

Rps 149

Jadwiga Wazkiewicz

O pewnych zagadnieniach ekstremalnych w rodzinie funkcji
jednostajnych ograniczonych z dołu w kole $K(\infty, 1)$



Rps 149

D314/62

W s t ę p

1. Rozważamy rodzinę $\Sigma(m)$ funkcji

$$(1) \quad \Phi(z) = z + B_0 + \frac{B_1}{z} + \dots, \quad |z| > 1$$

jednoznacznych, holomorfnych dla $z \neq \infty$ i ograniczonych z dołu:

$$|\Phi(z)| > m, \text{ gdzie } 0 \leq m \leq 1 \text{ jest dowolną ustaloną liczbą.}$$

Dla każdego $p = 2, 3, \dots$ niech $\Sigma_p(m)$ będzie klasą częściową rodziny $\Sigma(m)$ funkcji postaci

$$\Phi_p(z) = z + \frac{B_{p-1}^{(p)}}{z^{p-1}} + \frac{B_{2p-1}^{(p)}}{z^{2p-1}} + \dots$$

tj. tych, które spełniają warunek

$$\Phi_p(z e^{\frac{2\pi i}{p}}) = e^{\frac{2\pi i}{p}} \Phi_p(z)$$

Nazywamy je funkcjami p -symetrycznymi. Dla $p = 1$ mamy oczywiście

$$\Sigma_1(m) = \Sigma(m).$$

Niech z_1 i z_2 będą dowolnymi różnymi punktami koła $K(\infty, 1)$.

W niniejszej pracy w oparciu o równanie Löwnera [1], wyznaczam kres dolny funkcyjonału

$$1^0 \quad H(\Phi) = \left| \frac{\Phi(z_1) - \Phi(z_2)}{z_1 - z_2} \right|, \quad \Phi(z) \in \Sigma_2(m), \quad |z_1| \neq |z_2|,$$

kresy górne funkcyjonałów

$$2^0 \quad L(\Phi) = \left| \log \frac{\Phi(z_1) - \Phi(z_2)}{z_1 - z_2} \right|, \quad \Phi(z) \in \Sigma_2(m), \quad |z_1| = |z_2|,$$

$$3^0 \quad \mathcal{G}(\Phi) = \left| \log \frac{[\Phi(z_1) - \Phi(z_2)][\Phi(-z_1) - \Phi(-z_2)](z_1 + z_2)^2}{[\Phi(-z_1) - \Phi(z_2)][\Phi(z_1) - \Phi(-z_2)](z_1 - z_2)^2} \right|, \quad \Phi(z) \in \Sigma(m), \quad |z_1| = |z_2|$$

oraz podaje oszacowanie z dołu (nie ostre) funkcjonału

$$4^o \quad H(\Phi) = \left| \frac{\Phi(z_1) - \Phi(z_2)}{z_1 - z_2} \right|, \quad \Phi(z) \in \Sigma_p(m), \quad p > 2$$

w przypadkach $p = 2\ell - 1$ i $p = 2\ell$ ($\ell = 2, 3, \dots$)

Kresy: dolny funkcjonału $H(\Phi)$, gdy $\Phi(z) \in \Sigma(m)$ oraz $|z_1| = |z_2|$; górny funkcjonałów $\mathcal{L}(\Phi)$ i $\mathcal{G}(\Phi)$, gdy $\Phi(z)$ należy do rodziny funkcji postaci (1) jednolistnych i holomorficznym dla $z \neq \infty$ w kole $K(\infty, 1)$; zostały wyznaczone odpowiednio przez Bazylewioza [2], Gokuzina [3] i Bazylewioza [4].

2. Rozważajmy rodzinę S funkcji postaci

$$(2) \quad f(z) = z + A_n z^n + \dots$$

holomorficznym i jednolistnym w kole $|z| < 1$ i niech $k(t)$ będzie funkcją zespoloną ciągłą rzeczywistego argumentu t , określoną w przedziale $0 \leq t < \infty$ i taką, że $|k(t)| = 1$. Rozważajmy następnie równanie różniczkowe

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = -w \frac{1+k(t)w}{1-k(t)w}$$

W myśl twierdzenia Löwnera [1] równanie to posiada rozwiązanie $w = f(z, t)$, $|z| < 1$, spełniające warunek $f(z, 0) = z$. Co więcej, istnieje granica

$$(4) \quad f(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t)$$

i jest ona funkcją klasy S . Klasę sześciową rodziny S utworzoną przez funkcje określone wzorem (4) oznaczamy przez S^* . Zgodnie z wynikami Löwnera każdą funkcję klasy S można aproksymować z dowolną dokładnością przy pomocy funkcji klasy S^* , które to funkcje tworzą w rodzinie

S zbiór wszędzie gęsty. Z uwagi na powyższe w rozważaniach dotyczących zagadnień ekstremalnych w klasie S wystarczy ograniczyć się do rozpatrywania zagadnień analogicznych w tej klasie szczególniej S^* .

Podobnie można rozważać obok klasy S inne i aproksymować ich elementy przez odpowiednie granice funkcji spełniających odpowiednie równanie Löwnera.

I tak, jeżeli $S(M)$ oznacza rodzinę tych funkcji (2), które spełniają warunek $|f(z)| < M$, $M > 1$ i $f(z, t)$, $f(z, 0) = z$ jest rozwiązaniem równania (7) przy danej funkcji $k(t)$, to $f(z) = e^t f(z, t) \in S(M)$, gdy $t = \log M$.

Dla funkcji rodziny $S_p(M)$ postaci

$$f_p(\zeta) = \zeta + A_{p+1} \zeta^{p+1} + A_{2p+1} \zeta^{2p+1} + \dots, \quad |f_p(\zeta)| < M, \quad M > 1,$$

gdzie p jest dowolną ustaloną liczbą naturalną, równanie Löwnera przyjmuje postać

$$p \frac{\partial f_p(\zeta, t)}{\partial t} = -f_p(\zeta, t) \frac{1 + k(t) [f_p(\zeta, t)]^p}{1 - k(t) [f_p(\zeta, t)]^p} \quad \zeta = z^{\frac{1}{p}}$$

Funkcja $f(\zeta) = e^{\frac{t}{p}} f_p(\zeta, t)$, gdzie $t = p \log M$ należy do klasy $S_p(M)$.

Jeśli rozważać rodzinę $\sum_p^{(m)}$ funkcji postaci

$$\Phi_p(z) = z + \frac{\alpha_1}{z^{p-1}} + \frac{\alpha_2}{z^{2p-1}} + \dots$$

holomorficznych i jednolitych w kole $|z| > 1$ przez biegun w punkcie $z = \infty$, to każdą funkcję można przedstawić w postaci

$$(5) \quad \Phi_p(z) = e^{-\frac{t}{p}} \bar{\Phi}_p(z, t) \Big|_{t=-p \log m},$$

gdzie $\widetilde{\Phi}_p(z, t)$ jest rozwiązaniem równania Löwnera

$$(6) \quad p \frac{\partial \widetilde{\Phi}_p(z, t)}{\partial t} = \widetilde{\Phi}_p(z, t) \frac{\widetilde{\Phi}_p^p(z, t) + k(t)}{\widetilde{\Phi}_p^p(z, t) - k(t)}$$

spełniającym warunek $\widetilde{\Phi}_p(z, 0) = z$.

§ 1. Oszacowanie z dołu funkcjonalu $H(\Phi)$ w rodzinie $\Sigma_2(n)$ funkcji dwusymetrycznych ograniczonych z dołu.

Twierdzenie 1. W rodzinie $\Sigma_2(n)$ zachodzi oszacowanie ostre

$$(1,1) \quad H(\Phi) \geq \prod_{j=1}^2 N(|z_j|, |\Phi(z_j)|, m),$$

gdzie

$$N(|z_j|, |\Phi(z_j)|, m) = \left| \frac{\Phi(z_j)}{z_j} \right| \sqrt{\frac{|z_j|^2 - 1}{|\Phi(z_j)|^2 - m^2}}, \quad j = 1, 2$$

Znak równości ma miejsce przy $|z_1| = |z_2|$ dla funkcji

$$\Phi^*(z) = m e^{i\frac{\varphi}{2}} q^{-1} \left[m q(z e^{-i\frac{\varphi}{2}}) \right],$$

gdzie

$$q(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad \varphi = \arg z_1 + \arg z_2$$

Dowód. Kładąc w (5) $p = 2$ otrzymujemy równanie

$$(2,1) \quad 2 \frac{\partial \widetilde{\Phi}_2(z, t)}{\partial t} = \widetilde{\Phi}_2(z, t) \frac{\widetilde{\Phi}_2^2(z, t) + k(t)}{\widetilde{\Phi}_2^2(z, t) - k(t)}$$

Położmy

$$(3,1) \quad \Phi_2(z, t) = e^{-\frac{t}{2}} \widetilde{\Phi}_2(z, t)$$

Funkcja $\Phi_2(z, t) \in \Sigma_2(m)$ przy $m = \frac{t}{2}$ $t > 0$ i wobec (2,1) i (3,1) spełnia równanie

$$(4,1) \quad \frac{\partial \Phi_2(z, t)}{\partial t} = \Phi_2(z, t) \frac{k(t)}{e^{t\Phi_2^2(z, t)} - k(t)},$$

gdzie $0 < t < t_0$, lub równanie

$$(5,1) \quad \frac{\partial \log \Phi_2(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\overline{k(t)} e^{t\Phi_2^2(z, t)} - 1}$$

Przyjmijmy oznaczenia

$$\Phi_{2j} = \Phi_2(z_j, t) \quad (j = 1, 2)$$

Głowząc z (4,1) mamy

$$(6,1) \quad \Phi'_{2j} = \Phi_{2j} \frac{k(t)}{e^{t\Phi_{2j}^2} - k(t)}, \quad \Phi'_{2j} = \frac{d\Phi_{2j}}{dt},$$

Odejmując stronami (6,1) dla $j = 1, 2$ otrzymamy

$$\Phi'_{21} - \Phi'_{22} = -(\Phi_{21} - \Phi_{22}) \frac{e^{t\Phi_{21}\Phi_{22}} + k(t)}{[e^{t\Phi_{21}^2} - k(t)][e^{t\Phi_{22}^2} - k(t)]} k(t)$$

Stąd

$$\frac{d \log(\Phi_{21} - \Phi_{22})}{dt} = - \frac{e^{t\Phi_{21}\Phi_{22}} + k(t)}{[e^{t\Phi_{21}^2} - k(t)][e^{t\Phi_{22}^2} - k(t)]} k(t)$$

lub

$$(7,1) \quad \frac{d \log(\Phi_{21} - \Phi_{22})}{dt} = - \frac{\overline{k(t)} e^{t\Phi_{21}\Phi_{22}} + 1}{[\overline{k(t)} e^{t\Phi_{21}^2} - 1][\overline{k(t)} e^{t\Phi_{22}^2} - 1]}$$

