

Eugeniusz Janiec

CAŁKA RIEMANNA DLA FUNKCJI O WARTOŚCIACH W PRZESTRZENI METRYCZNEJ

W pracy podana jest pewna koncepcja całki oznaczonej Riemanna z funkcji o wartościach w dowolnej przestrzeni metrycznej. Znajduje się w niej również pewien warunek wystarczający całkowalności oraz kilka przykładów funkcji całkowalnych.

I

Założmy, że Y jest dowolną przestrzenią metryczną, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Niech A będzie dowolnym podzbiorem zbioru $\langle a, b \rangle \times Y$, którego rzut na $\langle a, b \rangle$ jest równy $\langle a, b \rangle$ i niech

$$B(A) \stackrel{\text{df}}{=} \{(x, y, t) \in \langle a, b \rangle \times Y \times \mathbb{R}; (x, y) \in A, t \in \langle x, b \rangle\}.$$

Dla dowolnej funkcji $F : B(A) \rightarrow Y$ położymy

$$F(x, y)(t) = F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in B(A).$$

Oznaczmy przez $\mathcal{F}(A, Y)$ zbiór wszystkich funkcji $F : B(A) \rightarrow Y$ takich, że $F(x, y)(x) = y$ i $(t, F(x, y)(t)) \in A$ dla $(x, y, t) \in B(A)$.

Niech $F \in \mathcal{F}(A, Y)$ i niech

$$P : a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b \tag{1}$$

będzie dowolnym podziałem przedziału $\langle a, b \rangle$. Weźmy dowolne $y_0 \in Y$ takie, że $(a, y_0) \in A$ i położymy

$$\begin{aligned} y_1 &= F(x_0, y_0)(x_1) \\ y_2 &= F(x_1, y_1)(x_2) \\ y_3 &= F(x_2, y_2)(x_3) \\ &\dots \\ y_n &= F(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Jeśli zajdzie potrzeba, będziemy pisać $y_i(y_0, P, F)$ zamiast y_i .

Niech $\delta(P)$ oznacza średnicę podziału P i niech

$$S(y_0, P, F) \stackrel{\text{df}}{=} y_n$$

Jeśli istnieje granica

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S(y_0, P, F),$$

to granicę tę nazywać będziemy całką oznaczoną lewostronną Riemanna o starcie w y_0 , z funkcji F na przedziale $\langle a, b \rangle$ i oznaczać symbolem

$$\int_a^b (y_0, F). \quad (3)$$

Parę uporządkowaną (y_0, F) nazywać będziemy wówczas całkowaną na $\langle a, b \rangle$.

Jasne jest, że całka (3) o ile istnieje jest elementem przestrzeni Y . Umówmy się, że w przypadku $a = b$ para (y_0, F) jest również całkowana na $\langle a, b \rangle$ i że wówczas całka (3) jest równa y_0 .

Jeśli $F \in \mathcal{F}(A, Y)$ i $a \leq a' < b' \leq b$, to kładąc $A' = A \cap (\langle a', b' \rangle \times Y)$ widzimy, że $F|_{B(A')} \in \mathcal{F}(A', Y)$. W dalszym ciągu dla dowolnego $y'_0 \in Y$ takiego, że $(a', y'_0) \in A$ parę $(y'_0, F|_{B(A')})$ będziemy utożsamiać z parą (y'_0, F) . W szczególności stwierdzenie że (y'_0, F) jest całkowna na $\langle a', b' \rangle$ będzie oznaczało, że $(y'_0, F|_{B(A')})$ jest całkowna na $\langle a', b' \rangle$.

Przykład 1. Jeżeli Y jest przestrzenią wektorową unormowaną i $f : \langle a, b \rangle \rightarrow Y$, $g : \langle a, b \rangle \rightarrow R$, to kładąc $F(x, y)(t) = y + f(x) \cdot [g(t) - g(x)]$ dla $x \in \langle a, b \rangle$, $y \in Y$, $t \in \langle x, b \rangle$ łatwo zauważamy, że wówczas dla dowolnego $y_0 \in Y$ definicja całki (3) pokrywa się z definicją wyrażenia

$$y_0 + \int_a^b f(x) dg(x),$$

gdzie ostatnia całka Riemanna-Stieltjesa jest rozumiana w sensie lewostronnym, tzn. jako granica odpowiednich sum całkowych, w których za punkty pośrednie wybieramy lewe krańce przedziałów danego podziału przedziału $\langle a, b \rangle$.

