A C T A U N I V E R S I T A T I S L O D Z I E N S I S
FOLIA MATHEMATICA 6, 1993

Ryszard J. Pawlak, Anna Warężak, Witold Budzisz, Andrzej Fabijańczyk, Monika Fabijańczyk, Józef Janikowski, Inga Libicka, Alicja Molęda, Zenon Piesyk, Tadeusz Poreda, Andrzej Rychlewicz, Wacława Tempczyk

MINIMUM WIEDZY MATEMATYCZNEJ NAUCZYCIELA MATEMATYKI ORAZ PROJEKT ORGANIZACJI PROCESU NAUCZANIA NA NAUCZYCIELSKICH STUDIACH UNIWERSYTECKICH

Niniejsze opracowanie jest wynikiem kilkuletnich badań i analiz teoretycznych zmierzających do odpowiedzi na następujące pytania: jaki powinien być zasób wiedzy nauczyciela matematyki? w jakim zakresie i w jaki sposób powinno mu się tę wiedzę przekazać?

W początkowej części pracy przeanalizowano krytycznie aktualnie funkcjonujący system kształcenia nauczycieli matematyki, następnie przedstawiona została propozycja struktury 5-letnich studiów magisterskich przygotowujących absolwenta do pracy w zawodzie nauczyciela matematyki.

Na podstawie wypracowanych kryteriów doboru treści matematycznych, które należy uznać za niezbędne w kształceniu nauczycieli, przedstawiony został projekt minimum wiedzy w zakresie podstawowych przedmiotów: analiza matematyczna, algebra, geometria, rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki matematycznej, arytmetyka teoretyczna, logika i teoria mnogości, funkcje analityczne, topologia, równania różniczkowe, analiza funkcjonalna, metody numeryczne, elementy informatyki, dydaktyka matematyki.

Ponieważ wykład na studiach wyższych stanowi podstawową formę przekazu wiedzy, artykuł kończy dyskusja na temat nowoczesnych sposobów wykładania.

Zaproponowany w pracy zakres wiedzy matematycznej, którą należy przekazać studentom - przyszłym nauczycielom - oraz projekt organizacji uniwersyteckich studiów nauczycielskich może stanowić podstawę do opracowania szczegółowych programów takich studiów.

Matematyka jest gałęzią nauki, której korzenie sięgają do okresu powstawania społeczeństwa ludzkiego i której idee stanowią ele-

ment kultury ogólnoświatowej. Jej metody coraz częściej i intensywniej przenikają do wielu minnych dziedzin nauki (fizyka, astronomia, meteorologia, medycyna itd.). Z drugiej strony natomiast, jak pisał H. Poincaré, można mówić o "odczuciu matematycznego piękna, harmonii liczb i kształtów, geometrycznej elegancji". Matematyka łączy zatem w sobie ogromną siłę naukową z pięknem i wartościami czysto artystycznymi. Jej roli i znaczenia nie można przecenić, a mimo to trudno nie zgodzić się z refleksją wybitnego matematyka, prof. P. R. Halmosa, który stwierdził: "smuci mnie fakt że nawet wykształceni ludzie nie wiedzą, iż mój przedmiot naprawdę istnieje". Sytuacja ta prowokuje do stawiania licznych pytań dotyczących dysproporcji między rolą i znaczeniem matematyki we współczesnym świecie a faktyczną wiedzą na jej temat, do chęci ustalenia przyczyn tych dysproporcji oraz poszukiwania sposobów ich usunięcia. Analizując wypowiedzi wielu osób trzeba stwierdzić, że ww. przyczyny tkwią w znacznej mierze w złym przygotowaniu nauczycieli matematyki do pracy w szkole. Profesor W. Waliszewski w komentarzu do projektu pracy nad zagadnieniem *Określenie minimum wiedzy matematycznej nauczyciela matematyki* pisał: "Do podjęcia tak sformułowanego problemu skłania obserwacja niestosowności przygotowania absolwentów studiów uniwersyteckich, według obecnie obowiązujących zasad, do wykonywania zawodu nauczyciela matematyki. Uniwersyteckie programy nauczania i praktyk pedagogicznych nie wydają się mieć jasno określonego celu. Są pomyślane tak, aby zapewnić absolwentowi możliwie pełną wiedzę matematyczną, dać możliwości startu w działalności naukowej, rzadziej się natomiast myśli o tym, że absolwent matematyki pójdzie do szkoły i będzie zobowiązany do poprawnej realizacji programu nauczania szkoły podstawowej bądź średniej. Okaże się także wtedy, że jego kontakt z matematyką elementarną skończył się *de facto* na drugim roku studiów matematycznych, i że ten kontakt także był specyficzny - niedostateczny dla potrzeb szkoły średniej. Jeśli jeszcze uwzględnimy fakt, że w zmianach programów nauczania matematyki w szkole podstawowej i średniej występują dwa jednoczesne nurty: jeden - postulujący powrót do historycznych źródeł matematyki szkolnej, drugi - operujący argumentem potrzeb cywilizacji XXI wieku, nakazujący szybką informatyzację nauczania szkolnego, to otrzymamy obraz szczególnej złożoności problemu przygotowania kadr do nauczania matematyki w szkole podstawowej i średniej".

W związku z tą sytuacją należałoby postawić pytanie o to, jaki powinien być zasób wiedzy nauczyciela matematyki i w jakim zakresie oraz w jaki sposób powinniśmy mu tę wiedzę przekazać. Odpowiedzi na te pytania zawiera niniejsze opracowanie. Jego treść jest wynikiem wieloletnich badań oraz analiz teoretycznych. Ustalenie ostatecznych rezultatów poprzedzone zostało przeprowadzeniem ankiety wśród czynnych nauczycieli oraz licznymi obserwacjami i dyskusjami. Dążeniem naszym było przy tym uzyskanie możliwie najpełniejszej odpowiedzi na wyżej postawione pytania. Było to podyktowane zarówno zrozumieniem wagi badań, jak też zdawaniem sobie sprawy z niebezpieczeństw mogących wynikać z mało precyzyjnego przedstawienia osiągnięć (np. nadmierne w praktyce minimalizowanie zakresu treści przekazywanych studentom). Dlatego też wyniki badań przedstawimy znacznie szerzej, niż to sugeruje bezpośrednio rozpatrywany temat. Określenie jedynie zakresu tematów, których omówienie jest niezbędne w ramach poszczególnych przedmiotów, byłoby z pewnością zubożeniem tematu V.4 *Minimum wiedzy matematycznej nauczyciela matematyki*. Zagadnienia te trzeba bowiem realizować w określonej kolejności i przy zachowaniu współzależności poszczególnych przedmiotów. Stąd też nasze działania wiążą się z optymalizacją struktury studiów. Zbudowanie odpowiedniego "modelu studiowania" urealnia opracowane przez nas propozycje tematów, z którymi powinni zapoznać się studenci w ramach przygotowania do wykonywania zawodu nauczyciela matematyki. Przedstawiona poniżej propozycja była konsultowana z szerokim gronem specjalistów. Zaprezentowane rozwiązanie okazało się na tyle ciekawe, że Dyrekcja Instytutu Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego jest zainteresowana w praktycznym wykorzystaniu tego projektu - w ramach pięcioletnich studiów nauczycielskich. Zanim omówimy naszą propozycję, przedstawimy analizę aktualnie funkcjonującego systemu kształcenia nauczycieli matematyki. Analiza ta dokonana została na podstawie siatki godzin oraz programów nauczania poszczególnych przedmiotów w jednej z uczelni. Łatwo jednak spostrzec, że programy niemal wszystkich uczelni (zarówno Uniwersytetów, jak też Wyższych Szkół Pedagogicznych) są bardzo zbliżone. Rozpatrzenie zatem jednego tylko przykładu oraz wnioski wynikające z tych rozważań można uznać za reprezentatywne dla uczelni całego kraju.

Studia matematyczne trwają 5 lat, a pomyśle ich ukończenie prowadzi do uzyskania przez absolwentów tytułu magistra matematyki. Po

Tabela 1

Aktualnie obowiązująca liczba godzin przewidzianych na poszczególne przedmioty w podziale na specjalności

Przedmioty		Specjalność		
		Teoretyczna	Zastosowania	Metod Numerycznych i Programowania
Ścisłe	Mat.	2 160 (60,3%)	2 160 (58,1%)	1 650 (42,1%)
	Fiz.	120 (3,3%)	120 (3,2%)	120 (3,1%)
	Inf.	75 (2,1%)	210 (5,6%)	915 (23,4%)
	Razem	2 355 (65,7%)	2 490 (66,9%)	2 685 (68,6%)
Nauczycielskie	Ped.	90 (2,5%)	90 (2,4%)	90 (2,3%)
	Psych.	90 (2,5%)	90 (2,4%)	90 (2,3%)
	Met.	180 (5,0%)	180 (4,9%)	180 (4,6%)
	Razem	360 (10,0%)	360 (9,7%)	360 (9,2%)
Uzupełniające	Hum.	300 (8,4%)	300 (8,1%)	300 (7,6%)
	Inne	570 (15,9%)	570 (15,3%)	570 (14,6%)
	Razem	870 (24,3%)	870 (23,4%)	870 (22,2%)
Łącznie		3 585 (100%)	3 720 (100%)	3 915 (100%)
Liczba egzaminów		25 + mgr	25 + mgr	28 + mgr
Praktyki pedagogiczne		10 tygodni	10 tygodni	10 tygodni

Uwaga: Skróty zastosowane w tab.:
Mat. - grupa przedmiotów matematycznych,
Fiz. - fizyka,
Inf. - grupa przedmiotów informatycznych,
Ped. - pedagogika,
Psych. - psychologia,
Met. - metodyka nauczania matematyki,
Hum. - grupa tzw. przedmiotów humanizujących, tzn. ekonomia polityczna, socjologia, filozofia, nauka o polityce, przedmiot społeczno-polityczny,
Inne - lektorat I i II, wychowanie fizyczne, szkolenie obronne,
mgr - egzamin magisterski.
Ostatnie dwa wiersze tabeli podają liczbę egzaminów.

pierwszym wspólnym roku studiów, studenci wybierają jedną z trzech następujących specjalności:

- Teoretyczną,
- Zastosowań Matematyki,
- Metod Numerycznych i Programowania.

Kontynuacja nauki odbywa się według trzech niezależnych programów, a w konsekwencji - tylko nieliczne zajęcia, i to tylko

z grupy przedmiotów uzupełniających, są realizowane wspólnie. Pozwala to, przynajmniej w założeniach, na lepsze dostosowanie programu i jego realizacji do potrzeb danej specjalności. Zamieszczona na str. 70 tab. 1 przedstawia dane statystyczne, ważne z punktu widzenia interesującego nas problemu. Podajemy w niej bezwzględne liczby godzin przewidzianych na poszczególne przedmioty bądź ich grupy oraz część procentową całości, jaką one stanowią.

Z tab. 1 wynikają dwie ważne obserwacje ogólne:

1. Blok przedmiotów bezpośrednio przygotowujących do zawodu nauczyciela obejmuje zaledwie 9-10% wymiaru godzin wszystkich zajęć dydaktycznych, przy czym tylko połowa tego czasu poświęcona jest metodyce nauczania matematyki.

2. Przedmiotom ścisłym, a więc tym, które są głównie odpowiedzialne za szeroko rozumiane wykształcenie matematyczne studentów przydziela się tylko 2/3 całego ww. czasu. Zauważmy ponadto, że dobór i tematyka przedmiotów zarówno ścisłych, jak i uzupełniających, systemowo nie uwzględniają kwestii przygotowania przyszłych absolwentów uniwersyteckich studiów matematycznych do podjęcia pracy w zawodzie nauczycielskim. Co prawda może do tego dojść w ramach któregoś z wykładów monograficznych bądź seminariów, ale jest to raczej kwestia przypadku i, jak pokazują wieloletnie doświadczenia, są to zjawiska niezmiernie rzadkie.

W świetle powyższych faktów ośmielamy się stwierdzić, że tak zorganizowane studia matematyczne nie przygotowują w sposób właściwy do zawodu nauczyciela matematyki. Uważamy, że proporcje, w jakich cały czas zajęć dydaktycznych został rozdzielony między poszczególne grupy przedmiotów są niewłaściwe i rażąco dyskryminują metodykę nauczania matematyki oraz pokrewne jej przedmioty. Również tematyka poszczególnych zajęć i sposób ich realizacji w niewielkim tylko stopniu uwzględniają potrzeby przyszłych nauczycieli matematyki.

Szczególne zastrzeżenia budzą programy przedmiotów ścisłych na wyższych latach studiów. Charakteryzują się one wysokim poziomem abstrakcji, niejednokrotnie błądzą po antypodach matematyki współczesnej, ich tematyka niekiedy bardziej zależy od zainteresowań wykładowcy niż od potrzeb słuchaczy. Rozumiemy to i akceptujemy w przypadku zajęć adresowanych do tych studentów, którzy deklarują chęć poświęcenia się pracy naukowo-badawczej, sprzeciwiamy się temu jednak jeśli idzie o studentów planujących pracę w zawodzie

nauczycielskim. Dla tej grupy słuchaczy ważniejszą rzeczą jest dogłębne poznanie szeroko rozumianej matematyki elementarnej, podstaw matematyki, informatyki, a więc zagadnień blisko związanych z ich przyszłą pracą zawodową. Pamiętajmy tu, że liczba godzin zajęć dydaktycznych i czas trwania studiów są ograniczone i dlatego rozsądny kompromis między tzw. matematyką wyższą i elementarną jest koniecznością.