Wprowadzimy oznaczenia

$$(8,1) \quad \varrho_j = |\overline{k(t)} e^{t\Phi_{2j}^2} - 1|, \quad \varphi_j = \arg(\overline{k(t)} e^{t\Phi_{2j}^2} - 1), \quad (j = 1, 2)$$

oraz

$$(9,1) \quad \tau_j = |\Phi_{2j}|, \quad \varphi_j = \arg \Phi_{2j} \quad (j = 1, 2)$$

$$k(t) = e^{i\theta(t)}$$

Przyrównując części rzeczywiste wyrażeń po obu stronach w równaniu (7,1) będziemy mieli

$$(10,1) \quad \frac{d \log |\Phi_{21} - \Phi_{22}|}{dt} = -\frac{1}{g_1 g_2} [\tau_1 \tau_2 e^t \cos(-\theta + \varphi_1 + \varphi_2 - \psi_1 - \psi_2) + \cos(\psi_1 + \psi_2)]$$

z (5,1) wobec (8,1) otrzymujemy

$$\frac{d \log |\Phi_{2j}|}{dt} = \frac{\cos \psi_j}{g_j}$$

Zauważmy, że na mocy (3,1)

$$\frac{d \log |e^{\frac{t}{2}} \Phi_{2j}|}{dt} = \frac{1}{2} + \frac{\cos \psi_j}{g_j}$$

czyli

$$\frac{d \log (e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j)}{dt} = \frac{2 \cos \psi_j + g_j}{2 g_j}$$

Z uwagi na (8,1) i (9,1)

$$g_j^2 + 2 g_j \cos \psi_j \equiv e^{2t} \tilde{\tau}_j^4 - 1$$

wtedy

$$\frac{d \log (e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j)}{dt} = \frac{e^{2t} \tilde{\tau}_j^4 - 1}{2 g_j^2}$$

wobec czego

$$(11,1) \quad \frac{d(e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j)}{dt} = \frac{e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j (e^{2t} \tilde{\tau}_j^4 - 1)}{2 g_j^2};$$

Stąd

$$(12,1) \quad \frac{1}{g_j^2} = \frac{2}{(e^{2t} \tilde{\tau}_j^4 - 1) e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j)}{dt}$$

Ponieważ

$$\frac{1}{g_1 g_2} \equiv \frac{1}{\frac{g_2}{g_1} + \frac{g_1}{g_2}} \left(\frac{1}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} \right)$$

oraz

$$e^{\frac{t}{s_1 s_2} \tilde{v}_1 \tilde{v}_2} \equiv \frac{e^t}{\frac{s_2 \tilde{v}_1}{s_1 \tilde{v}_2} + \frac{s_1 \tilde{v}_2}{s_2 \tilde{v}_1}} \left(-\frac{\tilde{v}_1^2}{s_1^2} + \frac{\tilde{v}_2^2}{s_2^2} \right),$$

przeto wobec (12,1)

$$(13,1) \quad \frac{1}{s_1 s_2} = \frac{2}{\frac{s_2}{s_1} + \frac{s_1}{s_2}} \left[\frac{1}{e^{\frac{t}{s_1} \tilde{v}_1} (e^{2t \tilde{v}_1^4} - 1)} \frac{d(e^{\frac{t}{s_1} \tilde{v}_1})}{dt} + \frac{1}{e^{\frac{t}{s_2} \tilde{v}_2} (e^{2t \tilde{v}_2^4} - 1)} \frac{d(e^{\frac{t}{s_2} \tilde{v}_2})}{dt} \right]$$

oraz

$$(14,1) \quad e^{\frac{t}{s_1 s_2} \tilde{v}_1 \tilde{v}_2} = \frac{2}{\frac{s_2 \tilde{v}_1}{s_1 \tilde{v}_2} + \frac{s_1 \tilde{v}_2}{s_2 \tilde{v}_1}} \left[\frac{e^{\frac{t}{s_1} \tilde{v}_1}}{e^{2t \tilde{v}_1^4} - 1} \frac{d(e^{\frac{t}{s_1} \tilde{v}_1})}{dt} + \frac{e^{\frac{t}{s_2} \tilde{v}_2}}{e^{2t \tilde{v}_2^4} - 1} \frac{d(e^{\frac{t}{s_2} \tilde{v}_2})}{dt} \right]$$

Powróćmy do równania (10,1). Prawa jego strona jest sumą wyrazów

$$- \left[\cos(\psi_1 + \psi_2) \right] \frac{1}{s_1 s_2}, \quad - \left[\cos(\theta + \psi_1 + \psi_2 - \varphi_1 - \varphi_2) \right] e^{\frac{t}{s_1 s_2} \tilde{v}_1 \tilde{v}_2}$$

wiec z uwagi na (13,1) i (14,1) równanie (10,1) można przedstawić w postaci równoważnej

$$(15,1) \quad \frac{d \log |\phi_{21} - \phi_{22}|}{dt} = - \frac{\frac{s_2}{s_1} + \frac{s_1}{s_2}}{\frac{s_2 \tilde{v}_1}{s_1 \tilde{v}_2} + \frac{s_1 \tilde{v}_2}{s_2 \tilde{v}_1}} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{e^{\frac{t}{s_j} \tilde{v}_j} (e^{2t \tilde{v}_j^4} - 1)} \frac{d(e^{\frac{t}{s_j} \tilde{v}_j})}{dt} -$$

$$- \frac{2 \cos(\theta + \psi_1 + \psi_2 - \varphi_1 - \varphi_2)}{\frac{s_2 \tilde{v}_1}{s_1 \tilde{v}_2} + \frac{s_1 \tilde{v}_2}{s_2 \tilde{v}_1}} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{\frac{t}{s_j} \tilde{v}_j}}{e^{2t \tilde{v}_j^4} - 1} \frac{d(e^{\frac{t}{s_j} \tilde{v}_j})}{dt};$$

Ponieważ

$$(16,1) \quad \cos(\psi_1 + \psi_2) \leq 1, \quad \cos(\theta + \psi_1 + \psi_2 - \varphi_1 - \varphi_2) \leq 1,$$

$$\frac{s_2}{s_1} + \frac{s_1}{s_2} \geq 2, \quad \frac{s_2 \tilde{v}_1}{s_1 \tilde{v}_2} + \frac{s_1 \tilde{v}_2}{s_2 \tilde{v}_1} \geq 2$$

oraz wobec (11,1)

$$(17,1) \quad \frac{d(e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j)}{dt} > 0,$$

wiec

$$(18,1) \quad \frac{d \log |\Phi_{21} - \Phi_{22}|}{dt} \geq - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j (e^{2t \tilde{\tau}_j^4} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j)}{dt} - \\ - \sum_{j=1}^2 \frac{e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j}{e^{2t \tilde{\tau}_j^4} - 1} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j)}{dt};$$

Po wykonaniu działań z prawej strony (18,1) otrzymamy relację:

$$(19,1) \quad \frac{d \log |\Phi_{21} - \Phi_{22}|}{dt} \geq - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j (e^{2t \tilde{\tau}_j^2} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j)}{dt}$$

Funkcje $u_j(t)$ zależnej t określone wzorami

$$u_j(t) = e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j(t) \quad (j = 1, 2)$$

na wobec (11,1) funkcjami rosnącymi i przy tym $u_j(0) = \tilde{\tau}_j(0)$, więc

$$\int_0^t \frac{d \log |\Phi_{21} - \Phi_{22}|}{dt} dt \geq - \sum_{j=1}^2 \int_{\tilde{\tau}_j(0)}^{u_j} \frac{du_j}{u_j(u_j^2 - 1)}$$

Ponieważ

$$\Phi_{2j}(0) = \Phi_2(z_j, 0) = z_j, \quad \tilde{\tau}_j(0) = |\Phi_2(z_j, 0)| = |z_j|$$

zatem

$$(20,1) \quad \log \left| \frac{\Phi_{21} - \Phi_{22}}{z_1 - z_2} \right| \geq \sum_{j=1}^2 \log \frac{e^{\frac{t}{2}} \tilde{\tau}_j}{\sqrt{e^{2t \tilde{\tau}_j^2} - 1}} \cdot \frac{\sqrt{|z_j|^2 - 1}}{|z_j|}$$

Funkcja

$$\Phi_2(z) = \Phi_2(z, t) \Big|_{t=-2 \log m}$$

należy do rodziny $\Sigma_2(m)$ /por. (5) i (3,1)/, przeto z (20,1) dla $t = -2 \log m$ otrzymamy oszacowanie badanego funkcyjonału w rozważanej klasie funkcji:

$$\log \left| \frac{\Phi_2(z_1) - \Phi_2(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \sum_{j=1}^2 \log \frac{|\Phi_2(z_j)|}{\sqrt{|\Phi_2(z_j)|^2 - m^2}} \cdot \frac{\sqrt{|z_j|^2 - 1}}{|z_j|}$$

Stąd

$$(21,1) \quad \left| \frac{\Phi_2(z_1) - \Phi_2(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \prod_{j=1}^2 \left| \frac{\Phi_2(z_j)}{z_j} \right| \sqrt{\frac{|z_j|^2 - 1}{|\Phi_2(z_j)|^2 - m^2}}$$

Tym samym wykazaliśmy prawdziwość wzoru (1,1). Udowodnimy obecnie, że oszacowanie (21,1) jest ostre. W tym celu wykazemy, że istnieje funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej t $k^*(t) = e^{\theta^*(t)}$ określona w przedziale $\langle 0, t \rangle$ taka, że odpowiadająca jej funkcja $\Phi_2^*(z)$ spełnia warunek

$$\left| \frac{\Phi_2^*(z_1) - \Phi_2^*(z_2)}{z_1 - z_2} \right| = \prod_{j=1}^2 \left| \frac{\Phi_2^*(z_j)}{z_j} \right| \sqrt{\frac{|z_j|^2 - 1}{|\Phi_2^*(z_j)|^2 - m^2}}$$

Funkcja $\Phi_2^*(z)$ określić się wówczas wzorem

$$\Phi_2^*(z) = \Phi_2^*(z, t) \quad \Big| \quad t = -2 \log m$$

gdzie $\Phi_2^*(z, t)$ czyni zadość warunkom

$$(22,1) \quad \frac{\partial \Phi_2^*(z, t)}{\partial t} = \Phi_2^*(z, t) \frac{k^*(t)}{e^t \Phi_2^*(z, t)^2 - k^*(t)} \quad \Phi_2^*(z, 0) = z$$

por. (4,1)

