N} \beta_{1z1}(t)\, r_{zj1} = \sum_{z=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{1k1}(t) \sum_{s=1}^{N} \beta_{1s1}(t-1)\, p_{szk} \right) r_{zj} =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{1k1}(t) \sum_{z=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} \beta_{1s1}(t-1)\, p_{szk}\, r_{zj} =$$

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_{1k1}(t) \sum_{z=1}^{N} \left(\sum_{s=1}^{N} \beta_{1s1}(t-1)\, p_{szk} \right) r_{zj}$$

cbdo.

Twierdzenie 2.2. Jeżeli X jest alfabetem wejściowym a Y - alfabetem wyjścuowym układu stochastycznego oraz stochastycznego automatu skończonego Moore'a, to warunkiem wystarczającym, aby dla każdego t macierze wyjściowe tak w układzie jak i automacie były identyczne jest spełnienie następujących warunków :

1/ $(\forall t \in T)(f(t) = t)$

$$2/\quad R(t^*) = \left(\left[\beta_{ijk}(t-1)\right]_{1,N,1} \circ \left[p_{ijk}\right]_{N,N,m}\right) \circ \left[r_{ijk}\right]_{N,n,1}$$

$$3/\quad X(t) = \left[\alpha_{ijk}(t)\right]_{1,m,1}$$

Dowód.Twierdzenie jest wniskiem z lematów 2.2,2.3,2.5 oraz z definicji układu szochastycznego.

Z twierdzeń 2.1 i 2.2 wynika,że pojęcie układu stochastycznego jest ogólniejsze od pojęcia stochastycznego automatu skończonego Lewina.Ponieważ definicja podana przez Starkego jest w istocie równoważna definicji Lewina,a definicja Rabina jest w zasadzie szczególnym przypadkiem definicji Lewina,więc pojęcie układu stochastycznego obejmuje powyższe rodzaje stochastycznych automatów skończonych.

3. Złożone układy stochastyczne

W dalszym ciągu przyjjmiemy, że litery oznaczające elementy określające układ stochastyczny $\gamma^{(n)} \in \Gamma$ posiadają taki sam wskaźnik n umieszczony u góry tych liter.

Definicja 3.1. Układ stochastyczny γ jest sprzężony z układem stochastycznym γ' / $\gamma \to \gamma'$ / wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione następujące zależności :

1/ $\langle Y, 2^Y, p_y \rangle = \langle X', 2^{X'}, p'_x \rangle$;

2/ $g_y = g'_x$;

3/ $f(T) = T'$.

Relacja sprzężenia nie zawsze jest zwrotna, nie zawsze jest symetryczna i nie zawsze jest przechodnia. Jeśli relacja sprzężenia jest zwrotna, to układ stochastyczny jest „samosprzężony ". Jeśli dla dwóch układów stochastycznych relacja sprzężenia jest symetryczna, to występuje „sprzężenie zwrotne " tych układów.

Definicja 3.2. Złożonym układem stochastycznym nazywać będziemy taki zbiór $\Delta \subset \Gamma$, dla którego jest prawdziwa zależność :

$$(\forall \gamma_1 \in \Delta)(\exists \gamma_2 \in \Delta)(\gamma_1 \to \gamma_2 \vee \gamma_2 \to \gamma_1)$$

Relację sprzężenia układów stochastycznych tworzących złożony układ stochastyczny można opisać przy pomocy odpowiedniego grafu zorientowanego, którego wierzchołki przedstawiają poszczególne układy stochastyczne a krawędzie - relację sprzężenia między tymi układami stochastycznymi.

Twierdzenie 3.1. Jeżeli układ stochastyczny $\gamma \in \Gamma$ jest sprzężony z układem stochastycznym $\gamma' \in \Gamma$, to dla każdego $t \in T$ moc zbioru kolumn macierzy przejść $R(f(t))$ układu γ jest równa mocy zbioru wierszy macierzy przejść $R'(f'(f(t)))$ układu γ'.

Dowód. Z definicji układu stochastycznego i macierzy przejść wynika, że moc zbioru kolumn macierzy przejść jest równa mocy zbioru alfabetu wyjścia, a moc zbioru wierszy macierzy przejść jest równa mocy zbioru alfabetu wejścia. Uwzględniając definicję sprzężenia otrzymujemy tezę twierdzenia.

Twierdzenie 3.2. Jeżeli $[a_{ij}]_{n,m}$ i $[b_{ij}]_{m,p}$ są macierzami stochastycznymi o przeliczalnej ilości kolumn oraz wierszy, to działanie mnożenia tych macierzy jest zawsze określone i ich iloczyn jest macierzą stochastyczną.

Dowód. Najpierw wykażemy, że $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj}$ jest zbieżny.
Ponieważ a_{ik} i b_{kj} są nieujemne i niewiększe od jedynki, więc

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj} \leq \sum_{k=1} a_{ik} = 1$$

Na podstawie kryterium porównawczego dla szeregów o wyrazach nieujemnych szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} b_{kj}$ jest zbieżny, a więc działanie mnożenia jest zawsze określone.
Wykażemy teraz, że iloczyn jest macierzą stochastyczną.

Ponieważ wyrazy macierzy będącej iloczynem są określone zależnością :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{M_5} a_{ik} b_{kj} \quad , \text{więc}$$

$$\sum_{j=1}^{M_5} c_{ij} = \sum_{j=1}^{M_5} \sum_{k=1}^{M_5} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{M_5} a_{ik} \sum_{j=1}^{M_5} b_{kj} = \sum_{k=1}^{M_5} a_{ik} 1 = 1$$

cbdo.

Jeśli $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots \in \Gamma$ i $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2, \gamma_2 \rightarrow \gamma_3, \gamma_3 \rightarrow \gamma_4, \dots, \gamma_n \rightarrow \gamma_{n+1}, \dots$,to będziemy używali krótszego zapisu :

$$\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_3 \rightarrow \gamma_4 \rightarrow \dots, \gamma_n \rightarrow \dots$$

Twierdzenie 3.3.Jeżeli $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ i ich równe zbiory alfabetów wejść i wyjść są identycznie uporządkowane,a macierze przejść odpowiednio równe : $R_1(t_1^*), R_2(t_2^*), \dots, R_n(t_n^*)$,gdzie $t_i = t_{i-1}^*$, oraz macierz wejść γ_1 jest równa $X_1(t_1)$ i macierz wyjść γ_n jest równa $Y_n(t_n^*)$,to zachodzą dwie następujące zależności :

1/ $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n$

2/ $Y_n(t_n^*) = X_1(t_1) \prod_{i=1}^{n} R_i(t_i^*)$,gdzie $t_i = t_{i-1}^*$.

Dowód.Pierwsza zależność wynika z definicji sprzężenia.Dowód drugiej jest indukcyjny.

Dla $i = 1$ zgodnie z definicjami układu stochastycznego i sprzężenia otrzymujemy :

$$Y_2(t_2^{\wedge}) = \left(X_1(t_1)\ R_1(t_1^{\wedge})\right) R_2(t_2^{\wedge}) \ ,$$

gdzie $t_1^{\wedge} = f_1(t_1) = t_2$ i

$$t_2^{\wedge} = f_2(t_2) = f_2(f_1(t_1)) = t_3$$

Ponieważ mnożenie macierzy jest łączne,więc otrzymujemy tezę twierdzenia.

Dla $i = k + 1$ otrzymujemy kolejno :

$$Y_{k+1}(t_{k+1}^{\wedge}) = X_{k+1}(t_{k+1})\ R_{k+1}(t_{k+1}^{\wedge}) = Y_k(t_k^{\wedge})\ R_{k+1}(t_{k+1}^{\wedge}) =$$

$$X_1(t_1) \prod_{i=1}^{k} R_i(t_i^{\wedge})\ R_{k+1}(t_{k+1}^{\wedge}) =$$

$$X_1(t_1) \prod_{i=1}^{k+1} R_i(t_i^{\wedge})$$

cbdo.

Definicja 3.3.Złożony układ stochastyczny $\Delta = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots\}$ nazywać będziemy markowowskim,jeżeli $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \gamma_n \dots \rightarrow$ oraz macierze przejść wszystkich układów stochastycznych są skończone i $R_1(t_1^{\wedge}) = R_2(t_2^{\wedge}) = \dots = R_n(t_n^{\wedge}) = \dots$

Twierdzenie 3.4.Jeżeli złożony układ stochastyczny $\Delta = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ jest markowowskim,to macierze przejść należących do niego układów stochastycznych są kwadratowe i zachodzi następująca zależność :

$$Y_k(t_k^{\wedge}) = X_1(t_1)\ \left(R_1(t_1^{\wedge})\right)^k$$

Dowód.Teza twierdzenia wynika z definicji 3.3 oraz twierdzenia 3.3.

Wyrazy macierzy $\left(R_1\left(t_1^{\wedge}\right)\right)^k$ można znaleźć wykorzastując znany wzór Perrona/[4]/.

Definicja 3.4. Macierz stochastyczną nazywać będziemy ergodyczną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wiersze są identyczne.

Twierdzenie 3.5. Jeżeli macierz stochastyczna $\left[a_{ij}\right]_{n,m}$ jest ergodyczna, to iloczyny macierzy stochastycznych $\left[b_{ij}\right]_{r,n}\left[a_{ij}\right]_{n,m}$ i $\left[a_{ij}\right]_{n,m}\left[c_{ij}\right]_{m,s}$ są macierzami ergodycznymi.