Przykład 2. Załóżmy, że $Y = R$, D - dowolny obszar w płaszczyźnie R^2 , $f : D \rightarrow R$, f ciągła i spełnia w D warunek Lipschitza ze względu na zmienną y . Połóżmy $F(x, y)(t) = y + f(x, y)(t - x)$, $(x, y) \in D$, $t \geq x$. Niech $y_0 \in R$ i $(a, y_0) \in D$.

Z teorii równań różniczkowych typu $y' = f(x, y)$ wiadomo (por. twierdzenie Osgooda i teoria łamanych Eulera), że istnieje $b > a$

takie, że wszystkie ciągi normalne łamanych Eulera są zbieżne jednostajnie na $\langle a, b \rangle$ do wspólnej granicy, będącej rozwiązaniem równania $y' = f(x, y)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$ przechodzącym przez punkt (a, y_0) . Wynika stąd, że para (y_0, F) jest całkowalna na dowolnym przedziale $\langle a, x \rangle$, gdzie $x \in (a, b)$ i że funkcja

$$y(x) = \int_a^x (y_0, F), \quad x \in \langle a, b \rangle$$

jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ takim, że $y(a) = y_0$.

Przykład 3. Niech $y' \in Y$ i niech dla dowolnego $(x, y) \in \langle a, b \rangle \times Y$ $F(x, y)$ będzie jakąkolwiek funkcją zmiennej $t \in \langle x, b \rangle$ taką, że $F(x, y)(x) = y$ i $F(x, y)(b) = y'$. Łatwo zauważyć, że dla dowolnego $y_0 \in Y$ para (y_0, F) jest całkowalna na $\langle a, b \rangle$ i

$$\int_a^b (y_0, F) = y'.$$

Przykład 4. Załóżmy, że $a \in (1, \infty)$, $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}_+$, $y_0 \in \mathbb{R}$ i $|f| \leq M$. Połóżmy $F(x, y)(t) = y + f(x)(t-x)^\alpha$, $(x, y) \in \langle a, b \rangle \times \mathbb{R}$, $t \in \langle x, b \rangle$. Niech P będzie dowolnym podziałem przedziału $\langle a, b \rangle$ postaci (1). Mamy

$$\begin{aligned} |S(y_0, P, F) - y_0| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) (x_{i+1} - x_i)^\alpha \right| \leq \\ &\leq M \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{\alpha-1} (x_{i+1} - x_i) \leq M(b-a) [f(P)]^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$\int_a^b (y_0, F) = y_0.$$

Przykład 5. Niech $Y = \mathbb{R}$, $\langle a, b \rangle = \langle 0, 2 \rangle$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 0, 1 \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 1, 2 \rangle, x-1 < y < 1\}$. Dla dowolnego $(x, y) \in A$ oznaczmy przez $F(x, y)$ funkcję zmiennej $t \in \langle x, 2 \rangle$ równą y dla $t \in \langle x, (x+y+1)/2 \rangle$, której wykres w przedziale $\langle (x+y+1)/2, 2 \rangle$ jest odcinkiem łączącym punkty $((x+y+1)/2, y)$, $(2, 1)$.

Ponieważ dla dowolnych $(x, y) \in A$ mamy $F(x, y)(2) = 1$ więc $S(0, P, F) = 1$ dla wszystkich podziałów P przedziału $\langle 0, 2 \rangle$. Zatem

$$\int_0^2 (0, F) = 1.$$

Wykażemy teraz, że

$$\int_0^x (0, F) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (0, 1) \\ x - 1 & \text{dla } x \in (1, 2). \end{cases}$$

Jeśli $x \in (0, 1)$, to biorąc dowolny podział $P : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$ przedziału $(0, x)$ o średnicy mniejszej od $1 - x$ widzimy, że $x_{i+1} \leq (1 + x_i)/2$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$. Zatem $S(0, P, F) = 0$, co kończy dowód dla $x \in (0, 1)$.