Funkcja $k^*(t)$ winna więc wobec (16,1) spełniać warunki:

$$(a) \quad \cos(\psi_1^* + \psi_2^*) \equiv 1$$

$$(b) \quad -\cos(\theta^* - \varphi_1^* - \varphi_2^* + \psi_1^* + \psi_2^*) \equiv 1$$

$$(c) \quad \frac{\xi_1^*}{\xi_1^*} + \frac{\xi_1^*}{\xi_2^*} \equiv 2,$$

$$(d) \quad \frac{\xi_1^* \tau_1^*}{\xi_1^* \tau_2^*} + \frac{\xi_1^* \tau_2^*}{\xi_2^* \tau_1^*} \equiv 2,$$

gdzie

$$\Phi_{2j}^* = \Phi_2^*(z_j, t), \quad \xi_j^* = |\overline{\kappa^*(t)} e^t \Phi_{2j}^{*2} - 1|, \quad \Psi_j^* = \arg(\kappa^*(t) e^t \Phi_{2j}^{*2} - 1),$$

$$\tau_j^* = |\Phi_{2j}^*|, \quad \varphi_j^* = \arg \Phi_{2j}^* \quad \text{dla } j = 1, 2$$

por. (8,1) i (9,1)

Zauważmy, że warunki (a) i (c) są równoważne następującym

$$(23,1) \quad \xi_2^* = \xi_1^* \quad \Psi_2^* = -\Psi_1^* + 2\ell\pi \quad (\ell = 0, \pm 1, \dots)$$

wobec czego

$$\overline{\kappa^*(t)} e^t \Phi_{22}^{*2} - 1 = \overline{\kappa^*(t) e^t \Phi_{21}^{*2} - 1}$$

skąd

$$\overline{\kappa^*(t)} \Phi_{22}^{*2} = \kappa^*(t) \overline{\Phi_{21}^{*2}};$$

zatem

$$\tilde{\tau}_2^{*2} e^{(2\varphi_2^* - \theta^*)i} = \tilde{\tau}_1^{*2} e^{(\theta^* - 2\varphi_1^*)i}$$

Ostatnia równość zachodzi wtedy tylko, gdy

$$(24,1) \quad \tilde{\tau}_2^* = \tilde{\tau}_1^*$$

$$(25,1) \quad \theta^* = \varphi_1^* + \varphi_2^* + m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \dots)$$

Z uwagi na (b) winno być m parzyste.

Ostatni z warunków (a) - (d) jest spełniony wobec (23,1) i (24,1).

Funkcja $\Phi_2^*(z, t)$ spełniać winna równanie (5,1).

Zatem

$$(26,1) \quad \frac{d \log \tilde{\tau}_j^*(t)}{dt} = \frac{\cos \Psi_j^*(t)}{\xi_j^*(t)}$$

oraz

$$(27,1) \quad \frac{d\varphi_j^*(t)}{dt} = - \frac{\sin \varphi_j^*(t)}{\varrho_j^*(t)}$$

dla $j = 1, 2$.

Z uwagi na (23,1) otrzymujemy z (26,1) równanie

$$\frac{d \log \tilde{\tau}_1^*(t)}{dt} = \frac{d \log \tilde{\tau}_2^*(t)}{dt}$$

więc

$$\log \tilde{\tau}_1^*(t) = \log \tilde{\tau}_2^*(t) + \text{const.}$$

Ponieważ

$$\tilde{\tau}_1^*(0) = |z_1| \quad \tilde{\tau}_2^*(0) = |z_2|$$

przeto

$$\frac{\tilde{\tau}_1^*(t)}{\tilde{\tau}_2^*(t)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Aby był spełniony warunek $\tilde{\tau}_1^*(t) = \tilde{\tau}_2^*(t)$ potrzeba, by $|z_1| = |z_2|$

Na odwrót, jeżeli $|z_1| = |z_2|$, to $\tilde{\tau}_1^*(t) = \tilde{\tau}_2^*(t)$.

Z równania (27,1) mamy wobec (23,1)

$$\frac{d\varphi_1^*(t)}{dt} = - \frac{d\varphi_2^*(t)}{dt}$$

skąd

$$\varphi_1^*(t) = -\varphi_2^*(t) + \text{const.}$$

Ale

$$\varphi_j^*(0) = \arg z_j \quad (j = 1, 2),$$

przeto

$$(28,1) \quad \varphi_1^*(t) + \varphi_2^*(t) = \arg z_1 + \arg z_2$$

Reasumując, wykazaliśmy, że przy założeniu $|z_1| = |z_2|$ istnieje funkcja $k^* = k^*(t) = e^{i\theta^*(t)}$ i jest ona określona wobec (25,1) i (28,1) wzorem

$$k^*(t) = e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)} \quad |z_1| = |z_2|$$

Możemy teraz wyznaczyć funkcję $\phi_2^*(z, t)$ całkując równanie (22,1).
Pozostaje w tym celu

$$\Omega(z, t) = e^{\frac{t}{2}} \phi_2^*(z, t)$$

Wówczas dla funkcji $\Omega = \Omega(z, t)$ otrzymamy równanie /por. (2,1) i (3,1)/

$$2 \frac{\partial \Omega(z, t)}{\partial t} = \Omega(z, t) \frac{\Omega^2(z, t) + \kappa^*(t)}{\Omega^2(z, t) - \kappa^*(t)}$$

Rozdzielając zmienne i całkując dostaniemy

$$\int_z^\Omega \frac{\Omega^2 - \kappa^*}{\Omega(\Omega^2 + \kappa^*)} d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^t dt$$

Stąd

$$\log \frac{\Omega^2(z, t) + \kappa^*}{\Omega(z, t)} = \frac{t}{2} + \log \frac{z^2 + \kappa^*}{z},$$

wiec

$$\frac{\Omega(z, t)}{\Omega^2(z, t) + \kappa^*} = e^{-\frac{t}{2}} \frac{z}{z^2 + \kappa^*}$$

Zatem funkcja $\phi_2^*(z, t)$ określona jest równaniem

$$\frac{e^{\frac{t}{2}} \phi_2^*(z, t)}{e^t \phi_2^{*2}(z, t) + \kappa^*} = e^{-\frac{t}{2}} \frac{z}{z^2 + \kappa^*} \quad |\phi_2^*(z, t)| > e^{-\frac{t}{2}},$$

które jest równoważne następującemu

$$(29,1) \quad \frac{e^{\frac{t}{2}} \phi_2^*(z, t) e^{-\frac{t}{2} \theta^*}}{e^t \kappa^* \phi_2^{*2}(z, t) + 1} = e^{-\frac{t}{2}} \frac{z e^{-\frac{t}{2} \theta^*}}{z^2 \kappa^* + 1}$$

Ponieważ funkcja $\phi_2^*(z, t)$ spełnia równanie (29,1), funkcja ekstremalna $\phi_2^*(z)$ spełnia je również przy $t = -2 \log m$ /por. (5)/.

Otrzymaliśmy więc równanie

$$(30,1) \quad \frac{\frac{\Phi_2^*(z)}{m} e^{-\frac{i}{2}\theta^*}}{\left(\frac{\Phi_2^*(z)}{m}\right)^2 e^{-i\theta^*} + 1} = m \frac{z e^{-\frac{i}{2}\theta^*}}{z^2 e^{-i\theta^*} + 1}$$

Położmy

$$q(z) \equiv \frac{z}{z^2 + 1};$$

wówczas równanie (30,1) przyjmuje postać

$$q\left[\frac{\Phi_2^*(z)}{m} e^{-\frac{i}{2}\theta^*}\right] = m \cdot q(z e^{-\frac{i}{2}\theta^*});$$

Więc

$$\begin{aligned} \Phi_2^*(z) &= m e^{i\frac{\varphi}{2}} q^{-1}[m q(z e^{-i\frac{\varphi}{2}})] = \\ &= z + \frac{(1-m^2)e^{i\varphi}}{z} + \frac{m^2(1-m^2)e^{2i\varphi}}{z^3} + \dots, \end{aligned}$$

gdzie

$$\varphi = \theta^* = \arg z_1 + \arg z_2$$

Tym samym twierdzenie zostało udowodnione.

§ 2. Oszacowanie z góry funkcjonału $\mathcal{L}(\Phi_2)$ w rodzinie $\Sigma_2(m)$ funkcji dwusymetrycznych ograniczonych z dołu.

Twierdzenie 2. W rodzinie $\Sigma_2(m)$ zachodzi oszacowanie ostre

$$\mathcal{L}(\Phi_2) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\prod_{j=1}^n N(|z_j|, |\Phi_2(z_j)|, m)} + \frac{1}{2} \sqrt{\prod_{j=1}^n M(|z_j|, |\Phi_2(z_j)|, m)},$$

gdzie

$$N(|z_j|, |\Phi_2(z_j)|, m) = \log \frac{(1 - \frac{m^2}{|\Phi_2(z_j)|^2})(1 + \frac{1}{|z_j|^2})}{(1 + \frac{m^2}{|\Phi_2(z_j)|^2})(1 - \frac{1}{|z_j|^2})},$$

$$M(|z_j|, |\Phi_2(z_j)|, m) = \log \frac{1 - \frac{m^4}{|\Phi_2(z_j)|^4}}{1 - \frac{1}{|z_j|^4}};$$

Znak równości zachodzi przy $|z_1| = |z_2|$ dla funkcji

$$\Phi^*(z) = m e^{i\frac{\varphi}{2}} q^{-1} [m q(z e^{-i\frac{\varphi}{2}})],$$

gdzie

$$q(z) = \frac{z}{z^2+1}, \quad \varphi = \arg z_1 + \arg z_2$$

Dowód. Zachowując oznaczenia § 1 i korzystając z (3,1), (2,1), (4,1), (6,1) łatwo sprawdzić prawdziwość równości

$$(1,2) \quad \frac{d}{dt} \log \frac{\Phi_{21} - \Phi_{22}}{z_1 - z_2} = - \left[\frac{e^t k \Phi_{21} \Phi_{22}}{(e^t \Phi_{21}^2 - k)(e^t \Phi_{22}^2 - k)} + \frac{k^2}{(e^t \Phi_{21}^2 - k)(e^t \Phi_{22}^2 - k)} \right],$$

$$(2,2) \quad \frac{d}{dt} \log \left[1 - \frac{e^{-t}}{\Phi_{2j} \bar{\Phi}_{2j}} \right] = \left| \frac{\sqrt{k} e^{\frac{t}{2}} \Phi_{2j}}{e^t \Phi_{2j}^2 - k} \right|^2 + \left| \frac{k}{e^t \Phi_{2j}^2 - k} \right|^2$$

$j = 1, 2$

$$(3,2) \quad \frac{d}{dt} \log \left[1 + \frac{e^{-t}}{\Phi_{2j} \bar{\Phi}_{2j}} \right] = - \left| \frac{\sqrt{k} e^{\frac{t}{2}} \Phi_{2j}}{e^t \Phi_{2j}^2 - k} \right|^2 + \left| \frac{k}{e^t \Phi_{2j}^2 - k} \right|^2$$

Zamiast $k(t)$ pisze krótko k .