Można mieć również zastrzeżenia do grupy tzw. przedmiotów humanizujących. W minimalnym stopniu biorą one pod uwagę fakt, że odbiorcami są przyszli matematycy, jeszcze mniej, że mogą oni zostać nauczycielami. Szczególnie niepokoi całkowite zignorowanie historii matematyki, przedmiotu, który powinien wchodzić naszym zdaniem w fundamentalne wykształcenie każdego matematyka.

Osobnej analizy krytycznej wymaga grupa przedmiotów nauczycielskich. Aktualnie obowiązujące siatki godzin pozwalają na bardzo powierzchowne przygotowanie studentów do pracy w szkole i to tylko podstawowej. Wprawdzie poświęca się nieco czasu problematyce nauczania w szkole średniej, ale głęboka dysproporcja między potrzebami a możliwościami czasowymi z góry skazuje te działania na niepowodzenie.

Reasumując, stwierdzamy, że aktualna organizacja uniwersyteckich studiów matematycznych nie daje możliwości właściwego przygotowania absolwentów do pracy w zawodzie nauczyciela matematyki. Uważamy, że jedynym rozwiązaniem problemu jest zorganizowanie niezależnych uniwersyteckich studiów matematycznych, od początku do końca ukierunkowanych na przygotowanie studentów do pracy w szkole. Szczegóły mogą być rozwiązane na wiele niezależnych sposobów i wybór konkretnego rozwiązania musi uwzględniać takie aspekty, jak potrzeby makroregionu, możliwości kadrowe uczelni, jej tradycje i doświadczenia w kształceniu nauczycieli, prognozę szansy pozyskania wartościowych kandydatów do tego typu studiów.

Przedstawimy teraz ogólne założenia proponowanej przez nas koncepcji pięcioletnich studiów magisterskich przygotowujących absolwentów do pracy w zawodzie nauczyciela matematyki zarówno szkoły podstawowej (klasy 4-8), jak i średniej. Nie proponujemy studiów dwustopniowych. Jesteśmy zwolennikami poglądu, że uniwersytet powinien tak przygotować absolwentów, aby byli w stanie podołać wszelkim obowiązkom wychowawczo-dydaktycznym, jakie przed nimi może postawić przyszła szkoła, która z pewnością w okresie ich aktyw-

ności zawodowej przejdzie głębokie przeobrażenia. Uważamy, że tylko w czasie studiów trwających 5 lat studenci mogą rozszerzyć swoje wykształcenie ogólnomatematyczne w zakresie matematyki elementarnej, jak i zapoznać się z klasycznymi działaniami tzw. matematyki wyższej. Dzięki temu przyszły nauczyciel uzyska odpowiednie "horyzonty matematyczne", pozwalające mu lepiej zrozumieć poszczególne zagadnienia obecnych i przyszłych programów szkolnych. Nie bez znaczenia jest też przygotowanie do pracy z uczniem szczególnie uzdolnionym, co wymaga od nauczyciela znacznej erudycji matematycznej, biegłości w posługiwaniu się literaturą fachową, umiejętności rozwiązywania trudnych zadań o różnorodnej tematyce.

Szczególną uwagę należy zwrócić na informatykę i praktyczną obsługę minikomputerów, którą to problematykę muszą uwzględniać programy studiów w możliwie szerokim zakresie.

Jak już wcześniej zaznaczyliśmy, projektowane przez nas studia są jednostopniowe. Dzięki temu możemy założyć, że pierwsze dwa lata poświęca się usystematyzowaniu i rozszerzeniu wiedzy ogólnotematycznej słuchaczy. W okresie tym dominuje matematyka traktowana "z wyższego stanowiska". Z przedmiotów zawodowych studenci zapoznają się z pedagogiką, psychologią i ogólnymi zagadnieniami dydaktyki matematyki. Od roku III, a więc po osiągnięciu pewnej dojrzałości matematycznej, intelektualnej i życiowej, rozpoczyna się właściwy proces przygotowania do zawodu nauczyciela i w miarę zbliżania się do końca studiów jest on intensyfikowany. Na V roku obciążenie studentów zajęciami obowiązkowymi radykalnie spada, aby dać im szansę na pracę samodzielną, w tym przede wszystkim na dobre przygotowanie prac magisterskich. Metodyka nauczania matematyki podzielona jest na dwa roczne przedmioty (rok III i IV) i poświęca się je odpowiednio problematyce nauczania w szkole podstawowej i średniej. Logiczną konsekwencją tego jest zaplanowanie praktyk pedagogicznych po III i IV roku studiów, pierwszej - w szkołach podstawowych, drugiej - w ponadpodstawowych. Rok V daje swobodę w wyborze typu szkolnictwa i przewidziany jest na doskonalenie wiedzy i praktyki pedagogicznej. Proponujemy ponadto tradycyjne wykłady monograficzne zastąpić formą bardziej odpowiadającą potrzebom, a mianowicie wykładami specjalistycznymi. Ich tematyka może być dowolna, z zastrzeżeniem jednak, że ma dotyczyć zagadnień blisko związanych z "matematyką szkolną" lub "informatyką szkolną". Uwaga ta dotyczy również seminariów, których podstawowym

celem ma być wdrożenie studentów do samodzielnej pracy z literaturą i opanowanie umiejętności referowania (a w szczególności - posługiwania się poprawnym językiem matematycznym). Nie przewidujemy odrębnego przedmiotu specjalnie przeznaczonego rozwiązywaniu zadań szkolnych. Uważamy bowiem, że opanowanie tej umiejętności będzie podstawą wszystkich ćwiczeń do planowanych przez nas wykładów, a poza tym nic nie stoi na przeszkodzie, aby zagadnienie to stało się tematyką jednego z seminariów.

Niezmiernie ważną sprawą jest, aby nauczyciele akademiccy prowadzący zajęcia dla Specjalności Nauczycielskiej byli świadomi faktu, że kształcą przyszłych nauczycieli. Powinni uwzględniać ten fakt przy decyzji dotyczącej sposobu ujęcia danego tematu i doboru materiału ćwiczeniowego, co jest szczególnie istotne w przypadku treści występujących w programach szkolnych. Wiadomo bowiem, że studia wyższe powinny dać studentom wzorce konkretnych rozwiązań dydaktycznych, z drugiej jednak strony, nie zawsze można to zrealizować w ramach wykładów kursowych. Dlatego też uważamy, że zagadnienia takie muszą pojawić się po raz drugi, już w ujęciu szkolnym, przede wszystkim w ramach dydaktyki szczegółowej i seminariów.

W zakresie przedmiotów uzupełniających nie mamy zbyt dużej swobody działania ze względu na obowiązujące dotychczas przepisy. Proponujemy zwiększenie wymiaru godzin przewidzianych na filozofię oraz wprowadzenie historii matematyki jako przedmiotu humanizującego. Uważamy to za naturalne uzupełnienie wykształcenia zawodowego nauczyciela matematyki.

W celu skonkretyzowania omówionego wyżej projektu przedstawimy obecnie siatkę godzin w układzie semestralno-tygodniowym (tab. 2). Szczegółowa siatka godzin w tradycyjnej "ministerialnej" formie jest treścią załącznika I.

W uzupełnieniu przedstawionej siatki pragniemy zwrócić uwagę na kilka szczegółów:

1. Wstęp do matematyki jest w naszym projekcie "dużym przedmiotem", o czym świadczy podwójny wymiar godzin w stosunku do rozwiązań tradycyjnych. Liczymy, że dzięki temu będzie możliwe staranne wprowadzenie studentów w najważniejsze zagadnienia podstaw matematyki. Problematykę tę uważamy za ogromnie ważną dla wykształcenia przyszłego nauczyciela.

Tabela 2

Siatka godzin w układzie semestralno-tygodniowym

Kierunek: MATEMATYKA
Typ studiów: MAGISTERSKIE
Specjalność: NAUCZYCIELSKA
Czas trwania studiów: 5 lat
Studia: STACJONARNE

Rok	Seminarium	Pozycja	Nazwa przedmiotu	Liczba godz. tygodniowo			Liczba godz. w semestrze			E
				W	C	+	W	C	+	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		1	Wstęp do matemytaki	4	4	8	60	60	120	E
		2	Geometria z elementami algebry	4	4	8	60	60	120	
		26	Psychologia	2	3		30	45	75	E
		32	Lektorat I		3	3		45	45	
		35	Wychowanie fizyczne		2	2		30	30	
I	1		Razem:	10	16	26	150	240	390	2
		2	Geometria z elementami algebry	4	4	8	60	60	120	E
		4	Analiza matematyczna	4	4	8	60	60	120	
		8	Topologia	2	2	4	30	30	60	E
		27	Pedagogika	2	1	3	30	15	45	
		32	Lektorat I		3	3		45	45	E
		35	Wychowanie fizyczne		2	2		30	30	
I	2		Razem:	12	16	28	180	240	420	3
		4	Analiza matematyczna	4	4	8	60	60	120	E
		3	Algebra	3	3	6	45	45	90	
		9	Geometria elementarna	3	3	6	45	45	90	E
		33	Lektorat II		4	4		60	60	
		27	Pedagogika	2	1	3	30	15	45	E
		35	Wychowanie fizyczne		2	2		30	30	
II	3		Razem:	12	17	29	180	255	435	3
		4	Analiza matematyczna	4	4	8	60	60	120	
		3	Algebra	2	2	4	30	30	60	E
		6	Analiza zespolona	2	2	4	30	30	60	E
		22	Dydaktyka matematyki ogólna	2	2	4	30	30	60	E
		33	Lektorat II		4	4		60	60	E

Tabela 2 (cd.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		31	Ekonomia polityczna	2	2	4	30	30	60	Z
		35	Wychowanie fizyczne		2	2		30	30	
II	4		Razem:	12	18	30	180	270	450	4
		4	Analiza matematyczna	4	4	8	60	60	120	E
		5	Równania różniczkowe zwyczajne	2	2	4	30	30	60	E
		16	Wykład specjalny I	2	2	4	30	30	60	
		19	Seminarium I		2	2		30	30	
		10	Informatyka	2	2	4	30	30	60	
		23	Metodyka nauczania matematyki I	1	3	4	15	45	60	
		28	Środki techniczne w dydaktyce		1	1		15	15	
		35	Wychowanie fizyczne		2	2		30	30	
III	5		Razem:	11	18	29	165	270	435	2
		14	Geometria różniczkowa	2	2	4	30	30	60	E
		11	Rachunek prawdopodobieństwa	2	2	4	30	30	60	E
		16	Wykład specjalny I	2	2	4	30	30	60	E
		19	Seminarium I		2	2		30	30	
		10	Informatyka		4	4		60	60	Z
		23	Metodyka nauczania matemytaki I	1	3	4	15	45	60	E
		29	Filozofia	2	2	4	30	30	60	
		35	Wychowanie fizyczne		2	2		30	30	
III	6		Razem:	9	19	28	135	285	420	4
		12	Statystyka matematyczna	2	2	4	30	30	60	E
		17	Wykład specjalny II	2	2	4	30	30	60	
		20	Seminarium II		2	2		30	30	
		23	Metodyka nauczania matematyki II	1	3	4	15	45	60	
		29	Filozofia	2	2	4	30	30	60	E
		34	Szkolenie obronne	3	1	4	45	15	60	
IV	7		Razem:	10	12	22	150	180	330	2
		7	Analiza funkcjonalna	2	2	4	30	30	60	E
		17	Wykład specjalny II	2	2	4	30	30	60	E

Tabela 2 (cd.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		20	Seminarium II		2	2		30	30	
		13	Fizyka	2	2	4	30	30	60	
		24	Metodyka nauczania matematyki II	1	3	4	15	45	60	E
		34	Szkolenie obronne	3	1	4	45	15	60	Z
IV	8		Razem:	10	12	22	150	180	330	3
		15	Arytmetyka teoretyczna z teorią liczb	3	3	6	45	45	90	E
		30	Historia matematyki	2		2	30		30	
		21	Seminarium magisterskie		2	2		30	30	
		25	Praktyka prowadzenia lekcji		2	2		30	30	
		13	Fizyka	2	2	4	30	30	60	E
		18	Pracownia informatyczna		3	3		45	45	
V	9		Razem:	7	12	19	105	180	285	2
		30	Historia matematyki	2		2	30		30	E
		21	Seminarium magisterskie		4	4		60	60	
		25	Praktyka prowadzenia lekcji		2	2		30	30	
		18	Pracownia informatyczna		3	3		45	45	Z
V	10		Razem:	2	9	11	30	135	165	2*

* Wraz z egzaminem magisterskim.

Łącznie w czasie całych studiów: 1 425 godz. wykładów
2 235 godz. innych zajęć
Razem: 3 660 godz.

Liczba egzaminów: 26 + magisterski

Praktyki zawodowe: Praktyka nauczania w szkole podstawowej po III roku, termin orientacyjny: 7 IX - 15 X; Praktyka nauczania w szkole średniej po IV roku, termin orientacyjny: 7 IX - 15 X. Czas trwania każdej praktyki: 5 tygodni.