Niech $x \in (1, 2)$ i niech $P : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$ będzie dowolnym podziałem przedziału $(0, x)$ o średnicy mniejszej niż 1. Oczywiście $S(0, P, F) = F(x_{n-1}, y_{n-1})(x) \geq x - 1$. Niech l oznacza największą spośród liczb $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, dla których $x_i < 1 - \delta(P)$. Ponieważ $\delta(P) < 1 - x_1$, więc podobnie jak poprzednio stwierdzamy, że $y_l = 0$. Z konstrukcji funkcji F widać, że $S(0, P, F) \leq F(x_1, y_1)(x)$, zaś z konstrukcji l wynika, że $x_1 + 2\delta(P) \geq 1$. Zatem

$$0 \leq S(0, P, F) - (x-1) \leq F(x_1, y_1)(x) - (x-1) \leq \\ \leq F(x_1, y_1)(1) \leq \frac{1 - x_1}{2} \leq \delta(P),$$

co kończy dowód dla $x \in (1, 2)$.

II

Oznaczmy przez $\mathcal{F}_0(A, Y)$ zbiór wszystkich funkcji $F \in \mathcal{F}(A, Y)$ spełniających warunki

$$\exists M \in (0, \infty) \quad \forall (x, y_1), \quad \forall_{x \neq a} (x, y_2) \in A \quad \forall t \in (x, b) \quad \varrho(F(x, y_2)(t), \quad (4)$$

$$F(x, y_1)(t)) \leq \varrho(y_1, y_2) [1 + M(t - x)],$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad \forall y_0 \in Y \quad (5) \\ x_n - x_0 < \delta \quad (x_0, y_0) \in A$$

$$\varrho(y_n, F(x_0, y_0)(x_n)) < \varepsilon(x_n - x_0),$$

gdzie $y_n \stackrel{\text{df}}{=} y_n(y_0, P, F)$, przy czym $P : x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Twierdzenie 1. Jeśli Y jest zupełna, $F \in \mathcal{F}_0(A, Y)$, $y_0 \in Y$ i $(a, y_0) \in A$, to para (y_0, F) jest całkowalna na $\langle a, b \rangle$.

D o w ó d. Z uwagi na zupełność Y wystarczy wykazać, że

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P_1, P \quad [P \vdash P_1 \text{ i } \delta(P) < \delta \Rightarrow \rho(S(y_0, P, F), S(y_0, P_1, F)) < \varepsilon]$$

Niech $\varepsilon > 0$. Połóżmy $\varepsilon_1 = \varepsilon [(b-a)(1 + e^{M(b-a)})]^{-1}$, gdzie M jest takie jak w (4). Niech δ będzie takie jak w warunku (5) (przy $\varepsilon = \varepsilon_1$). Weźmy dowolny podział P przedziału $\langle a, b \rangle$ o średnicy mniejszej od δ i dowolny jego podpodział P_1 .

Niech

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

$$P_1 : a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < \dots < x_{k_1}^{(1)} = x_1 < x_{k_1+1}^{(1)} < \dots < x_{k_2}^{(1)} = x_2 < \dots < x_{k_n} = b,$$

$$\delta_i \stackrel{\text{df}}{=} x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$y_i \stackrel{\text{df}}{=} y_i(y_0, P, F) \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$y_i^{(1)} \stackrel{\text{df}}{=} y_i(y_0, P_1, F), \quad i = 1, 2, \dots, k_n.$$

Z (5) wynika, że

$$\rho(y_{k_1}^{(1)}, y_1) = \rho(F(x_{k_1-1}, y_{k_1-1}^{(1)})(x_1), F(x_0, y_0)(x_1)) <$$

$$< \varepsilon_1(x_1 - x_0) = \varepsilon_1 \delta_1$$

$$\rho(y_{k_2}^{(1)}, F(x_1, y_{k_1}^{(1)})(x_2)) < \varepsilon_1 \delta_2$$

...

$$\rho(y_{k_n}^{(1)}, F(x_{n-1}, y_{k_{n-1}}^{(1)})(x_n)) < \varepsilon_1 \delta_n,$$

zaś z (4) wynika, że

$$\rho(F(x_1, y_{k_1}^{(1)})(x_2), y_2) = \rho(F(x_1, y_{k_1}^{(1)})(x_2),$$

$$F(x_1, y_1)(x_2)) \leq \rho(y_{k_1}^{(1)}, y_1) [M \delta_2 + 1]$$

...