Dowód. Ponieważ macierz stochastyczna $\left[a_{ij}\right]_{n,m}$ jest ergodyczna, więc

$$a_{1j} = a_{2j} = a_{3j} = \dots = a_{nj} = a_j \;.$$

Z twierdzenia 3.2 wynika, że iloczyny macierzy są określone i

$$\left[b_{ij}\right]_{r,n}\left[a_{ij}\right]_{n,m} = \left[d_{ij}\right]_{r,m} \quad \text{, gdzie}$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_j = a_j \sum_{k=1}^{n} b_{ik} = a_j$$

oraz

$$\left[a_{ij}\right]_{n,m}\left[c_{ij}\right]_{m,s} = \left[h_{ij}\right]_{n,s} \quad \text{, gdzie}$$

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_k\, c_{kj}$$

cbdo.

Definicja 3.5. /Złożony / układ stochastyczny nazywać będziemy ergodycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jego macierz przejść jest ergodyczna.

Twierdzenie 3.6.Jeżeli $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots\} = \Delta \subset \Gamma$ i $\gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_3 \to \dots \to \gamma_n \to \dots$ oraz istnieje takie k,że ${}_k$ jest układem ergodycznym,to złożony układ stochastyczny Δ też jest układem ergodycznym.

Dowód.Teza twierdzenia wynika z definicji 3.5 oraz twierdzenia 3.5.

Twierdzenie 3.7.Jeżeli /złożony/ układ stochastyczny jest ergodyczny,to jego macierz wyjściowa jest równa każdemu z ~~kolumn~~ wierszy macierzy przejść tego /złożonego/ układu stochastycznego.

Dowód.Twierdzenie jest wnioskiem z twierdzenia 3.5 jeśli przyjąć, że macierz $[b_{ij}]_{r,n}$ jest jednowierszową macierzą wejść /złożonego/ układu stochastycznego.

Twierdzenie 3.8.Jeżeli A jest stochastyczną macierzą kwadratową i istnieje $\lim_i A^i = Z$,gdzie $Z > 0$,to Z jest macierzą ergodyczną.

Dowód.Niech będzie dany ciąg macierzy stochastycznych $A, A^2, A^3, \dots, A^i, \dots$ o granicy równej Z.Wówczas granica podciągu $A^2, A^3, \dots, A^i, \dots$ też jest równa Z.Z twierdzenia 3.2 wynika,że Z jest macierzą stochastyczną.Z własności granicy ciągu wynika równość :

$$A\,Z = Z.$$

Rozpatrzmy dowolną j-tą kolumnę macierzy Z.Będzie dla niej zachodziła równość :

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_{kj}$$

gdzie $i = 1,2,\ldots,n$

Otrzymujemy następujące równania liniowe jednorodne :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k} z_{kj} - z_{1j} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} z_{kj} - z_{2j} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{nk} z_{kj} - z_{nj} = 0$$

czyli

$$\begin{aligned}
(a_{11} - 1) z_{1j} + a_{12} z_{2j} + \ldots + a_{1n} z_{nj} &= 0 \\
a_{21} z_{1j} + (a_{22} - 1) z_{2j} + \ldots + a_{2n} z_{nj} &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
a_{n1} z_{1j} + a_{n2} z_{2j} + \ldots + (a_{nn} - 1) z_{nj} &= 0
\end{aligned}$$

Ponieważ każda z kolumn macierzy współczynników układu równań jest liniową kombinacją pozostałych kolumn, więc rząd macierzy musi być mniejszy od n. Ze względu na to, że granica ciągu może istnieć tylko jedna /a więc istnieje jedno rozwiązanie fundamentalne różne od zera/ rząd macierzy współczynników jest równy n-1. Rozwiązując układ równań przyjmiemy dla uproszczenia zapisu, że $z_{nj} = 1$, wtedy macierz współczynników odpowiedniego układu równań liniowych niejednorodnych będzie następująca :

$$\Delta_j = \begin{bmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1}-1 \end{bmatrix}$$

Natomiast wyznacznik $_{1j}$ będzie równy :

$$\Delta_{1j} = \begin{bmatrix} -a_{1n} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ -a_{2n} & a_{22}-1 & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1\,n} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1}-1 \end{bmatrix}$$

Rozpatrzmy pierwszą kolumnę macierzy Δ_{1j} .Ze względu na równość

$$a_{in} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}$$

gdzie $i = 1,2,\ldots,n$

jest ona równa następującej macierzy jednokolumnowej :

$$\begin{bmatrix} -1 + a_{11} + a_{13} + \cdots + a_{1\,n-2} + a_{1\,n-1} \\ -1 + a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{2\,n-2} + a_{2\,n-1} \\ \cdots \\ \cdots \\ -1 + a_{n-1\,1} + a_{n-1\,2} + \cdots + a_{n-1\,n-2} + a_{n-1\,n-1} \end{bmatrix}$$

Powyższa macierz jest sumą następujących macierzy :

$$\begin{bmatrix} a_{11}-1 \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n-2\,1} \\ a_{n-1\,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22}-1 \\ \vdots \\ a_{n-2\,2} \\ a_{n-1\,2} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} a_{1\,n-2} \\ a_{2\,n-2} \\ \vdots \\ a_{n-2\,n-2}-1 \\ a_{n-1\,n-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1\,n-1} \\ a_{2\,n-1} \\ \vdots \\ a_{n-2\,n-1} \\ a_{n-1\,n-1}-1 \end{bmatrix}$$

Z własności wyznaczników wynika,że wyznacznik Δ_{1j} można przedstawić jako sumę n-1 wyznaczników,różniących się tylko pierwszą kolumną.Pierwszy z tych wyznaczników będzie równy wyznacznikowi Δ'_j,a pozostałe będą równe zero,bowiem w każdym z nich występują dwie kolumny identyczne.Ostatecznie więc

$$z_{1j} = \Delta_{1j} / \Delta_j = 1$$

Identycznie,pozostałe pierwiastki będą równe 1,a więc bazą będzie rodzina rozwiązań postaci $z_{1j} = z_{2j} = \dots = z_{nj}$,gdzie j jest dowolne.Uwzględniając normalizację / $\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = 1$ / otrzymamy stochastyczną macierz ergodyczną,

cbdo.

Twierdzenie 3.8.Jeżeli markowowski złożony układ stochastyczny zawiera przeliczalną ilość układów stochastycznych, to warunkiem wystarczającym aby był ergodyczny jest istnienie granicy $\lim_{i} A^{i} = Z$,gdzie A jest macierzą przejść układu stochastycznego a $Z > 0$.

Dowód.Twierdzenie jest wnioskiem z twierdzenia poprzedniego.

Ze znanych twierdzeń o łańcuchach Markowa wynika m.in.,że jeżeli A jest macierzą o wyrazach dodatnich,to istnieje $\lim_{i} A^{i} = B$,gdzie B jest stochastyczną macierzą ergodyczną /[4]/.

Twierdzenie 3.9.Jeżeli stochastyczna macierz A jest rozkładalna albo periodyczna,to A^{i} ,gdzie $i = 1,2,3,\ldots$ nie jest macierzą ergodyczną.

Dowód.Ze znanej w teorii macierzy definicji wynika,że każdą macierz rozkładalną,poprzez permutację kolumn i wierszy,można sprowadzić do jednej z następujących postaci :

$$\begin{bmatrix} G & O \\ O & D \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} G & O \\ C & D \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} G & B \\ O & D \end{bmatrix}$$

gdzie G i D są podmacierzami kwadratowymi,a O - podmacierzą zerową. Dla dowodu wystarczy zauważyć,że iloczyn dwóch macierzy rozkładalnych jest macierzą rozkładalną.Poprzez indukcję można wykazać,że taka własność zachodzi dla dowolnego i.
Natomiast każdą macierz periodyczną ,poprzez permutację kolumn i wierszy można sprowadzić do następującej postaci :

$$\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}$$

gdzie O jest zerową podmacierzą kwadratową.Dla dowodu wystarczy zauważyć,że przy parzystym i macierz A^{i} sprowadza się do postaci

$$\begin{bmatrix} G & O \\ O & D \end{bmatrix}$$

a przy nieparzystym i - zachowuje swoją postać.

Podamy kilka własności markowowskich złożonych układów stochastycznych. Macierz przejścia każdego z układów stochastycznych oznaczymy przez A, macierz wejścia pierwszego układu stochastycznego przez $X(t)$ i macierz wyjścia ostatniego układu stochastycznego przez $Y(t_k^*)$. Dowody tych własności wynikają natychmiast z poprzednio podanych twierdzeń.

Niech $A = \begin{bmatrix} G & B \\ C & D \end{bmatrix}$ i stopień macierzy G będzie równy s, wówczas są spełnione następujące trzy własności :

Własność 1. Jeśli B = 0 i C = 0, to

$$\begin{aligned} (X(t) &= [x_1, x_2, \dots, x_s, 0, 0, \dots, 0, \dots] \Rightarrow \\ Y(t_k^*) &= [y_1, y_2, \dots, y_s, 0, 0, \dots, 0, \dots]) \wedge \\ (X(t) &= [0, 0, \dots, 0, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n, \dots] \Rightarrow \\ Y(t_k^*) &= [0, 0, \dots, 0, y_{s+1}, y_{s+2}, \dots, y_n, \dots]) \end{aligned}$$

Własność 2. Jeśli C = 0, to

$$\begin{aligned} X(t) &= [0, 0, \dots, 0, x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_n, \dots] \Rightarrow \\ Y(t_k^*) &= [0, 0, \dots, 0, y_{s+1}, y_{s+2}, \dots, y_n, \dots] \end{aligned}$$

Własność 3. Jeśli B = 0, to

$$\begin{aligned} X(t) &= [x_1, x_2, \dots, x_s, 0, 0, \dots, 0, \dots] \Rightarrow \\ Y(t_k^*) &= [y_1, y_2, \dots, y_s, 0, 0, \dots, 0, \dots] \end{aligned}$$

Podane wyżej twierdzenia pozwalają analizować takie złożone układy stochastyczne, w których wszystkie sprzężenia układów stochastycznych dają się opisać przy pomocy „łańcucha sprzężeń"

/$\gamma_1 \to \gamma_2 \to \gamma_3 \to \gamma_4 \to \ldots$ /.Są to tzw. szeregowe sprzężenia układów.W celu umożliwienia analizy dowolnych złożonych układów stochastycznych wprowadzimy najpierw pewne,nowe operacje na macierzach stochastycznych.