Uwaga: Oznaczenia zastosowane w tab.: W - wykłady, C - ćwiczenia, konwersatoria, seminaria, + - razem, F - forma zakończenia przedmiotu i liczba egzaminów, E - egzamin, Z - zaliczenie.

2. Analiza matematyczna trwa 2 lata i jest podzielona na dwie połowy kończące się egzaminami. Zdecydowaliśmy się na rozpoczęcie jej dopiero od semestru II z dwóch powodów. Po pierwsze, unikamy w ten sposób przeładowania sesji letniej ciężkimi, rocznymi egzaminami. Po drugie, ułatwiamy realizację wykładu dzięki dostarczeniu na czas odpowiednich narzędzi, przede wszystkim topologii i algebry. Jest to szczególnie istotne dla bardziej zaawansowanych działów, takich jak teoria funkcji wielu zmiennych.

3. Każda siatka godzin powinna uwzględniać wzajemne powiązania między przedmiotami bądź ich grupami. Nasza propozycja nie jest w tym punkcie wyjątkiem, o czym świadczą następujące uporządkowane czasowo sekwencje:

wstęp do matematyki ⟶ topologia;
geometria z algebrą ⟶ algebra;
geometria z algebrą ⟶ geometria elementarna ⟶ geometria różniczkowa;
psychologia + pedagogika ⟶ dydaktyka matematyki ogólna ⟶ metodyka nauczania matematyki I ⟶ metodyka nauczania matematyki II ⟶ praktyka prowadzenia lekcji.

4. Jak pokazują wieloletnie obserwacje, lektoraty języków obcych są dydaktycznie nieskuteczne i absolwenci, poza nielicznymi wyjątkami, nie opanowują tych języków w stopniu zadowalającym. Próbując temu przeciwdziałać proponujemy naukę języków obcych metodą sekwencyjną: na pierwszym roku język I, na drugim - język II. Umożliwia to zbliżenie się do metod nauczania intensywnego, które jest znacznie bardziej efektywne. Poza tym, uwalniamy się od błędnego założenia, że nasi studenci posiadają "nadzwyczajne uzdolnienia lingwistyczne" konieczne przecież do skutecznej nauki dwóch języków obcych jednocześnie.

5. Jesteśmy przeciwni łączeniu rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej w jeden przedmiot. Grozi to bowiem dyskryminacją jednego z tych przedmiotów, a faworyzowaniem drugiego, w zależności od tego, jakie są zainteresowania naukowe wykładowcy. Nie ulega wątpliwości, że rachunek prawdopodobieństwa i statystyka muszą wchodzić w skład programów szkolnych i dlatego są tak ważne dla wykształcenia przyszłego nauczyciela matematyki.

6. Seminaria są formą zajęć dydaktycznych o dużym znaczeniu dla studentów Specjalności Nauczycielskiej. Przewidywaliśmy je podczas III i IV roku studiów, przy czym z oczywistych powodów podwajamy

ich wymiar w ostatnim semestrze. Uważamy, że ich tematyka powinna być ściśle skorelowana z tematyką wykładów specjalizacyjnych.

Dla ułatwienia porównania aktualnie obowiązującego rozwiązania z prezentowaną powyżej propozycją, przedstawimy obecnie tab. 3, analogiczną do tab. 1.

Analizę ilościową projektu przeprowadzimy zastosowaną już metodą (w punktach).

Tabela 3

Liczba godzin przewidzianych na poszczególne przedmioty (dla specjalności nauczycielskiej) według naszych propozycji

Przedmioty		Specjalność nauczycielska	
Ścisłe	Mat.	2 040	(55,7%)
	Fiz.	120	(3,3%)
	Inf.	210	(5,7%)
	Razem	2 370	(64,7%)
Nauczycielskie	Ped.	90	(2,5%)
	Psych.	75	(2,1%)
	Met.	375	(10,2%)
	Razem	540	(14,8%)
Uzupełniające	Hum.	240	(6,6%)
	Inne	510	(13,9%)
	Razem	750	(20,5%)
Łącznie		3 660	(100%)
Liczba egzaminów		26 + mgr	
Praktyki pedagogiczne		10 tygodni	

U w a g a: Oznaczenia jak w tab. 1.

1. Nasz projekt zwiększa z 2,1 do 5,7% udział przedmiotów informatycznych w całych studiach. Mimo zmiany we właściwym kierunku uważamy to rozwiązanie za przejściowe, gdyż świadomi jesteśmy konieczności dalszego zwiększania roli informatyki w studiach matematycznych wszystkich typów. Jedyną barierą, zmuszającą nas do umiaru, jest brak odpowiednich możliwości kadrowych i sprzętowych większości uczelni wyższych.

2. Proponujemy zwiększenie wymiaru przedmiotów nauczycielskich z 9,2-10,0% do 14,8%, przy czym "największy zysk" przydzielamy

metodyce nauczania matematyki: poprzednio 4,6-5,0%, obecnie - 10,2% całego limitu godzin. Jest to radykalna poprawa na rzecz przedmiotu bezpośrednio odpowiedzialnego za przygotowanie zawodowe. Posiada w tym także swój pozytywny udział fakt wspomagającej roli wykładów specjalizacyjnych i seminariów.

3. Dokonaliśmy zmian strukturalnych w grupie przedmiotów uzupełniających, zmniejszając ich udział z 22,2-24,3% do 20,5% pełnego limitu godzin. "Odchudzeniu" poddaliśmy szkolenie wojskowe, zgodnie z projektami zarządzeń władz. Zredukowaliśmy także liczbę przedmiotów typu politycznego. Zyskała na tym filozofia oraz historia matematyki, która poprzednio nie występowała w ogóle w obowiązującej części programów studiów.

4. Wymiar praktyk pedagogicznych pozostał bez zmian. Liczymy jednak na to, że dzięki modyfikacjom opisanym w punkcie 2, faktyczny kontakt studentów ze szkołą będzie istotnie zwiększony i co ważne, trwać będzie nie przez 2, ale przez 3 lata studiów (III-V rok).

Reasumując, proponowane przez nas zmiany strukturalno-ilościowe nie mają charakteru rewolucyjnego. Są one jednak na tyle istotne, że cały proces dydaktyczny będzie, naszym zdaniem, podporządkowany jednemu celowi: dążeniu do wykształcenia dobrego, wszechstronnego nauczyciela matematyki.

Przedstawione powyżej fakty stanowią jedynie ogólne ramy, które pozwalają opracować odpowiedzi na postawione wcześniej pytania.

Dominującą rolę w przygotowaniu zawodowym przyszłych nauczycieli matematyki odgrywa "wyposażenie" studentów w odpowiednią wiedzę matematyczną. Zakres materiału, z jakim należy zapoznać słuchaczy kierunków nauczycielskich nie powinien ograniczać się tylko do rozszerzonych haseł programów szkolnych, ale musi stwarzać możliwości szerszego i głębszego zrozumienia omawianych w szkole problemów, rozwinięcia i uzupełnienia pewnych zagadnień, a także umożliwić dalsze (samodzielne) pogłębianie wiedzy zawodowej przyszłych nauczycieli.

Z drugiej jednak strony nie należy przeciążać programów studiów nadmierną liczbą problemów z tzw. matematyki nowoczesnej. Praktyka pokazała bowiem, że w wielu przypadkach posiadanie nawet bardzo rozległej wiedzy nie jest równoznaczne z głęboką znajomością i właściwym rozumieniem podstawowych (szkolnych) zagadnień. W tej sytuacji, w trakcie ustalania minimum wiedzy matematycznej

przyszłych nauczycieli, niezmiernie ważne są kryteria, na podstawie których poszczególne zagadnienia matematyczne można uznać za niezbędne lub też niepotrzebne w programach nauczania studiów nauczycielskich.

Przedstawione poniżej kryteria pozwoliły dokonać wstępnego opracowania minimum wiedzy, z jaką należy zapoznać przyszłych nauczycieli matematyki.

(A) Występowanie danego tematu w programach nauczania matematyki w szkole podstawowej lub średniej.

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami, kryterium tego nie należy rozumieć jako chęci przeniesienia do szkoły wyższej wszystkich tematów występujących w szkole podstawowej lub średniej. Mówiąc najogólniej, kryterium to orzeka, że w zakres minimum wiedzy, z którą należy zapoznać nauczyciela, muszą wejść te wszystkie zagadnienia, których będzie on uczył w szkole, przy czym poszczególne tematy powinny być na tyle rozbudowane, aby przyszły nauczyciel poznał poprawne i precyzyjne ujęcie odpowiadających im problemów.

(B) Występowanie danego tematu w programie zajęć fakultatywnych bądź możliwość omawiania danego zagadnienia w ramach szkolnych kółek zainteresowań.

Nauczyciel musi być przygotowany do pracy z uczniami których zainteresowania wykraczają poza obowiązujący program. Musi zatem posiadać umiejętność rozwiązywania trudniejszych zadań, ale nade wszystko odpowiednią wiedzę, pozwalającą na opracowanie (pod względem merytorycznym i dydaktycznym) tych tematów interesujących uczniów, które nie mieszczą się w klasycznym programie szkolnym.

(C) Omówienie danego tematu jest niezbędne dla dobrego zrozumienia zagadnień przerabianych w szkole (w tym również w ramach kółek zainteresowań) lub też stwarza możliwość innego ujęcia (opracowania) poszczególnych partii materiału.

Przez "dobre zrozumienie zagadnień przerabianych w szkole" należy również rozumieć umiejętność rozpatrywania pewnych problemów z punktu widzenia matematyki wyższej. Pozwoli to nauczycielowi prawidłowo ocenić ważność poszczególnych zagadnień oraz orientować się jakie uproszczenia w matematyce są dopuszczalne (np. można mówić, że zbiory liczb wymiernych i niewymiernych mają nieskończenie wiele elementów, ale błędem byłoby stwierdzenie, że liczba elemen-

tów jednego zbioru jest taka sama jak drugiego). Możliwość innego (różnego od klasycznego) ujęcia poszczególnych zagadnień jest natomiast niezmierne ważnym elementem kultury matematycznej, istotnym dla pełnego zrozumienia danych treści matematycznych.

(D) Zapoznanie studentów z danym tematem jest niezbędne ze względu na spójność programu nauczania w szkole wyższej.

Kryterium to obejmuje również partie materiału stanowiące wprowadzenie do teorii mieszczących się w zakresie minimum wiedzy matematycznej, z którą należy zapoznać przyszłych nauczycieli, zakwalifikowane minimum do tego na podstawie innych kryteriów.

(E) Omówienie danego tematu wiąże się z możliwością umieszczenia w przyszłych programach szkolnych.

Jak już wcześniej zaznaczyliśmy, obecni studenci będą czynnymi nauczycielami jeszcze w pierwszym ćwierćwieczu XXI w. Dotychczasowe zmiany programów szkolnych sugerują, że przy opracowywaniu minimum wiedzy przekazywanej przyszłym nauczycielom należy uwzględniać również zmiany, które dopiero mogą nastąpić.

Wyżej przedstawione kryteria dotyczą w zasadzie ustalania minimum wiedzy, z którą należy zapoznać nauczycieli matematyki. Odróżnić od tego trzeba minimum wiedzy, jaką powinien posiadać absolwent wyższej uczelni - specjalista w zakresie nauczania matematyki. Trzeba bowiem pozostawić jakiś margines możliwości zapomnienia, albo równocześnie istnieje pewna granica wiedzy, której osiągnięcie powinno być warunkiem koniecznym uzyskania uprawnień do pracy w charakterze nauczyciela. Istnieją zagadnienia, w których nauczyciel musi posiadać jedynie ogólną orientację i szczegółowa wiedza na ten temat nie jest mu niezbędna. Aby jednak uzyskać taki efekt konieczne jest omówienie tych tematów w ramach zajęć na uczelni. Pozwoli to studentom zrozumieć w ogólnym zarysie, jaka problematyka wiąże się z danym zagadnieniem, zapoznać się z literaturą przedmiotu oraz zapamiętać podstawowe modele w których dana teoria jest realizowana. W działaniach związanych z opracowaniem tematu V.4. RPBP III.30 zapoznaliśmy się m. in. z różnymi próbami ustalenia "minimum wiedzy, jaką powinien posiadać absolwent wyższej uczelni". Minimum to "realizowało się" np. w postaci wymagań stawianych studentom przystępującym do egzaminu magisterskiego. Z naszych obserwacji wynika jednak, że ustalenie tego jest niezmier-

nie trudne i wymaga wielu dodatkowych badań. Problematyka ta wiąże się z tematyką nowego projektu Centralnego Programu Badań Podstawowych na lata 1991-2000 i może być uwzględniona w ramach tego Programu.

Opracowując temat *Minimum wiedzy matematycznej nauczycieli* nie dążyliśmy do sprecyzowania bardzo szczegółowych programów poszczególnych przedmiotów. Wykraczałoby to poza możliwości dość nielicznego zespołu. Chcieliśmy jedynie wymienić tematy, z którymi, naszym zdaniem studenci powinni się bezwzględnie zapoznać. Stąd też w niniejszym opracowaniu nie ma danych charakterystycznych dla typowych programów studiów, a niektóre hasła mogą wchodzić w zakres różnych przedmiotów. Staraliśmy się jednak zachować ogólną spójność problematyki. Nie było także naszym celem rozplanowanie w czasie poszczególnych zagadnień. Niemniej należy podkreślić, że przedstawione wyniki mogą stać się podstawą do dalszej budowy programów studiów, uwzględniających specyfikę konkretnych uczelni.