$$\rho(F(x_{n-1}, y_{k_{n-1}}^{(1)})(x_n), y_n) = \rho(F(x_{n-1}, y_{k_{n-1}}^{(1)})(x_n), F(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n)) \leq \rho(y_{k_{n-1}}^{(1)}, y_{n-1}) [M \delta_n + 1].$$

Zatem

$$\begin{aligned} a_1 &\stackrel{\text{df}}{=} \rho(y_{k_1}^{(1)}, y_1) < \varepsilon_1 \delta_1, \\ a_i &\stackrel{\text{df}}{=} \rho(y_{k_i}^{(1)}, y_i) < \varepsilon_1 \delta_i + \rho(y_{k_{i-1}}^{(1)}, y_{i-1}) [M \delta_i + 1] = \\ &= \varepsilon_1 \delta_i + a_{i-1} [M \delta_i + 1], \quad i = 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Stąd i z nierówności $(1+x) \leq e^x$, $x \in \mathbb{R}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_1 &< \varepsilon_1 \delta_1, \\ a_i &< \varepsilon_1 \delta_i + a_{i-1} e^{M \delta_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n, \end{aligned}$$

skąd łatwo wynika, że

$$\begin{aligned} a_n &< \varepsilon_1 [\delta_n + \delta_{n-1} e^{M \delta_n} + \delta_{n-2} e^{M(\delta_n + \delta_{n-1})} + \dots + \\ &+ \delta_1 e^{M(\delta_n + \delta_{n-1} + \dots + \delta_2)}] \end{aligned}$$

i tym bardziej

$$\begin{aligned} a_n &< \varepsilon_1 [\delta_n + e^{M(b-a)} (\delta_{n-1} + \delta_{n-2} + \dots + \delta_1)] < \\ &< \varepsilon_1 [b - a + e^{M(b-a)} (b - a)] = \varepsilon, \end{aligned}$$

co kończy dowód, gdyż $a_n = \rho(y_{k_n}^{(1)}, y_n) = \rho(S(y_0, P_1, F), S(y_0, P, F))$.

Uwaga. Jeśli $F \in \mathcal{F}_0(A, Y)$ oraz $a \leq a' < b' \leq b$, to $F|_{B(A)'} \in \mathcal{F}_0(A', Y)$, gdzie $A' = A \cap \langle a', b' \rangle \times Y$. Jeśli więc ponadto Y jest zupełna, to dla dowolnego $y'_0 \in Y$ takiego, że $(a', y'_0) \in A$ para (y'_0, F) jest całkowalna na $\langle a', b' \rangle$.

Z twierdzenia 1 wynika znane twierdzenie, że jeśli Y jest przestrzenią Banacha, to każda ciągła funkcja $f: \langle a, b \rangle \rightarrow Y$ jest całkowalna lewostronnie w sensie Riemanna na $\langle a, b \rangle$. Istotnie, kładąc $A = \langle a, b \rangle \times Y$ i $F(x, y)(t) = y + f(x)(t - x)$, $(x, y) \in A$, $t \in \langle x, b \rangle$ łatwo stwierdzimy, że spełniony jest warunek (4) przy $M = 0$. Z jednostajnej ciągłości f w $\langle a, b \rangle$ łatwo też

wynika, że spełniony jest warunek (5). Zatem para (O, F) jest całkowna na $\langle a, b \rangle$, co oznacza całkowność lewostronną w sensie Riemanna funkcji f na $\langle a, b \rangle$.

Z twierdzenia 1 wynika również, że dla pary (y_0, F) z przykładu 2 istnieje $b > a$ takie, że para ta jest całkowna na $\langle a, b \rangle$, a zatem i na dowolnym przedziale $\langle a, x \rangle$, $x \in (a, b)$.

Aby to udowodnić, weźmy dowolne otoczenie U punktu (a, y_0) , w którym f jest ograniczona i niech $M = \sup_{(x,y) \in U} f(x, y)$. Popro-

wadźmy następnie dwie proste przechodzące przez (a, y_0) o współczynnikach kierunkowych M i $-M$ i weźmy dowolne $b \in (a, \infty)$ takie, aby trójkąt domknięty A ograniczony tymi prostymi i prostą $x = b$ był zawarty w D . Widoczne jest, że $(t, F(x, y)(t)) \in A$ dla $(x, y, t) \in B(A)$.

