

*Dorota Pekasiewicz**

BOOTSTRAPOWA WERYFIKACJA HIPOTEZ O WARTOŚCI OCZEKIWANEJ POPULACJI O ROZKŁADZIE ASYMETRYCZNYM

Streszczenie. W pracy przedstawiona jest propozycja wykorzystania testu bootstrapowego do weryfikacji hipotez o wartości oczekiwanej populacji charakteryzującej się rozkładem asymetrycznym. Test bootstrapowy jest testem nieparametrycznym, który może być stosowany w przypadku posiadania prób o małej liczbie elementów.

Własności testu bootstrapowego wykorzystywanego do weryfikacji hipotez o wartości oczekiwanej populacji o wybranych rozkładach asymetrycznych przeprowadzone zostały metodami symulacyjnymi. Analizowano rozmiar testu bootstrapowego i dla dużych prób porównywano go z rozmiarem klasycznego testu istotności.

Słowa kluczowe: test bootstrapowy, rozmiar testu, wartość oczekiwana.

I. WPROWADZENIE

Przy wnioskowaniu statystycznym o parametrach populacji asymetrycznych, w tym przy weryfikacji hipotez statystycznych, możemy wykorzystywać klasyczne metody parametryczne lub metody sekwencyjne (por. D. Pekasiewicz, 2011) albo, w przypadku braku informacji o klasie rozkładu, metody nieparametryczne. Przy nieparametrycznej weryfikacji hipotez statystycznych o wartości oczekiwanej zwykle wykorzystuje się asymptotyczne własności jej estymatora. Wymagane jest więc posiadanie tak zwanych dużych prób. Dla populacji charakteryzujących się różną asymetrią, minimalne wielkości prób umożliwiające korzystanie z twierdzeń granicznych są różne. Problemem może być więc rozstrzygnięcie, czy próba jest wystarczająco liczna, aby można było ją wykorzystać do tego typu wnioskowania statystycznego.

Metody bootstrapowe, należące do grupy metod nieparametrycznych, nie wymagają prób o dużej liczbie elementów. Mogą więc być stosowane zarówno w przypadku posiadania prób o małej liczbie elementów, jak i dla dużych prób, jako alternatywa nieparametrycznych metod klasycznych.

* Dr, Katedra Metod Statystycznych, Uniwersytet Łódzki

Do weryfikacji hipotez o wartości oczekiwanej populacji o asymetrycznych rozkładach można stosować bootstrapowy test istotności. Analizę własności tego testu przeprowadzono metodami symulacyjnymi i porównano je z własnościami klasycznego testu istotności wykorzystującego fakt, że średnia arytmetyczna z próby ma asymptotycznie rozkład normalny. Badania dotyczyły analizy rozmiarów bootstrapowego i klasycznego testu istotności dla wartości oczekiwanej populacji charakteryzujących się różnymi współczynnikami asymetrii, w oparciu o próby o różnych liczebnościach. Do analizy porównawczej testów wykorzystano próby duże, określane w literaturze jako próby zawierające 30 lub więcej elementów.

II. TEST BOOTSTRAPOWY DLA WARTOŚCI OCZEKIWANEJ

Niech $X_1, \dots, X_n$ będzie próbą prostą wylosowaną z populacji X o nieznannej wartości oczekiwanej μ . Niech $x_1, \dots, x_n$ oznacza ciąg realizacji tej próby.

Rozważmy hipotezę zerową postaci:

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad (1)$$

wobec hipotezy alternatywnej:

$$H_1 : \mu \neq \mu_0, \quad (2)$$

gdzie μ_0 jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

W celu zweryfikowania powyższych hipotez testem bootstrapowym dla wartości oczekiwanej, przy ustalonym poziomie istotności α , należy wygenerować N ($N \geq 1000$) prób bootstrapowych według rozkładu bootstrapowego

$P(X_B = x_k) = \frac{1}{n}$, dla $k = 1, \dots, n$. Oznaczmy przez $x_{1,i}^*, x_{2,i}^*, \dots, x_{n,i}^*$ realizację i -tej ($i = 1, \dots, N$) próby bootstrapowej $X_{1,i}^*, X_{2,i}^*, \dots, X_{n,i}^*$.