Całkując powyższe równości względem t od $t = 0$ do $t = -2 \log m$ i uwzględniając, że $\Phi_2(z) = \Phi_2(z, t) \Big|_{t = -2 \log m}$, mamy wobec $\Phi_2(z, 0) = z$

$$(4,2) \quad \log \frac{\Phi_2(z_1) - \Phi_2(z_2)}{z_1 - z_2} = - \int_0^t \left[\frac{\sqrt{k} e^{\frac{t}{2}} \Phi_{21}}{e^t \Phi_{21}^2 - k} \cdot \frac{\sqrt{k} e^{\frac{t}{2}} \Phi_{22}}{e^t \Phi_{22}^2 - k} + \frac{k}{e^t \Phi_{21}^2 - k} \cdot \frac{k}{e^t \Phi_{22}^2 - k} \right] dt$$

$$(5,2) \quad \log \frac{1 - \frac{m^2}{\Phi_2(z_j) \bar{\Phi}_2(z_j)}}{1 - \frac{1}{z_j \bar{z}_j}} = \int_0^t \left| \frac{\sqrt{k} e^{\frac{t}{2}} \Phi_{2j}}{e^t \Phi_{2j}^2 - k} \right|^2 dt + \int_0^t \left| \frac{k}{e^t \Phi_{2j}^2 - k} \right|^2 dt \quad j = 1, 2$$

$$(6,2) \quad \log \frac{1 + \frac{m^2}{\phi_2(z_j) \overline{\phi_2(z_j)}}}{1 + \frac{1}{z_j \overline{z_j}}} = - \int_0^t \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{2j}}{e^{t\phi_{2j}^2} - \kappa} \right|^2 dt + \int_0^t \left| \frac{\kappa}{e^{t\phi_{2j}^2} - \kappa} \right|^2 dt \quad j=1,2$$

Odejmujemy, a następnie dodajemy dwie ostatnie równości stronami.

Otrzymujemy

$$(7,2) \quad \log \frac{1 - \frac{m^2}{\phi_2(z_j) \overline{\phi_2(z_j)}}}{1 - \frac{1}{z_j \overline{z_j}}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{z_j \overline{z_j}}}{1 + \frac{m^2}{\phi_2(z_j) \overline{\phi_2(z_j)}}} = 2 \int_0^t \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{2j}}{e^{t\phi_{2j}^2} - \kappa} \right|^2 dt$$

$$(8,2) \quad \log \frac{1 - \left[\frac{m^2}{\phi_2(z_j) \overline{\phi_2(z_j)}} \right]^2}{1 - \left[\frac{1}{z_j \overline{z_j}} \right]^2} = 2 \int_0^t \left| \frac{\kappa}{e^{t\phi_{2j}^2} - \kappa} \right|^2 dt$$

Z relacji (4,2) otrzymujemy natychmiast

$$(9,2) \quad \left| \log \frac{\phi_2(z_1) - \phi_2(z_2)}{z_1 - z_2} \right| = \left| \int_0^t \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{21}}{e^{t\phi_{21}^2} - \kappa} \cdot \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{22}}{e^{t\phi_{22}^2} - \kappa} dt + \int_0^t \frac{\kappa}{e^{t\phi_{21}^2} - \kappa} \cdot \frac{\kappa}{e^{t\phi_{22}^2} - \kappa} dt \right| \leq \\ \leq \left| \int_0^t \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{21}}{e^{t\phi_{21}^2} - \kappa} \cdot \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{22}}{e^{t\phi_{22}^2} - \kappa} dt \right| + \left| \int_0^t \frac{\kappa}{e^{t\phi_{21}^2} - \kappa} \cdot \frac{\kappa}{e^{t\phi_{22}^2} - \kappa} dt \right| \leq \\ \leq \int_0^t \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{21}}{e^{t\phi_{21}^2} - \kappa} \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{22}}{e^{t\phi_{22}^2} - \kappa} \right| dt + \int_0^t \left| \frac{\kappa}{e^{t\phi_{21}^2} - \kappa} \right| \cdot \left| \frac{\kappa}{e^{t\phi_{22}^2} - \kappa} \right| dt.$$

Korzystając jeszcze z nierówności Schwarz'a mamy ostatecznie

(10,2)

$$\left| \log \frac{\phi_2(z_1) - \phi_2(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq \sqrt{\int_0^t \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{21}}{e^{t\phi_{21}^2} - \kappa} \right|^2 dt} \sqrt{\int_0^t \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{22}}{e^{t\phi_{22}^2} - \kappa} \right|^2 dt} + \sqrt{\int_0^t \left| \frac{\kappa}{e^{t\phi_{21}^2} - \kappa} \right|^2 dt} \sqrt{\int_0^t \left| \frac{\kappa}{e^{t\phi_{22}^2} - \kappa} \right|^2 dt}$$

Uwzględniając w prawej stronie wzory (7,2) i (8,2) otrzymamy nierówność

$$\left| \log \frac{\phi_2(z_1) - \phi_2(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\prod_{j=1}^2 \log \frac{(1 - \frac{m^2}{|\phi_2(z_j)|^2})(1 + \frac{1}{|z_j|^2})}{(1 + \frac{m^2}{|\phi_2(z_j)|^2})(1 - \frac{1}{|z_j|^2})}} + \frac{1}{2} \sqrt{\prod_{j=1}^2 \log \frac{1 - \frac{m^4}{|\phi_2(z_j)|^4}}{1 - \frac{1}{|z_j|^4}}},$$

która figuruje w tezie twierdzenia.

Dla ustalenia warunków, przy których zachodzi równość, wprowadzając oznaczenia (8,1) i (9,1).

Nierówności (9,2) równoważna jest nierówność

$$\begin{aligned} (11,2) \quad & \left| \int_0^t \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{21}}{e^{t\kappa} \phi_{21}^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{22}}{\kappa e^{t\phi_{22}^2} - 1} dt + \int_0^t \frac{1}{\kappa e^{t\phi_{21}^2} - 1} \cdot \frac{1}{\kappa e^{t\phi_{22}^2} - 1} dt \right| \leq \\ & \leq \left| \int_0^t \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{21}}{\kappa e^{t\phi_{21}^2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{22}}{\kappa e^{t\phi_{22}^2} - 1} dt \right| + \left| \int_0^t \frac{1}{\kappa e^{t\phi_{21}^2} - 1} \cdot \frac{1}{\kappa e^{t\phi_{22}^2} - 1} dt \right| = \\ & \leq \int_0^t \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{21}}{\kappa e^{t\phi_{21}^2} - 1} \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2}} \phi_{22}}{\kappa e^{t\phi_{22}^2} - 1} \right| dt + \int_0^t \left| \frac{1}{\kappa e^{t\phi_{21}^2} - 1} \right| \cdot \left| \frac{1}{\kappa e^{t\phi_{22}^2} - 1} \right| dt \end{aligned}$$

Wobec przyjętych oznaczeń przyjmie ona postać

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \frac{e^{t\tau_1\tau_2}}{\varrho_1\varrho_2} e^{i(\varphi_1+\varphi_2-\theta-\psi_1-\psi_2)} dt + \int_0^t \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} e^{-i(\psi_1+\psi_2)} dt \right| \leq \\ & \leq \left| \int_0^t \frac{e^{t\tau_1\tau_2}}{\varrho_1\varrho_2} e^{i(\varphi_1+\varphi_2-\theta-\psi_1-\psi_2)} dt \right| + \left| \int_0^t \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} e^{-i(\psi_1+\psi_2)} dt \right| \leq \\ & \leq \int_0^t \frac{e^{t\tau_1\tau_2}}{\varrho_1\varrho_2} dt + \int_0^t \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} dt \end{aligned}$$

Widać łatwo, że znak równości będzie tu miał miejsce, gdy

$$(a) \quad \varphi_1 + \varphi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2 = 0$$

$$(b) \quad \psi_1 + \psi_2 = 0$$

Nierówność, z której wynika (10,2) można zapisać w postaci następującej

$$(12,2) \quad \int_0^t \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2} \phi_{21}}}{\bar{\kappa} e^{t \phi_{21}^2} - 1} \right| \cdot \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2} \phi_{22}}}{\bar{\kappa} e^{t \phi_{22}^2} - 1} \right| dt + \int_0^t \left| \frac{1}{\bar{\kappa} e^{t \phi_{21}^2} - 1} \right| \cdot \left| \frac{1}{\bar{\kappa} e^{t \phi_{22}^2} - 1} \right| dt \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^t \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2} \phi_{21}}}{\bar{\kappa} e^{t \phi_{21}^2} - 1} \right|^2 dt \cdot \int_0^t \left| \frac{\sqrt{\kappa} e^{\frac{t}{2} \phi_{22}}}{\bar{\kappa} e^{t \phi_{22}^2} - 1} \right|^2 dt} + \sqrt{\int_0^t \left| \frac{1}{\bar{\kappa} e^{t \phi_{21}^2} - 1} \right|^2 dt \cdot \int_0^t \left| \frac{1}{\bar{\kappa} e^{t \phi_{22}^2} - 1} \right|^2 dt}$$

zobac przyjętych oznaczeń będzie

$$\int_0^t \frac{e^{\frac{t}{2} \tau_1} \tau_1}{\varrho_1 \varrho_2} dt + \int_0^t \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} dt \leq \sqrt{\int_0^t \left[\frac{e^{\frac{t}{2} \tau_1}}{\varrho_1} \right]^2 dt \cdot \int_0^t \left[\frac{e^{\frac{t}{2} \tau_2}}{\varrho_2} \right]^2 dt} + \sqrt{\int_0^t \frac{dt}{\varrho_1^2} \cdot \int_0^t \frac{dt}{\varrho_2^2}}$$

Relacja ta zamieni się na pewno w równość, gdy położymy

$$(a) \quad \tau_1 = \tau_2$$

$$(d) \quad \varrho_1 = \varrho_2$$

Proste rachunki wykazują, że równości (a), (b), (c), (d) spełnione są równocześnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\tau_1 = \tau_2 \quad \theta = \varphi_1 + \varphi_2$$

Ostatnie dwa warunki pozwalają w oparciu o równanie Löwnera (2,1) znaleźć funkcję $\phi_2^*(z)$ realizującą maksimum rozważanego funkcjonau, lecz tylko wtedy, gdy $|z_1| = |z_2| = r > 1$. Jest to mianowicie funkcja

$$\phi_2^*(z) = m e^{i \frac{\varphi}{2}} q^{-1} [m q(z e^{-i \frac{\varphi}{2}})] = z + \frac{(1-m^2) e^{i \varphi}}{z} + \frac{m^2 (1-m^2) e^{i 2 \varphi}}{z^3} + \dots,$$

gdzie

$$q(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad \varphi = \theta^* = \arg z_1 + \arg z_2$$

to samo, co w twierdzeniu 1.

