

Katarzyna Uramek*

TEORETYCZNE MODELE WZROSTU GOSPODARCZEGO

1. WPROWADZENIE¹

Zainteresowanie zagadnieniem wzrostu gospodarczego pojawiło się już w pracach klasycznej szkoły angielskiej, u Adama Smitha, Davida Ricardo czy Thomasa Malthusa. Teoretycznym wzbogaceniem klasycznej myśli ekonomicznej stała się analiza marginalna zapoczątkowana przez Williama S. Jevonsa, Carla Mengera i Leona Walrasa. Jednak największe zainteresowanie wzrostem gospodarczym przypada na wiek XX, kiedy to zaczęły powstawać formalne, matematyczne modele wzrostu gospodarczego. Metodologiczne podejście ekonomistów do tej problematyki nie było jednolite. Według Snowdon *et al.*² współczesny brak zgodności wywodzi się w dużym stopniu z „epizodu keynesowskiego”. Oznacza to, że początków zróżnicowania poglądów ekonomistów należy szukać już od czasów Johna Maynarda Keynesa. Wówczas to zaczęły tworzyć się dwie konkurencyjne teorie: z jednej strony teoria klasyków o istnieniu mechanizmów dostosowawczych rynku do utrzymania równowagi przy pełnym zatrudnieniu, a z drugiej *Ogólna teoria* Keynesa kwestionująca ten pogląd i wyjaśniająca istnienie przymusowego bezrobocia w latach 30. ubiegłego wieku. Od tamtej pory zaczęło kształtować się wiele koncepcji dotyczących teorii wzrostu gospodarczego. Według Solowa³ wyróżniły się trzy nurty badawcze: pierwszy koncentrował się wokół modeli neokeynesistowskich, drugi dotyczył neoklasycznych modeli wzrostu gospo-

* Mgr, Uniwersytet Wrocławski.

¹ Autorka pragnie podziękować dr. hab. Tomaszowi Tokarskiemu z Uniwersytetu Jagiellońskiego za liczne i cenne uwagi w trakcie powstawania tego opracowania.

² B. Snowdon, H. R. Vane, P. Wynarczyk, *Współczesne nurty teorii makroekonomii*, PWN, Warszawa 1998.

³ R. M. Solow, *Perspectives on Growth Theory*, „Journal of Economic Perspectives” 1994, vol. 8, No 1, s. 45–54.

darczego, a trzeciej teorii wzrostu endogenicznego. Różnice, szczególnie pomiędzy pierwszym a drugim nurtem, dotyczyły kwestii metodologicznych. Twórcy modeli neokenesistowskich „koncentrowali się na bezpośrednich, praktycznych aspektach polityki”⁴, podczas gdy neoklasycy „podkreślali znaczenie konstruowania modeli przy zastosowaniu nowych narzędzi analitycznych”⁵.

Pierwsze formalne modele, które zastosowały koncepcje Keynesa do teorii wzrostu gospodarczego, to modele Roya F. Harroda⁶, Evseya D. Domara⁷ i Nicolasa Kaldora⁸. Przykładem modelu keynesistowskiego jest model Harroda-Domara, będący kompilacją modeli Harroda i Domara. Podkreśla się w nim rolę akumulacji kapitału w utrzymaniu trwałego wzrostu gospodarczego. Główną słabością modelu Harroda-Domara jest jego niedostosowanie do rzeczywistych procesów wzrostu z powodu założenia stałej wartości współczynnika kapitałochłonności oraz stałej relacji pomiędzy czynnikami produkcji.

Kolejna istotna klasa modeli w teorii wzrostu gospodarczego wywodzi się ze szkoły neoklasycznej. W teorii neoklasycznej zakłada się, że gospodarka jest konkurencyjna, z doskonale elastycznymi cenami i płacami, dzięki czemu zapewnione jest oczyszczanie się rynków. Modele neoklasyczne charakteryzują się dwoma istotnymi założeniami: pierwsze odnosi się do koncepcji ogólnej teorii równowagi Walrasa, drugie zaś dotyczy użycia przez neoklasyków rachunku marginalnego. W latach 50. i 60. ubiegłego wieku zastosowano założenia neoklasyczne do ujmowania procesów gospodarczych w sposób dynamiczny oraz stworzono podstawy modelowej analizy długookresowego procesu wzrostu gospodarczego. Twórcami neoklasycznych modeli byli m.in. Robert M. Solow⁹ i Trevor W. Swan¹⁰. Przedmiotem badań neoklasyków stało się wyznaczenie determinantów długookresowego wzrostu gospodarczego. Kontynuacją tych rozważań było określanie przyczyn dużych rozpiętości pomiędzy dochodami różnych krajów oraz analiza istnienia konwergencji.

⁴ B. Snowden, H. R. Vane, *Rozmowy z wybitnymi ekonomistami*, Wyd. Bellona, Warszawa 2003, s. 99.

⁵ Tamże, s. 99.

⁶ R. Harrod, *An Essay in Dynamic Theory*, „Economic Journal” 1939, t. 49 (March), s. 14–33.

⁷ E. D. Domar, *Capital Expansion, Rate of Growth and Employment*, „Econometrica” 1946, t. 14 (April), s. 137–147.

⁸ N. Kaldor, *Alternative Theories of Distribution*, „Review of Economic Studies” 1956, February, vol. 23, s. 83–100.

⁹ R. M. Solow, *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics” 1956, t. 70 (February), s. 65–94.

¹⁰ T. W. Swan, *Economic Growth and Capital Accumulation*, „Economic Record” 1956, t. 32 (November), s. 334–361.

Modele neoklasyczne cechują się założeniami malejącej produktywności krańcowej czynników produkcji oraz stałych efektów skali. Założenie stałych efektów skali może oznaczać, że „gospodarka jest na tyle duża, iż wyczerpała korzyści specjalizacji”¹¹. Może ono również sugerować, że inne czynniki – oprócz kapitału, siły roboczej i wiedzy – nie są istotne w gospodarce, a zatem ich zmiana nie wpłynie znacząco na wielkość produktu. Na podstawie malejącej produktywności krańcowej czynników produkcji i stałych efektów skali, neoklasycy pokazali, że – niezależnie od warunków początkowych – gospodarka dąży do osiągnięcia ścieżki zrównoważonego wzrostu (*steady state*). Model Solowa stał się również podstawą do sformułowania hipotezy konwergencji. Kwestia konwergencji rozpoczęła szereg empirycznych polemik na ten temat (np. Baumol¹², De Long¹³, Young¹⁴). Badania takie podjęli również Mankiw, Romer i Weil¹⁵, którzy stwierdzili, że (zgodnie z modelem Solowa) wzrost populacji i oszczędności wpływają na dochód poszczególnych krajów. Z ich badań wynika, że ponad połowa badanych krajów może wyjaśnić wielkość swojego dochodu na podstawie tych dwóch zmiennych. Jednak dla nich takie wyjaśnienie nie było satysfakcjonujące. Kendrick¹⁶ stwierdził, że niewłaściwe wnioski Solowa mogą wynikać z niedoceniań przez niego znaczenia kapitału ludzkiego. Zgadający się z tym stanowiskiem Mankiw, Romer i Weil rozszerzyli model Solowa, dołączając do czynników produkcji zasób kapitału ludzkiego i określili jego kształtowanie się w czasie. Pokazali oni, że – podobnie jak w modelu Solowa – i w rozszerzonym modelu gospodarka dąży do stanu równowagi. Położenie ścieżki równowagi zależy nie tylko od akumulacji kapitału rzeczowego, ale i ludzkiego. Po rozszerzeniu modelu Solowa okazało się, że znaczną część zróżnicowania poziomu dochodu między krajami można wytłumaczyć bez zanegowania hipotezy konwergencji wynikającej z tegoż modelu.