Definicja 3.6.Jeśli $[a_{ij}]_{n,m}$ i $[b_{ij}]_{r,s}$ są macierzami,to

$$[a_{ij}]_{n,m} * [b_{ij}]_{r,s} = [c_{ij}]_{Q,P} \quad ,$$

gdzie

$$c_{i+r(q-1),\,j+s(p-1)} = a_{qp}\, b_{ij} \qquad \text{oraz}$$

$$1 \leq j \leq s \quad , \quad 1 \leq i \leq r \ ,$$

$$1 \leq p \leq m \quad , \quad 1 \leq q \leq n \ .$$

Lemat 3.1.Jeżeli $[c_{ij}]_{Q,P} = [a_{ij}]_{n,m} * [b_{ij}]_{r,s}$,to $Q = n \cdot r$ i $P = m \cdot s$.

Dowód.Z definicji 3.6 wynika,że maksymalne wartości indeksów j,i, p,q są równe liczbom : s,r,m,n,a więc maksymalne wartości indeksów macierzy $[c_{ij}]_{Q,P}$, będą równe :

$$Q = i + r(q - 1) = r + r(n - 1) = r\,n$$

$$P = j + s(p - 1) = s + s(m - 1) = s\,m$$

cbdo.

Lemat 3.2.$[a_{ij}] * [b_{ij}] = [b_{ij}] * [a_{ij}]$ wtedy i tylko wtedy,gdy $[a_{ij}] = [b_{ij}]$

Dowód.Lemat wynika bezpośrednio z definicji 3.6.

Lemat 3.3. $\left(\left[a_{ij}\right]_{n,m} * \left[b_{ij}\right]_{r,s}\right) * \left[c_{ij}\right]_{g,h} =$

$$\left[a_{ij}\right]_{n,m} * \left(\left[b_{ij}\right]_{r,s} * \left[c_{ij}\right]_{g,h}\right)$$

Dowód. $\left[a_{ij}\right]_{n,m} * \left[b_{ij}\right]_{r,s} = \left[d_{ij}\right]_{nr\ ms}$,gdzie

$$d_{i+r(q-1)\quad j+s(p-1)} = a_{qp}\, b_{ij}$$

$\left[d_{ij}\right]_{nr,ms} * \left[c_{ij}\right]_{g,h} = \left[e_{ij}\right]_{nrg,msh}$,gdzie

$$e_{w+g(z-1)\quad y+h(x-1)} = d_{zx}\, c_{wy}$$

Ponieważ $z = i + r(q - 1)$ i $x = j + s(p - 1)$,więc

$$e_{w+g[i+r(q-1)-1]\quad y+h[j+s(p-1)-1]} = a_{qp}\, b_{ij}\, c_{wy}$$

$\left[b_{ij}\right]_{r,s} * \left[c_{ij}\right]_{g,h} = \left[f_{ij}\right]_{rg,sh}$,gdzie

$$f_{w+g(k-1)\quad y+h(l-1)} = b_{kl}\, c_{wy}$$

$\left[a_{ij}\right]_{n,m} * \left[f_{ij}\right]_{rg,sh} = \left[t_{ij}\right]_{nrg,msh}$,gdzie

$$t_{u+rg(q-1)\quad o+sh(p-1)} = a_{qp}\, f_{uo}$$

Ponieważ $u = w + g(k - 1)$ i $o = y + h(t - 1)$,więc

$$t_{w+g(k-1)+rg(q-1)\quad y+h(l-1)+sh(p-1)} = a_{qp}\, b_{kl}\, c_{wy}$$

Podstawiając $k = i$ oraz $l = j$ otrzymamy

$$t_{w+g[i-1+r(q-1)]\quad y+h[j-1+s(p-1)]} = a_{qp}\, b_{ij}\, c_{wy}$$

cbdo.

W szczególności,dla macierzy jednowierszowych zachodzi zależność :

$$\left[a_{ij}\right]_{1,m} * \left[b_{ij}\right]_{1,p} = \left[c_{ij}\right]_{1,mp} ,$$

gdzie $c_{1\quad j+p(q-1)} = a_{1q}\, b_{1j}$

Ze względu na lemat 3.3 można przyjąć następujące oznaczenie:

$$\mathop{\text{\Large$*$}}_{i=1}^{n} A_i = A_1 * A_2 * \dots * A_n$$

Lemat 3.4. Jeżeli $[a_{ij}]_{n,m}$ i $[b_{ij}]_{r,s}$ są macierzami stochastycznymi, to macierz $[c_{ij}]_{nr,ms} = [a_{ij}]_{n,m} * [b_{ij}]_{r,s}$ też jest macierzą stochastyczną.

Dowód. Wystarczy wykazać, że dla dowolnego k suma $\sum_{j=1}^{ms} c_{kj} = 1$.

$$\sum_{j=1}^{ms} c_{kj} = \sum_{\substack{j=1\\p=1}}^{\substack{m\\s}} c_{k\ j+s(p-1)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=1}^{s} a_{rp} b_{uj} = \sum_{j=1}^{m} b_{uj} \sum_{p=1}^{s} a_{rp} = 1$$

cbdo.

Twierdzenie 3.11. Jeżeli $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ i $R_1(t^*), R_2(t^*), \dots, R_n(t^*)$ są odpowiednio macierzami wejść oraz macierzami przejść układów stochastycznych $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ i żadna z par tych układów nie jest sprzężona, to istnieje układ stochastyczny o macierzy wejść $X(t) = \mathop{\text{\Large$*$}}_{k=1}^{n} X_k(t)$ i macierzy przejść $R(t^*) = \mathop{\text{\Large$*$}}_{k=1}^{n} R_k(t^*)$ dla którego macierz wyjściowa $Y(t)$ będzie przedstawiała prawdopodobieństwa pojawiania się n-tek, w których każdy element należy do dokładnie jednego z alfabetów układów stochastycznych $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Dowód. Teza twierdzenia wynika z podstawowej własności prawdopodobieństwa, że dla zdarzeń niezależnych prawdopodobieństwo iloczynu jest równe iloczynowi prawdopodobieństw.

Twierdzenie 3.11 umożliwia nam sprowadzenie dowolnego złożonego układu stochastycznego do łańcucha szeregowo sprzężonych układów stochastycznych.
Korzystając z działania mnożenia macierzy oraz operacji „ * " można analizować dowolny złożony układ stochastyczny w zależności od wchodzących w jego skład układów stochastycznych.W konsekwencji takiej analizy otrzymamy układ stochastyczny w pełni opisujący złożony układ stochastyczny.

4. Niezawodność układu stochastycznego

Löfgren definiuje niezawodność jako miarę zgodności między rzeczywistym działaniem automatu skończonego /w rozumieniu zależności między wyjściem a wejściem/, a tym działaniem, do którego jest on przeznaczony /[23]/.
Wprowadzimy kilka definicji, które umożliwią nam określanie niezawodności układów stochastycznych.

Definicja 4.1. Macierz stochastyczną nazywać będziemy wzorcową, jeśli w każdym jej wierszu będzie występowała jedynka.

Definicja 4.2. Układ stochastyczny $\beta \in \Gamma$ nazywać będziemy wzorcowym dla układu stochastycznego $\gamma \in \Gamma$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $t \in T$ macierz przejść układu β będzie wzorcowa i alfabety wejść i wyjść obu układów stochastycznych są odpowiednio równe.

Z powyższej definicji wynika, że wzorcowy układ stochastyczny jest układem zdeterminowanym.
Niezawodność układu stochastycznego γ względem układu wzorcowego β można zdefiniować w różny sposób. Podamy dwie z możliwych definicji niezawodności układu stochastycznego.

Definicja 4.3. Macierzą niezawodności układu stochastycznego $\gamma \in \Gamma$ o macierzy przejść $[r_{ij}(t^*)]_{n,m}$ względem układu wzorcowego $\beta \in \Gamma$ o macierzy przejść $[u_{ij}(t^*)]_{n,m}$ w chwili $t \in T$ nazywać będziemy macierz $[s_{ij}(t^{*})]_{n,m}$,gdzie

$$s_{ij}(t^{*}) = r_{ij}(t^{*})\, u_{ij}(t^{*}) .$$

Definicja 4.4.Jeżeli $\gamma \in \Gamma$ jest układem stochastycznym o macierzy wejść $[x_{ij}(t)]_{1,n}$ a $\beta \in \Gamma$ jest układem wzorcowym dla układu γ i macierz niezawodności γ względem β jest równa $[s_{ij}(t)]_{n,m}$,to niezawodnością pierwszego rodzaju układu stochas tycznego γ względem układu wzorcowego β w chwili $t \in T$ nazywamy liczbę

$$N[\gamma|\beta]_t = \sum_i \sum_j x_{1j}(t)\, s_{ji}(t^{*})$$

Lemat 4.1.Dla każdego $t \in T$ niezawodność układu stochastycznego względem dowolnego układu wzorcowego jest liczbą z prze działu $[0,1]$.