Na podstawie wartości i -tej próby bootstrapowej obliczamy:

$$\bar{x}_{i,B} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{k,i}^*, \quad (3)$$

$$s_{i,B} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{k,i}^* - \bar{x}_{i,B})^2} \quad (4)$$

oraz

$$u_{i,B} = \frac{\bar{x}_{i,b} - \mu_0}{s_{i,B}} \sqrt{n}. \quad (5)$$

W wyniku obliczeń otrzymujemy ciąg wartości $u_{1,B}, u_{2,B}, \dots, u_{n,B}$.

Niech

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}, \quad (6)$$

gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ oraz $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$.

Obliczamy wartość:

$$\alpha^* = \frac{\text{card}\{u \in \{u_{1,B}, u_{2,B}, \dots, u_{N,B}\} : |u| \geq |u_0|\}}{N} \quad (7)$$

i porównujemy ją z ustalonym poziomem istotności α (por. Cz. Domański, K.Pruska, 2000). Jeżeli zachodzi $\alpha^* > \alpha$, to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 . W przeciwnym przypadku odrzucamy hipotezę zerową na korzyść alternatywnej H_1 .

Bootstrapowy test dla wartości oczekiwanej może być stosowany dla hipotez jednostronnych.

Dla hipotezy alternatywnej postaci:

$$H_1 : \mu < \mu_0 \quad (8)$$

wartość α^* obliczamy z wzoru:

$$\alpha^* = \text{card}\{u \in \{u_{1,B}, u_{2,B}, \dots, u_{N,B}\} : u \leq u_0\}, \quad (9)$$

natomiast dla hipotezy:

$$H_1 : \mu > \mu_0 \quad (10)$$

z wzoru:

$$\alpha^* = \text{card}\{u \in \{u_{1,B}, u_{2,B}, \dots, u_{N,B}\} : u \geq u_0\}. \quad (11)$$

III. ANALIZA MONTE CARLO WŁASNOŚCI TESTU BOOTSTRAPOWEGO

Analiza własności testu bootstrapowego weryfikującego hipotezę (1) wobec (2) przeprowadzona została w sposób symulacyjny. Rozważano następujące trzy klasy populacji:

- populacje o rozkładzie gamma,
- populacje o rozkładzie Pareto,
- populacje o rozkładzie beta.

Parametry rozkładów dobierane były tak, aby generowane populacje charakteryzowały się różnymi współczynnikami asymetrii.

Populacje o rozkładzie gamma, o funkcji gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^p \Gamma(p)} x^{p-1} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

i ustalonych parametrach λ i p charakteryzowała asymetria dodatnia.

Również dodatnią asymetrię miały populacje o rozkładzie Pareto o funkcji gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k \cdot x_m^k}{x^{k+1}} & \text{dla } x \geq x_m \\ 0 & \text{dla } x < x_m \end{cases}$$

i wybranych wartościach parametrów x_m i k .

Parametry populacji o rozkładzie beta o funkcji gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases}$$

dobierane były tak, aby charakteryzowały się one asymetrię ujemną.

Wybór analizowanych klas rozkładów uzasadnia ich zastosowanie m.in. w finansach, ubezpieczeniach, kontroli jakości oraz związany jest z dość łatwą możliwością doboru parametrów dla uzyskania różnych wielkości współczynników asymetrii.

Z wygenerowanych populacji losowano tzw. małe próby, czyli próby o liczebnościach mniejszych niż 30 oraz próby duże, o liczbie elementów nie mniejszej niż 30. Dla ustalonych poziomów istotności $\alpha \leq 0,1$ weryfikowano hipotezy o wartości oczekiwanej populacji, generując 1000 prób bootstrapowych i korzystając z wzorów (5)–(7). Procedurę weryfikacji hipotez powtarzano 10000 razy. Szacowano rozmiar testu i porównano go z przyjętą wartością poziomu istotności α . Dla dużych prób porównano wyniki testu bootstrapowego z wynikami uzyskanymi dla klasycznego testu istotności.

Wartości rozmiarów testu bootstrapowego dla wartości oczekiwanej populacji o wybranych rozkładach z ustalonymi parametrami rozkładu, dla liczebności prób $n=10, 20, 30, 50, 70$ i dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$ zawiera tablica 1.

Rysunek 1 stanowi graficzną prezentację zależności rozmiaru testu od liczebności prób, w oparciu o które weryfikujemy hipotezy, oraz od współczynnika asymetrii rozkładu populacji.