Model neoklasyczny, pomimo ogromnego znaczenia w teorii wzrostu gospodarczego, okazał się nie wolny od niedoskonałości. Badania empiryczne wykazały, że różnice w dochodzie *per capita* są większe niż przewidywał Solow. Według D. Romera

¹¹ D. Romer, *Makroekonomia dla zaawansowanych*, PWN, Warszawa 2000, s. 26–27.

¹² W. Baumol, *Productivity Growth Convergence and Welfare*, „American Economic Review” 1986, t. 76 (December), s. 1072–1085.

¹³ J. B. De Long, *Productivity Growth, Convergence and Welfare: Comment*, „American Economic Review” 1988, t. 78 (December), s. 1138–1154.

¹⁴ A. Young, *The Tyranny of Numbers: Confronting the Statistical Reality of the East Asian Growth Experience*, NBER 1994, working paper No 4680 (March).

¹⁵ N. Mankiw, D. Romer, D. N. Weil, *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics” 1992, t. 107 (May), s. 407–437.

¹⁶ J. Kendrick, *The Formation and Stocks of Total Capital*, Columbia University Press, New York 1976.

zasadniczy wynik tych modeli [neoklasycznych – przyp. K. U.] jest negatywny: jeżeli dochody z kapitału odzwierciedlają jego wkład do produktu i jeżeli jego udział w ogólnym dochodzie jest umiarkowany, to akumulacja kapitału nie jest w stanie wytłumaczyć w dużej mierze ani długookresowego wzrostu, ani międzynarodowych rozpiętości w dochodzie, jedynym zaś wyznacznikiem dochodu w tych modelach poza kapitałem jest tajemnicza zmienna, „wydajność pracy” (A), której znaczenie nie jest ściśle sprecyzowane, a której kształtowanie się jest uważane za egzogeniczne¹⁷.

Z uwagi na niedoskonałości modelu Solowa zaczęto go modyfikować. Takiej próby podjęli się David Cass¹⁸ oraz Tjalling Koopmans¹⁹. Opierając się na modelu Franka Ramseya²⁰ dołączyli oni do modelu Solowa założenie o endogenicznych oszczędnościach. Okazało się, że taka modyfikacja nie wpłynęła znacząco na wynik. Konsekwencją braku empirycznych zgodności z modelami neoklasycznymi było odejście od modelowania długookresowego wzrostu gospodarczego w latach 70. XX w.

Dopiero w połowie lat 80. wieku XX rozpoczął się nowy etap w badaniach nad długookresową teorią wzrostu gospodarczego, która zerwała z neoklasycznymi założeniami dotyczącymi egzogenicznego charakteru zmiennych na korzyść endogenizowania niektórych czynników produkcji. Główna idea modeli endogenicznych polegała na tym, że długookresowy wzrost dochodu *per capita* zależy od inwestycji podmiotów gospodarczych, a nie od niewyjaśnionej stopy postępu technicznego. Pomimo że modele endogeniczne stanowią dość zróżnicowaną grupę, to można podzielić je na dwie kategorie ze względu na źródła postępu technicznego. W pierwszej zakłada się, że źródłem wzrostu gospodarczego jest akumulacja wiedzy. Choć jest to zgodne z modelem Solowa, to w przeciwieństwie do niego wiedza ma tu charakter endogeniczny. Przykładami modeli reprezentujących ten pogląd są modele Paula Romera²¹, Gene M. Grossmana i Elhanana Helpmana²², Philippe Aghiona i Petera Howitta²³. Drugi rodzaj modeli dotyczy akumulacji kapitału ludzkiego. Są to modele Roberta E. Lucasa²⁴, Costasa Azariadisa i Allana

¹⁷ D. Romer, *Makroekonomia...*, s. 117.

¹⁸ D. Cass, *Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation*, „Review of Economics Studies” 1965, t. 32 (July), s. 233–240.

¹⁹ T. C. Koopmans, *On the Concept of Optimal Economic Growth*, North-Holland, Amsterdam 1965.

²⁰ F. Ramsey, *A Mathematical Theory of Saving*, „Economic Journal” 1928, t. 38 (December), s. 543–559.

²¹ P. Romer, *Increasing Returns and Long Run Growth*, „Journal of Political Economy” 1986, t. 94 (October), s. 1002–1037; tenże, *Endogenous Technological Change*, „Journal of Political Economy” 1990, t. 98 (October), s. 71–102.

²² G. M. Grossman, E. Helpman, *Innovation and Growth in the Global Economy*, MIT Press, Cambridge 1991.

²³ P. Aghion, P. Howitt, *A Model of Growth Through Creative Destruction*, „Econometrica” 1992, t. 60 (March), s. 323–351.

²⁴ R. E. Lucas, *On the Mechanics of Economic Development*, „Journal of Monetary Economics” 1988, t. 22 (July), s. 3–42.

Drazena²⁵, Garyego S. Beckera, Kevina M. Murphyego i Roberta Tamura²⁶ oraz Sergio Rebelo²⁷.

Celem tego opracowania jest przedstawienie dwóch klas modeli: neoklasycznej i endogenicznej. W punkcie 2. zostaną zaprezentowane dwa neoklasyczne modele wzrostu gospodarczego: model Roberta M. Solowa²⁸ i model N. Mankiwa – D. Romera – D. N. Weila²⁹ oraz implikacje z nich wynikające, w 3. scharakteryzowano modele nowej teorii wzrostu na przykładach modeli Roberta E. Lucasa³⁰ i Paula Romera³¹, w 4. zaś podsumowano rozważania z punktów 2. i 3.

2. NEOKLASYCZNE MODELE WZROSTU GOSPODARCZEGO

W tej części opracowania zostaną zaprezentowane dwa neoklasyczne modele długookresowego wzrostu gospodarczego. Pierwszy, to model Solowa (por. też Barro, Sala-i-Martin³², Mankiw, Romer, Weil³³, Romer³⁴, Tokarski³⁵), który – jak zauważył D. Romer

jest punktem wyjścia niemal każdej analizy wzrostu. Nawet te modele, które w sposób zasadniczy odbiegają od modelu Solowa, często najłatwiej zrozumieć przez porównanie z tym modelem. Zrozumienie tego modelu ma więc istotne znaczenie dla zrozumienia teorii wzrostu³⁶.