Dowód.Z definicji układu stochastycznego oraz definicji niezawodności wynikają następujące nierówności :

$$0 \leq \sum_i \sum_j x_{1j}(t)\, s_{ji}(t^{*}) = \sum_j x_{1j}(t) \sum_i s_{ji}(t^{*}) \leq \sum_j x_{1j}(t) = 1$$

cbdo.

Lemat 4.2. $N[\gamma|\gamma]_t = 1$

Dowód.

$$\sum_i \sum_j x_{1j}(t)\, s_{ji}(t^{*}) = \sum_i \sum_j r_{ji}(t^{*})\, r_{ji}(t^{*})\, x_{1j}(t) = \sum_i \sum_j x_{1j}(t) = 1$$

cbdo.

Lemat 4.3. Jeżeli w macierzy przejść $[r_{ij}(t^*)]_{n,m}$ układu stochastycznego γ wszystkie wyrazy są równe r, to dla każdego układu wzorcowego β

$$N[\gamma|\beta]_t = r$$

Dowód. Z definicji niezawodności wynika, że alfabety wejściowy i wyjciowy układu stochastycznego γ są skończone oraz

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{1j}(t)\, r_{ji}(t^*) u_{ji}(t^*) = r \sum_{j=1}^{n} x_{1j}(t) = r$$

cbdo.

Lemat 4.4. Jeżeli każdy z wyrazów macierzy niezawodności $[s_{ij}(t^*)]_{n,m}$ układu stochastycznego γ jest mniejszy od liczby a, to dla dowolnego układu wzorcowego β jest spełniona następująca nierówność :

$$N[\gamma|\beta]_t < a$$

Dowód. Niech maksymalny wyraz macierzy $[s_{ij}(t^*)]_{n,m}$ będzie równy c, gdzie $c < a$. Wówczas

$$\sum_i \sum_j x_{1j}(t)\, s_{ji}(t^*) = \sum_i \sum_j x_{1j}(t)\, s_{ji}(t^*) =$$

$$\sum_j x_{1j}(t) \sum_i s_{ji}(t^*) \leq \sum_i x_{1j}\, c = c < a$$

cbdo.

Lemat 4.5. Jeżeli każdy z wyrazów skończonej macierzy wejściowej $[x_{ij}(t)]_{1,m}$ układu stochastycznego γ jest mniejszy od liczby a, to dla dowolnego układu wzorcowego β jest spełniona następująca nierówność :

$$N[\gamma|\beta]_t < a\, m$$

Dowód. Na podstawie definicji niezawodności

$$\sum_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij}(t)\, s_{ji}(t^*) = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}(t) \sum_i s_{ji}(t^*) <$$

$$a \sum_i \sum_{j=1}^{m} s_{ji}(t^*) \leq a\, m$$

cbdo.

Dla układu stochastycznego o skończonych alfabetach wejściowym i wyjściowym mażna zdefiniować niezawodność w sposób odmienny od poprzedniego. Podana niżej definicja niezawodności pozwala stwierdzić, czy niezawodność danego układu stochastycznego względem jakiegoś układu wzorcowego może być większa ze względu na inny układ wzorcowy.

Definicja 4.5. Niech $\gamma \in \Gamma$ będzie układem stochastycznym o skończonej macierzy przejść $[r_{ij}(t^*)]_{n,m}$ i niech wyrazy macierzy $[d_{ij}(t^*)]_{n,m}$ i $[h_{ij}(t^*)]_{n,m}$ będą określone następująco :

$$d_{ij}(t^*) = \sum_{k=1}^{m} r'_{ik}(t^*) \quad \text{i} \quad h_{ij}(t^*) = \sum_{k=1}^{m} r''_{ik}(t^*)$$

gdzie

$$r'_{ik}(t^*) = \begin{cases} r_{ik}(t^*) & \text{gdy } k \neq j \;\; r_{ik} \leq r_{ij} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

$$r''_{ik}(t^*) = \begin{cases} r_{ik}(t^*) & \text{gdy } k \neq j \;\; r_{ik} > r_{ij} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

oraz niech m_{1i} oznacza ilość wyrazów $r'_{ik}(t^*)$ w i-tym wierszu, a m_{2i} - ilość wyrazów $r''_{ik}(t^*)$ też w i-tym wierszu macierzy $[r_{ij}(t^*)]$.

Wówczas macierzą niezawodności drugiego rodzaju układu stochastycznego γ o macierzy przejść $[r_{ij}(t^*)]_{n,m}$ względem układu wzorcowego β o macierzy przejść $[u_{ij}(t^*)]_{n,m}$ będziemy nazywali macierz $[w_{ij}(t^*)]_{n,m}$, której wyrazy są określone następująco :

$$w_{ij}(t^*) = u_{ij}(t^*)\left(r_{ij}(t^*) - 1/_{m_{1i}} d_{ij}(t^*) - 1/_{m_{2i}} h_{ij}(t^*)\right) .$$

Jeśli $m_{1i} = 0$, to przyjmujemy, że $1/_{m_{1i}} = 0$. Identyczną zależność zakładamy dla m_{2i}.

Definicja 4.6. Jeżeli $\gamma \in \Gamma$ jest układem stochastycznym o macierzy wejść $[x_{ij}(t)]_{1,n}$ a $\beta \in \Gamma$ jest układem wzorcowym dla układu γ i macierz niezawodności drugiego rodzaju γ względem β jest równa $[w_{ij}(t^*)]_{n,m}$, to niezawodnością drugiego rodzaju układu stochastycznego γ względem układu wzorcowego β w chwili $t \in T$ nazywamy liczbę

$$N'[\gamma|\beta]_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t)\, w_{ji}(t^*) .$$

Lemat 4.6. Dla każdego $t \in T$ niezawodność drugiego rodzaju układu stochastycznego γ względem dowolnego układu wzorcowego β jest liczbą z przedziału $[-1,1]$.

Dowód. Z definicji niezawodności drugiego rodzaju wynikają następujące zależności :

$$N'[\gamma|\beta]_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t)\, w_{ji}(t^*) \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t)\, u_{ji}(t^*)\, r_{ji}(t^*) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t) \sum_{i=1}^{n} u_{ji}(t^*)\, r_{ji}(t^*) \leq$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t) = 1$$

$$N'[\gamma|\beta]_t \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t)\Big(u_{ji}(t^*) - {}^1/_{m_{1j}}\, d_{ji}(t^*) - {}^1/_{m_{2j}}\, h_{ji}(t^*)\Big) =$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t)\, u_{ji}(t^*)\, {}^1/_{m_{2j}}\, h_{ji}(t^*) =$$

$$- \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t)/_{m_{2j}} \sum_{i=1}^{n} u_{ji}(t^*)\, h_{ji}(t^*) \geqslant$$

$$- \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t)/_{m_{2j}} \geqslant - \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t) = -1$$

cbdo.

Lemat 4.7. $N'[\gamma|\gamma]_t = 1$

Dowód.Zdefinicji 4.6 wynika,że

$$N'[\gamma|\gamma]_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t)\, u_{ji}(t^*)\, u_{ji}(t^*) = \sum_{j=1}^{m} x_{1j}(t)\, 1 = 1$$

cbdo.

Lemat 4.8.Jeżeli w macierzy przejść układu stochastycznego $\gamma \in \Gamma$ wszystkie wyrazy są równe,to dla każdego układu wzorcowego $\beta \in \Gamma$

$$N'[\gamma|\beta]_t = 0$$

Dowód.Z definicji niezawodności drugirgo rodzaju wynikają kolejno następujące równości :

$$N'[\gamma|\beta]_t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}(t)\, u_{ji}(t^*) \left(1/_m - 1/_{m_{ij}}\, d_{ji}(t^*) \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}(t)\, u_{ji}(t^*) \left(1/_m - 1/_{m-1} \left(1 - 1/_m\right)\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}(t)\, u_{ji}(t^*) \left(1/_m - 1/_m \right) = 0$$

cbdo.

Lemat 4.9. Jeżeli macierz niezawodności drugiego rodzaju układu stochastycznego Υ jest nieujemna, to dla każdego układu wzorcowego β jest spełniona nierówność :

$$N'[\gamma|\beta]_t \geq 0$$

Dowód. Twierdzenie wynika bezpośrednio z definicji 4.5 i 4.6.

Przy każdej z podanych dwóch definicji niezawodności można rozpatrywać podstawowe zagadnienie teorii niezawodności, jakim jest zależność niezawodności złożonego układu stochastycznego od niezawodności poszczególnych jego układów stochastycznych. Tego typu problemy będziemy rozważać, na przykładzie binarnych złożonych układów stochastycznych, w następnym rozdziale pracy.

5. Analiza niezawodności binarnych złożonych układów stochastycznych

Niezawodność złożonego układu stochastycznego można podwyższyć wprowadzając nadmiary bądź argumentów bądź działania. Nadmiar argumentów osiąga się poprzez nadmiar struktury /czyli nadmiar w ilości układów stochastycznych tworzących złożony układ stochastyczny/ lub nadmiar sygnałów /czyli nadmiar czasowy bądź nadmiar kodowy/. Nadmiar działania można osiągnąć poprzez nadmiar funkcji opisującej poszczególne układy stochastyczne.
Elias /[3]/ wykazał, że w ogólności, niezawodność dąży do idealnej tylko wtedy, gdy wprowadzony nadmiar strukturalny ewentualnie kodowy dąży do nieskończoności. Wykorzystując twierdzenie Shannona można określić nadmiar jako stosunek przepustowości do szybkości przekazywania informacji w kanale łączności, a więc idealna niezawodność może być osiągnięta, w ogólności, tylko w wyniku zerowej szybkości przekazywania informacji /[9]/.