Z tego, że f spełnia w A warunek Lipschitza ze względu na zmienną y łatwo wynika, że F spełnia warunek (4). Wystarczy więc wykazać, że F spełnia warunek (5). Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ f jest jednostajnie ciągła w A więc istnieje $\delta_1 > 0$ takie, że

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

dla $(x, y), (x', y') \in A$ i takich, że $\rho((x, y), (x', y')) < \delta_1$. Połóżmy $\delta = \delta_1 / \sqrt{1+M^2}$. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$, punkty $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ z przedziału $\langle a, b \rangle$ i takie, że $x_n - x_0 < \delta$ oraz $y'_0 \in Y$ takie, że $(x_0, y'_0) \in A$. Niech $y'_i = y_i(y'_0, P, F)$, gdzie $i = 1, \dots, n$, $P : x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Ponieważ

$$y'_n - F(x_0, y'_0)(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_i, y'_i) - f(x_0, y'_0)] (x_{i+1} - x_i)$$

oraz

$$\rho((x_i, y'_i), (x_0, y'_0)) \leq \sqrt{\delta^2 + (\delta M)^2} = \delta_1, \quad i = 1, \dots, n,$$

więc $|y'_n - F(x_0, y'_0)(x_n)| < \varepsilon(x_n - x_1)$, co kończy dowód warunku (5).

Jako zastosowanie twierdzenia 1 w przestrzeniach metrycznych rozpatrzmy następujący:

Przykład 6. Dla dowolnego $x > 0$ oznaczmy przez H_x zbiór wszystkich funkcji $f : \langle 0, x \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ograniczonych w $\langle 0, x \rangle$. Niech

$$H = \bigcup_{x \in \langle 1, \infty \rangle} H_x$$

Niech $f, g \in H$. Istnieją $x_1, x_2 \in \langle 1, \infty \rangle$ takie, że $f \in H_{x_1}$, $g \in H_{x_2}$.

Położmy

$$\rho(f, g) = \sup_{u \in \langle 0, x_1 \rangle} \sqrt{\left[g\left(\frac{x_2}{x_1} u\right) - f(u)\right]^2 + (x_2 - x_1)^2}.$$

Łatwo sprawdzić, że ρ jest metryką w H . Wykażemy teraz, że przestrzeń (H, ρ) jest zupełna. Weźmy w tym celu dowolny ciąg Cauchy'ego $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ elementów przestrzeni H . Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje więc $x_n > 1$ takie, że $f_n \in H_{x_n}$.

Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sup_{u \in \langle 0, x_m \rangle} \sqrt{\left[f_n\left(\frac{x_n}{x_m} u\right) - f_m(u)\right]^2 + (x_n - x_m)^2} < \varepsilon, \quad (6)$$

$n, m > n_0$.

Wynika stąd, że $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny. Niech $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Oczywiście $x > 1$.

Weźmy dowolne $u \in \langle 0, x \rangle$. Ponieważ $x_m u / x \in \langle 0, x_m \rangle$ dla $n, m \in \mathbb{N}$, więc z (6) wynika, że

$$\sqrt{\left[f_n\left(\frac{x_n}{x} u\right) - f_m\left(\frac{x_m}{x} u\right)\right]^2 + (x_n - x_m)^2} < \varepsilon, \quad n, m > n_0. \quad (7)$$

Zatem ciąg $(f_n(x_n u / x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Kładąc $f(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n u / x)$ i przechodząc w (7) do granicy przy $m \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$\sqrt{\left[f_n\left(\frac{x_n}{x} u\right) - f(u)\right]^2 + (x_n - x)^2} < \varepsilon, \quad n > n_0. \quad (8)$$

Z (8) wynika ograniczoność f w $\langle 0, x \rangle$ a zatem i przynależność f do H . Ponadto z (8) i z dowolności $u \in \langle 0, x \rangle$ wynika, że $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ dla $n > n_0$, co kończy dowód zupełności H .