Zbudowanie ww. kryteriów oczywiście nie rozwiązało w pełni problemu ustalenia minimum wiedzy, z którą należy zapoznać studentów. Stanowiły one co prawda, w wielu przypadkach, ostateczny argument za przyjęciem lub odrzuceniem danego tematu, ale rzetelność badawcza nakazywała stworzyć do tego daleko szersze podstawy. Wśród owych podstaw szczególną rolę odgrywały opinie nauczycieli szkół podstawowych i średnich, dotyczące przydatności poszczególnych tematów w praktyce szkolnej. Prowadzone na ten temat badania miały różnorodną formę: ankiety przeprowadzonej wśród nauczycieli różnych województw, bezpośrednich rozmów z nauczycielami, badania opinii specjalistów z wyższych uczelni i Centrum Doskonalenia Nauczycieli. Były również brane pod uwagę wnioski wypływające z lekcji obserwowanych w szkołach. Mimo dużego znaczenia opinii nauczycieli, nie zrezygnowaliśmy z poszukiwania innych jeszcze elementów mogących wchodzić w zakres podstaw, na podstawie których można określić minimum wiedzy, z jaką należy zapoznać studentów. Działania nasze objęły szeroki wachlarz prac, a ostateczny wynik jest syntezą wszystkich jednostkowych rezultatów. Poddaliśmy głębokiej analizie dotychczas obowiązujące programy nauczania w szkołach wyższych. Dążyliśmy bowiem do tego, aby zrozumieć intencje osób budujących te programy i ustalić przyczyny, którymi kierowali się przy przyjmowaniu konkretnych rozwiązań. Staraliśmy się również ustalić jaki był zakres programów szkolnych w niedalekiej przeszło-

ści oraz w chwili obecnej. Zastanawialiśmy się także nad tym, jakie elementy mogą być w ten program włączone w przyszłości. W rozważaniach tych nie ograniczyliśmy się tylko do badania polskich rozwiązań. W omawianych pracach brali udział specjaliści z wielu dziedzin matematyki. Liczne dyskusje oraz sugestie rozwiązań, choć nie zawsze ujęte w formie pisemnego opracowania, miały znaczący wpływ na ustalenie ostatecznej wersji odpowiedzi na postawione na wstępie pytania.

Nie wydało się celowe przedstawianie w tym miejscu wszystkich szczegółowych wyników cząstkowych, chociaż niektóre z nich były interesujące i zasługiwały na uwagę. Ich zasygnalizowanie wydłużyłoby jednak znacznie niniejsze opracowanie, a nawet mogłoby zaciemnić obraz ostatecznego (głównego) rezultatu.

Przystępując do prezentacji naszych ustaleń dotyczących tematu *Minimum wiedzy matematycznej nauczyciela matematyki*, dokonamy najpierw ogólnego podziału omówionych niżej przedmiotów nauczania na grupy:

I. Analiza matematyczna.
II. Algebra.
III. Geometria.
IV. Rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki.
V. Arytmetyka teoretyczna.
VI. Logika i teoria mnogości.
VII. Funkcje analityczne.
VIII. Topologia.
IX. Równania różniczkowe.
X. Analiza funkcjonalna.
XI. Metody numeryczne.
XII. Elementy informatyki.
XIII. Dydaktyka matematyki.

W ramach każdego z tych przedmiotów przedstawimy obecnie minimum wiedzy, z którą naszym zdaniem należy zapoznać przyszłych nauczycieli matematyki.

I. Analiza matematyczna.

Analiza matematyczna jest i musi być jednym z podstawowych przedmiotów każdych studiów matematycznych. Jest niezbędna dla zapoznania studentów z wieloma innymi przedmiotami matematycznymi i fizyką, ma liczne ważne i ciekawe zastosowania, a także wysokie walory dydaktyczne, wynikające z wykorzystania rozległego i różno-

rodnego aparatu pojęciowego. Ustalając minimum wiedzy nauczyciela z tego przedmiotu kierowaliśmy się przyjętymi wcześniej kryteriami doboru tematów. Dokonując selekcji poszczególnych zagadnień staraliśmy się wybrać najbardziej podstawowe i reprezentatywne definicje oraz twierdzenia w ich typowym, klasycznym ujęciu. Uważamy, że warto zrezygnować z nadmiaru abstrakcji i ogólności na rzecz położenia większego nacisku na stronę ćwiczeniową, gdyż takie podejście jest najbliższe potrzebom zawodowym przyszłych nauczycieli matematyki.

A. Projekt programu

1. Liczby rzeczywiste.

Zbiory ograniczone, kresy. Wartość bezwzględna i jej własności.

2. Ciągi liczb rzeczywistych.

Pojęcie granicy właściwej i niewłaściwej oraz punktu skupienia, ciągi nie posiadające granicy. Warunek Cauchy'ego, działania algebraiczne na granicach, twierdzenie o trzech ciągach, ciągi monotoniczne a zbieżność, liczba e, twierdzenie Bolzano-Weierstrassa, ciągi rekurencyjne, ciąg arytmetyczny i geometryczny.

3. Szeregi liczb rzeczywistych.

Pojęcie zbieżności, jej warunki konieczne i dostateczne. Kryteria zbieżności: d'Alemberta, Cauchy'ego, porównawcze, Leibniza. Zbieżność bezwzględna i warunkowa, problem zmiany porządku sumowania. Iloczyn Cauchy'ego szeregów. Podstawowe przykłady szeregów zbieżnych: szereg geometryczny, harmoniczny, anharmoniczny, ułamki okresowe.

4. Elementarne własności funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej.

Dziedzina, przeciwdziedzina, zbiór wartości, wykres funkcji. Funkcje parzyste, nieparzyste, okresowe. Monotoniczność, różnowartościowość, funkcja odwrotna i złożona, wykresy funkcji $x \to f(x + a)$, $x \to f(x) + a$, $x \to f^{-1}(x)$ etc. Ekstrema lokalne i globalne. Przykłady funkcji: wielomiany, funkcje wymierne, trygonometryczne, cyklometryczne, logarytmiczne, wykładnicze, funkcje nieelementarne: signum, całość i Dirichleta.

5. Granica i ciągłość funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej.

Definicja Heinego i Cauchy'ego, granice jednostronne, warunek

Cauchy'ego. Działania algebraiczne na granicach. Granice $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$ i inne z nimi związane. Ciągłość w punkcie i na zbiorze, ciągłość jednostajna. Funkcja ciągła na przedziałach: twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego o wartościach pośrednich i miejscach zerowych, twierdzenie Weierstrassa o ograniczoności i osiąganiu kresów. Ciągłość jednostajna, twierdzenie Cantora o funkcji ciągłej na przedziale domkniętym. Złożenie i odwrotność funkcji ciągłych. Ciągłość podstawowych funkcji elementarnych. Funkcje cyklometryczne. Informacja o funkcjach hiperbolicznych i ich odwrotnościach.

6. Rachunek różniczkowy funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej.

Pochodna w punkcie, jej sens geometryczny i fizyczny, pochodne jednostronne. Pochodna jako funkcja. Reguły różniczkowania, pochodna superpozycji i funkcji odwrotnej. Pochodne podstawowych funkcji elementarnych. Różniczkowalność a ciągłość i jednostajna ciągłość, przykłady funkcji nieróżniczkowalnych. Różniczka i jej zastosowanie do obliczeń przybliżonych i szacowanie błędów. Twierdzenie Rolle'a oraz Lagrange'a. Pochodne i różniczki wyższego rzędu, sens geometryczny i fizyczny drugiej pochodnej. Wzory: Taylora, Maclaurina z resztami w postaci Lagrange'a, Peano, Cauchy'ego, ich zastosowania do obliczeń przybliżonych i aproksymacja. Reguły de l'Hospitala. Przedziały monotoniczności, warunki konieczne i dostateczne na ekstrema lokalne w punktach nieróżniczkowalności. Wklęsłość oraz wypukłość, punkty przegięcia. Asymptoty, badanie przebiegu zmienności funkcji. Zastosowanie pochodnych do zadań tekstowych, geometrycznych i fizycznych.

7. Ciągi i szeregi funkcyjne.

Zbieżność punktowa i jednostajna, warunki Cauchy'ego zbieżności jednostajnej ciągów i szeregów, kryterium porównawcze Weierstrassa Przejście do granicy pod znakiem sumy, ciągłość granicy (sumy). Informacja o twierdzeniu aproksymacyjnym Weierstrassa. Szereg potęgowy, promień zbieżności i przedział zbieżności, wzory Cauchy'ego-Hadamarda oraz d'Alemberta na promień zbieżności. Różniczkowanie szeregów potęgowych, informacja o twierdzeniu Abela. Szeregi Taylora i Maclaurina, przykłady rozwinięć dla typowych funkcji elementarnych.

8. Rachunek całkowy funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej.

Całka nieoznaczona jako funkcja pierwotna, całkowanie przez części i podstawienie, reguły całkowania. Technika całkowania podstawowych funkcji elementarnych. Sumy górne i dolne Darboux, całka Riemanna, całkowalność funkcji ciągłej lub ograniczonej o skończonej liczbie punktów nieciągłości na przedziale domkniętym. Własności całki Riemanna: działania algebraiczne, twierdzenia o wartości średniej, podstawowe twierdzenie rachunku całkowego. Całka jako funkcja górnej granicy całkowania. Całkowanie granic ciągów i sum szeregów funkcyjnych. Zastosowania całek oznaczonych: pole figury płaskiej, długość krzywej, objętość bryły obrotowej i jej pole powierzchni, zastosowania w fizyce. Przybliżone metody całkowania. Całki niewłaściwe, kryterium całkowe zbieżności szeregów.

9. Funkcje rzeczywiste wielu zmiennych rzeczywistych.

Granica funkcji, ciągłość. Działania algebraiczne na funkcjach mających granice i na funkcjach ciągłych. Ciągłość jednostajna. Pochodne cząstkowe, pochodna kierunkowa. Różniczka zupełna, jej sens geometryczny, zastosowanie do przybliżonych obliczeń i teorii błędów. Twierdzenie o wartości średniej. Pochodne i różniczki wyższych rzędów, twierdzenie Schwarza o pochodnych mieszanych. Wzory: Taylora, Maclaurina. Ekstrema lokalne: warunki konieczne i dostateczne, ekstrema globalne.

10. Odwzorowania z R^n do R^m.

Pochodne cząstkowe, macierz Jacobiego, jakobiany. Różniczkowalność funkcji złożonej, funkcje klasy C^k. Funkcje uwikłane (jednej lub dwóch zmiennych): twierdzenia o istnieniu, różniczkowalność ekstrema lokalne. Ekstrema warunkowe: metoda czynników nieoznaczonych Lagrange'a.

11. Teoria miary.

Ciała i σ-ciała zbiorów. Miara jako σ-addytywna funkcja zbioru, jej własności. Miara zewnętrzna i twierdzenie Caratheodory'ego. Konstrukcja miary Lebesgue'a w R^n: przedziały i ich objętość, miara zewnętrzna Lebesgue'a, miara Lebesgue'a. Zbiory borelowskie, przykład zbioru niemierzalnego. Funkcje mierzalne i działania na nich. Informacja o zbieżności według miary i prawie wszędzie. Twierdzenie Riesza.

12. Całka Lebesgue'a.

Całka funkcji prostej nieujemnej i jej własności. Całka funk-

cji mierzalnej nieujemnej i całka dowolnej funkcji mierzalnej, ich własności. Przechodzenie do granicy pod znakiem całki: lemat Fatou, twierdzenie o zbieżności monotonicznej, twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Całkowanie szeregu wyraz po wyrazie, całka jako funkcja zbioru. Funkcje rzeczywiste całkowalne względem miary Lebesgue'a w R^n: całkowalność w sensie Riemanna, całkowalność w sensie Lebesgue'a, zasada Cavalieriego, twierdzenia Tonellego i Fubiniego o całkach iterowanych, twierdzenie o zamianie zmiennych. Zastosowanie teorii do obliczania objętości brył, pola powierzchni płata w przestrzeni itp.

13. Łuki i krzywe regularne. Całka krzywoliniowa I i II rodzaju, jej związek z całką oznaczoną. Niezależność od drogi całkowania, twierdzenie Greena, zastosowanie do obliczania pól. Krótka informacja o całkach powierzchniowych, twierdzeniu Gaussa-Ostrogradskiego i wzorze Stokesa. Zastosowanie całek krzywoliniowych i powierzchniowych w fizyce.

B. Uwagi szczegółowe

Poniższy komentarz dotyczy celowości umieszczenia poszczególnych haseł programowych w przypadkach budzących ewentualne wątpliwości oraz informacji uzupełniających na temat zakresu i sposobu ich realizacji.

1. Pojęcie kresu dolnego i górnego zbioru jest nieustannie używanym narzędziem analizy. Szczególną uwagę należy zwrócić na rozróżnianie kresu górnego (dolnego) i elementu największego (najmniejszego). W ramach hasła "wartość bezwzględna" należy dążyć do opanowania umiejętności rozwiązywania równań i nierówności modułowych oraz ich układów. Znaczną uwagę trzeba również poświęcić technice szacowania.