Natomiast model Mankiwa-Romera-Weila (dalej: model MRW) jest jego rozszerzeniem o akumulację kapitału ludzkiego.

²⁵ C. Azariadis, A. Drazen, *Threshold Externalities in Economic Development*, „Quarterly Journal of Economics” 1990, t. 105 (May), s. 501–526.

²⁶ G. S. Becker, K. M. Murphy, R. Tamura, *Human Capital, Fertility and Economic Growth*, „Journal of Political Economy” 1990, t. 98 (October), s. 12–37.

²⁷ S. Rebelo, *Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth*, „Journal of Political Economy” 1991, t. 99 (June), s. 500–512.

²⁸ R. M. Solow, *A Contribution to the Theory...*

²⁹ N. Mankiw, D. Romer, D. N. Weil, *A Contribution to the Empirics...*

³⁰ R. E. Lucas, *On the Mechanics...*

³¹ P. Romer, *Increasing Returns...*

³² R. J. Barro, X. Sala-i-Martin, *Economic Growth*, Mc Graw-Hill Inc., New York 1995.

³³ N. Mankiw, D. Romer, D. N. Weil, *A Contribution to the Empirics...*

³⁴ D. Romer, *Makroekonomia...*

³⁵ T. Tokarski, *Postęp techniczny a wzrost gospodarczy w modelach Solowa i Lucasa*, „Ekonomista” 1998, nr 2–3, s. 271–291; tenże, *Determinanty wzrostu gospodarczego w warunkach stałych efektów skali*, Katedra Ekonomii Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2001.

³⁶ D. Romer, *Makroekonomia...*, s. 24.

Model Solowa oparty jest na agregatowej funkcji produkcji postaci:

$$Y(t) = F(K(t), A(t), L(t)) \quad (1)$$

gdzie:

$K(t)$ – zasób kapitału rzeczowego,

$L(t)$ – zasób pracy,

$A(t)$ – zasób wiedzy.

Zasób wiedzy rozumiany jest jako ten czynnik produkcji, który nie jest związany ani z akumulacją kapitału, ani z zasobem pracy. Wyrażenie postaci $A(t)L(t)$ oznacza efektywną pracę, które obejmuje zarówno pracujących, jak i ich produktywność zależną od technologii.

Neoklasyczna funkcja produkcji charakteryzuje się stałymi efektami skali w odniesieniu do kapitału i efektywnej pracy oraz malejącymi produktywnościami krańcowymi kapitału i efektywnej pracy. Dodatkowo funkcja produkcji spełnia tzw. warunki Inady względem kapitału i efektywnej pracy. Oznacza to, że krańcowy produkt nakładu zbliża się do nieskończoności (zera), gdy jego wielkość zbliża się do zera (nieskończoności).

Szczególnym przypadkiem funkcji produkcji (1) jest funkcja Cobba-Douglasa. Jej częste wykorzystanie wynika stąd, że jest ona łatwa do stosowania, a co ważniejsze, okazała się dobrym przybliżeniem rzeczywistych funkcji produkcji³⁷. Zasób wiedzy ma charakter neutralny w sensie Harroda³⁸, co oznacza, że $A(t)$ wchodzi do funkcji produkcji Cobba-Douglasa multiplikatywnie z zasobem pracujących, czyli:

$$Y(t) = K(t)^\alpha ((A(t)L(t))^{1-\alpha}) \quad \alpha, (1-\alpha) \in (0, 1) \quad (2)$$

Współczynniki α , $1-\alpha$ są elastycznościami produktu względem odpowiednio zasobu kapitału rzeczowego i zasobu efektywnej pracy. Jeśli każdy z czynników produkcji opłacany jest według jego produktu krańcowego, to α i $1-\alpha$ są udziałami $K(t)$ i $A(t)L(t)$ w $Y(t)$. Do funkcji produkcji (2) stosuje się zapis w tzw. postaci intensywnej, gdyż na jego podstawie można zanalizować zmiany w gospodarce w stosunku do nakładów efektywnej pracy. Niech:

$$k(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)}, \quad y(t) \equiv f(k(t)) \equiv \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} \quad (3)$$

³⁷ Tamże, s. 28.

³⁸ Jeśli funkcja produkcji jest postaci $Y = AF(K, L)$, to zasób wiedzy jest neutralny w sensie Hicksa, natomiast przy funkcji $Y = F(AL, K)$ jest neutralny w sensie Solowa (por. R. Allen, *Teoria makroekonomiczna. Ujęcie matematyczne*, PWN, Warszawa 1975).

Wówczas intensywna postać funkcji produkcji jest następująca:

$$y(t) = k(t)^{\alpha} \quad (4)$$

W modelu Solowa zakłada się, że zarówno liczba pracujących, jak i wiedza zmieniają się według stałych, egzogenicznych stóp wzrostu, co implikuje, że:

$$\dot{L}(t) = nL(t) \quad n > 0 \quad (5)$$

oraz

$$\dot{A}(t) = gA(t) \quad g > 0 \quad (6)$$

Zatem zasoby pracy i wiedzy zmieniają się wykładniczo $L(t) = L_0 e^{nt}$ i $A(t) = A_0 e^{gt}$ z warunkami początkowymi $L_0 = L(0)$, $A_0 = A(0)$, gdzie L_0 , A_0 wyznaczają początkowe zasoby liczby pracujących i wiedzy. Ponadto przyjmuje się, że produkt $Y(t)$ składa się tylko z wydatków konsumpcyjnych $C(t)$ i inwestycyjnych $I(t)$. Część produktu, która zostaje przeznaczona na inwestycje, to:

$$I(t) = sY(t) \quad s \in (0, 1) \quad (7)$$

gdzie s jest wielkością stałą i egzogeniczną. Dodatkowo zakłada się, że inwestycje są równe oszczędnościom, czyli $I(t) = S(t)$. Zatem s w równaniu (7) jest stopą oszczędności/inwestycji rozumianą jako udział oszczędności $S(t)$ /inwestycji $I(t)$ w produkcie $Y(t)$. Kształtowanie się kapitału w czasie na jednostkę efektywnej pracy przedstawia równanie różniczkowe postaci³⁹:

$$\dot{k}(t) = sf[k(t)] - (n + g + \delta)k(t) \quad (8)$$

Równanie (8) określa zależności pomiędzy przyrostem zasobu kapitału $\dot{k}(t)$ a stopą oszczędności s , produktem $f(k)$ i kapitałem $k(t)$ – wszystkie na jednostkę efektywnej pracy – oraz stopami deprecjacji kapitału δ , wzrostu zasobu pracy n i wzrostu zasobu wiedzy g . Jest to najważniejsze równanie różniczkowe w modelu Solowa. Z tego powodu nazywane jest często podstawowym albo fundamentalnym równaniem tego modelu.

Można uzasadnić, że gospodarka modelu Solowa, niezależnie od sytuacji początkowej, zmierza do osiągnięcia długookresowej równowagi⁴⁰. Niech punkt równowagi będzie oznaczony przez (k^*, y^*) , gdzie $y^* = f(k^*)$.