§ 3. Oszacowanie z góry funkcjonau $\mathcal{G}(\phi)$ w rodzinie $\Sigma_1(m)$ funkcji ograniczonych z dołu.

Twierdzenie 3. W klasie $\Sigma_1(m)$ zachodzi oszacowanie ostre

$$\mathcal{G}(\phi) \leq \prod_{j=1}^2 N[|z_j|, \phi(z_j), \phi(-z_j) \cdot m],$$

gdzie

$$N[z_j, \phi(z_j), \phi(-z_j), m] = \log \frac{(1 - \frac{m^2}{\phi(z_j)\overline{\phi(z_j)}})(1 - \frac{m^2}{\phi(-z_j)\overline{\phi(-z_j)}})(1 + \frac{1}{|z_j|^2})^2}{(1 - \frac{m^2}{\phi(z_j)\overline{\phi(z_j)}})(1 - \frac{m^2}{\phi(-z_j)\overline{\phi(-z_j)}})(1 - \frac{1}{|z_j|^2})^2},$$

znak równości ma miejsce przy $|z_1| = |z_2|$ dla funkcji

$$\Phi_2^*(z) = m e^{i\frac{\varphi}{2}} \bar{q}^{-1} [m q(z e^{-i\frac{\varphi}{2}})],$$

gdzie

$$q(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad \varphi = \arg z_1 + \arg z_2$$

Dowód. Równanie Löwnera ma w tym przypadku postać

$$(1, 3) \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}(z, t)}{\partial t} = \tilde{\Phi}(z, t) \frac{\tilde{\Phi}(z, t) + k}{\tilde{\Phi}(z, t) - k}, \quad k = k(t)$$

funkcja

$$(2, 3) \quad \Phi(z) = e^{-t} \tilde{\Phi}(z, t) \Big|_{t=-\log m},$$

gdzie $\tilde{\Phi}(z, t)$ jest rozwiązaniem równania (1, 3) i $\tilde{\Phi}(z, 0) = z$ należy do klasy $\Sigma(m)$.

Położmy

$$\Phi(z, t) = e^{-t} \tilde{\Phi}(z, t)$$

(3, 3)

Wobec (1, 3) funkcja $\Phi(z, t)$ spełnia równanie

$$(4, 3) \quad \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} = \frac{2\Phi(z, t)k}{e^t \Phi(z, t) - k}, \quad \text{ i } \Phi(z, 0) = z$$

Oznaczmy

$$\Phi(z_j, t) = \phi_j \quad j = 1, 2$$

Zrodnie z (4, 3) mamy

$$\frac{d\phi_j}{dt} = \frac{2k\phi_j}{e^t \phi_j - k} \quad j = 1, 2$$

Pozostajac powyzej latwo sprawdzic slusznośc równości

$$(5, 3) \quad \frac{d}{dt} \log \frac{\phi_1 - \phi_2}{z_1 - z_2} = -2 \frac{k}{e^t \phi_1 - k} \cdot \frac{k}{e^t \phi_2 - k}$$

$$(6,3) \quad \frac{d}{dt} \log \left(1 - \frac{e^{-2t}}{\phi_1 \phi_2} \right) = 2 \frac{k}{e^t \phi_1 - k} \cdot \frac{k}{e^t \phi_2 - k};$$

Całkując względem t od 0 do $t_1 = -\log m$ i biorąc pod uwagę (1,3), (3,3) otrzymujemy

$$(7,3) \quad \log \frac{\phi(z_1) - \phi(z_2)}{z_1 - z_2} = -2 \int_0^{t_1} \frac{k}{e^t \phi_1 - k} \cdot \frac{k}{e^t \phi_2 - k} dt$$

$$(8,3) \quad \log \frac{1 - \frac{m^2}{\phi(z_1)\phi(z_2)}}{1 - \frac{1}{z_1 \bar{z}_2}} = 2 \int_0^{t_1} \frac{k}{e^t \phi_1 - k} \cdot \frac{k}{e^t \phi_2 - k} dt$$

W oparciu o (7,3) można napisać trzy następujące prawdziwe równości

$$-\log \frac{\phi(-z_1) - \phi(z_2)}{-z_1 - z_2} = -2 \int_0^{t_1} (-1) \frac{k}{e^t \phi(-z_1, t) - k} \cdot \frac{k}{e^t \phi(z_2, t) - k} dt$$

$$-\log \frac{\phi(z_1) - \phi(-z_2)}{z_1 + z_2} = -2 \int_0^{t_1} (-1) \frac{k}{e^t \phi(z_1, t) - k} \cdot \frac{k}{e^t \phi(-z_2, t) - k} dt$$

$$\log \frac{\phi(-z_1) - \phi(-z_2)}{-z_1 + z_2} = -2 \int_0^{t_1} \frac{k}{e^t \phi(-z_1, t) - k} \cdot \frac{k}{e^t \phi(-z_2, t) - k} dt$$

Dodając stronami (7,3) i trzy ostatnie równości otrzymane po stronie lewej

$$\log \frac{[\phi(z_1) - \phi(z_2)][\phi(-z_1) - \phi(-z_2)](z_1 + z_2)^2}{[\phi(-z_1) - \phi(z_2)][\phi(z_1) - \phi(-z_2)](z_1 - z_2)^2}$$

Strona prawa, jak łatwo sprawdzić, przyjdzie postać

$$-2 \int_0^{t_1} \left[\frac{k}{e^t \phi(z_1, t) - k} - \frac{k}{e^t \phi(-z_1, t) - k} \right] \left[\frac{k}{e^t \phi(z_2, t) - k} - \frac{k}{e^t \phi(-z_2, t) - k} \right] dt$$

Z równości tych wyrażeń wynika równość ich modułów

$$(9,3) \quad \left| \log \frac{[\phi(z_1) - \phi(z_2)][\phi(-z_1) - \phi(-z_2)](z_1 + z_2)^2}{[\phi(-z_1) - \phi(z_1)][\phi(z_1) - \phi(-z_2)](z_1 - z_2)^2} \right| =$$

$$= 2 \left| \int_0^{t_1} \left[\frac{k}{e^{t\phi(z_1,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_1,t)} - k} \right] \left[\frac{k}{e^{t\phi(z_2,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_2,t)} - k} \right] dt \right|$$

Ale jak wiadomo

$$(10,3) \quad 2 \left| \int_0^{t_1} \left[\frac{k}{e^{t\phi(z_1,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_1,t)} - k} \right] \left[\frac{k}{e^{t\phi(z_2,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_2,t)} - k} \right] dt \right| \leq$$

$$\leq 2 \int_0^{t_1} \left| \frac{k}{e^{t\phi(z_1,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_1,t)} - k} \right| \cdot \left| \frac{k}{e^{t\phi(z_2,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_2,t)} - k} \right| dt$$

Stosując jeszcze nierówność Schwarz

$$(11,3) \quad 2 \int_0^{t_1} \left| \frac{k}{e^{t\phi(z_1,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_1,t)} - k} \right| \cdot \left| \frac{k}{e^{t\phi(z_2,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_2,t)} - k} \right| dt \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^{t_1} \left| \frac{k}{e^{t\phi(z_1,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_1,t)} - k} \right|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^{t_1} \left| \frac{k}{e^{t\phi(z_2,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_2,t)} - k} \right|^2 dt}$$

otrzymujemy

$$(12,3) \quad \left| \log \frac{[\phi(z_1) - \phi(z_2)][\phi(-z_1) - \phi(-z_2)](z_1 + z_2)^2}{[\phi(-z_1) - \phi(z_1)][\phi(z_1) - \phi(-z_2)](z_1 - z_2)^2} \right| \leq$$

$$\leq 2 \sqrt{\int_0^{t_1} \left| \frac{k}{e^{t\phi(z_1,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_1,t)} - k} \right|^2 dt} \cdot \sqrt{\int_0^{t_1} \left| \frac{k}{e^{t\phi(z_2,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_2,t)} - k} \right|^2 dt};$$

Zauważmy teraz, że

$$\left| \frac{k}{e^{t\phi(z_j,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_j,t)} - k} \right|^2 = \left(\frac{k}{e^{t\phi(z_j,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_j,t)} - k} \right) \left(\overline{\frac{k}{e^{t\phi(z_j,t)} - k} - \frac{k}{e^{t\phi(-z_j,t)} - k}} \right) =$$

$$= \frac{k}{e^{t\phi(z_j,t)} - k} \cdot \overline{\frac{k}{e^{t\phi(z_j,t)} - k}} - \frac{k}{e^{t\phi(z_j,t)} - k} \cdot \overline{\frac{k}{e^{t\phi(-z_j,t)} - k}} -$$

$$- \frac{k}{e^{t\phi(-z_j,t)} - k} \cdot \overline{\frac{k}{e^{t\phi(z_j,t)} - k}} + \frac{k}{e^{t\phi(-z_j,t)} - k} \cdot \overline{\frac{k}{e^{t\phi(-z_j,t)} - k}};$$

Nobac tego

$$(13,3) \quad \int_0^{t_1} \left| \frac{k}{e^{\phi(z_j, t) - k}} - \frac{k}{e^{\phi(-z_j, t) - k}} \right|^2 dt = \int_0^{t_1} \frac{k}{e^{\phi(z_j, t) - k}} \cdot \overline{\frac{k}{e^{\phi(z_j, t) - k}}} dt - \\ - \int_0^{t_1} \frac{k}{e^{\phi(z_j, t) - k}} \cdot \overline{\frac{k}{e^{\phi(-z_j, t) - k}}} dt - \int_0^{t_1} \frac{k}{e^{\phi(-z_j, t) - k}} \cdot \overline{\frac{k}{e^{\phi(z_j, t) - k}}} dt + \int_0^{t_1} \frac{k}{e^{\phi(-z_j, t) - k}} \cdot \overline{\frac{k}{e^{\phi(-z_j, t) - k}}} dt;$$

Z równości (3,3) wynika, że

$$\int_0^{t_1} \frac{k}{e^{\phi(z_j, t) - k}} \cdot \overline{\frac{k}{e^{\phi(z_j, t) - k}}} dt = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \frac{m^2}{\phi(z_j) \overline{\phi(z_j)}}}{1 - \frac{1}{z_j \overline{z_j}}}$$

$$\int_0^{t_1} \frac{k}{e^{\phi(z_j, t) - k}} \cdot \overline{\frac{k}{e^{\phi(-z_j, t) - k}}} dt = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \frac{m^2}{\phi(z_j) \overline{\phi(-z_j)}}}{1 + \frac{1}{z_j \overline{z_j}}}$$

$$\int_0^{t_1} \frac{k}{e^{\phi(-z_j, t) - k}} \cdot \overline{\frac{k}{e^{\phi(z_j, t) - k}}} dt = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \frac{m^2}{\phi(-z_j) \overline{\phi(z_j)}}}{1 + \frac{1}{z_j \overline{z_j}}}$$

$$\int_0^{t_1} \frac{k}{e^{\phi(-z_j, t) - k}} \cdot \overline{\frac{k}{e^{\phi(-z_j, t) - k}}} dt = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \frac{m^2}{\phi(-z_j) \overline{\phi(-z_j)}}}{1 - \frac{1}{z_j \overline{z_j}}}$$

Podstawiając wartości całek po prawej stronie w (13,3) otrzymujemy

$$(14,3) \quad \int_0^{t_1} \left| \frac{k}{e^{\phi(z_j, t) - k}} - \frac{k}{e^{\phi(-z_j, t) - k}} \right|^2 dt = \\ = \frac{1}{2} \log \frac{[1 - \frac{m^2}{|\phi(z_j)|^2}] [1 - \frac{m^2}{|\phi(-z_j)|^2}] (1 + \frac{1}{|z_j|^2})^2}{[1 - \frac{m^2}{\phi(z_j) \overline{\phi(-z_j)}}] [1 - \frac{m^2}{\phi(-z_j) \overline{\phi(z_j)}}] (1 - \frac{1}{|z_j|^2})^2}, \quad j = 1, 2$$

Wzglądając (14,3) w (12,3) i podnosząc obydwie strony do kwadratu otrzymujemy się żądane oszacowanie.