2. Należy opanować umiejętność obliczania granic ciągów liczbowych podanych w sposób jawny i rekurencyjny, jak również nauczyć się ustalania, na podstawie definicji, zbieżności takich ciągów.

3. Niezbędne jest wyrobienie prawidłowego rozumienia pojęcia szeregu zbieżnego i rozbieżnego. Na szczególną uwagę zasługują szeregi geometryczne oraz rozwinięcia liczb rzeczywistych w nieskończone ułamki dziesiętne (również w innych systemach pozycyjnych).

4. Tematyka tego paragrafu powinna być zrealizowana z dużą

starannością, z uwzględnieniem różnorodnych przykładów. Metody elementarne badania własności funkcji są bowiem nie mniej ważne niż np. środki rachunku różniczkowego, a w wielu przypadkach są jedynym narzędziem zastosowania.

5. Obok tradycyjnych zadań związanych z obliczaniem granic funkcji należy opanować umiejętność posługiwania się obydwiema definicjami granicy w prostych sytuacjach rachunkowych i teoretycznych. Pojęcie ciągłości wymaga ilustracji różnorodnymi przykładami funkcji - ciągłych i nieciągłych. Proponujemy także omówienie przybliżonych metod obliczania pierwiastków funkcji rzeczywistych ciągłych na przedziale domkniętym.

6. Tematyka tego paragrafu wyczerpuje wszystkie podstawowe zagadnienia związane z pojęciem pochodnej funkcji rzeczywistej jednej zmiennej rzeczywistej. Należy ją szeroko zilustrować różnorodnymi zadaniami, w których obok funkcji elementarnych powinny wystąpić także funkcje nieelementarne, np. zdefiniowane "kawałkami" na podprzedziałach dziedziny.

7. Ciągi i szeregi funkcyjne są naturalnym uogólnieniem ciągów i szeregów liczbowych. Stanowią one ważne narzędzie w teorii funkcji rzeczywistych i zespolonych, w równaniach różniczkowych teorii aproksymacji, topologii, analizie funkcjonalnej, teorii miary itd. Szczególnie ważne są szeregi potęgowe będące uogólnieniem wielomianów lub szeregów geometrycznych, a ich zastosowanie pozwala rozszerzyć definicje np. funkcji wykładniczej oraz funkcji trygonometrycznych na dziedzinę zespoloną. Szeregi Taylora i Maclaurina pozwalają w efektywny sposób otrzymać rozwinięcia różnych funkcji w szeregi potęgowe, a ponadto uzyskujemy cenne wzory pozwalające obliczać przybliżenia liczb π i e.

8. W ramach techniki całkowania należy opanować umiejętność obliczania funkcji pierwotnych metodą całkowania przez części i przez podstawienie. Możliwość wykorzystania komputerów powinna być zachętą do omówienia przybliżonych metod całkowania.

9. Pojawiające się tu definicje i twierdzenia stanowią uogólnienia analogicznych faktów z teorii funkcji jednej zmiennej, ale nie są to na ogół uogólnienia banalne, a droga prowadząca do nich jest znacznie trudniejsza, wymaga istotnego zaangażowania środków topologii i algebry, co ma ogromne walory dydaktyczne. Pojawiają się również liczne różnice, w związku z czym nowe zjawiska trzeba

ilustrować przykładami (pojęcie granicy, istnienie pochodnej kierunkowej a różniczkowalność, twierdzenie o wartości średniej, ekstrema lokalne itd). W zadaniach rachunkowych proponujemy położyć szczególny nacisk na funkcje dwóch i trzech zmiennych, z uwagi na ich względną prostotę i ważność tych przypadków.

10. Problematyka ta jest naturalną kontynuacją tematów części 9 i stanowi ich ukoronowanie. Ze względu na stopień jej trudności, proponujemy ograniczenie się do niezbędnego minimum, do którego oprócz podstawowego aparatu pojęciowego zaliczamy funkcje uwikłane i ekstrema warunkowe. Uważamy za wystarczające ograniczenie się do przykładów funkcji dwóch i trzech zmiennych. Pogląd ten w zasadzie zgodny jest ze zdaniem wyrażonym przez ankietowanych nauczycieli, którzy w znacznej większości opowiedzieli się za informacyjnym charakterem tej części materiału.

11. 12. Znajomość teorii miary i całki jest niezbędnym elementem wykształcenia każdego matematyka. Teoria ta jest niezbędnym narzędziem np. w nowoczesnej probabilistyce, analizie funkcjonalnej, teorii optymalizacji itd. Jej realizacja wzbogaca zrozumienie pojęcia zbioru, działań na zbiorach, zagadnienia ich mierzenia. Ze względu na poważne wady, miara Peano-Jordana jest mało przydatna do wspomnianych zastosowań i dlatego też opowiadamy się za tym, by w ramach analizy matematycznej zapoznać studentów z teorią miary i całki Lebesgue'a. Uważamy, że takie ujęcie materiału może pomóc przyszłemu nauczycielowi matematyki lepiej i dokładniej zrozumieć pojęcie miary Peano-Jordana, która występuje w programach szkolnych i dlatego bez wątpienia powinna być studentom przedstawiona. Proponujemy jednak omówić ją w ramach innego przedmiotu, np. jako jedno z zagadnień dydaktyki szczegółowej.

13. Problematyka tego paragrafu jest jednym z najtrudniejszych działów analizy, jej realizacja wymaga zastosowania rozbudowanego aparatu pojęciowego, którego wprowadzenie jest bardzo czasochłonne. W tej sytuacji uważamy, że należy położyć główny nacisk na relatywnie prostsze całki krzywoliniowe, przy jednoczesnym potraktowaniu w sposób informacyjny całek powierzchniowych. Dodatkowym argumentem za takim podejściem jest fakt, że tylko całki krzywoliniowe są niezbędne dla spójności studiów matematycznych (teoria funkcji zmiennej zespolonej).

II. Algebra.

Algebra wraz z algebrą liniową stanowi jeden z głównych przedmiotów nauczania, realizowanych w ramach studiów matematycznych. Rola tego przedmiotu nie ogranicza się przy tym tylko do przekazania pewnego pensum wiadomości, lecz poprzez swoje bliskie związki z geometrią stwarza doskonałą możliwość łączenia intuicji oraz rozumowań dedukcyjnych, podkreślenia znaczenia i powiązań obu tych elementów wykształcenia matematycznego.

Poniżej przedstawimy układ haseł, których realizacja niezbędna jest do dobrego przygotowania zawodowego przyszłych nauczycieli.

A. Projekt programu

1. Działania.

Działania jako funkcje jednej, dwóch lub wielu zmiennych. Działania wewnętrzne i zewnętrzne. Działania na liczbach, zbiorach, zdaniach, funkcjach, odcinkach, kątach, wektorach, przekształceniach. Własności działań: łączność, przemienność, istnienie elementu neutralnego, istnienie elementu odwrotnego względnie przeciwnego do danego. Działania odwrotne do danego. Rozdzielność jednego działania względem drugiego. Działania w matematyce elementarnej.

2. Struktury algebraiczne.

Półgrupy, grupy, grupy abelowe. Pierścienie. Ciała. Przestrzenie liniowe. Algebry. Przestrzenie afiniczne.

3. Przestrzenie liniowe i przestrzenie afiniczne nad R^n.

Liniowa zależność i liniowa niezależność wektorów. Podprzestrzenie liniowe i afiniczne. Baza i wymiar przestrzeni liniowej. Układ bazowy przestrzeni afinicznej. Izomorfizmy przestrzeni liniowych i afinicznych. Układ współrzędnych przestrzeni liniowej i przestrzeni afinicznej.

4. Macierze i wyznaczniki, układy równań liniowych.

Macierze, działania na macierzach, algebra macierzy. Wyznaczniki i ich własności. Twierdzenie Laplace'a. Twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy. Macierz odwrotna. Rząd macierzy. Układy równań liniowych. Wzory Cramera. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego. Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą wyznaczników i metodą eliminacji. Układy liniowe jednorodne. Informacje o programowaniu liniowym.

5. Przekształcenia liniowe i afiniczne.

Związki między tymi przekształceniami. Obraz i jądro przekształ-

cenia liniowego. Przestrzeń przekształceń liniowych. Algebra endomorfizmów liniowych. Macierze przekształceń. Funkcjonały liniowe. Przestrzeń sprzężona danej przestrzeni liniowej. Zmiana bazy przestrzeni liniowej i macierz przejścia. Wyznacznik endomorfizmu liniowego. Orientacja przestrzeni liniowej nad ciałem R. Podprzestrzenie niezmiennicze. Wektory i wartości własne. Przekształcenia wieloliniowe.

6. Funkcjonały i formy.

Funkcjonały i formy liniowe oraz dwuliniowe. Funkcjonały kwadratowe i formy kwadratowe. Funkcjonały kwadratowe i formy kwadratowe w przestrzeniach rzeczywistych.

7. Przestrzenie euklidesowe.

Iloczyn skalarny, określenie przestrzeni euklidesowej. Norma i metryka w przestrzeni euklidesowej. Układ ortonormalny, baza ortonormalna. Izomorfizmy i endomorfizm w przestrzeniach euklidesowych. Iloczyn wektorowy (w R^3).

8. Teoria grup.

Grupy permutacji, grupy przekształceń. Półgrupy. Homomorfizmy i izomorfizmy grup. Podgrupy normalne. Obraz i jądro homomorfizmu. Grupy ilorazowe. Grupy cykliczne.

9. Pierścienie.

Podpierścienie. Homomorfizmy i izomorfizmy pierścieni. Ideał pierścienia. Informacje o różnych rodzajach pierścieni.

10. Ciała.

Podciała. Ciała skończone. Podciała proste. Charakterystyka ciała. Izomorfizm ciał. Rozszerzenie skończone ciała. Rozszerzenia algebraiczne i przestępne. Dołączenie elementu do ciała. Ciało elementów algebraicznych. Ciała liczbowe. Dołączenie do ciała pierwiastka wielomianu. Ciało rozkładu wielomianu. Domknięcie algebraiczne ciała. Ciało algebraiczne domknięte.

11. Rozwiązalność równań.

Informacje o rozwiązalności równań przez pierwiastniki.

B. Uwagi szczegółowe

1. Z. Krygowska w swoim *Zarysie dydaktyki matematyki* tak określa ogólny cel nauczania matematyki: "Matematyka rozwija się coraz bardziej w kierunku ogólnej nauki o strukturach. [...] Znajomość i

opanowanie tych struktur, posługiwanie się nimi w ujmowaniu rzeczywistości, to prawdziwe cele nauczania matematyki" [1].

Struktury matematyczne są ściśle związane z pojęciem działania. Już w klasie I szkoły podstawowej wprowadza się działania na liczbach naturalnych, a w klasie II - na zbiorach. W klasie IV szkoły podstawowej mówi się o dodawaniu i mnożeniu liczb wymiernych nieujemnych oraz zapoznaje się uczniów z działaniami w pełnym zbiorze liczb całkowitych. W klasie V występują w formie informacyjnej nowe działania, takie jak potęgowanie i pierwiastkowanie. Pełniejsze informacje w tym zakresie pojawiają się w dalszych klasach szkoły podstawowej. W klasie VI mówi się o dodawaniu wektorów i ich mnożeniu przez liczby, a więc mamy tu do czynienia z działaniem zewnętrznym. W tej samej klasie przy sposobności rozwiązywania równań i nierówności stosujemy dodawanie prostych wyrażeń algebraicznych oraz mnożenie takich wyrażeń przez liczby. W klasie VIII wykonuje się działania w zbiorze wyrażeń wymiernych. W liceum występują działania na przekształceniach (klasa I i II), na wielomianach i ciągach (klasa II) oraz ogólnie na funkcjach (klasa III). W klasie III wprowadza się nowe działanie: logarytmowanie.

2. Praktycznie najprostsze struktury matematyczne, takie jak półgrupa, występują już w klasie I szkoły podstawowej. W klasie IV mamy do czynienia z grupą multyplikatywną liczb wymiernych dodatnich, a także z pierścieniem liczb całkowitych. W klasie VI wprowadza się, chociaż w formie niepełnej, przestrzeń liniową. Mimo że już w klasie VI podaje się przykłady liczb niewymiernych, to ciało liczb rzeczywistych, w ujęciu praktycznym, zjawia się dopiero w klasie I szkół ponadpodstawowych. W profilu matematyczno-fizycznym uczniowie zapoznają się także z ciałem liczb zespolonych (klasa III).

Powyższe wyjaśnienia w pełni uzasadniają wprowadzenie informacji podanych w rozdz. 1 i 2 (działania i struktury algebraiczne), a także częściowo tego, co podano w rozdziałach następnych. Nauczyciel, który realizuje praktycznie i w formie poglądowej odpowiednie ww. partie materiału, powinien znać matematycznie poprawne opracowanie tych pojęć, tzn. określenia aksjomatyczne oraz podstawowe własności występujących w nauce szkolnej struktur algebraicznych.

Pojęcie algebry jako struktury matematycznej (rozdz. 2) nie jest bezpośrednio związane z programem szkolnym. Jest to jednak pojęcie użyteczne w różnych działach matematyki wyższej i w sposob

naturalny wiąże się z pojęciami przestrzeni liniowej i pierścienia. Dlatego warto o tym wspomnieć.