³⁹ Por. D. Romer, *Makroekonomia...*, s. 29–31.

⁴⁰ Tamże, s. 30–32; T. Tokarski, *Determinanty wzrostu...*, s. 22.

Wyznaczenie punktu równowagi (k^* , y^*) dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa postaci (2) polega na rozwiązaniu następującego układu równań:

$$\begin{cases} y^* = (k^*)^\alpha \\ sy^* = (n + g + \delta)k^* \end{cases} \quad (9)$$

Rozwiązaniem jest następujący układ równań:

$$\begin{cases} k^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ y^* = \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{cases} \quad (10)$$

Z równań (10) wynika, że dla gospodarki będącej w stanie wzrostu zrównoważonego zarówno kapitał rzeczowy k^* jak i produkt y^* na jednostkę efektywnej pracy są funkcjami rosnącymi stopy oszczędności s , a malejącymi stóp wzrostu wiedzy g , liczby pracowników n i stopy deprecjacji kapitału δ .

Stopy wzrostu kapitału i produktu dla gospodarki znajdującej się na ścieżce zrównoważonego wzrostu wynoszą:

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = n + g \quad (11)$$

Z równania (11) wynika, że stopy wzrostu produktu i kapitału są równe sumie stóp wzrostu wiedzy i liczby pracujących. Równanie (11) oznacza również, że zmiana stopy oszczędności nie wpływa na długookresową stopę wzrostu produktu. Zmiana ta wywiera jednak wpływ na wielkość owego produktu. Zwiększenie się (zmniejszenie) stopy oszczędności powoduje, że zwiększa się (zmniejsza) wielkość faktycznych inwestycji, przez co gospodarka osiąga wyższą (niższą) ścieżkę zrównoważonego wzrostu. W konsekwencji następuje zwiększenie się (zmniejszenie) poziomu produktu na jednostkę efektywnej pracy.

Powrót do modelu Solowa nastąpił w roku 1992 w publikacji Mankiwa, Romera i Weila⁴¹. Ze względu na empiryczne ograniczenia modelu Solowa autorzy rozszerzyli go, wprowadzając do funkcji produkcji dodatkową zmienną – kapitał ludzki $H(t)$ i określili jej kształtowanie się w czasie. Z tego powodu ów model nosi nazwę rozszerzonego o akumulację kapitału ludzkiego modelu Solowa. Funkcja produkcji zadana jest w postaci rozszerzonej funkcji Cobba-Douglasa, gdzie zasób wiedzy ma charakter neutralny w sensie Harroda:

⁴¹ N. Mankiw, D. Romer, D. N. Weil, *A Contribution to the Empirics...*

$$Y(t) = H(t)^\beta K(t)^\alpha [A(t) L(t)]^{1-\alpha-\beta} \quad \alpha, \beta, (\alpha + \beta) \in (0, 1) \quad (12)$$

Wszystkie pozostałe zmienne są zdefiniowane tak samo, jak w przypadku funkcji produkcji w modelu Solowa. Z równania (12) wynika stałość efektów skali względem kapitału rzeczowego, kapitału ludzkiego i liczby pracujących (dokładnie jednostek efektywnej pracy $A(t) L(t)$).

Identyczne, jak w modelu Solowa, są założenia dotyczące kształtowania się w czasie zasobów liczby pracujących i wiedzy (por. równania 5–6). Zasób efektywnej pracy $A(t) L(t)$ rośnie według stopy $n + g$.

W kapitał ludzki inwestuje się tak samo jak w kapitał rzeczowy. Podlega on również deprecjacji (tak jak w przypadku kapitału rzeczowego). Produkt składa się z wydatków konsumpcyjnych $C(t)$ oraz inwestycyjnych $I(t)$. Natomiast inwestycje dzielą się na inwestycje w kapitał rzeczowy $s_k Y(t)$ dla $s_k \in (0, 1)$ oraz w kapitał ludzki $s_h Y(t)$ dla $s_h \in (0, 1)$, przy czym $(s_k + s_h) \in (0, 1)$. Ponadto inwestycje równe są oszczędnościom. Jeśli przez s oznaczymy egzogeniczną i stałą stopę inwestycji, to:

$$I(t) = sY(t) = (s_k + s_h) Y(t) = I_k(t) + I_h(t) \quad s \in (0, 1) \quad (13)$$

Oznacza to, że całkowite inwestycje są sumą inwestycji w kapitał rzeczowy $I_k(t)$ i ludzki $I_h(t)$.

Funkcję produkcji (12) można zapisać w postaci intensywnej:

$$y(t) = k(t)^\alpha h(t)^\beta \quad (14)$$

gdzie:

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{A(t) L(t)}, \quad k(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t) L(t)}, \quad h(t) \equiv \frac{H(t)}{A(t) L(t)} \quad (15)$$

Przyrosty zasobów kapitałów rzeczowego i ludzkiego dla funkcji produkcji w postaci intensywnej opisują następujące równania różniczkowe:

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = s_k k(t)^\alpha h(t)^\beta - (n + g + \delta_k) k \\ \dot{h}(t) = s_h k(t)^\alpha h(t)^\beta - (n + g + \delta_h) h \end{cases} \quad (16)$$

W oryginalnym modelu MRW zakłada się jednakową stopę deprecjacji δ kapitałów rzeczowego i ludzkiego. Wydaje się jednak, że bardziej adekwatne jest ich rozróżnienie na stopę deprecjacji kapitału rzeczowego δ_k oraz stopę deprecjacji kapitału ludzkiego δ_h . Stopy deprecjacji kapitału są wielkościami egzogenicznymi. Układ równań różniczkowych (16) wyznacza układ równań

ruchu modelu MRW. Wynika z niego, że przyrost zasobu kapitału rzeczowego zależy od inwestycji w ten kapitał rzeczowy $s_h y(t)$, pomniejszonych o iloczyn kapitału rzeczowego $k(t)$ z sumą stóp wzrostu liczby pracujących n , wzrostu wiedzy g i stopy deprecjacji kapitału rzeczowego δ_k (wszystkie wielkości wyrażone są na jednostkę efektywnej pracy). Analogiczną zależnością charakteryzuje się przyrost zasobu kapitału ludzkiego.

Można uzasadnić, że gospodarka modelu MRW, niezależnie od sytuacji wyjściowej, zmierza do długookresowej równowagi (k^*, h^*) ⁴².