Zbadamy teraz ostrość uzyskanego oszacowania w klasie częściowej $\Sigma_2^{(m)}$ funkcji nieparzystych.

Przyпускаjąc, że w wymienionej podklasie funkcja taka

$$\Phi_2^*(z) = z + \frac{B_1}{z} + \frac{B_3}{z^3} + \dots$$

istnieje, można jej będzie przyporządkować funkcję $\phi^*(z) \in \Sigma^{(m)}$ taką, że

$$(\Phi_2^*(z))^2 = \phi^*(z^2)$$

Równanie Löwnera odpowiadające rozważanej funkcji dwusymetrycznej ma postać (4,1) lub (5,1)

Dla takiej funkcji relacje (10,3) i (11,3) będą wyglądały następująco

$$(15,3) \quad \left| \int_0^{t_1} \frac{\bar{k} e^t \Phi_2^2(z_1, t)}{\bar{k}^2 e^{2t} \Phi_2^4(z_1, t) - 1} \cdot \frac{\bar{k} e^t \Phi_2^2(z_2, t)}{\bar{k}^2 e^{2t} \Phi_2^4(z_2, t) - 1} dt \right| \leq \\ \leq \int_0^{t_1} \frac{e^t |\Phi_2(z_1, t)|^2}{|\bar{k}^2 e^{2t} \Phi_2^4(z_1, t) - 1|} \cdot \frac{e^t |\Phi_2(z_2, t)|^2}{|\bar{k}^2 e^{2t} \Phi_2^4(z_2, t) - 1|} dt$$

$$(16,3) \quad \int_0^{t_1} \prod_{j=1}^2 \frac{e^t |\Phi_2(z_j, t)|^2}{|\bar{k}^2 e^{2t} \Phi_2^4(z_j, t) - 1|} dt \leq \sqrt{\prod_{j=1}^2 \int_0^{t_1} \left[\frac{e^t |\Phi_2(z_j, t)|^2}{|\bar{k}^2 e^{2t} \Phi_2^4(z_j, t) - 1|} \right]^2 dt}$$

Położmy

$$(17,3) \quad k = e^{i\theta}, \quad \Phi_2(z_j, t) = \tilde{\zeta}_j e^{i\psi_j}, \quad \bar{k}^2 e^{2t} \Phi_2^4(z_j, t) - 1 = \varrho_j e^{i\psi_j} \quad (j=1,2)$$

wtedy (15,3) i (16,3) dadzą się zapisać w następującej postaci

$$(18,3) \quad \left| \int_0^{t_1} \frac{e^{2t} \tilde{\zeta}_1^2 \tilde{\zeta}_2^2}{\varrho_1 \varrho_2} e^{i(2\psi_1 + 2\psi_2 - 2\theta - \psi_1 - \psi_2)} dt \right| \leq \int_0^{t_1} \frac{e^{2t} \tilde{\zeta}_1^2 \tilde{\zeta}_2^2}{\varrho_1 \varrho_2} dt$$

$$(19,3) \quad \int_0^{t_1} \frac{e^{2t} \tilde{\zeta}_1^2 \tilde{\zeta}_2^2}{\varrho_1 \varrho_2} dt \leq \sqrt{\int_0^{t_1} \frac{e^{2t} \tilde{\zeta}_1^4}{\varrho_1^2} dt} \cdot \sqrt{\int_0^{t_1} \frac{e^{2t} \tilde{\zeta}_2^4}{\varrho_2^2} dt}$$

Nie trudno zauważyć, że powyższe relacje będą równościami, gdy

$$a) \quad 2\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\theta - \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi l \quad (l = 0; \pm 1; \dots)$$

$$b) \quad \tau_1 = \tau_2$$

$$c) \quad \varrho_1 = \varrho_2$$

Łatwo stwierdzić, że a), b), c) są spełnione, gdy

$$(20,3) \quad \tau_1 = \tau_2 \quad \theta = \varphi_1 + \varphi_2$$

Ostatnie dwa warunki pozwalają, jak w dowodach twierdzeń 1 i 2, znaleźć funkcję realizującą maksimum rozważanego funkcyjonału lecz tylko w przypadku, gdy $|z_1| = |z_2| = r > 1$. Jest to, jak już wiemy, funkcja

$$\Phi_2^* = m e^{i\frac{\varphi}{2}} q^{-1} [m q(z e^{-i\frac{\varphi}{2}})] = z + \frac{(1-m^2)e^{i\varphi}}{z} + \frac{m^2(1-m^2)e^{i2\varphi}}{z^3} + \dots$$

gdzie

$$q(z) = \frac{z}{z^2 + 1}, \quad \varphi = \theta^* = \arg z_1 + \arg z_2$$

Uwaga: Gdy w oszacowaniu funkcyjonału $\mathcal{G}(\Phi)$ z twierdzenia 3 przejdziemy do granicy przy $m \rightarrow 0$, to otrzymamy oszacowanie w rodzinie funkcji postaci (1), jednolistnych i holomorficznych dla $z \neq \infty$ w kole $K(\infty, 1)$ podane przez Bazylewicza [4].

§4. Oszacowanie z dołu funkcyjonału $\mathcal{H}(\Phi)$ w rodzinie $\Sigma_p(m)$ funkcji p-symetrycznych ograniczonych z dołu.

Twierdzenie 4. W rodzinie $\Sigma_p(m)$, gdzie p jest liczbą nieparzystą $2\ell - 1$, prawdziwa jest nierówność

$$|\mathcal{H}(\Phi)| > \prod_{j=1}^{\ell} m^{2\ell-2} N(|z_j|, |\Phi(z_j)|, m),$$

gdzie

$$N(|z_j|, |\phi(z_j)|, m) = \left| \frac{\phi(z_j)}{z_j} \right| \sqrt{\frac{|z_j|^{2(2\ell-1)} - 1}{|\phi(z_j)|^{2(2\ell-1)} - m^{2(2\ell-1)}}}$$

Poróci. Będąc w (5) $p = 2\ell - 1$ otrzymamy

$$(1,4) \quad \phi(z) = e^{-\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{\phi}(z, t) \Big|_{t=-(2\ell-1) \log m},$$

gdzie $\tilde{\phi}(z, t)$ jest rozwiązaniem równania Löwnera (5), które tu przyjął postać

$$(2,4) \quad (2\ell-1) \frac{\partial \tilde{\phi}(z, t)}{\partial t} = \tilde{\phi}(z, t) \frac{\tilde{\phi}^{2\ell-1}(z, t) + k}{\tilde{\phi}^{2\ell-1}(z, t) - k}; \quad k = k(t)$$

spełniającym warunek $\tilde{\phi}(z, 0) = z$.

Poróżamy

$$(3,4) \quad \phi(z, t) = e^{-\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{\phi}(z, t)$$

Wobec (2,4) i (3,4) funkcja $\phi(z, t)$ spełnia następujące równanie

$$(4,4) \quad (2\ell-1) \frac{\partial \phi(z, t)}{\partial t} = \phi(z, t) \frac{2k}{\phi^{2\ell-1}(z, t) e^t - k}$$

Oznaczmy

$$\phi(z_j, t) = \phi_j \quad (j=1, 2)$$

Z (4,4) wynika, że

$$(5,4) \quad (2\ell-1) \frac{d\phi_j}{dt} = \phi_j \frac{2k}{\phi_j^{2\ell-1} e^t - k}; \quad (j=1, 2)$$

Odejmując ostatecznie równości stronami mamy

$$\begin{aligned} (2\ell-1) \frac{d(\phi_1 - \phi_2)}{dt} &= 2k \left[\frac{\phi_1}{\phi_1^{2\ell-1} e^t - k} - \frac{\phi_2}{\phi_2^{2\ell-1} e^t - k} \right] = \\ &= 2k \frac{\phi_1 \phi_2^{2\ell-1} e^t - \phi_1 k - \phi_2 \phi_1^{2\ell-1} e^t + \phi_2 k}{(\phi_1^{2\ell-1} e^t - k)(\phi_2^{2\ell-1} e^t - k)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{-2\kappa}{(\phi_1^{2l-1}e^t - \kappa)(\phi_2^{2l-1}e^t - \kappa)} \left[\kappa(\phi_1 - \phi_2) + e^t(\phi_1^{2l-1}\phi_2 - \phi_1\phi_2^{2l-1}) \right] =$$

$$= \frac{-2\kappa(\phi_1 - \phi_2)}{(\phi_1^{2l-1}e^t - \kappa)(\phi_2^{2l-1}e^t - \kappa)} \left[\kappa + e^t \sum_{q=1}^{2l-2} \phi_1^{2l-1-q} \phi_2^q \right];$$

Stąd

$$(6,4) \quad (2l-1) \frac{d \log(\phi_1 - \phi_2)}{dt} = \frac{-2}{(\phi_1^{2l-1}e^{t\bar{\kappa}} - 1)(\phi_2^{2l-1}e^{t\bar{\kappa}} - 1)} - \frac{2e^{t\bar{\kappa}}}{(\phi_1^{2l-1}e^{t\bar{\kappa}} - 1)(\phi_2^{2l-1}e^{t\bar{\kappa}} - 1)} \sum_{q=1}^{2l-2} \phi_1^{2l-1-q} \phi_2^q;$$

