

*Michał Kolupa**

JAK OBLICZAĆ RYZYKO PORTFELA REALIZOWANEGO W WARUNKACH KRÓTKIEJ SPRZEDAŻY

Praca ta została napisana w związku z jubileuszem 80-lecia Pana Profesora Władysława Welfe wybitnego polskiego ekonometryka i statystyka, członka korespondenta Polskiej Akademii Nauk.

Jubilat nie zajmował się zagadnieniami związanymi z teorią portfolio selection, ale w swoich pracach zamieszczał zawsze nowe, tak pomysły naukowe, bądź po nowemu komentował znane już wyniki.

Pomyślałem sobie, że z okazji tak wspaniałego jubileuszu trzeba przedłożyć pracę, która zawiera nowy wynik. Jest nim sposób obliczania ryzyka portfela realizowanego w warunkach krótkiej sprzedaży, przy tym nie wyznacza się ani samego portfela, ani też wektora mnożników Lagrange'a mimo, że samo ryzyko $S^2(p)$ jest iloczynem skalarnym wektora wspomnianych mnożników przez kolumnę wyrazów wolnych układu równań stanowiących warunki ograniczające nałożone na składowe wektora stanowiącego ów portfel lokat realizowany w warunkach krótkiej sprzedaży. Po tych uwagach wstępnych przechodzimy do prezentacji spraw zasadniczych.

Mówimy, że wektor $P^T = [p_1, p_2 \dots p_k]$ jest portfelem realizowanym w warunkach krótkiej sprzedaży, jeżeli nie żądamy nieujemności jego składowych lecz jedynie, aby ich suma była równa jedności. Zakładamy przy tym, iż na składowe p_i $i = 1, 2, \dots, k$ nałożone są warunki ograniczające spełniające układ równań postaci

$$A P = f \quad (1)$$

gdzie $A = [a_{ij}]$ jest zadaną macierzą o wymiarach $r \times k$ ($r < k$) jej rząd jest równy r .

* Prof. dr hab., Wyższa Szkoła Społeczno-Ekonomiczna w Warszawie.

Wśród ograniczeń (1) są warunki postaci

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1 \quad (2)$$

$$r_1 p_1 + r_2 p_2 + \dots + r_k p_k = r_0$$

gdzie r_i , $i = 1, 2, \dots, k$ oznacza stopę zwrotu i -tej akcji, zaś r_0 jest wielkością ustaloną np. przez inwestora.

Portfel $\mathbf{P}$ jest rozwiązaniem następującego zadania.

Wyznaczyć

$$\min \mathbf{P}^T \mathbf{D} \mathbf{P} \quad (3)$$

przy warunkach

$$\mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{f} \quad (4)$$

gdzie macierz $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ ma wymiary $k \times k$ zaś jej elementy d_{ij} spełniają warunek

$$d_{ij} = \begin{cases} S_i^2 & \text{dla } i = j \\ S_i \cdot S_j \cdot r_{ij} & \text{dla } i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k \end{cases}$$

Na koniec S_p , $p = i, j$, oznacza ryzyko akcji p , zaś r_{ij} jest współczynnikiem korelacji pomiędzy i -tą a j -tą akcją.

Dowodzi się (patrz M. Kolupa 2007), że ryzyko $S^2(p)$ portfela P stanowiącego rozwiązanie zadania danego zależnościami (3) i (4) spełnia warunek

$$S^2(p) = -\frac{1}{2} \lambda^T f, \quad (5)$$

gdzie λ jest wektorem kolumnowym o składowych λ_i , $i = 1, 2, \dots, r$, będącymi nieoznaczonymi mnożnikami Lagrange'a, czyli wektorem występującym w warunku.

Wyznaczyć

$$\min \Lambda(\mathbf{P}, \lambda) = \min (\mathbf{P}^T \mathbf{D} \mathbf{P} + \lambda^T \mathbf{A}). \quad (6)$$

Dowodzi się (por. np. M. Kolupa, R. Deptuła 2003), że wektor λ jest rozwiązaniem następującego układu równań

$$(\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T) \lambda = -2f, \quad (7)$$

skąd

$$\lambda = -2 (\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} f. \quad (8)$$

Jak już informowałem, chcąc wyznaczyć ryzyko portfela P posługujemy się wzorem (5), ale aby to zrobić nie musimy znać wektora λ . Skorzystamy przy tym ze znanego twierdzenia Kroneckera-Capelli'ego.

Rozpatrujemy układ równań wyznaczony przez zależności (5) i (7). Zapišemy je jako jeden układ równań. Ma on postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T & \mathbf{A}^T \\ -1/2 & f^T \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} -2f \\ S^2(p) \end{bmatrix} \lambda \quad (9)$$

($S^2(p)$ jest nieznanne i trzeba je wyznaczyć).