Znalezienie położenia punktu (k^*, h^*) polega na rozwiązaniu następującego układu równań:

$$\begin{cases} s_k h^{*\beta} k^{*\alpha} = (n + g + \delta_k) k^* \\ s_h h^{*\beta} k^{*\alpha} = (n + g + \delta_h) h^* \end{cases} \quad (17)$$

Rozwiązanie układu równań (17) jest następujące:

$$\begin{cases} k^* = \left(\frac{s_k}{n + g + \delta_k} \right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_h}{n + g + \delta_h} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \\ h^* = \left(\frac{s_k}{n + g + \delta_k} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_h}{n + g + \delta_h} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}} \end{cases} \quad (18)$$

Z tego, że (k, h) zmierza do (k^*, h^*) w czasie $t \in (0, \infty)$ wynika, że:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k^* = \left(\frac{s_k}{n + g + \delta_k} \right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_h}{n + g + \delta_h} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \quad (19)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h^* = \left(\frac{s_k}{n + g + \delta_k} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_h}{n + g + \delta_h} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}} \quad (20)$$

Dodatkowo można wyliczyć strumień produktu na jednostkę efektywnej pracy w warunkach długookresowej równowagi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^* = \left(\frac{s_k}{n + g + \delta_k} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_h}{n + g + \delta_h} \right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \quad (21)$$

Z równań (19), (20) i (21) wynika, że dla gospodarki modelu MRW, znajdującej się w równowadze, zasoby kapitału ludzkiego, rzeczowego i produkt na jednostkę efektywnej pracy są funkcjami rosnącymi stóp

⁴² T. Tokarski, *Determinanty wzrostu...*, s. 60–63.

inwestycji w kapitał ludzki i rzeczowy, a malejącymi stóp deprecjacji tych kapitałów, stopy wzrostu liczby pracujących i wiedzy. Rezultaty wzrostu inwestycji w kapitał ludzki (lub rzeczowy) są podobne jak w modelu Solowa. Zmniejszenie (zwiększenie) stopy inwestycji w kapitał rzeczowy i(lub) ludzki spowoduje, że gospodarka osiągnie niższą (wyższą) ścieżkę zrównoważonego wzrostu. Ponadto zwiększenie (zmniejszenie) inwestycji w kapitał rzeczowy prowadzi zarówno do zwiększenia (zmniejszenia) zasobu kapitału rzeczowego, jak i ludzkiego (oba na jednostkę efektywnej pracy). Analogiczny proces zachodzi w przypadku zmian inwestycji w kapitał ludzki.

3. NOWA TEORIA WZROSTU

Zaistniało kilka przyczyn, dla których pojawiła się krytyka modeli neoklasycznych. Najważniejsze z nich to brak wyjaśnienia różnic pomiędzy dochodami *per capita* oraz fakt, że najistotniejsza zmienna modelu neoklasycznego, czyli stopa zasobu wiedzy, nie jest wyjaśniana przez ów model. Niedoskonałość modelu Solowa była przyczyną tego, że w latach 80. XX w. zaczęła powstawać alternatywna grupa modeli długookresowego wzrostu gospodarczego. Nazwana została nową teorią wzrostu, która z jednej strony opiera się na doświadczeniach szkoły neoklasycznej, a z drugiej zakłada racjonalność podmiotów gospodarczych (typową cechą dla modeli nowej ekonomii klasycznej i szkoły realnego cyklu koniunkturalnego). Istotą modeli nowej teorii wzrostu jest endogenizacja tych czynników produkcji, które w sposób znaczący mają wpływ na wzrost gospodarczy. Są to głównie zasób wiedzy i stopa oszczędności. Modelowanie stopy oszczędności odbywa się na poziomie mikroekonomicznym, gdyż polega ono na maksymalizowaniu zdyskontowanej funkcji użyteczności konsumpcji gospodarstw domowych w nieskończonym przedziale czasowym. Pierwsze modele stosujące tę zasadę pojawiły się na gruncie szkoły neoklasycznej. Są to modele F. Ramseya⁴³, D. Cassa⁴⁴ oraz T. C. Koopmansa⁴⁵, których implikacje związane z określeniem stopy wzrostu ze względu na egzogeniczny charakter stopy wzrostu zasobu wiedzy nie odbiegają od wniosków z modelu Solowa. W modelach neoklasycznych żadne działania wewnątrz opisywanej gospodarki nie mogą spowodować przyspieszenia rozwoju wiedzy, a zatem również przyspieszenia wzrostu gospodarczego. W przeciwieństwie do nich modele endogeniczne podkreślają szczególną rolę wiedzy, wykształcenia i kwalifikacji pracujących. Oznacza to, że podniesienie stopy wzrostu gospodarczego *per capita* w modelach

⁴³ F. Ramsey, *A Mathematical Theory...*

⁴⁴ D. Cass, *Optimum Growth...*

⁴⁵ T. C. Koopmans, *On the Concept...*

nowej teorii wzrostu polega na zmianach jakościowych w tych zmiennych. K. J. Arrow⁴⁶, jako jeden z pierwszych ekonomistów zajmujących się teorią wzrostu gospodarczego, wprowadził do swojego modelu koncepcję „nabywania wiedzy przez praktykę” (*learning by doing*), polegającą na usprawnianiu procesów wytwórczych przez pracowników. Jednak dopiero od końca lat 80. ubiegłego wieku nastąpił bardzo dynamiczny rozwój nowej teorii wzrostu.

Choć jest to bardzo zróżnicowana grupa modeli, to istotne okazało się modelowanie dwóch podstawowych źródeł wzrostu gospodarczego: akumulacji wiedzy i kapitału ludzkiego. Klasa modeli związana z akumulacją wiedzy jest zgodna z modelem Solowa w tym sensie, że akumulacja kapitału nie jest istotną determinantą wzrostu gospodarczego *per capita*. W przypadku klasy modeli akcentującej znaczenie akumulacji kapitału dla wzrostu gospodarczego zakłada się, że kapitał rozumiany jest znacznie szerzej niż w modelach neoklasycznych. Definicja kapitału obejmuje nie tylko kapitał rzeczowy, ale również ludzki. Taką definicję kapitału zastosowali w swoim modelu Mankiw, Romer i Weil. Teoretycznymi pionierami badań, które próbowały wyjaśnić wzrost gospodarczy jako proces racjonalny i endogeniczny, byli Paul Romer⁴⁷, zajmujący się modelowaniem wiedzy naukowo-technicznej, oraz Robert E. Lucas⁴⁸, według którego akumulacja kapitału ludzkiego ma podstawowe znaczenie dla wzrostu gospodarczego. Jako pierwszy zostanie przedstawiony model Lucasa, analizujący wpływ kapitału ludzkiego na kształtowanie się procesu produkcyjnego i położenie ścieżek wzrostu gospodarczego.

Istotne znaczenie w tym modelu ma wprowadzenie kapitału ludzkiego do funkcji produkcji. Według Lucasa pojęcie kapitału ludzkiego związane jest z ogólnym poziomem umiejętności pracownika. Oznacza to, że pracownik z kapitałem ludzkim $h(t)$ jest równy pod względem wydajności dwóm pracownikom o kapitale $\frac{1}{2} h(t)$ każdy. Pracownicy przeznaczają część swojego czasu $u(t)$ na produkcję. Pozostałą część czasu, czyli $1 - u(t)$, wykorzystują na akumulację kapitału ludzkiego. Jeśli wszyscy pracownicy charakteryzują się jednakowym poziomem kapitału ludzkiego $h(t)$ i przeznaczają jednakową część czasu $u(t)$ na produkcję, to efektywny zasób pracy wynosi $u(t) h(t) L(t)$, gdzie $L(t)$ oznacza liczbę pracujących. Funkcja produkcji jest postaci:

$$Y(t) = AK(t)^{\alpha} (u(t) h(t) L(t))^{1-\alpha} h_a^{\beta} \quad \alpha, (1-\alpha) \in (0, 1) \quad \beta \in [0, 1] \quad (22)$$

⁴⁶ K. J. Arrow, *The Economic Implications of Learning by Doing*, „Review of Economic Studies” 1962, t. 29 (June), s. 155–173.