3. Pojęcie przestrzeni afinicznej jest bezpośrednio związane z programem geometrii szkolnej. Układ złożony z płaszczyzny i przesunięć lub przestrzeni (trójwymiarowej) i przesunięć, to przykłady przestrzeni afinicznych, z którymi mamy do czynienia praktycznie w formie informacyjnej już w klasie VI szkoły podstawowej, a następnie w postaci rozszerzonej, bardziej pełnej, w liceum. Należy zwrócić szczególną uwagę na pojęcie układu współrzędnych przestrzeni afinicznej. W popularnym ujęciu podręcznikowym przez układ współrzędnych, np. na płaszczyźnie, rozumie się parę osi liczbowych wzajemnie prostopadłych. Jest to ujęcie niewłaściwe. Nauczyciel może zrozumieć, czym jest układ współrzędnych, jeżeli wie, że jest to izomorfizm dwóch przestrzeni afinicznych.

4. Rozdział dotyczący macierzy, wyznaczników i układów równań liniowych jest luźno związany z materiałem szkolnym. Wprawdzie stosuje się nieraz metodę wyznaczników przy rozwiązywaniu prostych układów równań liniowych, ale ważne jest tu to, że znajomość materiału występującego w tym rozdziale jest niezbędna w wielu działach matematyki wyższej (np. w analizie matematycznej, w teorii równań różniczkowych), a także stanowi częściowo naturalne uzupełnienie programu szkoły średniej. Wiadomości te mają również praktyczne zastosowanie w zagadnieniach ekonomicznych (programowanie liniowe).

5. 6. Rozdziały 5 i 6 również zawierają materiał przydatny w innych działach matematyki wyższej, np. w analizie matematycznej i analizie funkcjonalnej. Pojęcie orientacji przestrzeni liniowej jest ważne w fizyce. Uwzględniając poglądy ankietowanych nauczycieli, tematykę dotyczącą przekształceń liniowych i afinicznych oraz funkcjonałów i form liniowych, jako mniej związaną z nauczaniem szkolnym, można potraktować informacyjnie.

7. Materiał tego rozdziału wiąże się z geometrią szkolną (iloczyn skalarny), a także zawiera informacje użyteczne w topologii (przestrzeń metryczna) i analizie funkcjonalnej.

8-10. Ostatnie rozdziały poświęcone są badaniom podstawowych struktur algebraicznych, takich jak grupy, pierścienie i ciała. Tu znów dają się zauważyć ścisłe związki z materiałem szkolnym (np. grupy przekształceń), jak i zastosowania w dalszych studiach matematycznych, które często w znacznej mierze bazują na różnych

faktach z algebry. Wiadomości, jakie powinien mieć nauczyciel, nie mogą się ograniczać do tego, co występuje w programach szkolnych. Obowiązuje go znajomość faktów blisko związanych z wiedzą szkolną i stanowiących jej naturalne uzupełnienie i rozszerzenie. Nauczyciel powinien wiedzieć np. że oprócz ciał liczbowych istnieją także inne tzw. ciała abstrakcyjne, a w szczególności ciała skończone. Z tym wiąże się pojęcie charakterystyki ciała.

Już w szkole wspomina się często, że liczba π jest przestępna. Wobec tego nauczyciel musi mieć pewne wiadomości o elementach algebraicznych i przestępnych względem danego ciała.

11. Uczeń liceum o profilu matematyczno-fizycznym dowiaduje się, że w ciele liczb zespolonych każdy trójmian kwadratowy ma pierwiastek. Nauczyciel powinien wiedzieć na ten temat więcej. Przedstawienie pełnej teorii Galois jest dosyć uciążliwe. Jest rzeczą naturalną, że dociekliwy uczeń może zapytać, jakie równania algebraiczne można rozwiązać używając metody, którą stosuje się do równania kwadratowego. Stąd wynika konieczność choćby wzmianki o rozwiązywalności równań algebraicznych przez pierwiastniki, o ciele algebraicznie domkniętym oraz informacji o tym, że dla każdego ciała istnieje jego rozszerzenie będące ciałem algebraicznie domkniętym.

III. Geometria.

Trudno jest przecenić rolę i znaczenie geometrii w procesie kształtowania wyobraźni oraz tworzenia korelacji między intuicją matematyczną a rozumowaniem dedukcyjnym. Na przekór temu, systematycznie spada udział geometrii w procesie edukacji matematycznej na wszystkich szczeblach nauczania. Obserwuje się przy tym bardzo niepokojące zjawisko wprowadzania geometrii analitycznej we wszystkie miejsca, gdzie w ogóle można mówić o tym przedmiocie, rugując tym samym ujęcie syntetyczne. Przedstawione przez nas poniżej propozycje, mają (chociaż tylko w niewielkim stopniu) odwrócić te niekorzystne tendencje.

Uważamy zatem, że w toku studiów trzeba omówić ze studentami następujące problemy.

A. Projekt programu

1. Konstrukcje klasyczne (cyrklem i liniałem) z wykorzystaniem

różnych metod, jak metody przekształceń lub wykorzystania zbiorów punktów spełniających pewną własność. Przykłady konstrukcji środkami równoważnymi środkom klasycznym, np. samym cyrklem, lub konstrukcje Steinera.

2. Izometrie płaszczyzny i przestrzeni, rozkład izometrii na symetrie. Klasyfikacja izometrii płaszczyzny i przestrzeni. Przystawanie figur. Cechy przystawania figur. Niezmienniki izometrii. Ciągłość izometrii.

3. Podobieństwa płaszczyzny i przestrzeni, rozkład podobieństwa na izometrię i jednokładność. Podobieństwo figur, cechy podobieństwa figur. Niezmienniki podobieństw.

4. Przekształcenia afiniczne płaszczyzny i przestrzeni oraz ich szczególne przypadki, jak powinowactwo i ścięcie. Rozkład przekształcenia afinicznego na powinowactwa. Obrazy figur w danym powinowactwie. Wyznaczanie przekształcenia afinicznego na podstawie obrazów danych figur w tym przekształceniu.

5. Odwzorowanie figury przestrzennej na płaszczyźnie poprzez:
a) rzutowanie równoległe,
b) rzutowanie prostopadłe,
c) rzuty Monge'a,
d) rzut perspektywiczny (środkowy).

6. Długość odcinka, pole figury płaskiej, objętość bryły, długość łuku okręgu, pole powierzchni wielościanu i niektórych figur obrotowych. Miara kąta płaskiego (w stopniach i radianach), miara kąta bryłowego, miara obrotu. Miara kąta między wektorami, nachylenie prostej do płaszczyzny, nachylenie dwu prostych, dwu płaszczyzn, dwu kierunków.

7. Funkcje trygonometryczne w ujęciu geometrycznym i aksjomatycznym. Tożsamości trygonometryczne w postaci równości, mniejszości itp. (warunkowe i bezwarunkowe). Równania i nierówności trygonometryczne. Zastosowania trygonometrii do rozwiązywania zadań z planimetrii i stereometrii. Funkcje cyklometryczne. Elementy trygonometrii sferycznej.

8. Przestrzenie metryczne, przykłady przestrzeni metrycznych nieeuklidesowych, własności metryki euklidesowej. Odległość punktu od figury, w szczególności punktu od prostej i od płaszczyzny. Odległość między figurami, zwłaszcza między prostymi skośnymi oraz między prostymi i płaszczyznami równoległymi.

9. Wielościany, ich siatki, modele, szkielety. Wielościany foremne, półforemne, wypukłe, przykłady wielościanów niewypukłych, np. gwiaździstych.

10. Stożkowe, ich różne określenia, w szczególności jako przekroje powierzchni stożka obrotowego płaszczyzną. Ogniska, kierownice, mimośród, parametr stożkowej. Styczna do stożkowej, średnice sprzężone, osie symetrii i środek symetrii stożkowej.

11. Kwadryki, przykłady figur obrotowych. Charakterystyczne przekroje tych powierzchni.

12. Prostopadłość i równoległość prostych i płaszczyzn.

13. Proste i okręgi na płaszczyźnie. Płaszczyzny i sfery w przestrzeni.

14. Rachunek wektorowy z iloczynem wektorowym i mieszanym.

15. Inwersja. Rzut stereograficzny.

16. Współrzędne kartezjańskie punktu, równania figur we współrzędnych kartezjańskich. Współrzędne biegunowe, cylindryczne, sferyczne.

17. Różne twierdzenia i zagadnienia, jak np. twierdzenie Desargues'a, Pappusa-Pascala, Cevy, Menelausa. Okrąg Apoloniusza, opisywalność czworokąta na okręgu i jego wpisywalność w okrąg, styczna i sieczna z danego punktu do okręgu, zbiór wierzchołków kątów, pod jakimi widać dany odcinek itp.

B. Uwagi szczegółowe

1. Konstrukcje klasyczne znane były w geometrii jeszcze przed Euklidesem i występują w programach nauczania do chwili obecnej. Stanowią wdzięczny materiał do zastosowania metody poglądowości w nauczaniu matematyki.

2. Przystawanie figur występuje w *Elementach* Euklidesa, a w programach szkolnych spotykamy je do czasów najnowszych. Izometrie pojawiły się w geometrii niedawno, ale wiążą się z przystawaniem tak ściśle, że przy jego omawianiu nie sposób o nich nie mówić. Ponadto izometrie mają wiele ciekawych własności pozwalających otrzymywać nieoczekiwanie prosto różne twierdzenia geometryczne.

3. Podobieństwo figur jest związane z podobieństwem przestrzeni zawierającej je, podobnie jak przystawanie figur z izometrią zawierającej je przestrzeni. Dlatego też powinny występować w procesie nauczania jednocześnie. Podobieństwo figur, podobnie jak

przystawanie, występuje w programach nauczania od czasów najdawniejszych aż do chwili obecnej.

4. Przekształcenia afiniczne spotyka się w nowszych programach sporadycznie, w ograniczonym zakresie i przeważnie jako materiał nadobowiązkowy. Najczęściej występuje powinowactwo (osiowe lub płaszczyznowe). Dla urozmaicenia wskazane byłoby podać inny przykład przekształcenia afinicznego, jakim jest ścięcie. Zachowuje ono pole i objętość figury, choć nie jest izometrią.

5. Odwzorowania figur przestrzennych na płaszczyźnie są niezbędne w nauczaniu gęometrii przestrzennej. Najprostszym z nich jest rzutowanie równoległe i jego szczególny przypadek - rzut prostokątny. Rzuty Monge'a są używane przez techników i inżynierów. Rzut środkowy jest najtrudniejszy z nich, ale jest "najwierniejszy", co jest cechą nie zasługującą na zbagatelizowanie.

6. Zagadnienia związane z mierzeniem figur (długość, pole, objętość itp.) spowodowały powstanie geometrii i do czasów obecnych nic nie straciły na aktualności. Mają praktyczne zastosowania i słusznie występują we wszystkich programach.

7. Funkcje trygonometryczne są powszechnie stosowane w obliczeniach figur geometrycznych i słusznie znajdują się w programach nauczania. Dokładniejsze ich poznanie, przez różne ujęcia, przez rozszerzenie o równania trygonometryczne i o funkcje do nich odwrotne jest więc wskazane.

8. Pojęcie przestrzeni metrycznej jest uogólnieniem przestrzeni fizycznej i euklidesowej. Istnieje wiele ciekawych jej modeli mogących zainteresować młodzież. Pozostałe tematy występują w programach i podręcznikach matematyki.

9. Wielościan jest pojęciem mającym wiele modeli w przestrzeni fizycznej, w szczególności zaś przedmiotem zainteresowania krystalografii i architektury.

10. Elementarne wiadomości o stożkowych występują w programach nauczania. Pogłębione wiadomości są przydatne jako źródło zadań rozszerzających program, często mających praktyczne zastosowania.

11. Kwadryki wykorzystuje się w architekturze a ponadto znajdują zastosowania w innych działach matematyki.

12. Równoległość i prostopadłość prostych i płaszczyzn to tematy mające praktyczne zastosowania. Występują w programach od czasów najdawniejszych do chwili obecnej.

13. Wzajemne położenie prostej i okręgu względem tej samej

płaszczyzny to temat pojawiający się już w programach szkoły podstawowej. Odpowiednik przestrzenny dotyczący sfer i płaszczyzn, oprócz zastosowań praktycznych może dobrze służyć do ćwiczenia wyobraźni przestrzennej.

14. Rachunek wektorowy pozwala na znaczne uproszczenie wzorów i rachunków, jest coraz powszechniej używany już w szkole podstawowej. Dostarcza modeli przestrzeni liniowej łatwo dostępnych intuicji. Ostatni podręcznik matematyki do klasy IV licealnej podaje aksjomatykę geometrii traktowanej jako przestrzeń liniowa. Iloczyn wektorowy znajduje zastosowanie w fizyce.

15. Inwersja i rzut stereograficzny są przykładami przekształceń konforemnych nie będących podobieństwami. Ponadto inwersja daje się użyć do konstrukcji, a rzut stereograficzny ma zastosowanie w kartografii.