Założmy, że $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: \langle 0, 1 + b - a \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ i że f spełnia w $\langle 0, 1 + b - a \rangle$ warunek Lipschitza z pewną stałą $M_1 \in \langle 0, \infty \rangle$. Niech

$$A \stackrel{\text{df}}{=} \{(x, y); x \in \langle a, b \rangle, y \in H_{1+x-a}\}.$$

Dla dowolnych $(x, y) \in A$, $t \in \langle x, b \rangle$ położmy

$$g_{x,y,t}(u) = y\left(\frac{1+x-a}{1+t-a}u\right), \quad u \in \langle 0, 1+t-a \rangle,$$

$$F(x, y)(t) = g_{x,y,t} + (t-x)f|_{\langle 0, 1+b-a \rangle}.$$

Widoczne jest, że $F \in \mathcal{F}(A, H)$. Wykażemy teraz, że $F \in \mathcal{F}_0(A, H)$.

Jeśli $(x, y_1), (x, y_2) \in A$ i $t \in \langle x, b \rangle$, to

$$\begin{aligned} \rho(F(x, y_2)(t), F(x, y_1)(t)) &= \sup_{u \in \langle 0, 1+t-a \rangle} |g_{x,y_2,t}(u) - \\ &- g_{x,y_1,t}(u)| = \rho(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Zatem (4) zachodzi.

Aby wykazać warunek (5) weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i połóżmy $\delta = \varepsilon/M_1$. Niech $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$, $x_{n+1} - x_0 < \delta$, $y_0 \in H$, $(x_0, y_0) \in A$. Z definicji (2) y_n łatwo wynika, że

$$y_n(u) = y_0\left(\frac{1+x_0-a}{1+x_n-a}u\right) + \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{1+x_{i+1}-a}{1+x_n-a}u\right)$$

dla $u \in \langle 0, 1+x_n-a \rangle$. Zatem

$$\begin{aligned} \rho(y_n, F(x_0, y_0)(x_n)) &= \sup_{n \in \langle 0, 1+x_n-a \rangle} |y_n(u) - F(x_0, y_0)(x_n)(u)| = \\ &= \sup_{u \in \langle 0, 1+x_n-a \rangle} \left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \left[f\left(\frac{1+x_{i+1}-a}{1+x_n-a}u\right) - f(u) \right] \right| \leq \\ &< M_1 \sup_{u \in \langle 0, 1+x_n-a \rangle} \sum_{i=0}^{n-2} (x_{i+1} - x_i) \left| \frac{1+x_{i+1}-a}{1+x_n-a}u - u \right| = \\ &= M_1 \sum_{i=0}^{n-2} (x_{i+1} - x_i) (x_n - x_{i+1}) \leq M_1 (x_n - x_1) \sum_{i=0}^{n-2} (x_{i+1} - x_i) < \\ &< M_1 (x_n - x_1) \delta = \varepsilon (x_n - x_1), \end{aligned}$$

co kończy dowód warunku (5).

Z twierdzenia 1 wynika więc, że dla każdej funkcji $y_0 : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow R$ i ograniczonej w $\langle 0, 1 \rangle$ para (y_0, F) jest całkowalna na $\langle a, b \rangle$. Aby obliczyć całkę z tej pary na $\langle a, b \rangle$ weźmy dowolny podział $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ przedziału $\langle a, b \rangle$. Łatwo sprawdzić, że

$$S(y_0, P, F)(u) = y_0\left(\frac{u}{1+b-a}\right) + \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{1+x_{i+1}-a}{1+b-a}u\right)$$

dla $u \in \langle 0, 1+b-a \rangle$.

Ponieważ dla wszystkich podziałów P przedziału $\langle a, b \rangle$ funkcje $S(y_0, P, F)$ mają tę samą dziedzinę, mianowicie przedział $\langle 0, 1 + b - a \rangle$ i para (y_0, F) jest całkowalna na $\langle a, b \rangle$ więc dla każdego $u \in \langle 0, 1 + b - a \rangle$

$$\left(\int_a^b (y_0, F) \right) (u) = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} S(y_0, P, F) (u).$$

Zatem

$$\left(\int_a^b (y_0, F) \right) (u) = y_0 \left(\frac{u}{1 + b - a} \right) + \int_a^b f \left(\frac{1 + x - a}{1 + b - a} u \right) dx$$

dla $u \in \langle 0, 1 + b - a \rangle$.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Łódzki

Eugeniusz Janiec

RIEMANN'S INTEGRAL FOR FUNCTIONS WITH VALUES IN A METRIC SPACE

In the paper, some conception of Riemann's definite integral of functions with values in any metric space is given. Also, one can find in it some sufficient condition for integrability and several examples of integrable functions.