⁴⁷ P. Romer, *Increasing Returns...*

⁴⁸ E. Lucas, *On the Mechanics...*

gdzie $K(t)$ oznacza zasób kapitału rzeczowego. W modelu Lucasa zakłada się, że A jest wielkością stałą. Parametry β , α , $1 - \alpha$ są elastycznościami produktu względem odpowiednio h_a , $K(t)$, $u(t)h(t)L(t)$. Przeciętny zasób kapitału ludzkiego h_a jest równy:

$$h_a = \frac{\int_0^{\infty} hL(h) dh}{\int_0^{\infty} L(h) dh} \quad (23)$$

Wyraża on tzw. efekty zewnętrzne (*external effects*). Występowanie efektów zewnętrznych polega na tym, że jednostkowy wzrost poziomu kapitału ludzkiego wpływa nie tylko na tę jednostkę, ale na innych pracowników. Parametr β w modelu Lucasa mierzy siłę oddziaływania zewnętrznych efektów procesu akumulacji kapitału ludzkiego. Z założenia o jednakowych podmiotach gospodarczych wynika, że $h_a(t) = h(t)$.

Zasób pracy rośnie egzogenicznie według stałej stopy wzrostu n . Zatem:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \quad n \geq 0 \quad (24)$$

Produkt dzieli się całkowicie na konsumpcję i inwestycje, czyli:

$$Y(t) = C(t) + I(t) \quad (25)$$

W modelu Lucasa, podobnie jak w przypadku funkcji produkcji z modeli Solowa i MRW, funkcja produkcji będzie analizowana w postaci intensywnej. Przyjmuje ona postać

$$y(t) = Ak(t)^\alpha u^{1-\alpha} h(t)^{1-\alpha+\beta} \quad (26)$$

przy następujących oznaczeniach:

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{L(t)}, \quad k(t) \equiv \frac{K(t)}{L(t)}, \quad c(t) \equiv \frac{C(t)}{L(t)} \quad (27)$$

Wynika stąd, że $y(t)$, $k(t)$ i $c(t)$ są wielkościami produkcji, kapitału rzeczowego i konsumpcji przypadającymi na jednego pracującego (w modelach Solowa i MRW ww. wielkości przeliczane były na jednostkę efektywnej pracy).

Przy założeniu, że wszystkie gospodarstwa domowe są jednakowe, a konsumpcja odbywa się w nieskończonym, ciągłym przedziale czasowym,

gospodarka dąży do maksymalizacji sumy zdyskontowanej użyteczności konsumpcji *per capita* wszystkich gospodarstw domowych, danej wzorem:

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} dt \quad \rho \geq 0, \sigma \in (0, 1) \quad (28)$$

gdzie $c(t) \geq 0$ wyraża konsumpcję gospodarstwa domowego w czasie t . Funkcja użyteczności $u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$, $u(c) = [0, 1]$ znana jest pod nazwą „użyteczności o stałej względnej niechęci do ryzyka” (*constant rate of risk aversion*) ze względu na współczynnik σ określany mianem względnej niechęci do ryzyka. Im mniejsze σ , tym wolniej obniża się użyteczność krańcowa przy wzroście konsumpcji, a przez to gospodarstwo staje się bardziej skłonne do zmiany konsumpcji w czasie. Współczynnik ρ oznacza stopę dyskontową. Im wyższa stopa dyskontowa, tym bardziej gospodarstwa domowe preferują bieżącą konsumpcję nad przyszłą⁴⁹.

Przyrost zasobu kapitału rzeczowego opisany jest równaniem różniczkowym takiej samej postaci, jak w modelu Solowa:

$$\dot{k}(t) = y(t) - c(t) - (n + \delta)k(t) \quad \delta \in (0, 1) \quad (29)$$

gdzie δ oznacza stopę deprecjacji kapitału rzeczowego.

Zgodnie z wcześniejszą uwagą, część czasu $1 - u(t)$ zostaje przeznaczona na akumulację kapitału ludzkiego. Oznacza to, że wyrażenie $1 - u(t)$ powinno być związane ze stopą wzrostu kapitału ludzkiego $\frac{\dot{h}(t)}{h(t)}$. Lucas proponuje zastosowanie funkcji akumulacji kapitału ludzkiego Uzawy-Rosena postaci:

$$\dot{h}(t) = \psi(1 - u)h(t) \quad \psi > 0, u \in [0, 1] \quad (30)$$

gdzie ψ wyraża maksymalną możliwą do uzyskania stopę wzrostu kapitału ludzkiego. Jeśli $u = 1$, to pracownicy przeznaczają cały swój czas na produkcję. Efektem jest brak zmian w zasobie kapitału ludzkiego, czyli $\dot{h}(t) = 0$.

Rozważania Lucasa dotyczą poszukiwania optymalnej ścieżki wzrostu, w której maksymalizuje się sumę zdyskontowanej użyteczności konsumpcji ze względu na $c(t)$ i $u(t)$. Polega ono na wyznaczeniu takich wartości $K(t)$, $h(t)$, $C(t)$, $u(t)$, które spełnią (28) w odniesieniu do ograniczeń zadanych przez funkcję produkcji (26) oraz zmian zasobów kapitału ludzkiego (30) i kapitału rzeczowego (29), tzn. spełnione są następujące ograniczenia:

⁴⁹ Por. D. Romer, *Makroekonomia...*, s. 58–59.

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = \psi(1 - u(t))h(t) \\ \dot{k}(t) = Ak(t)^\alpha u(t)^{1-\alpha} h(t)^{1-\alpha-\beta} - c - (n + \delta)k(t) \\ k_0 = k(0) \\ h_0 = h(0) \end{cases} \quad (31)$$

gdzie $k_0, h_0 > 0$ wyznaczają wyjściowe zasoby odpowiednio kapitału rzeczowego i ludzkiego *per capita*.

Zakłada się, że w modelu Lucasa zmienne, takie jak konsumpcja, kapitały ludzki i rzeczowy, produkt (wszystkie *per capita*) podlegają procesowi wzrostu równomiernego. Oznacza to, że rosną one według stałych stóp równych

$$g_c = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{y}}{y} \text{ i } g_h = \frac{\dot{h}(t)}{h(t)}.$$

Problem wyznaczenia optymalnej ścieżki wzrostu w modelu Lucasa można rozwiązać za pomocą zasady maksimum L. S. Pontriagina⁵⁰.