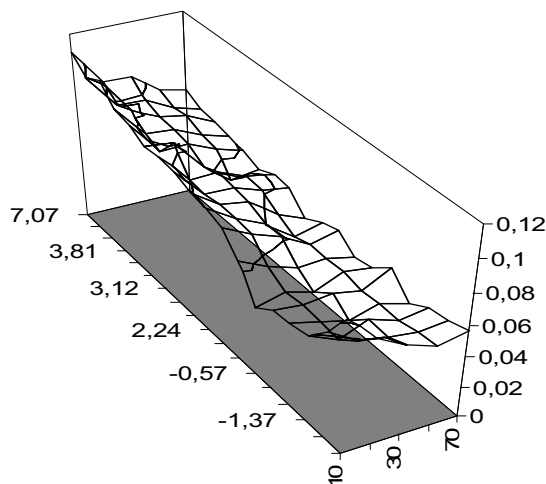
W celu porównania testu bootstrapowego z testem klasycznym, dla prób o liczbie elementów większej lub równej 30, analizowano rozmiary tych testów. W tablicy 2 przedstawiono otrzymane wyniki dla obydwu rozpatrywanych testów.

Rysunki 2 i 3 przedstawiają wartości oszacowanych rozmiarów testu bootstrapowego i klasycznego istotności dla populacji o wybranych współczynnikach asymetrii i liczebności prób odpowiednio 30 i 70 elementów.

Tablica 1. Oszacowania rozmiaru testu bootstrapowego dla wartości oczekiwanej populacji o wybranych asymetrycznych rozkładach

Typ rozkładu		Współcz. asymetrii γ	Liczebności prób				
			10	20	30	50	70
gamma o parametrze $\lambda=1$ i wybranych wartościach p	0,2	4,47	0,1053	0,0826	0,0744	0,0716	0,0630
	0,4	3,16	0,0860	0,0841	0,0647	0,0517	0,0542
	0,6	2,58	0,0818	0,0699	0,0665	0,0535	0,0462
	0,8	2,24	0,0797	0,0688	0,0606	0,0474	0,0521
	1,0	2,00	0,0765	0,0680	0,0617	0,0513	0,0562
	1,4	1,69	0,0643	0,0560	0,0507	0,0511	0,0473
Pareto o parametrze $xm=1$ i wybranych wartościach k	4,0	7,07	0,1085	0,0863	0,0864	0,0742	0,0702
	5,0	4,65	0,0999	0,0791	0,0780	0,0687	0,0643
	6,0	3,81	0,0943	0,0748	0,0737	0,0664	0,0610
	7,0	3,38	0,0912	0,0714	0,0717	0,0644	0,0590
	8,0	3,12	0,0880	0,0688	0,0695	0,0624	0,0587
	9,0	2,94	0,0860	0,0676	0,0676	0,0614	0,0582
beta o parametrze $p=3$ i wybranych wartościach q	0,2	-2,85	0,0863	0,0691	0,0591	0,0529	0,0569
	0,4	-1,84	0,0684	0,0573	0,0537	0,0519	0,0538
	0,6	-1,37	0,0560	0,0473	0,0550	0,0490	0,0522
	0,8	-1,07	0,0542	0,0491	0,0447	0,0499	0,0444
	1,0	-0,86	0,0525	0,0506	0,0523	0,0486	0,0589
	1,4	-0,57	0,0440	0,0487	0,0437	0,0524	0,0492

Źródło: Obliczenia własne.



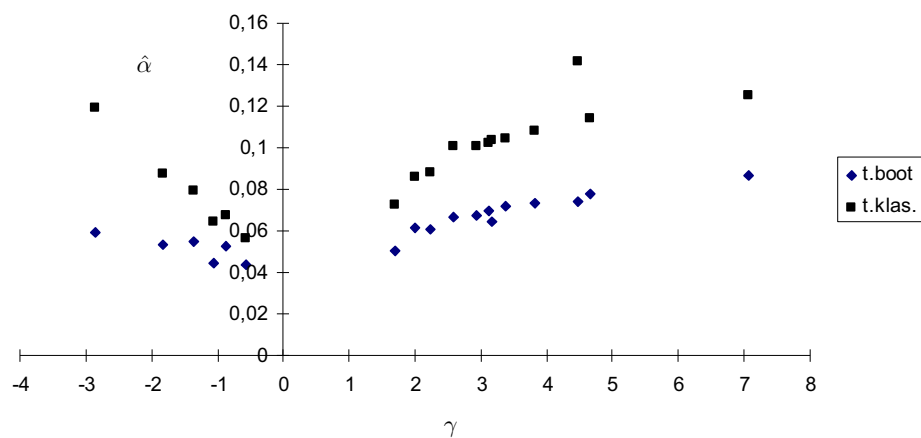
Rys. 1. Zależność rozmiaru testu od liczebności próby i współczynnika asymetrii populacji

Źródło: Opracowanie własne.