Przyjmijmy

$$|\Phi_j| = \tau_j, \quad \arg \Phi_j = \psi_j, \quad |\Phi_j^{2l-1}e^{t\bar{\kappa}} - 1| = \varrho_j$$

$$\arg(\Phi_j^{2l-1}e^{t\bar{\kappa}} - 1) = \psi_j, \quad \kappa = e^{i\theta(t)} \quad (j=1,2)$$

Przyrównując części rzeczywiste wyrażen po obu stronach (6,4) otrzymamy

$$(7,4) \quad (2l-1) \frac{d \log |\Phi_1 - \Phi_2|}{dt} = \left\{ \frac{2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\varrho_1 \varrho_2} + 2e^t \sum_{q=1}^{2l-2} \cos[(2l-1-q)\varphi_1 + q\varphi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2] \frac{\tau_1^{2l-1-q} \tau_2^q}{\varrho_1 \varrho_2} \right\};$$

Z równania (5,4) wynika

$$(2l-1) \frac{d \log \Phi_j}{dt} = \frac{2}{\Phi_j^{2l-1}e^{t\bar{\kappa}} - 1} \quad (j=1,2)$$

Przyrównując części rzeczywiste obu stron mamy

$$(2l-1) \frac{d \log \tau_j}{dt} = \frac{2 \cos \psi_j}{\varrho_j}$$

Stąd

$$\frac{d \log \tau_j}{dt} = \frac{2}{2l-1} \cdot \frac{\cos \psi_j}{\varrho_j}$$

Zauważmy, że

$$\frac{d \log e^{\frac{t}{2l-1}}}{dt} = \frac{1}{2l-1}$$

Będzie więc

$$(8,4) \quad \frac{d \log (e^{\frac{t}{2l-1}} \tilde{\tau}_j)}{dt} = \frac{2 \cos \psi_j + \varrho_j}{(2l-1) \varrho_j};$$

Zauważmy dalej, że

$$\varrho_j \cos \psi_j + i \varrho_j \sin \psi_j = \Phi_j^{2l-1} e^{t\bar{\kappa}} - 1,$$

$$|\varrho_j \cos \psi_j + 1 + i \varrho_j \sin \psi_j| = |\Phi_j^{2l-1} e^{t\bar{\kappa}}|,$$

$$\varrho_j^2 + 1 + 2 \varrho_j \cos \psi_j = \tilde{\tau}_j^{2(2l-1)} e^{2t},$$

$$(9,4) \quad \varrho_j^2 + 2 \varrho_j \cos \psi_j = \tilde{\tau}_j^{2(2l-1)} e^{2t} - 1;$$

Wobec (9,4) równość (8,4) przyjmie postać

$$\frac{d \log (e^{\frac{t}{2l-1}} \tilde{\tau}_j)}{dt} = \frac{e^{2t} \tilde{\tau}_j^{2(2l-1)} - 1}{(2l-1) \varrho_j^2};$$

Zatem

$$\frac{d (e^{\frac{t}{2l-1}} \tilde{\tau}_j)}{dt} = \frac{e^{\frac{t}{2l-1}} \tilde{\tau}_j (e^{2t} \tilde{\tau}_j^{2(2l-1)} - 1)}{(2l-1) \varrho_j^2};$$

Stąd

$$(10,4) \quad \frac{1}{\varrho_j^2} = \frac{2l-1}{e^{\frac{t}{2l-1}} \tilde{\tau}_j (e^{2t} \tilde{\tau}_j^{2(2l-1)} - 1)} \cdot \frac{d (e^{\frac{t}{2l-1}} \tilde{\tau}_j)}{dt};$$

Łatwo sprawdzić, że prawdziwe są tożsamości

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{1}{\frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{\varrho_1}{\varrho_2}} \left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} \right),$$

$$\frac{\tau_1^{2l-1-q} \tau_2^q}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{\tau_1^q \tau_2^{2l-1-q}} \cdot \frac{1}{\frac{\rho_2 \tau_1^{2l-1}}{\rho_1 \tau_2^{2l-1}} + \frac{\rho_1 \tau_2^{2l-1}}{\rho_2 \tau_1^{2l-1}}} \left(\frac{\tau_1^{2(2l-1)}}{\rho_1^2} + \frac{\tau_2^{2(2l-1)}}{\rho_2^2} \right);$$

Uzależniając w nich (10,4) otrzymujemy

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{2l-1}{\rho_2 + \rho_1} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{e^{\frac{t}{2l-1}} \tau_j (e^{\frac{2t}{2l-1}} \tau_j^{2(2l-1)} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2l-1}} \tau_j)}{dt},$$

$$\frac{\tau_1^{2l-1-q} \tau_2^q}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{\tau_1^q \tau_2^{2l-1-q}} \cdot \frac{2l-1}{\frac{\rho_2 \tau_1^{2l-1}}{\rho_1 \tau_2^{2l-1}} + \frac{\rho_1 \tau_2^{2l-1}}{\rho_2 \tau_1^{2l-1}}} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_j^{2(2l-1)}}{e^{\frac{t}{2l-1}} \tau_j (e^{\frac{2t}{2l-1}} \tau_j^{2(2l-1)} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2l-1}} \tau_j)}{dt},$$

Podstawiając ostatnie w (7,4) będziemy mieli

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log |\Phi_1 - \Phi_2| = & - \left\{ \frac{2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2}} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{e^{\frac{t}{2l-1}} \tau_j (e^{\frac{2t}{2l-1}} \tau_j^{2(2l-1)} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2l-1}} \tau_j)}{dt} + \right. \\ & \left. + \frac{2e^t}{\frac{\rho_2 \tau_1^{2l-1}}{\rho_1 \tau_2^{2l-1}} + \frac{\rho_1 \tau_2^{2l-1}}{\rho_2 \tau_1^{2l-1}}} \sum_{j=1}^2 \frac{\tau_j^{2(2l-1)}}{e^{\frac{t}{2l-1}} \tau_j (e^{\frac{2t}{2l-1}} \tau_j^{2(2l-1)} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2l-1}} \tau_j)}{dt} \sum_{q=1}^{2l-2} \frac{\cos[(2l-1-q)\varphi_1 + q\varphi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2]}{\tau_1^q \tau_2^{2l-1-q}} \right\}; \end{aligned}$$

Nobac tego, że:

a) $\cos(\psi_1 + \psi_2) \leq 1,$

b) $\cos[(2l-1-q)\varphi_1 + q\varphi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2] \leq 1,$

(11,4) c) $\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2} > 2,$

d) $\frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right)^{2l-1} + \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right)^{2l-1} > 2,$

e) $\tau_j > e^{-\frac{t}{2l-1}}$

(j = 1, 2)

i że

$$\frac{d(e^{\frac{t}{2l-1}} \tau_j)}{dt} > 0$$

prawdziwa jest nierówność

$$(12,4) \quad \frac{d}{dt} \log |\phi_1 - \phi_2| > - \left[\sum_{j=1}^2 \frac{1}{e^{\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{c}_j (e^{2t} \tilde{c}_j^{2(2\ell-1)} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{c}_j)}{dt} + \right. \\ \left. + (2\ell-2) \sum_{j=1}^2 \frac{e^{\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{c}_j^{2(2\ell-1)}}{e^{\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{c}_j (e^{2t} \tilde{c}_j^{2(2\ell-1)} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{c}_j)}{dt} \right],$$

Całkując obydwie strony względem t w przedziale $\langle 0, -(2\ell-1) \log m \rangle$, uwzględniając (3,4), (1,4) i warunek $|\phi(z, 0)| = |z|$ otrzymujemy

$$\log \left| \frac{\phi(z_1) - \phi(z_2)}{z_1 - z_2} \right| > - \sum_{j=1}^2 \log \frac{\sqrt{e^{\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{c}_j^{2(2\ell-1)} - 1}}{e^{\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{c}_j} \bigg|_{\substack{e^{\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{c}_j = \frac{|\phi(z_j)|}{m} \\ e^{\frac{t}{2\ell-1}} \tilde{c}_j = |z_j|}}$$

co daje

$$\log \left| \frac{\phi(z_1) - \phi(z_2)}{z_1 - z_2} \right| > \log \prod_{j=1}^2 \frac{\frac{|\phi(z_j)|}{m}}{\sqrt{\frac{|\phi(z_j)|^{2(2\ell-1)}}{m^{2(2\ell-1)}} - 1}} - \log \prod_{j=1}^2 \frac{|z_j|}{\sqrt{|z_j|^{2(2\ell-1)} - 1}};$$

i ostatecznie

$$(13,4) \quad \left| \frac{\phi(z_1) - \phi(z_2)}{z_1 - z_2} \right| > \prod_{j=1}^2 m^{2\ell-2} \frac{|\phi(z_j)|}{|z_j|} \sqrt{\frac{|z_j|^{2(2\ell-1)} - 1}{|\phi(z_j)|^{2(2\ell-1)} - m^{2(2\ell-1)}}},$$

co kończy dowód.

Uwaga 1. Dla $\ell = 1$ ($p = 1$) otrzymujemy z (13,4) oszacowanie

$$\left| \frac{\phi(z_1) - \phi(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geq \prod_{j=1}^2 \frac{|\phi(z_j)|}{|z_j|} \sqrt{\frac{|z_j|^2 - 1}{|\phi(z_j)|^2 - m^2}},$$

które podał Bazylewicz [2] i które jest ostre, gdy $|z_1| = |z_2| = r > 1$

Twierdzenie 5. W rodzinie $\Sigma_p(m)$, gdzie p jest liczbą parzystą 2ℓ , prawdziwa jest nierówność

$$H(\Phi) > \prod_{j=1}^2 m^{2\ell-2} P(|z_j|, |\Phi(z_j)|, m),$$

gdzie

$$P(|z_j|, |\Phi(z_j)|, m) = \left| \frac{\Phi(z_j)}{z_j} \right| \sqrt{\frac{|z_j|^{4\ell} - 1}{|\Phi(z_j)|^{4\ell} - m^{4\ell}}} \sqrt{\frac{|\Phi(z_j)|^{2\ell} + m^{2\ell}}{|z_j|^{2\ell} + 1}}.$$

Dowód. Niech $p = 2\ell$. Wtedy relacja (7,4) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} 2\ell \frac{d}{dt} \log |\Phi_1 - \Phi_2| = & - \left\{ \frac{2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\varrho_1 \varrho_2} + 2e^t \left[\sum_{q=1}^{\ell-1} \cos[(2\ell-q)\varphi_1 + q\varphi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2] \frac{\tilde{\tau}_1^{2\ell-q} \tilde{\tau}_2^q}{\varrho_1 \varrho_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos(\ell\varphi_1 + \ell\varphi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2) \frac{\tilde{\tau}_1^\ell \tilde{\tau}_2^\ell}{\varrho_1 \varrho_2} + \sum_{q=\ell+1}^{2\ell-1} \cos[(2\ell-q)\varphi_1 + q\varphi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2] \frac{\tilde{\tau}_1^{2\ell-q} \tilde{\tau}_2^q}{\varrho_1 \varrho_2} \right] \right\}; \end{aligned}$$