Macierz podstawowa układu (9) jest macierzą o wymiarach $(r+1) \times r$. Jej rząd wynosi r , bo tyle wynosi rząd macierzy $\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T$. (Jest to macierz o wymiarach $r \times r$ i rzędzie równym r , bo jest spełniony warunek $(\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T) \leq \min(\mathbf{A}, \mathbf{D}^{-1}) = \min(r, k) = r$) (patrz założenia dotyczące macierzy $\mathbf{A}$ podane bezpośrednio po wzorze (3)).

Z kolei macierz rozszerzona układu (9), czyli macierz $\mathbf{B}$ postaci

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T & -2f \\ -1/2 f^T & S^2(p) \end{bmatrix} \quad (10)$$

jest macierzą stopnia $r+1$. Ponieważ rząd macierzy podstawowej układu (9) jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej tego układu i równy liczbie niewiadomych r , przeto musi być spełniony warunek

$$\det \mathbf{B} = 0. \quad (11)$$

Z warunku (11) wyznaczamy $S^2(p)$. Oznacza to, że możemy wyznaczyć ryzyko $S^2(p)$ portfela P realizowanego w warunkach krótkiej sprzedaży bez konieczności uprzedniej znajomości wektora $\mathbf{P}$ oraz wektora λ . Nie należy również wyznaczać macierzy odwrotnej do macierzy $\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T$. Dodajmy jeszcze, że w tej ostatniej macierzy występuje macierz $\mathbf{D}^{-1}$, ale jak łatwo zauważyć

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^T \mathbf{R} \mathbf{S}, \quad (12)$$

gdzie $\mathbf{S}$ jest macierzą diagonalną postaci

$$\mathbf{S} = \text{diag} \{S_1, S_2, \dots, S_k\},$$

zaś

$$\mathbf{R} = [r_{ij}]_{k \times k}$$

jest macierzą korelacji. Jej elementami są współczynniki korelacji pomiędzy poszczególnymi akcjami.

$\mathbf{A}$ to oznacza, że

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{S}^T)^{-1} \quad (13)$$

czyli, chcąc wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $\mathbf{D}$ należy wyznaczyć macierz $\mathbf{R}^{-1}$.

Wyznaczenie macierzy odwrotnej do macierzy diagonalnej jest natychmiastowe.

Opisane postępowanie może być zastąpione równoważnym, polegającym na zastosowaniu macierzy brzegowych, które należy zastosować do macierzy $\mathbf{C}$ postaci

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T & -2\mathbf{f} \\ \frac{1}{2}\mathbf{f}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Na jej elementach należy wykonać przekształcenie elementarne typu α (macierz $\mathbf{A} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A}^T$ przechodzi w górną macierz trójkątną z jednostkową główną przekątną oraz typu β (wektor $\frac{1}{2}\mathbf{f}^T$ przechodzi w wektor zerowy). Wówczas na miejscu zera występującego w macierzy $\mathbf{C}$ wystąpi szukana wielkość $S^2(p)$.

Opisane postępowanie może być wykorzystane np. do wyznaczenia prognozowanej wartości zmiennej endogenicznej, do wyznaczenia wartości PKB bez uprzedniej konieczności wyznaczenia wartości produkcji globalnej poszczególnych gałęzi produkcyjnych występujących w modelu Leontieva. Te i podobne zagadnienia związane są z problemem wyznaczania wartości wyrażenia

$$\mathbf{q}\mathbf{X}, \quad (15)$$

gdzie q jest zadany wektorem wierszowym, zaś X oznacza wektor stanowiący rozwiązanie cramerowskiego układu równań liniowych postaci $FX = t$ bez uprzedniej konieczności rozwiązywania tego układu. Możemy bowiem albo zażądać, aby wyznacznik macierzy

$$C = \begin{bmatrix} F & t \\ q & qx \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Nie znamy qx i należy je wyznaczyć z warunku orzekającym, że wyznacznik macierzy C jest równy zero, albo też posłużyć się macierzą brzegową C_1 postaci

$$C_1 = \begin{bmatrix} F & t \\ -q & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

i na jej elementach wykonać przekształcenia α i β .

LITERATURA

- Kolupa M. (2007), *Jak ustalić znak i-tej składowej k-wymiarowego portfela lokat realizowanego w warunkach krótkiej sprzedaży*. „Przegląd Statystyczny” 1/2007 (praca przyjęta do druku).
- Kolupa M., Deptuła R. (2002), *O pewnych zagadnieniach związanych z konstrukcją portfela w warunkach krótkiej sprzedaży*, „Przegląd Statystyczny” 3/2003.

Michał Kolupa

HOW TO CALCULATE PORTFOLIO RISK UNDER SHORT SALE

In the work a way to calculate portfolio risk under short sale is presented. The risk is a scalar product of the Lagrange multipliers vector and the column of free items in the equation system of limiting conditions imposed on the elements of vector P .

It is shown that it is possible to give it without the necessity of prior determining all factors of the mentioned product.