Tablica 2. Porównanie rozmiarów testu bootstrapowego i testu klasycznego dla wartości oczekiwanej populacji o wybranych asymetrycznych rozkładach

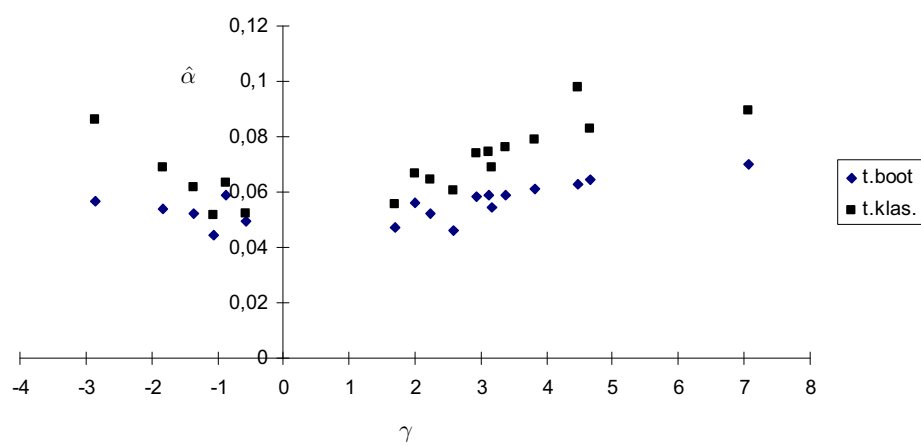
Typ rozkładu		Współcz. asymetrii γ	Liczebności prób					
			T. boot. 30	T. klas. 30	T. boot. 50	T. klas. 50	T. boot. 70	T. klas. 70
gamma o para- metrze $\lambda=1$ i wybranych wartościach p	0,2	4,47	0,0744	0,1416	0,0716	0,1225	0,0630	0,0978
	0,4	3,16	0,0647	0,1036	0,0517	0,0757	0,0542	0,0690
	0,6	2,58	0,0665	0,1010	0,0535	0,0756	0,0462	0,0603
	0,8	2,24	0,0606	0,0880	0,0474	0,0639	0,0521	0,0645
	1,0	2,00	0,0617	0,0859	0,0513	0,0649	0,0562	0,0664
	1,4	1,69	0,0507	0,0727	0,0511	0,0630	0,0473	0,0557
Pareto o parame- trze $\alpha=1$ i wybranych wartościach k	4,0	7,07	0,0864	0,1255	0,0742	0,0990	0,0702	0,0893
	5,0	4,65	0,0780	0,1140	0,0687	0,0888	0,0643	0,0827
	6,0	3,81	0,0737	0,1078	0,0664	0,0842	0,0610	0,0789
	7,0	3,38	0,0717	0,1048	0,0644	0,0822	0,0590	0,0762
	8,0	3,12	0,0695	0,1019	0,0624	0,0803	0,0587	0,0746
	9,0	2,94	0,0676	0,1004	0,0614	0,0786	0,0582	0,0737
beta o parametrze $p=3$ i wybranych wartościach q	0,2	-2,85	0,0591	0,1196	0,0529	0,0880	0,0569	0,0860
	0,4	-1,84	0,0537	0,0875	0,0519	0,0717	0,0538	0,0688
	0,6	-1,37	0,0550	0,0789	0,0490	0,0645	0,0522	0,0615
	0,8	-1,07	0,0447	0,0646	0,0499	0,0595	0,0444	0,0514
	1,0	-0,86	0,0523	0,0671	0,0486	0,0571	0,0589	0,0634
	1,4	-0,57	0,0437	0,0563	0,0524	0,0584	0,0492	0,0523

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 2. Zależność oszacowanego, na podstawie 30-elementowej próby, rozmiaru testu od współczynnika korelacji populacji

Źródło: Obliczenia własne.



Rys. 3. Zależność oszacowanego, na podstawie 70-elementowej próby, rozmiaru testu od współczynnika korelacji populacji

Źródło: Obliczenia własne.

IV. WNIOSKI

Na podstawie uzyskanych wyników można stwierdzić, że dla populacji o mniejszej asymetrii test bootstrapowy pozwolił zweryfikować sformułowane hipotezy na poziomie istotności w przybliżeniu równym ustalonymu poziomowi istotności $\alpha = 0,05$.