Porządkując inaczej prawą stronę otrzymamy

$$2\ell \frac{d}{dt} \log |\Phi_1 - \Phi_2| = - \left\{ \frac{2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\varrho_1 \varrho_2} + \frac{2e^t \cos(\ell\varphi_1 + \ell\varphi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2) \tilde{\tau}_1^\ell \tilde{\tau}_2^\ell}{\varrho_1 \varrho_2} + \right.$$

(14,4)

$$\left. + 2e^t \left[\sum_{q=1}^{\ell-1} \cos[(2\ell-q)\varphi_1 + q\varphi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2] \frac{\tilde{\tau}_1^{2\ell-q} \tilde{\tau}_2^q}{\varrho_1 \varrho_2} + \sum_{q=\ell+1}^{2\ell-1} \cos[(2\ell-q)\varphi_1 + q\varphi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2] \frac{\tilde{\tau}_1^{2\ell-q} \tilde{\tau}_2^q}{\varrho_1 \varrho_2} \right] \right\};$$

Prawdziwe są tożsamości

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{1}{\varrho_2 + \varrho_1} \left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} \right);$$

$$(15,4) \quad \frac{\tilde{\tau}_1^\ell \tilde{\tau}_2^\ell}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{1}{\varrho_2 \left(\frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_2} \right)^\ell + \varrho_1 \left(\frac{\tilde{\tau}_2}{\tilde{\tau}_1} \right)^\ell} \left(\frac{\tilde{\tau}_1^{2\ell}}{\varrho_1^2} + \frac{\tilde{\tau}_2^{2\ell}}{\varrho_2^2} \right)$$

$$\frac{\tilde{\tau}_1^{2\ell-q} \tilde{\tau}_2^q}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{1}{\tilde{\tau}_1^q \tilde{\tau}_2^{2\ell-q}} \cdot \frac{1}{\varrho_2 \left(\frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_2} \right)^{2\ell} + \varrho_1 \left(\frac{\tilde{\tau}_2}{\tilde{\tau}_1} \right)^{2\ell}} \left(\frac{\tilde{\tau}_1^{4\ell}}{\varrho_1^2} + \frac{\tilde{\tau}_2^{4\ell}}{\varrho_2^2} \right)$$

Wobec tego, że /por. (3,4), (3,5), (10,4)/

$$\frac{1}{\varrho_j^2} = \frac{2\ell}{e^{\frac{t}{2\ell}} \tau_j (e^{2t} \tau_j^{4\ell} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2\ell}} \tilde{\tau}_j)}{dt}$$

tożsamości (15,4) przyjmą postać

$$\frac{1}{g_1 g_2} = \frac{2l}{\frac{g_2}{g_1} + \frac{g_1}{g_2}} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j (e^{2t} \tilde{\tau}_j^{4l} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j)}{dt},$$

(16,4)

$$\frac{\tilde{\tau}_1^l \tilde{\tau}_2^l}{g_1 g_2} = \frac{2l}{\frac{g_2}{g_1} \left(\frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_2}\right)^l + \frac{g_1}{g_2} \left(\frac{\tilde{\tau}_2}{\tilde{\tau}_1}\right)^l} \sum_{j=1}^2 \frac{\tilde{\tau}_j^{2l}}{e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j (e^{2t} \tilde{\tau}_j^{4l} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j)}{dt},$$

$$\frac{\tilde{\tau}_1^{2l-q} \tilde{\tau}_2^q}{g_1 g_2} = \frac{1}{\tilde{\tau}_1^q \tilde{\tau}_2^{2l-q}} \cdot \frac{2l}{\frac{g_2}{g_1} \left(\frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_2}\right)^{2l} + \frac{g_1}{g_2} \left(\frac{\tilde{\tau}_2}{\tilde{\tau}_1}\right)^{2l}} \sum_{j=1}^2 \frac{\tilde{\tau}_j^{4l}}{e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j^{4l} - 1} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j)}{dt};$$

Względniejście (16,4) w relacji (14,4) otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log |\Phi_1 - \Phi_2| = & - \left\{ \frac{2 \cos(\psi_1 + \psi_2)}{\frac{g_2}{g_1} + \frac{g_1}{g_2}} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j (e^{2t} \tilde{\tau}_j^{4l} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j)}{dt} + \right. \\ & + \frac{2 \cos(l\psi_1 + l\psi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2)}{\frac{g_2}{g_1} \left(\frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_2}\right)^l + \frac{g_1}{g_2} \left(\frac{\tilde{\tau}_2}{\tilde{\tau}_1}\right)^l} \sum_{j=1}^2 \frac{e^t \tilde{\tau}_j^{2l}}{e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j (e^{2t} \tilde{\tau}_j^{4l} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j)}{dt} + \\ & \left. + \frac{2}{\frac{g_2}{g_1} \left(\frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_2}\right)^{2l} + \frac{g_1}{g_2} \left(\frac{\tilde{\tau}_2}{\tilde{\tau}_1}\right)^{2l}} \sum_{j=1}^2 \frac{e^t \tilde{\tau}_j^{4l}}{e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j (e^{2t} \tilde{\tau}_j^{4l} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j)}{dt} \left[\sum_{q=1}^{l-1} \frac{\cos[(2l-q)\psi_1 + q\psi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2]}{\tilde{\tau}_1^q \tilde{\tau}_2^{2l-q}} + \sum_{q=l+1}^{2l-1} \frac{\cos[(2l-q)\psi_1 + q\psi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2]}{\tilde{\tau}_1^q \tilde{\tau}_2^{2l-q}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Zważywszy, że $\frac{d(e^{\frac{t}{2l}} \tilde{\tau}_j)}{dt} > 0$ i że:

a) $\cos(\psi_1 + \psi_2) \leq 1$, b) $\cos[(2l-q)\psi_1 + q\psi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2] \leq 1$, c) $\cos(l\psi_1 + l\psi_2 - \theta - \psi_1 - \psi_2) \leq 1$,

(17,4)

d) $\frac{g_2}{g_1} + \frac{g_1}{g_2} > 2$, e) $\frac{g_2}{g_1} \left(\frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_2}\right)^{2l} + \frac{g_1}{g_2} \left(\frac{\tilde{\tau}_2}{\tilde{\tau}_1}\right)^{2l} > 2$, f) $\frac{g_2}{g_1} \left(\frac{\tilde{\tau}_1}{\tilde{\tau}_2}\right)^l + \frac{g_1}{g_2} \left(\frac{\tilde{\tau}_2}{\tilde{\tau}_1}\right)^l > 2$,

g) $\tilde{\tau}_j > e^{-\frac{t}{2l}}$

można napisać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log |\Phi_1 - \Phi_2| > - \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{1}{e^{\frac{t}{2\ell}} \tau_j (e^{2t\tau_j^{4\ell}} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2\ell}} \tau_j)}{dt} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^2 \frac{e^{\frac{t}{2\ell}} \tau_j^{2\ell}}{e^{\frac{t}{2\ell}} \tau_j (e^{2t\tau_j^{4\ell}} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2\ell}} \tau_j)}{dt} + (2\ell-2) \sum_{j=1}^2 \frac{e^{2t\tau_j^{4\ell}}}{e^{\frac{t}{2\ell}} \tau_j (e^{2t\tau_j^{4\ell}} - 1)} \cdot \frac{d(e^{\frac{t}{2\ell}} \tau_j)}{dt} \right\}; \end{aligned}$$

Całkując obydwie strony ostatniej nierówności względem t od 0 do $-2\ell \log m$, uwzględniając (3,4), (1,4) i warunek $|\Phi(z,0)| = |z|$ mamy po stronie lewej

$$\log \left| \frac{\Phi(z_1) - \Phi(z_2)}{z_1 - z_2} \right|$$

Po prawej zaś oznaczając $e^{\frac{t}{2\ell}} \tau_j = u$

$$- \left\{ \sum_{j=1}^2 \int_{|z_j|}^{\frac{|\Phi(z_j)|}{m}} \frac{du}{u(u^{2\ell}-1)} + (2\ell-2) \sum_{j=1}^2 \int_{|z_j|}^{\frac{|\Phi(z_j)|}{m}} \frac{u^{4\ell-1} du}{u^{4\ell}-1} \right\};$$

Obliczając całki otrzymamy

$$\log \prod_{j=1}^2 m^{2\ell-2} \left| \frac{\Phi(z_j)}{z_j} \right| \sqrt{\frac{|z_j|^{2\ell}-1}{|\Phi(z_j)|^{2\ell}-m^{2\ell}}} \left[\frac{|z_j|^{2\ell}+1}{|\Phi(z_j)|^{2\ell}+m^{2\ell}} \right]^{\frac{\ell-1}{2\ell}},$$

albo inaczej

$$\log \prod_{j=1}^2 m^{2\ell-2} \left| \frac{\Phi(z_j)}{z_j} \right| \sqrt{\frac{|z_j|^{4\ell}-1}{|\Phi(z_j)|^{4\ell}-m^{4\ell}}} \sqrt[2\ell]{\frac{|\Phi(z_j)|^{2\ell}+m^{2\ell}}{|z_j|^{2\ell}+1}};$$

Nierówność przedstawia się więc następująco

$$\left| \frac{\Phi(z_1) - \Phi(z_2)}{z_1 - z_2} \right| > \prod_{j=1}^2 m^{2\ell-2} \left| \frac{\Phi(z_j)}{z_j} \right| \sqrt{\frac{|z_j|^{4\ell} - 1}{|\Phi(z_j)|^{4\ell} - m^{4\ell}}} \sqrt[2\ell]{\frac{|\Phi(z_j)|^{2\ell} + m^{2\ell}}{|z_j|^{2\ell} + 1}}$$

i kończy dowód.

Uwaga 2. Dla $\ell = 1$, a więc $p = 2$ otrzymujemy oszacowanie z twierdzenia 1, które jest ostre przy $|z_1| = |z_2| = r > 1$.

- 1 K. Löwner: Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I, Math. Ann., 89 (1923), 103 - 121
- 2 I. I. Bazylewicz: O teoremach iskażenia v teorii odnolistnych funkoji. Matem. sb. 23 (1951), 283 - 292
- 3 G. M. Goluzin: Metod varijacii v konformnom otobraženii. II, Matem. sb. 21 (1947), 83 - 117
- 4 I. I. Bazylewicz: O teoremach iskażenia i koeficientach odnolistnych funkoji. Matem. sb. 23 (1951), 147 - 164