Wówczas można pokazać, że optymalna stopa wzrostu kapitału ludzkiego *per capita* wynosi:

$$g_h^* = \frac{1}{\sigma} \left[\psi - \frac{1-\beta}{1-\beta+\alpha} (\rho - n) \right] \quad (32)$$

Natomiast optymalne stopy wzrostu kapitału rzeczowego, produkcji i konsumpcji (wszystkie *per capita*) g_c^* dane są wzorem:

$$g_c^* = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{1-\beta+\alpha}{1-\beta} \psi - \rho + n \right] \quad (33)$$

Optymalny czas przeznaczony na produkcję $u = u^*$ i akumulację kapitału ludzkiego $1 - u = 1 - u^*$ wynosi:

$$u^* = 1 - \frac{1}{\sigma} \left[1 - \frac{(1-\beta)(\rho - n)}{(1-\alpha+\beta)\psi} \right] \quad (34)$$

$$1 - u^* = \frac{1}{\sigma} \left[1 - \frac{(1-\beta)(\rho - n)}{(1-\alpha+\beta)\psi} \right] \quad (35)$$

W modelu Lucasa stopy wzrostu kapitałów rzeczowego i ludzkiego, produktu, konsumpcji zależą zarówno od funkcji preferencji gospodarstw domowych, od charakterystyki funkcji produkcji, jak i od współczynnika

⁵⁰ Por. E. Panek, *Ekonomia matematyczna*, Wyd. Akademii Ekonomicznej, Poznań 2000, s. 389–705.

efektywności inwestycji w kapitał ludzki. Z równania (33) wynika, że stopy wzrostu kapitału rzeczowego, produktu i konsumpcji są związane ze współczynnikami ρ i σ . Oznacza to, że na wzrost produktu istotnie wpływają preferencje konsumpcyjne gospodarstw domowych. Stopa wzrostu produktu jest funkcją rosnącą ze stopą dyskontową, a malejącą ze współczynnikiem awersji do ryzyka. Zatem im niższa będzie odwrotność współczynnika awersji do ryzyka, a wyższa stopa dyskonta, tym gospodarstwa będą bardziej preferować konsumpcję bieżącą nad przyszłą, co oznacza niższą stopę wzrostu gospodarczego. Ponadto stopa wzrostu gospodarki jest funkcją rosnącą ze współczynnikiem ψ , który jest związany ze stopą wzrostu kapitału ludzkiego.

Drugim analizowanym modelem jest model Paula Romera⁵¹, w którym rozważa się generowanie wiedzy naukowo-technicznej. W modelu P. Romera istotna jest charakterystyka dwóch czynników funkcji produkcji: wiedzy i kapitału ludzkiego. Według niego ważne jest rozróżnienie dwóch właściwości tych czynników produkcji: rywalizacji (*rivalry*) oraz wyłączalności (*excludability*). Pierwsza cecha oznacza, że stosowanie czynnika produkcji przez jedną osobę lub przedsiębiorstwo wyklucza stosowanie go przez innych użytkowników. Druga cecha dotyczy możliwości niedopuszczenia do korzystania z danego czynnika przez inne podmioty. Pojęcie to należy odnieść np. do systemu prawnego, który może wprowadzić ograniczenia korzystania z danego czynnika przez innych. Dobrem, mającym cechy niekonkurencyjności i istnienia wyłączalności jest wiedza. Natomiast czynniki takie, jak praca i kapitał rzeczowy podlegają rywalizacji.

Z powyższych rozważań wynikają dwie istotne implikacje dla teorii wzrostu gospodarczego. Dobra, które są niekonkurencyjne względem siebie, mogą podlegać procesowi akumulacji bez ograniczeń. Dodatkowo, brak konkurencyjności uniemożliwia opatentowanie danego dobra, a zatem powstawaniu nowego dobra towarzyszą tzw. efekty zewnętrzne. W stosunku do wiedzy P. Romer komentuje występowanie efektów zewnętrznych następująco:

[nowa wiedza, przyp. K. U.] wywołuje pozytywne efekty zewnętrzne w zakresie możliwości produkcyjnych innych firm, w związku z tym, że wiedza nie może być całkowicie opatentowana czy utrzymywana w tajemnicy⁵².

Występowanie rywalizacji pośród dóbr implikuje istnienie mechanizmu rynkowego, który – zgodnie z teorią podziału Clarka – ustala, że ceny takich dóbr są równe cenom produktów krańcowych. Z tego powodu w modelu Romera zakłada się, że cena za wytworzenie nowego projektu przez kapitał ludzki jest równa jego marginalnemu produktowi.

⁵¹ P. Romer, *Endogenous Technological...*

⁵² P. Romer, *Increasing Returns...*

W modelu Romera występują cztery nakłady czynników produkcji: kapitału rzeczowego, liczby pracujących, kapitału ludzkiego i technologii. Kapitał rzeczowy $K(t)$ reprezentowany jest przez środki trwałe w końcowym etapie produkcji dóbr. Kapitał ludzki składa się z części kapitału ludzkiego $H_Y(t)$ przeznaczanego do produkcji dóbr kapitałowych i z pozostałej części kapitału ludzkiego $H_A(t)$ wykorzystywanej w badaniach naukowo-technicznych. Stąd:

$$H(t) = H_A(t) + H_Y(t) \quad (36)$$

W modelu P. Romera nie określa się kształtowania kapitału ludzkiego w czasie, zakładając, że jego zasób jest stały w czasie. Poziom technologii wyznaczany jest poprzez wprowadzanie nowych projektów, które następnie są wykorzystywane do produkcji dóbr kapitałowych. Na poziom wiedzy składa się zarówno zasób kapitału ludzkiego $H(t)$, jak i technologia $A(t)$.

W modelu tym Romer rozważa trzy sektory:

Pierwszy, to sektor badań naukowo-technicznych, w którym wykorzystuje się część kapitału ludzkiego $H_A(t)$ i istniejącą technologię $A(t)$. Celem tego sektora jest kreowanie nowej wiedzy. Miarą kapitału ludzkiego jest poziom wykształcenia i doświadczenia zawodowego. Przyrost technologii dany jest wzorem:

$$\dot{A}(t) = \eta H_A(t) A(t) \quad (37)$$

gdzie $\eta > 0$ jest współczynnikiem efektywności nakładów kapitału ludzkiego w tym sektorze. Drugi sektor, to sektor dóbr pośrednich, który używa wzorów z sektora badań do wytwarzania dóbr kapitałowych. W tym celu wykorzystuje zasób kapitału rzeczowego.