Znane prace z dziedziny niezawodności rozpatrują jedynie układy binarne, w szczególności dotyczy to klasycznych prac von Neumana /[29]/ oraz Shannona i Moore'a /[32]/. Nie podkreśla się w nich, co widać szczególnie w pracach Shannona, roli układów kodujących i dekodujących mimo, że są one wykorzystane przy badaniu niezawodności układów złożonych. Zwraca się uwagę na nadmiar strukturalny układów złożonych, natomiast układy kodujące i dekodujące uważa się za zdeterminowane. Jest to oczywiście znaczne zawężenie problemu.

W dalszym ciągu tego rozdziału ograniczymy się do badania niezawodności pierwszego rodzaju /definicja 4.4/ dla binarnych złożonych układów stochastycznych.

W złożonych układach stochastycznych będą występowały układy stochastyczne trzech rodzajów, nazwijmy je odpowiednio - układami przetwarzającymi, układami kodującymi i układami dekodującymi.

Opis binarnego układu przetwarzającego dla ustalonego $t \in T$ będzie następujący :

	X \ Y	y_1	y_2
$p_1(t)$	x_1	$p_{11}(t^\wedge)$	$p_{12}(t^\wedge)$
$p_2(t)$	x_2	$p_{21}(t^\wedge)$	$p_{22}(t^\wedge)$

Zbiór binarnych układów przetwarzających oznaczać będziemy przez Γ_1.

Opis binarnego układu kodującego dla ustalonego $t \in T$ będzie następujący :

	X \ Y	y_1	y_2		y_{2^n}
$p_1(t)$	x_1	$p_{11}(t^\wedge)$	$p_{12}(t^\wedge)$	...	$p_{1\,2^n}(t^\wedge)$
$p_2(t)$	x_2	$p_{21}(t^\wedge)$	$p_{22}(t^\wedge)$	...	$p_{2\,2^n}(t^\wedge)$

gdzie

$Y = \{x_1, x_2\}^n$ i jeśli x_1 oznaczymy przez 0 a x_2 przez 1, to $y_k = (k-1)_{10}$.

Zbiór binarnych układów kodujących oznaczać będziemy przez Γ_2.

Opis binarnego układu dekodującego dla ustalonego $t \in T$ będzie następujący :

	X \ Y	y_1	y_2
$p_1(t)$	x_1	$p_{11}(t^*)$	$p_{12}(t^*)$
$p_2(t)$	x_2	$p_{21}(t^*)$	$p_{22}(t^*)$
.	.	.	.
.	.	.	.
$p_{2^n}(t)$	x_{2^n}	$p_{2^n 1}(t^*)$	$p_{2^n 2}(t^*)$

gdzie

$X = \{y_1, y_2\}^n$ i jeśli y_1 oznaczymy przez 0 a y_2 przez 1, to $x_k = (k-1)_{10}$.

Zbiór binarnych układów dekodujących oznaczać będziemy przez Γ_3.

Układem wzorcowym dla układu przetwarzającego będzie taki układ przetwarzający, którego macierz przejść dla każdego $t \in T$ posiada wyrazy $p_{11}(t^*) = 1$ i $p_{22}(t^*) = 1$ oraz alfabety wejścia i wyjścia obu układów są odpowiednio równe. W dalszym ciągu taki układ wzorcowy oznaczać będziemy przez β .

Lemat 5.1. Jeżeli układ stochastyczny $\gamma \in \Gamma_1$ o wektorze wejściowym $[p_1(t), p_2(t)]$ i niezawodności $N[\gamma|\beta]_t = N(t)$ jest sprzężony z układem stochastycznym $\gamma' \in \Gamma_1$, w którym wyrazy macierzy przejść $p'_{11}(t^*) = p(t^*)$ i $p'_{22}(t^*) = q(t^*)$, to niezawodność złożonego układu stochastycznego $\Delta = \{\gamma, \gamma'\}$ jest równa

$$N[\Delta|\beta]_t = p(t^*)(N(t) - p_2(t)) + q(t^*)(N(t) - p_1(t)) + 1 - N(t)$$

Dowód. Z uwagi do twierdzenia 3.11 wynika, że złożonemu układowi stochastycznemu Δ można przyporządkować odpowiadający jemu układ stochastyczny γ''.

Wyrazy $p''_{11}(t^*)$ i $p''_{22}(t^*)$ macierzy przejść układu stochastycznego γ'' są odpowiednio równe :

$$p_{11}(t^*)\, p'_{11}(t^*) - p_{11}(t^*) - p'_{22}(t^*) + p_{11}(t^*)\, p'_{22}(t^*) + 1$$

i

$$p_{22}(t^*)\, p'_{22}(t^*) - p'_{11}(t^*) - p_{22}(t^*) + p'_{11}(t^*)\, p_{22}(t^*) + 1$$

Uwzględniając definicję niezawodności otrzymujemy następującą równość :

$$N[\gamma''|\beta]_t = p(t^*)(N(t) - p_2(t)) + q(t^*)(N(t) - p_1(t)) + 1 - N(t)$$

cbdo.

W szczególności, jeżeli macierze przejść układów stochastycznych γ i γ' są równe, to otrzymujemy

$$N[\gamma''|\beta]_t = (N(t) - 1)(p(t^*) + q(t^*)) + 1.$$

Twierdzenie 5.1. Jeżeli w układzie stochastycznym $\gamma \in \Gamma_1$ dla wyrazów macierzy przejść zachodzi nierówność

$$p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) < 1,$$

to istnieje taki układ stochastyczny $\gamma' \in \Gamma_1$, że złożony układ stochastyczny $\Delta = \{\gamma, \gamma'\}$, gdzie $\gamma \rightarrow \gamma_1$ ma niezawodność większą od niezawodności układu stochastycznego γ.

Dowód. Z lematu 5.1 wynika, że niezawodność układu złożonego Δ jest równa :

$$p'_{11}(t^*) \left(N(t) - p_2(t) \right) + p'_{22}(t^*) \left(N(t) - p_1(t) \right) + 1 - N(t)$$

Aby była prawdziwa teza twierdzenia wystarczy, żeby były spełnione dwie następujące nierówności :

$$/1/ \qquad p''_{11}(t^*) > p_{11}(t^*)$$

$$/2/ \qquad p''_{22}(t^*) > p_{22}(t^*)$$

gdzie $p''_{11}(t^*)$ i $p''_{22}(t^*)$ są wyrazami macierzy przejść układu stochastycznego γ'' odpowiadającemu układowi złożonemu Δ.

Z nierówności 1 i 2 wynikają nierówności :

$$/1a/ \qquad p_{11}(t^*)\, p'_{11}(t^*) + 1 - 2p_{11}(t^*) - p'_{22}(t^*) + p_{11}(t^*)\, p'_{22}(t^*) > 0$$

$$/2a/ \qquad p_{22}(t^*)\, p'_{22}(t^*) + 1 - 2p_{22}(t^*) - p'_{11}(t^*) + p'_{11}(t^*)\, p_{22}(t^*) > 0$$

Jeżeli $p_{11}(t^*) = 0$ i $p_{22}(t^*) = 0$, to otrzymamy nierówności

$$p'_{22}(t^*) < 1$$

$$p'_{11}(t^*) < 1$$

a więc istnieje taki układ stochastyczny γ', że niezawodność złożonego układu stochastycznego Δ jest większa od niezawodności układu stochastycznego γ.

Jeżeli $p_{11}(t^*) = 0$ i $p_{22}(t^*) \neq 0$, to otrzymujemy nierówności :

/1c/ $p'_{22}(t^*) < 1$

/2c/ $p'_{22}(t^*)\, p_{22}(t^*) + p'_{11}(t^*)\left(p_{22}(t^*) - 1\right) + 1 - 2p_{22}(t^*) > 0$

Niech $p_{22}(t^*) = 1 - a$, wówczas nierówność /2c/ będzie postaci :

$$p'_{22}(t^*)\,(1 - a) + 2a - 1 - a\, p'_{11}(t^*) > 0$$

Jeżeli przyjmiemy, że $p'_{11}(t^*) = 0$, to

$$p'_{22}(t^*) > (1 - 2a) / (1-a)$$

Ponieważ a jest zawarte w przedziale otwartym $(0,1)$, więc

$$(1 - 2a) / (1 - a) < 1.$$

Z tego wynika, że jeżeli wyrazy macierzy przejść układu stochastycznego γ' spełniają dwie następujące zależności :

$$p'_{11}(t^*) = 0$$

i

$$p'_{22}(t^*) > (2p_{22}(t^*) - 1) / p_{22}(t^*) \,,$$

to niezawodność złożonego układu stochastycznego Δ jest większa od niezawodności układu stochastycznego γ .

Jeżeli $p_{11}(t^*) \neq 0$ i $p_{22}(t^*) \neq 0$, to z nierówności /1a/ wynika nierówność

/1d/ $p'_{11}(t^*) > \left(2p_{11}(t^*) - 1\right) - p'_{22}(t^*)\left(p_{11}(t^*) - 1\right) / p_{11}(t^*)$

Ponieważ nierówność

$$\left(p_{11}(t^*) - 1\right)\left(1 - p'_{22}(t^*)\right) < 0 \,,$$

jest zawsze prawdziwa, więc prawa strona nierówności /1d/ jest mniejsza od jedynki.