16. Metoda współrzędnych jest ostatnio coraz szerzej stosowana w nauczaniu matematyki. Występuje w jej programach zarówno na poziomie podstawowym, jak i średnim. Poznanie równań tworów stopnia 1 i 2 jest niezbędnym uzupełnieniem wiadomości o tych figurach. Dla lepszego poznania metody współrzędnych wskazane jest zastosowanie jej do tworów wyższych stopni, a także do figur przestępnych. Współrzędne krzywoliniowe mają zastosowanie w geografii i astronomii. Oczywiście metoda ta powinna być powszechnie wykorzystywana również przy omawianiu wszystkich wcześniej przedstawionych tematów geometrycznych.

17. Występuje tu bardzo szeroki wachlarz tematów, począwszy od zawartych w obecnym programie do od dość dawna nieobecnych w programach, ale ciągle mających zastosowania w zadaniach konkursowych olimpijskich itp.

Warto na koniec podkreślić, że przedstawiona propozycja programu nauczania geometrii została przez ankietowanych nauczycieli oceniona bardzo wysoko. Niemal wszyscy uznali, że żadnego z przytoczonych tematów pominąć nie można, a równocześnie nikt nie proponował rozszerzenia jej o nowe zagadnienia, uznając propozycję za kompletną.

III. Geometria różniczkowa.

Geometria krzywych i powierzchni jest naturalnym przedłużeniem elementarnej geometrii euklidesowej nauczanej w szkole. Nie-

które pojęcia (np. wektora stycznego do krzywej) mają zastosowanie w fizyce, nawet na poziomie szkolnym.

A. Projekt programu

1. Krzywe w przestrzeni trójwymiarowej. Krzywa regularna, długość krzywej, parametryzacja naturalna, styczna, krzywizna i skręcenie, trójścian Freneta, wzory Freneta, położenie krzywej względem trójścianu Freneta. Przykłady. Krzywe płaskie. Orientacja i krzywizna.

2. Powierzchnie w przestrzeni trójwymiarowej. Powierzchnia regularna, płaszczyzna styczna i prosta normalna, pierwsza forma podstawowa, odwzorowanie Gaussa, pole powierzchni, krzywizna Gaussa. Druga forma podstawowa, krzywizna krzywej na powierzchni, krzywizna geodezyjna i krzywizna normalna. Linie geodezyjne i ich własności ekstremalne. Krzywizny główne i linie krzywiznowe. Krzywizna średnia i jej interpretacja geometryczna (wariacja pola). Theorema Egregium. Przykłady.

3. Elementy geometrii globalnej. Twierdzenie o czterech wierzchołkach. Wzory Croftona dla krzywej płaskiej. Twierdzenie Gaussa-Bonneta. Charakterystyka Eulera powierzchni zamkniętej. Klasyfikacja powierzchni zamkniętych w R^3.

4. Geometria w wyższych wymiarach. Hiperpowierzchnia wielowymiarowa, przestrzeń styczna, struktura riemannowska. Pojęcie abstrakcyjnej rozmaitości różniczkowej.

B. Uwagi szczegółowe

Problemy dotyczące krzywych i powierzchni stanowią systematyczny wykład podstaw lokalnej geometrii różniczkowej w wymiarze 2 i 3; podstaw, bez których o geometrii różniczkowej w ogóle nie można mówić. Hasła z zakresu elementów geometrii globalnej dają pewne, stosunkowo proste, zastosowania teorii lokalnej; pokazują że z teorii lokalnej wynikają wnioski o globalnej strukturze badanych obiektów (krzywych i powierzchni).

Elementy geometrii wielowymiarowej należy traktować informacyjnie, pokazując, że rozważania analogiczne do wcześniejszych są możliwe w przestrzeniach o wymiarze wyższym niż 3.

IV. Rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki.

Rachunek prawdopodobieństwa w ujęciu miarowym jest dyscypliną stosunkowo młodą. Posiada jednak wiele wartości decydujących o tym, że jego poznanie stanowi istotny element w wykształceniu matematyka - w tym również przyszłego nauczyciela matematyki. Aksjomatyzacja Kołmogorowa włączyła tradycyjny rachunek prawdopodobieństwa do uporządkowanej, sformalizowanej matematyki, charakteryzującej się jasnością pojęć i precyzją wypowiedzi. Istotny jest także pewien integracyjny charakter rachunku prawdopodobieństwa. Zawiera on bowiem elementy teorii miary, funkcji rzeczywistych, funkcji zespolonych, topologii oraz analizy funkcjonalnej. Jego bardziej tradycyjne ujęcie, które wyrosło z praktycznej konieczności analizowania zjawisk przypadkowych, pozwala na kształcenie pewnego specyficznego sposobu postrzegania i analizowania przyrody i świata, tzw. myślenia probabilistycznego. Rachunek prawdopodobieństwa stworzył podstawy teoretyczne do rozwoju m. in. statystyki i teorii procesów stochastycznych. Wnioskowanie statystyczne czy prognozowanie na podstawie powyższych teorii stanowi dziedzinę wiedzy o istotnych walorach praktycznych i znajduje zastosowanie niemal we wszystkich aspektach życia i działalności ludzkiej. Należy zatem położyć nacisk na zapoznanie studentów z podłożem empirycznym, stanowiącym korzenie tej dyscypliny wiedzy. Konieczne jest rozumienie rachunku prawdopodobieństwa jako abstrakcyjnej teorii dotyczącej teoretycznych modeli różnorodnych doświadczeń losowych, interpretacji istotnych twierdzeń, praw wielkich liczb, a także centralnych twierdzeń granicznych, które stanowią jądro teorii prawdopodobieństwa. Chociaż propozycja bazuje na pojęciu zmiennej losowej o ciągłym rozkładzie i wartości oczekiwanej jako całki względem σ-przeliczalnej miary (co jest zgodne z nowszymi tendencjami w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa), to podkreślamy jednak konieczność zapoznania się przyszłego nauczyciela z różnymi twierdzeniami specyficznymi dla rozkładów dyskretnych, np. przybliżenie Poissona rozkładu dwumianowego czy twierdzenie Moivre'a-Leplace'a.

A. Projekt programu

1. Uwagi wstępne.

Rys historyczny rozwoju rachunku prawdopodobieństwa. Przedmiot i charakter badań. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa. Problema-

tyka i zakres klasycznego rachunku prawdopodobieństwa. Dyskretna przestrzeń prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo geometryczne. Prawdopodobieństwo jako miara. Definicja aksjomatyczna.

2. Abstrakcyjna przestrzeń z prawdopodobieństwem.

Pojęcia zdarzenia elementarnego, przestrzeni zdarzeń elementarnych. Pojęcie zdarzenia losowego. Ciała i σ-ciała zdarzeń losowych. Zbiór a zdarzenie. Własności funkcji prawdopodobieństwa (nieujemność, unormowanie, σ-addytywność). Pojęcie rozkładu prawdopodobieństwa na prostej. Dystrybuanta rozkładu. Własności dystrybuanty. Klasyfikacja rozkładów na prostej. Rozkłady prawdopodobieństwa R^n. Przykłady. Informacja na temat twierdzenia o "rozszerzaniu miary".

3. Prawdopodobieństwo warunkowe.

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite. Prawdopodobieństwo przyczyny, wzór Bayesa. Metody graficzne rozwiązywania zadań na prawdopodobieństwo całkowite.

4. Stochastyczna niezależność zdarzeń.

Zdarzenia niezależne. Niezależne układy zdarzeń. Niezależne rodziny zdarzeń. Schemat Bernoulliego. Iloczyn kartezjański przestrzeni z prawdopodobieństwem.

5. Zmienne losowe. Podstawowe własności.

Pojęcie zmiennej losowej o wartościach w R i w R^N. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej oraz dystrybuanta tego rozkładu. Przykłady zmiennych losowych o rozkładach: dwumianowym, Poissona, jednostajnym, Gaussa. Przybliżenie rozkładu dwumianowego rozkładem Poissona. Wartość oczekiwana, momenty zmiennej losowej.

6. Niezależność zmiennych losowych.

Niezależność układu zmiennych losowych. Niezależność ciągu zmiennych losowych. Wartość oczekiwana iloczynu niezależnych zmiennych losowych. Kowariancja zmiennych losowych. Rozkład sumy, rozkład iloczynu niezależnych zmiennych losowych.

7. Zbieżność ciągu zmiennych losowych według prawdopodobieństwa.

Nierówność Czebyszewa. Słabe prawo wielkich liczb (dla ciągu niezależnych zmiennych losowych o jednakowych układach). Słabe prawo wielkich liczb dla prób Bernoulliego. Zbieżność ciągu zmiennych losowych z prawdopodobieństwem 1. Nierówność Kołmogorowa. Kryterium zbieżności z prawdopodobieństwem 1 ciągu zmiennych losowych. Mocne prawo wielkich liczb.

8. Słaba zbieżność rozkładów.

Pojęcie słabej zbieżności rozkładów oraz słabej zbieżności dystry-

buant. Warunki równoważne słabej zbieżności rozkładów. Zależności między trzema rodzajami zbieżności: słabej, stochastycznej, z prawdopodobieństwem 1.

9. Funkcje charakterystyczne.

Pojęcie funkcji tworzącej, związek z momentami. Funkcje charakterystyczne rozkładów w R. Własności funkcji charakterystycznej. Twierdzenie o jednoznaczności, twierdzenie o ciągłości. Wzory na odwrócenie. Związek funkcji charakterystycznej z momentami. Funkcje charakterystyczne znanych rozkładów. Informacja o twierdzeniu Bochnera.

10. Centralne twierdzenie graniczne.

Twierdzenie Lindeberga-Levy'ego. Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a jako wniosek z twierdzenia Lindeberga-Levy'ego. Znaczenie centralnego twierdzenia granicznego dla statystyki matematycznej.

11. Łańcuchy Markowa.

Błądzenie losowe, liczydło Engla, gry losowe. Informacja o procesach stochastycznych z ciągłym czasem. Klasyfikacja oraz przykłady ważnych procesów stochastycznych.

12. Statystyka matematyczna.

Pojęcie statystyki. Zupełność i dostateczność. Statystyki próbkowe - momenty z próby. Dystrybuanta empiryczna. Gry statystyczne. Randomizacja. Optymalne reguły decyzyjne. Klasy reguł decyzyjnych: bayesowskie, minimaksowe. Zagadnienie estymacji. Estymatory nieobciążone, estymatory największej wiarygodności. Testowanie hipotez statystycznych. Testy najmocniejsze. Nieobciążoność testu. Konstrukcja testów metodą największej wiarygodności. Testy zgodności. Testy istotności. Zbiory ufności.

B. Uwagi szczegółowe

Przedstawiona wyżej propozycja w znacznej części obejmuje hasła, które realizowane są w nauczaniu szkolnym. Umieszczenie ich w programie kształcenia nauczycieli w pogłębianej postaci nie wymaga zatem uzasadnień.

Twierdzenia graniczne stanowią istotną część rachunku prawdopodobieństwa. Uważamy, że nauczyciel matematyki powinien umieć interpretować te twierdzenia, dostrzegać zjawiska, które je ilustrują, pojmować ich ważność dla zastosowań statystycznych, a także rozumieć znaczenie rozkładu normalnego.

Ponieważ zarówno teoria procesów stochastycznych, jak i statystyka są dzisiaj ogromnymi dziedzinami wiedzy, bardzo silnie się rozwijającymi, których elementy coraz częściej włączane są do programów nauczania szkół średnich wieku krajów, ich prezentacja wymaga odrębnego wykładu.

Teorię procesów stochastycznych proponujemy rozpocząć od ich "korzeni", tj. od łańcuchów i procesów Markowa. Warto zapoznać studentów z błądzeniem przypadkowym, klasycznym zadaniem o ruinie gracza oraz "liczydłem probabilistycznym" Engla, a także ważnymi klasami procesów o ciągłym parametrze czasowym, ich reprezentantami i zjawiskami, dla których mogą być abstrakcyjnymi modelami.

Elementy statystyki, jak już wyżej wspomniano, wkraczają stopniowo do programów szkolnych. Należy ponadto założyć, że przynajmniej niektórzy nauczyciele w swojej pracy zawodowej przyjmą twórczą postawę i przystąpią do różnego rodzaju badań procesu dydaktycznego, w których zetkną się z zagadnieniami weryfikacji hipotez, estymacji, parametrów, testowaniem. Dlatego muszą posiadać umiejętność konstruowania odpowiednich narzędzi badawczych oraz ich statystycznego opracowywania.

Nieco zaskakujące wydają się wyniki przeprowadzonej ankiety, z których wyłania się minimalistyczny obraz rachunku prawdopodobieństwa. Ankietowani nauczyciele proponują informacyjne potraktowanie (także bez ilustracji i zastosowań) tematów dotyczących praw wielkich liczb, twierdzeń granicznych, łańcuchów Markowa, czy też w ogóle elementów statystyki. Wydaje się jednak, że nie byłoby zasadne istotne ograniczenie zakresu bądź usuwanie z przedstawionej propozycji wymienionych zagadnień, nawet wobec takich sugestii aktualnie czynnych nauczycieli.