Największe rozbieżności między rozmiarem testu i przyjętym poziomem istotności były w przypadku silnej asymetrii i małych prób, ale i tak okazały się one mniejsze niż w przypadku klasycznego testu istotności dla prób o dużo większej liczbie elementów (próby 30 i 50 elementowe). Zastosowanie testu bootstrapowego dla 10, 20-elementowych prób powodowało, że liczba decyzji o odrzuceniu prawdziwej hipotezy zerowej była w niektórych przypadkach nawet dwukrotnie większa od wartości ustalonej, ale w tych przypadkach test klasyczny dopiero dla 70-elementowej próby dał porównywalne wyniki. Dla innych rozważanych wartości α np. $\alpha = 0,01$ oraz $0,1$ wyniki były analogiczne.

W przypadku dużych prób oszacowany rozmiar testu bootstrapowego był mniejszy niż rozmiar testu klasycznego. Oczywiście różnice te malały wraz ze wzrostem liczebności prób. Chociaż w przypadku zastosowania testu bootstrapowego liczba błędnych decyzji polegających na odrzuceniu prawdziwej hipotezy zerowej była mniejsza niż przy zastosowaniu testu klasycznego, to jednak nie we wszystkich przypadkach 70-elementowa próba była wystarczająca do weryfikacji hipotez o wartości oczekiwanej na ustalonym poziomie istotności. Dotyczyło to populacji o silnej asymetrii np. populacji o rozkładzie Pareto z parametrami $x_m = 1$ i $k = 4$, dla której współczynnik asymetrii wynosi 7,07. Dla tej populacji oszacowany rozmiar testu bootstrapowego wyniósł 0,0702. Kolejne zwiększanie liczebności próby (próba 100-elementowa, 120-elementowa itd.) sprawiło, że decyzja została podjęta na poziomie istotności równym w przybliżeniu ustalonej wartości, co wynika z asymptotycznych własności średniej arytmetycznej.

Z przeprowadzanych badań statystycznych, wynika, że informacja o asymetrii populacji lub wstępne oszacowanie współczynnika asymetrii mogą być pomocne przy ustaleniu liczebności próby zarówno przy zastosowaniu testów bootstrapowych jak i klasycznych testów istotności.

Dla wszystkich rozważanych populacji weryfikacja hipotez o wartości oczekiwanej za pomocą testu bootstrapowego dała lepsze rezultaty niż zastosowanie klasycznego testu istotności, gdyż prowadziła do mniejszej liczby błędnych decyzji polegających na odrzuceniu prawdziwej hipotezy zerowej (rys 2., rys 3.). Podjęcie decyzji o odrzuceniu hipotezy zerowej lub braku podstaw do jej odrzucenia na ustalonym poziomie istotności związane jest z właściwym doбором

liczebności próby, która zależy od typu rozkładu populacji i współczynnika asymetrii.

Testy bootstrapowe znajdują zastosowanie również przy weryfikacji hipotez statystycznych o wartościach parametrów dwóch populacji. Hipotezy mogą dotyczyć zarówno parametrów populacji jedno jak i wielowymiarowych (por. Domański Cz., Pruska K., (2000), J. Shao, D. Tu, (1996)).

BIBLIOGRAFIA

- Domański Cz., Pruska K., (2000), *Nieklasyczne metody statystyczne*, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Pekasiewicz D., (2011), *Testy statystyczne dla parametrów zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym*, w:) praca zbiorowa pod red. Z.E. Zielińskiego: „Rola informatyki w naukach ekonomicznych i społecznych. Innowacje i implikacje interdyscyplinarne”, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Handlowej, Kielce, s. 228–236.
- Shao J., Tu D., (1996) *The Jackknife and Bootstrap*, Springer Verlag, New York.

Dorota Pekasiewicz

THE BOOTSTRAP VERIFICATION OF HYPOTHESES ABOUT THE EXPECTED VALUE OF ASYMMETRIC DISTRIBUTED POPULATION

Abstract

A proposal of using the bootstrap test to verify hypotheses about the expected value of asymmetric population is presented. The bootstrap test is the nonparametric one. It can be used when we have a small size of sample.

In the paper, the results of simulation studies of the properties of this test are presented, in particular the size of a test. For large sample's sizes, the size of the bootstrap test is compared with the size of classical test of significance.