Niech $p'_{11}(t^*)$ będzie równe sumie prawej strony nierówności /1d/ i liczby dodatniej $a/p_{11}(t^*)$. Podstawiając tą wartość $p'_{11}(t^*)$ do nierówności /2a/ otrzymamy nierówność następującą :

$$/3/ \quad p'_{22}(t^*)\left(p_{22}(t^*) + p_{11}(t^*) - 1\right) > p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 1 + a - a\,p_{22}(t^*)$$

Ponieważ $p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) \leq 1$, więc

$$/4/ \quad p'_{22}(t^*) < \left(p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 1 + a - ap_{22}(t^*)\right) / \left(p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 1\right)$$

Nierówność

$$a\left(1 - p_{22}(t^*)\right) / \left(p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 1\right) < 0$$

Jest zawsze prawdziwa, więc prawa strona nierówności /4/ jest mniejsza od jedynki.

Dla

$$a < \left(1 - p_{11}(t^*) - p_{22}(t^*)\right) / \left(1 - p_{22}(t^*)\right)$$

prawa strona nierówności /4/ jest większa od zera. A więc istnieją wyrazy $p'_{11}(t^*)$ i $p'_{22}(t^*)$ takie, że układ stochastyczny γ' spełnia tezę twierdzenia.

Z powyższych rozważań wynika, że dla każdego układu stochastycznego γ istnieje układ stochastyczny γ' spełniający tezę naszego twierdzenia.

Twierdzenie 5.2. Jeżeli $\triangle$ jest markowowskim złożonym układem stochastycznym składającym się z kolejno sprzężonych układów stochastycznych $\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(k)} \in \Gamma_1$ i macierz przejść każdego z tych układów jest równa $\left[p_{ij}(t^{*})\right]_{2,2}$ a wektor wejściowy γ' jest równy $\left[p_1(t), p_2(t)\right]$, to

$$N[\triangle|\beta]_t = N[\gamma'|\beta]_t \left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*}) - 1\right)^{k-1} - \left(p_2(t)\, p_{11}(t^{*}) + p_1(t)\, p_{22}(t^{*}) - 1\right) \cdot \sum_{i=0}^{k-2} \left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*}) - 1\right)^{i}$$

Dowód indukcyjny.

Jeżeli k = 2, to prawdziwość naszego twierdzenia wynika z twierdzenia 5.1.

Jeżeli k = n + 1, to na podstawie twierdzenia 5.1 niezawodność układu $\triangle$ będzie równa

$$\left(N[\gamma'|\beta]_t \left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*}) - 1\right)^{n-1} - \left(p_2(t)\, p_{11}(t^{*}) + p_1(t)\, p_{22}(t^{*}) - 1\right) \sum_{i=0}^{n-2} \left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*}) - 1\right)^{i}\right)\left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*}) - 1\right) - \left(p_1(t)\, p_{22}(t^{*}) + p_2(t)\, p_{11}(t^{*}) - 1\right)$$

Po uporządkowaniu powyższego wyrażenia otrzymamy tezę naszego twierdzenia.

Twierdzenie 5.3. Jeżeli $\triangle$ jest markowowskim złożonym układem stochastycznym składającym się z nieskończonej ilości kolejno sprzężonych układów stochastycznych $\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(k)}, \ldots, \in \Gamma_1$ i macierz przejść ~~$p_{ij}\ t^{*}\ {}_{2,2}$ każdego z układów zawiera co najwyżej jeden wyraz równy jedynce oraz wektor wejściowy~~

$\left[p_{ij}(t^{*})\right]_{2,2}$ każdego z układów zawiera co najwyżej jeden wyraz równy jedynce oraz wektor wejściowy układu γ' jest równy $\left[p_1(t), p_2(t)\right]$,to

$$N[\Delta|\beta]_t =$$

$$\left(p_2(t)\, p_{11}(t^{*}) + p_1(t)\, p_{22}(t^{*}) - 1\right) / \left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*}) - 2\right)$$

Dowód.Istnieją dwie odmienne wersje dowodu tego twierdzenia.

Wersja I.

W dowodzie będziemy się opierali na podstawowych twierdzeniach łańcuchów Markowa oraz algebry macierzy.

Dla każdego t wyznacznik charakterystyczny macierzy $\left[p_{ij}(t^{*})\right]_{2,2}$ jest równy

$$\lambda^2 - \lambda\left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*})\right) + p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*}) - 1$$

Wartości własne macierzy $\left[p_{ij}(t^{*})\right]_{2,2}$ będą równe :

$$\lambda_1 = 1/2\left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*}) - \sqrt{\Delta}\right)$$

$$\lambda_2 = 1/2\left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*}) + \sqrt{\Delta}\right)$$

gdzie

$$\Delta = \left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*})\right)\left(p_{11}(t^{*}) + p_{22}(t^{*}) - 4\right) + 4$$

Ponieważ co najmniej jeden z wyrazów $p_{11}(t^{*})$ lub $p_{22}(t^{*})$ jest różny od zera,więc $\Delta > 0$ i λ_1, λ_2 są dwiema różnymi i rzeczywistymi wartościami własnymi.

Wykażemy,że $\lambda_2 \neq -\lambda_1$.

Jeśliby $\lambda_2 = -\lambda_1$,to

$$2p_{11}(t^*) + 2p_{22}(t^*) = 0,$$

co jest sprzeczne z założeniem twierdzenia,a więc $\lambda_2 \neq -\lambda_1$.

Wynika z tego,że wartość własna równa jedynce jest co najwyżej jednokrotna i nie istnieje wartość własna o module równym jedynce.Korzystając z twierdzenia Perrona widzimy,że istnieje granica potęg macierzy przejść,a więc nasz złożony układ stochastyczny jest ergodyczny.

Macierz przejść takiego złożonego układu stochastycznego będzie postaci :

$$\begin{bmatrix} \dfrac{p_{22}(t^*) - 1}{p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 2} & \dfrac{p_{11}(t^*) - 1}{p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 2} \\[2ex] \dfrac{p_{22}(t^*) - 1}{p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 2} & \dfrac{p_{11}(t^*) - 1}{p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 2} \end{bmatrix}$$

Korzystając z definicji niezawodności otrzymujemy,że niezawodność złożonego układu stochastycznego Δ jest równa

$$\left(p_2(t)\, p_{11}(t^*) + p_1(t)\, p_{22}(t^*) - 1\right) / \left(p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 2\right)$$

cbdo.

Shannon /[32]/ rozpatruje jedynie układy przetwarzające stacjonarne,w których $p_{11}(t^*) = 1$,a więc w takim przypadku niezawodność złożonego układu stochastycznego markowowskiego o nieskoń-

Wersja II dowodu twierdzenia 5.3

Dowód. Z założenia wynika, że $\left| p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 1 \right| < 1$.
Korzystając z twierdzenia 5.2. szukamy granicy niezawodności złożonego układu stochastycznego Δ przy $k \to \infty$.
Ponieważ

$$\sum_{i=0}^{k-2} \left(p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 1 \right)^i$$

jest sumą ciągu geometrycznego o ilorazie co do modułu mniejszym od jedności, więc granica niezawodności złożonego układu stochastycznego będzie równa

$$\left(p_2(t)\, p_{11}(t^*) + p_1(t)\, p_{22}(t^*) - 1 \right) / \left(p_{11}(t^*) + p_{22}(t^*) - 2 \right)$$

cbdo.

czonej ilości układów stochastycznych będzie równa $p_1(t)$.

W dalszym ciągu tego rozdziału zajmiemy się badaniem niezawodności „równolegle " sprzężonych układów stochastycznych. Jeżeli zbiór układów przetwarzających nie tworzy złożonego układu stochastycznego, to zgodnie z twierdzeniem 3.10 istnieje układ stochastyczny α w którym zależność między wektorem stanów wyjściowych a wektorem stanów wejściowych jest identyczna z zależnościami między wyjściami i wejściami tego zbioru układów. Taki układ stochastyczny α nazywać będziemy układem stochastycznym opisującym zbiór układów stochastycznych.

Definicja 5.1. Jeżeli układ stochastyczny α opisuje zbiór układów stochastycznych $\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(k)}, \ldots \in \Gamma_1$ to układy stochastyczne $\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(k)}, \ldots$ są sprzężone równolegle wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione następujące warunki :

1/ $(\forall l, m \in N)(\neg(\gamma^{(l)} \Rightarrow \gamma^{(m)}))$

2/ $(\exists \alpha_1 \in \Gamma_2)(\exists \alpha_2 \in \Gamma_3)(\alpha_1 \to \alpha \to \alpha_2)$

W dalszym ciągu ograniczamy badania do przypadku, gdy w macierzy przejść $[r_{ij}(t^*)]_{2,n}$ każdego układu kodującego $r_{11}(t^*) = 1$ i $r_{2\,n}(t^*) = 1$ oraz w każdym wierszu dowolnego układu dekodującego występuje jedynka i w każdej kolumnie dowolnego układu dekodującego występuje co najmniej jedna jedynka. Zakładamy także, że układy kodujące i dekodujące są stacjonarnymi układami stochastycznymi.

Twierdzenie 5.4. Jeżeli $\left[a'_{ij}\right]_{2,2} = \left[a''_{ij}\right]_{2,2} = \ldots = \left[a^{(k)}_{ij}\right]_{2,2} = \left[a_{ij}\right]_{2,2}$, to wyrazy macierzy

$$\left[c_{ij}\right]_{2,2^k} = \mathop{\times}_{s=1}^{k} \left[a^{(s)}_{ij}\right]_{2,2}$$

są następującej postaci :

/1/ dla pierwszego wiersza

$$a_{11}^{k-l}\left(1 - a_{11}\right)^{l}$$

/2/ dla drugiego wiersza

$$\left(1 - a_{22}\right)^{k-l}\, a_{22}^{l}$$

gdzie

$$l = 0,1,\ldots,k$$

Dowód indukcyjny.