Przyrost kapitału rzeczowego $\dot{K}(t)$ jest różnicą pomiędzy produktem $Y(t)$ i konsumpcją $C(t)$. Dla uproszczenia zakłada się brak deprecjacji kapitału rzeczowego, czyli:

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) \quad (38)$$

Liczba dóbr kapitałowych wzrasta wraz z tworzeniem nowych projektów w sektorze badań naukowo-technicznych. Łączny zasób kapitału rzeczowego jest sumą różnych dóbr kapitałowych $x(i)$ dla $i \in (0, A(t))$:

$$K(t) = \int_{i=0}^{A(t)} x(i) dt \quad (39)$$

Oznaczając przez $\bar{x} = x(i)$ dla $i \in (0, A(t))$ przeciętne dobro kapitałowe, łączny zasób kapitału rzeczowego można zapisać następująco:

$$K(t) = \int_{t=0}^{A(t)} x(i) dt = \bar{x} = \int_{t=0}^{A(t)} dt = A\bar{x} \quad (40)$$

Trzeci sektor zajmuje się produkcją dóbr finalnych z wykorzystaniem zasobu pracy $L(t)$, części kapitału ludzkiego $H_Y(t)$ oraz kapitału rzeczowego $K(t)$. Funkcję produkcji w tym sektorze można zapisać następująco:

$$Y(t) = H_Y(t)^\beta L(t)^\alpha \int_{t=0}^{A(t)} x(i)^{1-\alpha-\beta} dt \quad \alpha, \beta, 1-\alpha-\beta \in (0, 1) \quad (41)$$

Współczynniki β , α , $1-\alpha-\beta$ są elastycznościami produkcji względem odpowiednio $H_Y(t)$, $L(t)$, $\int_{t=0}^{A(t)} x(i)^{1-\alpha-\beta} dt$. Zakłada się też, że zasób pracy jest stały w czasie. Po podstawieniu równania (40) do równania (41) funkcja produkcji przyjmuje postać:

$$Y(t) = H_Y(t)^\beta L(t)^\alpha A^{\alpha+\beta} K^{1-\alpha-\beta} \quad (42)$$

Dodatkowo, w sektorze produkcji każdy z producentów tak wybiera dobra kapitałowe $x(i)$ aby, przy danej cenie za produkt, maksymalizować zyski.

W modelu Romera, tak jak w modelu Lucasa, zakłada się, że wszystkie gospodarstwa domowe dążą do maksymalizacji sumy zdyskontowanej użyteczności konsumpcji zadanej wzorem:

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C(t)^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt \quad \rho \geq 0, \sigma \in (0, 1) \quad (43)$$

Problem wyznaczenia optymalnej ścieżki wzrostu w modelu P. Romera polega na maksymalizacji równania (43) przy ograniczeniach opisanych równaniami:

$$\begin{cases} \dot{K} = A^{\alpha+\beta} H_Y^\beta L^\alpha K^{1-\alpha-\beta} - C \\ \dot{A} = \eta H_A A \\ K_0 = K(0) \\ A_0 = A(0) \end{cases} \quad (44)$$

gdzie K_0 , $H_0 > 0$ wyznaczają wyjściowe zasoby odpowiednio kapitału rzeczowego i ludzkiego.

Wyznaczenie tu optymalnej ścieżki w gospodarce opiera się na zastosowaniu zasady maksimum Pontriagina do maksymalizacji całki (43) przy ograniczeniach zadanych układem równań (44). Ponadto za-

kłada się, że gospodarka charakteryzuje się stałymi stopami wzrostu

$$g = \frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \eta H_A(t).$$

Wówczas można pokazać, że optymalna stopa wzrostu gospodarki w modelu P. Romera wynosi:

$$g^* = \frac{\eta H(\alpha + \beta) - \rho\beta}{\alpha + \sigma\beta} \quad (45)$$

oraz:

$$H_A = \frac{\eta H(\alpha + \beta) - \beta\rho}{\eta(\alpha + \sigma\beta)} \quad (46)$$

Z omawianego modelu wynika, że stopa wzrostu gospodarki jest funkcją rosnącą zasobu kapitału ludzkiego i współczynnika efektywności nakładów kapitału ludzkiego do sektora badań. Zależy ona również od preferencji konsumpcji gospodarstw domowych. Długookresowa stopa wzrostu gospodarczego jest tym wyższa, im niższa jest stopa σ . Oznacza to, że jeśli gospodarstwa domowe będą preferowały konsumpcję przyszłą nad bieżącą, to stopa wzrostu gospodarki będzie wyższa.

4. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

- W przedstawionym opracowaniu przeanalizowane zostały dwie klasy modeli wzrostu gospodarczego: modele neoklasyczne (na przykładach modeli Solowa i Mankiwa-Romera-Weila) oraz modele endogeniczne (reprezentatywnymi modelami są modele Lucasa i Romera).

- Powstanie modeli neoklasycznych, a następnie endogenicznych, stanowi istotny wkład do teorii ekonomii, w której z krótkookresowych analiz fluktuacji gospodarczych przenosi się punkt ciężkości na długookresową teorię wzrostu gospodarczego.

- Modele neoklasyczne, dzięki założeniom stałych efektów skali i ich malejącej krańcowej produktywności, pokazały, że gospodarka zmierza do równomiernego wzrostu, tzn. do sytuacji, w której występują stałe stopy wzrostu czynników produkcji, niezależnie od warunków początkowych tej gospodarki.

- W modelu Solowa wzrost kapitału i produktu w przeliczeniu na pracujących są zdeterminowane egzogeniczną stopą postępu technicznego.

- W modelu MRW gospodarka również dąży do ścieżki zrównoważonego wzrostu, osiągając stopę wzrostu zależną od egzogenicznej stopy wzrostu wiedzy.
- W modelu MRW inwestycje w kapitał ludzki i rzeczowy mogą przesunąć ścieżkę zrównoważonego wzrostu gospodarki.
- Modele endogeniczne odchodzą od założenia egzogenicznego charakteru niektórych czynników produkcji oraz zakładają racjonalizowanie gospodarstw domowych poprzez maksymalizację sumy zdyskontowanej funkcji użyteczności konsumpcji tych gospodarstw.
- Modele endogeniczne rozróżniają dwa główne źródła wzrostu gospodarczego – akumulację kapitału ludzkiego i akumulację wiedzy.
- Endogeniczny charakter niektórych zmiennych powoduje odejście od założenia stałych korzyści skali funkcji produkcji ze względu na występowanie tzw. efektów zewnętrznych.
- Modele endogeniczne wykazały, że dzięki modelowaniu istotnych czynników produkcji możliwy jest trwały wzrost gospodarczy. Stopa wzrostu zależy nie tylko od stóp wzrostu czynników produkcji, ale przede wszystkim od preferencji gospodarstw domowych. Zatem długookresowy wzrost gospodarczy wyznaczają zachowania podmiotów gospodarczych na szczeblu mikroekonomicznym.

Katarzyna Uramek

THEORETICAL GROWTH MODELS

(Summary)

This paper is given to the issue of growth theory in selected models: neoclassical growth models and models of new growth theory. The concerning neoclassical growth models are: Solow model and augmented Solow model (called Mankiw-Romer-Weil model).

Representative models of new growth theory are Lucas and Romer models. The author gives a detailed description of these models and denotes differences between them. According to a neoclassical viewpoint growth is defined as being exogenous. Therefore neoclassical growth models are able to describe how an economy grows, but not why. The purpose of the new growth theory is to fill this gap in the neoclassical approach to growth by taking a step further in understanding developmental growth. It means that the long-run growth rate of output per worker is determined by variables within the model.