Jeżeli $k = 1$, to macierz $\left[c_{ij}\right]_{2,2}$ jest równa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 1 - a_{11} \\ 1 - a_{22} & a_{22} \end{bmatrix}$$

czyli jest spełniona teza naszego twierdzenia.

Jeśli $k = r + 1$, to wyrazy pierwszego wiersza macierzy $\left[c_{ij}\right]_{2,2^{r+1}}$ będą postaci

$$a_{11}^{r+1-l}\left(1 - a_{11}\right)^{l}$$

albo

$$a_{11}^{r-l}\left(1 - a_{11}\right)^{l+1}$$

gdzie

$l = 0,1,\ldots,r$

Obydwie postacie można przedstawić jako

$$a_{11}^{r+1-l}\left(1 - a_{11}\right)^{l}$$

gdzie

$l = 0,1,\ldots,r+1$

a więc teza twierdzenia będzie prawdziwa dla wiersza pierwszego. Podobnie przebiega dowód tezy twierdzenia dla wiersza drugiego.

Twierdzenie 5.5. Jeżeli są spełnione założenia twierdzenia 5.4, to sumy równych ~~prawdopodobieństw~~ wyrazów w macierzy $\left[e_{ij}\right]_{2,2}^{k}$ dają się przedstawić w następujących postaciach :

/1/ dla pierwszego wiersza

$$\binom{k}{l} a_{11}^{k-l}\left(1 - a_{11}\right)^{l}$$

/2/ dla drugiego wiersza

$$\binom{k}{l}\left(1 - a_{22}\right)^{k-l} a_{22}^{l}$$

gdzie

$l = 0,1,\ldots,k$.

Dowód indukcyjny.

Jeśli $k = 1$, to prawdziwość tezy twierdzenia wynika bezpośrednio z twierdzenia 5.3.

Jeśli $k = r + 1$, to sumy równych wyrazów pierwszego wiersza macierzy $[c_{ij}]_{2,2^{r+1}}$ będą postaci :

$$\binom{r}{l} a_{11}^{r+1-l} \left(1 - a_{11}\right)^{l}$$

albo

$$\binom{r}{l} a_{11}^{r-l} \left(1 - a_{11}\right)^{l+1}$$

gdzie

$$l = 0,1,\ldots,r$$

Ustalając dla elementów pierwszego typu $l = s > 0$ otrzymamy jeden z takich elementów. Aby otrzymać taki sam element typu drugiego wystarczy przyjąć $l = s - 1$. W związku z tym takich samych elementów przy ustalonym dla pierwszego typu $l = s$ będzie

$$\binom{r}{s} + \binom{r}{s-1} = \binom{r+1}{s}$$

Ponieważ będzie jeszcze istniał element pierwszego typu przy $l = 0$, dla którego nie będą istniały odpowiednie elementy typu drugiego, oraz będzie istniał element drugiego typu przy $l = r$, dla którego nie będą istniały odpowiednie elementy typu pierwszego, więc z tego będzie wynikało, że sumy równych wyrazów pierwszego wiersza macierzy dla $k = r + 1$ będą postaci

$$\binom{r+1}{s} a_{11}^{r+1-s} \left(1 - a_{11}\right)^{s}$$

gdzie

$$s = 0,1,\ldots,r+1$$

Z tego wynika,że teza twierdzenia będzie prawdziwa dla pierwszego wiersza.
Podobnie przebiega dowód tezy twierdzenia dla wiersza drugiego.

Niech α będzie układem stochastycznym opisującym równolegle sprzężone układy stochastyczne $\gamma', \gamma'', \ldots, \gamma^{(k)}, \ldots \in \Gamma_1$ z których każdy posiada macierz przejść równą $\left[a_{ij}(t^*)\right]_{2,2}$ oraz niech $\alpha_1 \in \Gamma_2$, $\alpha_2 \in \Gamma_3$ i $\alpha_1 \to \alpha \to \alpha_2$.

Z twierdzeń 5.4 i 5.5 wynika,że warunkiem wystarczającym na to,aby złożony układ stochastyczny $\Delta = \{\alpha_1, \alpha, \alpha_2\}$ posiadał niezawodność większą od niezawodności każdego z układów $\gamma^{(k)}$ jest istnienie takich s i k,dla których jest prawdziwy co najmniej jeden z dwóch następujących układów nierówności :

$$/1/ \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{s} \binom{k}{i} a_{11}(t^*)^{k-i} \left(1 - a_{11}(t^*)\right)^{i} \geqslant a_{11}(t^*) \\ \sum\limits_{i=0}^{s} \binom{k}{i} \left(1 - a_{22}(t^*)\right)^{k-i} a_{22}(t^*)^{i} < 1 + a_{22}(t^*) \end{cases}$$

$$/2/ \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{s} \binom{k}{i} a_{11}(t^*)^{k-i} \left(1 - a_{11}(t^*)\right)^{i} > a_{11}(t^*) \\ \sum\limits_{i=0}^{s} \binom{k}{i} \left(1 - a_{22}(t^*)\right)^{k-i} a_{22}(t^*)^{i} \leqslant 1 - a_{22}(t^*) \end{cases}$$

Jeśli istnieją k i s spełniające jeden z powyższych układów nierówności,to istnieje taki układ dekodujący,że niezawodność Δ jest większa od niezawodności każdego z $\gamma^{(k)}$.

W szczególności dla układów zdefiniowanych przez Shannona /[32/ ,w których $a_{11}(t^*) = 1$ oraz $a_{22}(t^*) \in (0,1)$ układ nierówności /1/ będzie prawdziwy dla $s = 0$ i $k > 1$, bowiem

$$a_{11}(t^*)^k = a_{11}(t^*)$$

oraz

$$(1 - a_{22}(t^*))^k < - a_{22}(t^*) + 1$$

W takim przypadku macierz przejść układu dekodującego α_2 będzie następującej postaci :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeśli $k \to \infty$, to macierz przejść złożonego układu stochastycznego Δ dąży do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

co jest zbieżne z wynikami Shannona.

Posługując się metodami podanymi w pracy można określić niezawodność dowolnego złożonego układu stochastycznego w zależności od jego struktury i macierzy przejść wchodzących w jego skład układów stochastycznych.

6. Zastosowanie pojęcia układu stochastycznego do rozwiązania pewnego problemu rozpoznawania

Pojęcie układu stochastycznego można wykorzystać przy rozwiązywaniu problemów rozpoznawania. Ograniczymy się do prostszego z typów rozpoznawania, sformułowanego w pracy Oganiana /[30]/. Zgodnie z ogólną definicją stacjonarnych funkcji stochastycznych, układ stochastyczny będziemy nazywali stacjonarnym, jeśli dla dowolnych $t_1, t_2 \in T$, $R(t_1^*) = R(t_2^*) = R$.

Niech będzie dany stacjonarny układ stochastyczny $\gamma \in \Gamma$ o alfabecie wejściowym $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alfabecie wyjściowym $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, macierzy wejściowej $X(t)$ i macierzy przejść R. Dla ustalonego zbioru X wartości funkcji stochastycznej ε_x będą zależały jedynie od elementów zbioru T, czyli otrzymujemy tzw. trajektorię funkcji stochastycznej.
Niech T będzie zbiorem liczb naturalnych i niech wartości trajektorii w przedziale $[1, l]$ wyznaczają litery

/1/ $x', x'', \dots, x^{(l)}$

gdzie

$x^{(i)} \in X$ i $i \in [1, l]$

Trajektorii funkcji stochastycznej ε_x jest przyporządkowana pewna trajektoria funkcji stochastycznej ε_y. Niech odpowiednie wartości tej ostatniej będą :

/2/ $y', y'', \dots, y^{(l)}$.

Rozwiązanie naszego problemu rozpoznawania będzie polegało na wyznaczeniu ciągu /1/ na podstawie znajomości ciągu /2/.

Aby rozwiązać ten problem wystarczy znaleźć taki układ stochastyczny $\gamma_1 \in \Gamma$, że $\gamma \to \gamma_1$ i dla każdego $t_1 = f_1(f(t))$ wartość trajektorii wyjścia układu γ_1 jest równa wartości trajektorii wejścia układu γ dla $t \in T$.

W dalszym ciągu macierz przejść stacjonarnego układu stochastycznego γ_1 oznaczać będziemy przez R_1.

Jeżeli istnieje układ stochastyczny spełniający podane wyżej dwa warunki, to rozpoznawanie będzie bezbłędne. Natomiast jeśli założymy, że sprzężony z układem stochastycznym γ układ stochastyczny γ_1 nie musi spełniać wymienionego wyżej warunku drugiego, a jedynie jego alfabet wyjściowy jest równy alfabetowi wejściowemu układu stochastycznego γ, to istnieje nieskończenie wiele układów stochastycznych spełniających takie osłabione warunki. Każdy z takich układów γ_1 nazywać będziemy układem dopuszczalnym dla rozwiązania problemu.

W celu uzyskania jednoznaczności takiego rozwiązania należy przyjąć kryterium poprawności rozpoznawania.

Niech $[z_{ij}]_{n,n}$ będzie macierzą współczynników błędów, tzn. wyraz z_{ij} charakteryzuje błąd przy traktowaniu x_i jako x_j. Jest oczywistym, że na głównej przekątnej będą zera. Rozpoznawanie będzie optymalne, jeśli wartość oczekiwana M pojawienia się błędu będzie minimalna.

Niech m_{ik} oznacza wartość oczekiwaną błędu w przypadku, gdy pojawienie się y_k zawsze jest rozpoznawane jako x_i, wówczas

$$/3/ \qquad m_{ik} = \sum_{j=1}^{n} p(x_{1j})\, r_{jk}\, z_{ji}$$

Poszczególne wartości oczekiwane błędu wyznacza macierz $[m_{ij}]_{n,m}$.

Dla danego y_k rozpoznawanie będzie optymalne przy

$$M_k = \min_{1\leq i\leq n}\left(m_{ik}\right)$$

Twierdzenie 6.1.Problem rozpoznawania posiada co najmniej jedno rozwiązanie.

Dowód.Niech układ stochastyczny opisujący złożony układ stochastyczny $\Delta = \{\gamma, \gamma_1\}$ posiada macierz przejść równą R_2,wówczas

$$R_2 = R\cdot R_1$$

czyli

$$r_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} r_{ik}\, r_{kj}^{(1)}$$

Wartość oczekiwana błędu w przypadku,gdy pojawienie się x_i jest rozpoznawane jako x_i jest równa

$$m_{ii} = \sum_{j=1}^{n} p(x_{1j})\, r_{ji}^{(2)}\, s_{ji}$$

Wartość oczekiwana błędu M będzie równa

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p(x_{1j})\, r_{ji}^{(2)}\, s_{ji} =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} p(x_{1j})\, r_{jk}\, r_{ki}^{(1)}\, s_{ji}$$

Uwzględniając zależność /3/ otrzymamy

$$M = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{ik}\, r_{ki}^{(1)}$$

Aby znaleźć optymalny układ stochastyczny γ_1 należy wyznaczyć minimum funkcjonału

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{ik} r_{ki}^{(1)}$$

przy warunkach $\sum_{i=1}^{n} r_{ki}^{(1)} = 1$ dla $k = 1,2,3,\ldots,m$

$$r_{ki} \geqslant 0 .$$

Można je znaleźć posługując się metodą programowania liniowego.

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} p(x_{1j}) r_{jk} r_{ki}^{(1)} z_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{ik} r_{ki}^{(1)}$$

a więc

$$M \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} M_k r_{ki}^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} M_k \sum_{i=1}^{n} r_{ki}^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} M_k 1 = \sum_{k=1}^{m} M_k$$

Aby otrzymać oszacowanie dolne M określimy

$$r_{ki}^{(1)} = \begin{cases} 1 \text{ gdy } m_{ki} = M_k \\ 0 \text{ gdy } m_{ki} \neq M_k \end{cases}$$

i

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ki}^{(1)} = 1 \text{ ,gdzie } k = 1,2,\ldots,m$$

Otrzymana w ten sposób macierz będzie przedstawiała szczególny przypadek układu stochastycznego,jakim jest układ zdeterminowany. Dla złożonego układu stochastycznego $\triangle$ o podanej wyżej zależności dla macierzy przejść układu γ_1,będzie zachodziła następująca równość :

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} m_{ik} r_{ki}^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} m_{ik} r_{ki}^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} c_{kk}$$

gdzie

$$c_{kk} = M_k$$

Ostatecznie więc

$$M = \sum_{k=1}^{m} M_k$$

cbdo.

Z twierdzenia 6.1 wynika,że

$$\min(M) = \sum_{k=1}^{m} M_k$$

Analogicznie można wykazać,że

$$\max(M) = \sum_{k=1}^{m} M_k'$$

gdzie

$$M_k' = \max_i (m_{ik})$$

Jest oczywistym,że jeśli $\gamma_1 \in \Gamma$ jest optymalny ze względu nana dane rozpoznawanie,to szeregowe dołączenie układu stochastycznego γ_2 /$\gamma_1 \rightarrow \gamma_2$/ nie może zmniejszyć wartości oczekiwanej błędu.Poprawność wniosku wynika z tego,że sprzężone γ_1 i γ_2 można przedstawić jako jeden układ stochastyczny γ_3.

Jest także możliwe ,,klasyczne" ujęcie problemu rozpoznawania Wystarczy w tym celu

$$\sum_{j=1}^{n} p(x_{1j}) r_{jk} s_{ji}$$

traktować jako ,,odległość" y_k od x_i i szukać minimum tak zdefiniowanej odległości.

Rozważania tego rozdziału podały jedną z perspektyw zastosowań pojęcia układu stochastycznego.

7.Uwagi końcowe

W pracy starano się rozszerzyć klasyczne ujęcie układu jako ,,czarnej skrzynki" na przypadek niezdeterminowany.Wydaje się,że wprowadzone pojęcie może znaleźć szersze zastosowanie nie tylko w badaniach teoretycznych ale i może być wykorzystane dla potrzeb praktyki.

Najbliższe perspektywy,to zastosowanie pojęcia układu stochastycznego do badania niezawodności urządzeń technicznych.W tym celu należałoby znacznie rozszerzyć badania nad własnościami niezawodności traktowanej jako funkcji czasu.

Jest koniecznym także zbudowanie aparatu formalnego dla umożliwienia syntezy układów stochastycznych.

Wydaje się,że szereg problemów teoretycznych i praktycznych daje się rozwiązać przy pomocy pojęcia układu stochastycznego wykorzystując bezpośrednio nowe matematyczne metody optymalizacji / np. problemu rozpoznawania jak pokazano w rozdziale 6 pracy/.

Rozważania zawarte w pracy stanowią badania problemów podstawowych i nie wyczerpują do końca rozpatrywanych w pracy zagadnień oraz pomijają szereg bardzo istotnych kwestii,którymi w przyszłości autor chciałby się zająć.

B i b l i o g r a f i a

[1] Burks A.W., Wright J.B., Theory of logical nets, Proc, IRE, vol.41, 1953

[2] Cooke R.G., Infinite Matrices and Sequence Spaces, London, 1950

[3] Elias P., Computation in the presence of noise, IBMJ, 2, 1958

[4] Gantmacher F.R., Tjeorija matric, Moskwa, 1964

[5] Gawriłow M.A., Sowriemjennoje sostojanije tjeorji rieliejnych ustrojstw i koniecznych awtomatow, referat na IFAC, 1962

[6] Gawriłow M.A., Tjeorija rieliejno-kontaktnych schem, Moskwa, 1950

[7] Gichman I.I., Skorochod A.W., Wwjedienije w tjeoriju słuczajnych procesow, Moskwa, 1965

[8] Gill A., Introduction to the Theory of Finite-State Machines, New York-San Francisco-Toronto-London

[9] Glinski G., Reliability Theory, referat na IFAC, 1962

[10] Głuszkow B., M., Syntez cyfrowych awtomatow, Moskwa, 1962

[11] Grenander W., Probabilities on Algebraic Structureo, New York -London, 1963

[12] Halmos P.R., Measure Theory, New York, 1950

[13] Jakubajtis E.A., Asynchronnyje logiczeskije awtomaty, Riga, 1966

[14] Jaroń J., Zastosowania grafów do układów cybernetycznych, Zesz.Nauk. UŁ, s.II, z.11, 1961

[15] Jaroń J., Projekt aksjomatycznej definicji układu cybernetycznego, Kosmos, z.14, 1968

[16] Jaroń J.,Elementarny,cybernetyczny układ odosobniony jako obiekt klasy CIS,Zesz.Nauk. UŁ,s.II,z.26,1967

[17] Jaroń J.,Połączenia i sprzężenia,Zesz.Nauk. UŁ,s.II,z.26, 1967

[18] Kleene S.C.,Representation of events in nerve nets and finite automata,Automata Studies,Princeton University Press, 1956

[19] Kościuczyk Z.,Definicja i podstawowe własności niezawodności pewnych klas układów cybernetycznych,Zesz.Nauk. UŁ,s.II, z.26,1967

[20] Latuśkiewicz J.,Zastosowanie teorii ECIS do sieci cybernetycznych,Zesz.Nauk. UŁ,s.II,z.26,1967

[21] Latuśkiewicz J.,Stochastyczne modele neuronów,Substrakty I Krajowego Sympozjum Biocybernetyki,Biomatematyki i Biotechniki,Warszawa,1968

[22] Lewin N.M.,Metod analiza nadjeżnosti cyfrowych ustrojstw, A i WT,z.15,Riga,1966

[23] LÖfgren L.,Self-repair as the limit for automatic error correction,Principles of Self Organization,Pergamon Press, 1962

[24] Łazariew W.G.,Pijl E.I.,Syntez asynchronnych koniecznych awtomatow,Moskwa,1964

[25] Mealy G.H.,A method for synthesizing sequential circuits, BSTJ,v.34,1955

[26] Moisil G.,Teoria algebrica a mecanismelor automate,Bucuresti,1959

[27] Moore E.F.,Gedanken-experiments on Sequential Machines, Automata Studies,Princeton University Press,1956

[28] Moore E.F.,Shannon C.,Reliable circuist using less reliable relays,Journal of the Franklin Institute,v.3,1956

[29] von Neumann J.,Probabilitic logic,Automata Studies,Princeton University Press,1956

[30] Oganian R.A.,Postanowka i algoritm rjeszenija zadaczi razpoznawania obrazow,Trudy WC AN ASSR i EGU,III,1965

[31] Rabin M.O.,Probabilistic automata,Information and Control, v.6,1963

[32] Shannon C.,Moore E.F.,Machine and for switching circuit design,Proc.IRE,vol.41,1953

[33] Starke P.H.,Theorie stochastischer Automaten,EIK,z.1,1965

[34] Ulam S.M.,A Collection of Mathematical Problems,Los Alamos-New Mexico

S p i s   t r e ś c i