V. Arytmetyka teoretyczna.

Z liczbami naturalnymi oraz ich własnościami uczniowie spotykają się już na początku swojej edukacji szkolnej. W miarę upływu czasu poznają oni coraz więcej zbiorów liczbowych, a począwszy od klasy VI operują już liczbami rzeczywistymi. To wczesne poznanie liczb sprawia, że studenci na pytanie o pojęcie liczby naturalnej czy też wymiernej, często ze zdziwieniem stwierdzają, że nie wiedzą bądź nie potrafią wiedzy swojej wyrazić w precyzyjnym języku matematyki. Wszyscy jednak zdajemy sobie sprawę z tego, że problematyka ta jest bardzo ważna dla przyszłych nauczycieli. Stąd też wy-

nika konieczność zapoznania słuchaczy z podstawowymi faktami dotyczącymi arytmetyki teoretycznej.

Za minimum wiedzy, z którą należy zapoznać studentów proponujemy uznać poniższą tematykę.

A. Projekt programu

1. Liczby naturalne.

Liczby naturalne, aksjomatyka Peano, działania na liczbach naturalnych, ich własności. Relacja $\leq$ i $<$. Własności liczb naturalnych równoważne aksjomatowi indukcji: zasada maksimum, zasada minimum. Rozkład liczby naturalnej n według liczby naturalnej k. Modele aksjomatyki Peano.

2. Liczby całkowite.

Konstrukcja liczb całkowitych za pomocą par liczb naturalnych. Działania w zbiorze liczb całkowitych, odwracalność dodawania. Relacja $\leq$ i $<$. Zbiór liczb całkowitych jako rozszerzenie zbioru liczb naturalnych. Aksjomatyczne wprowadzenie liczb całkowitych.

3. Liczby wymierne.

Zbiór liczb wymiernych jako ciało ułamków pierścienia liczb całkowitych. Działania i ich własności. Element odwrotny do różnego od zera. Relacja słabej i silnej mniejszości. Zbiór liczb wymiernych jako rozszerzenie zbioru liczb całkowitych. Aksjomatyka liczb wymiernych.

4. Liczby rzeczywiste.

Konstrukcja liczb rzeczywistych Cantora i Dedekinda. Działania na liczbach rzeczywistych. Nierówności dla liczb rzeczywistych. Liczby wymierne i niewymierne. Rozwijanie liczby rzeczywistej na ułamek o danej zasadzie numeracji. Ciągłość zbioru liczb rzeczywistych. Aksjomatyka liczb rzeczywistych.

5. Liczby zespolone.

Konstrukcja liczb zespolonych. Działania na liczbach zespolonych i ich własności. Postać trygonometryczna liczby zespolonej. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych. Interpretacja geometryczna.

6. Uzupełnienia.

Informacje o kwaternionach. Informacje o ułamkach łańcuchowych.

7. Elementy teorii liczb.

Relacja podzielności, największy wspólny dzielnik, najmniejsza

wspólna wielokrotność, liczby względnie pierwsze. Liczby pierwsze, sito Eratostenesa. Liczby złożone, rozkład na czynniki pierwsze. Obliczanie NWD i NWW. Obliczanie NWD za pomocą algorytmu Euklidesa Równania nieoznaczone pierwszego stopnia. Równanie Pitagorasa. Funkcja Gaussa $\phi(n)$. Kongruencje i ich własności. Cechy podzielności przez 3, 9, 11, 7 i 13. Twierdzenie Eulera i Fermata.

B. Uwagi szczegółowe

Jest rzeczą oczywistą, że nauczyciel matematyki nie może poprzestać na znajomości poglądowego pojęcia liczby naturalnej, całkowitej, wymiernej, rzeczywistej. Powinien wiedzieć, że można te pojęcia wprowadzić poprawnie na podstawie właściwych metod matematycznych. Trzeba więc zacząć od aksjomatyki Peano. Należy przy tym zauważyć, że liczby naturalne to nie jedyne obiekty matematyczne, które spełniają ten układ aksjomatów. Stąd konieczność wzmianki o innych modelach aksjomatyki Peano. Przy sposobności warto zwrócić uwagę na duże znaczenie aksjomatu indukcji matematycznej. Nauczyciel powinien wiedzieć, że w arytmetyce istnieją twierdzenia równoważne temu aksjomatowi.

Gdy znamy liczby naturalne, możemy konstruować kolejno liczby całkowite, wymierne, rzeczywiste, zespolone. Wszystkie te konstrukcje z wyjątkiem ostatniej mają pewne cechy wspólne, a mianowicie zastosowanie zasady abstrakcji (poza teorią Dedekinda). Nieco inaczej postępuje się przy tworzeniu pojęcia liczby zespolonej. Badanie coraz ogólniejszych zbiorów liczbowych jest związane z uzasadnieniem potrzeby rozszerzenia pojęcia liczby przez wskazanie własności, które mają zbiory obszerniejsze, a których brak zbiorom węższym. Na przykład w zbiorze liczb całkowitych mnożenie nie jest działaniem odwracalnym, zbiór liczb wymiernych nie jest ciągły. Ważne jest również to, że odpowiednie własności rozważanych struktur liczbowych można wykorzystać do wprowadzenia aksjomatycznego tych struktur.

Wzmianki o kwaternionach oraz ułamkach łańcuchowych mogą być wykorzystane w kółkach zainteresowań. Tematyka ta, z czym zgadzają się ankietowani nauczyciele, powinna mieć jednak charakter informacyjny.

Ostatni rozdział jest poświęcony teorii liczb. Jest ona w znacznym stopniu związana z materiałem szkolnym, np. z programem

klasy IV szkoły podstawowej (dodawanie, odejmowanie, porównywanie ułamków zwykłych). W szkole stosuje się praktycznie cechy podzielności. Nauczyciel powinien znać ich uzasadnienie. Inne wiadomości z teorii liczb są często przydatne w pracach kółek zainteresowań oraz w rozwiązywaniu zadań z olimpiady matematycznej.

VI. Logika i teoria mnogości.

Kształcenie przyszłych adeptów matematyki zarówno w ramach studiów stacjonarnych, jak i zaocznych - niezależnie od wyboru przyszłej specjalizacji - zaczyna się zawsze od wykładu zwanego (nie bez powodu) "wstępem do matematyki". Wykład ten zawiera podstawowe elementy logiki i teorii mnogości, a jego nazwa trafnie ujmuje charakter przekazywanych wiadomości.

Fakty te są bowiem podstawowym narzędziem, zgodnie z którym student matematyki będzie "organizował" swoją wiedzę matematyczną.

A. Projekt programu

1. Zdania. Funktory zdaniotwórcze. Prawa logiczne. Dowodzenie praw logicznych metodą zero-jedynkową i skróconą (praw zawierających implikację). Formy zdaniowej jednej i wielu zmiennych, ich związek ze zdaniami. Dziedzina formy zdaniowej. Wykres formy zdaniowej.

2. Zbiór jako pojęcie pierwotne teorii mnogości. Inkluzja. Równość zbiorów. Zbiór pusty. Suma, iloczyn i różnica dwóch zbiorów. Przestrzeń i dopełnienie zbioru. Pary nieuporządkowane i pary uporządkowane, n-tki uporządkowane. Iloczyn kartezjański skończonej ilości zbiorów. Informacja o aksjomatycznym ujęciu teorii mnogości - aksjomatyka Zermelo-Fraenkla, pewnik wyboru.

3. Kwantyfikatory. Podstawowe prawa rachunku kwantyfikatorów. Kwantyfikator o zakresie ograniczonym do funkcji zdaniowej. Podstawowe reguły wnioskowania i ich zastosowanie w dowodach twierdzeń matematycznych.

4. Sumy i iloczyny uogólnione, podstawowe prawa.

5. Relacje dwuczłonowe. Składanie i odwracanie relacji. Różne rodzaje relacji. Sposoby przedstawiania relacji. Relacje równoważności i konstrukcji liczb całkowitych, wymiernych oraz rzeczywistych. Przestrzeń ilorazowa. Relacje częściowo porządkujące. Elementy maksymalne, minimalne, największy i najmniejszy. Porządek liniowy. Upórządkowanie dobre. Informacje o liczbach porządko-

wych i twierdzenie Zermelo. Twierdzenie o indukcji pozaskończonej. Informacja o lemacie Kuratowskiego-Zorna i lemacie Teichmullera-Tukeya.

6. Funkcja jako relacja. Dziedzina, przeciwdziedzina, zbiór wartości funkcji. Funkcja zredukowana. Równość funkcji. Wykres funkcji. Injekcja, surjekcja i bijekcja. Obraz i przeciwobraz zbioru, ich własności. Funkcja odwrotna i superpozycja funkcji.

7. Równoliczność zbiorów. Zbiory przeliczalne i nieprzeliczalne. Liczby kardynalne. Przeliczalność zbioru liczb wymiernych, nie przeliczalność zbioru liczb rzeczywistych - liczby $\aleph_0$ i c. Warunek konieczny i dostateczny na to, by zbiór był nieskończony. Twierdzenie Cantora-Bernsteina i wnioski z tego twierdzenia. Zbiór potęgowy i twierdzenie Cantora. Wnioski z twierdzenia Cantora. Antynomie naiwnej teorii mnogości.

8. Informacja o aksjomatycznym ujęciu teorii matematycznych - pojęcia pierwotne i aksjomaty, model teorii aksjomatycznej. Niesprzeczność, zupełność i rozstrzygalność teorii aksjomatycznych. Twierdzenie Gödla o niezupełności i nierozstrzygalności arytmetyki liczb naturalnych. Hipoteza continuum i twierdzenie Gödla o niesprzeczności tej hipotezy z aksjomatami teorii mnogości. Twierdzenie Cohena o niezależności tej hipotezy od aksjomatów teorii mnogości. V postulat Euklidesa. Geometrie nieeuklidesowe. Teoria grup jako przykład teorii aksjomatycznej mającej wiele modeli.

B. Uwagi szczegółowe

Najważniejszymi zadaniami omawianego przedmiotu są: wdrożenie każdego, kto rozpoczyna studiowanie matematyki do ścisłego formułowania myśli, zdobycie przez niego umiejętności poprawnego rozumowania i zrozumienia podstawowych pojęć matematycznych. Wymaga to odpowiedniego przygotowania w zakresie logiki matematycznej i teorii zbiorów - dyscyplin stosowanych współcześnie we wszystkich działach matematyki i stanowiących punkt wyjścia do wprowadzenia i wyjaśniania podstawowych pojęć matematycznych. Umiejętności, jakich uczy ten przedmiot są niezbędne każdemu matematykowi, a zwłaszcza ważne dla tego, który sam będzie uczyć innych tego przedmiotu.

W końcowej części naszej propozycji zasygnalizowaliśmy wiele trudnych i złożonych zagadnień. Wydaje się jednak, że dość ważne jest zwrócenie uwagi studentów na możliwości i ograniczenia jakie występują w matematyce. Oczywiście, nie wszystkie tematy tutaj

proponowane muszą być omówione w ramach wstępu do matematyki. Niektóre problemy mogą być poruszane przy okazji zajęć z innych przedmiotów (np. geometrii czy analizy). Należy jednak podkreślić, że kandydaci na nauczycieli powinni podczas studiów usłyszeć o tych faktach, gdyż dzięki temu można dokładniej i głębiej zrozumieć "istotę matematyki". Zrozumienie to z kolei jest niezbędnym elementem dobrego przygotowania do pracy w charakterze nauczyciela matematyki.

VII. Funkcje analityczne.

Liczby zespolone i elementarne wiadomości o funkcjach zespolonych (a więc przyjmujących wartości zespolone) znajdują się w programie zajęć fakultatywnych z matematyki w liceum ogólnokształcącym i uczniowie są tą tematyką dość zainteresowani.

Teoria funkcji zespolonych powinna być wykładana w ciągłym nawiązywaniu do analizy rzeczywistej, przy wykazywaniu analogii i podkreślaniu różnic oraz istotnych konsekwencji wynikających z wprowadzenia zmiennej zespolonej. Różniczkowalność, a co za tym idzie holomorficzność w dziedzinie zespolonej, ma daleko idące konsekwencje, różniące tę teorię od analizy rzeczywistej (choćby istnienie pochodnej dowolnego rzędu dla funkcji holomorficznej, co nie ma swego odpowiednika w analizie). Ćwiczenia powinny być prowadzone w ścisłej korelacji z wykładem, a nawet go wyprzedzać w niektórych punktach (np. obliczanie $\int_{C_r} (z - z_0)^k dz$ - przed twierdzeniem całkowym Cauchy'ego). Podczas ćwiczeć należy przerobić wiele przykładów dotyczących odwzorowań obszarów, tak aby przyszły nauczyciel nie kojarzył funkcji tylko z jej wykresem. Istotna jest również kwestia wielolistności i wielowartościowości (wieloznaczności) niektórych funkcji zespolonych.

Projekt programu

1. Funkcje zespolone zmiennej zespolonej. Pochodna i jej interpretacja. Warunki Cauchy-Riemanna. Pojęcie funkcji holomorficznej, odwzorowanie równokątne i konforemne.

2. Funkcje elementarne i ich własności. Logarytm i potęga, gałęzie argumentu, logarytmu i potęgi. Homografia.

3. Ciągi i szeregi funkcyjne. Niemal jednostajna zbieżność a własności: ciągłość, holomorficzność i jednokrotność. Szereg potęgowy. Rozwinięcia funkcji elementarnych w szeregi potęgowe.

4. Całki: zwyczajna, Stieltjesa, krzywoliniowa. Własności całki krzywoliniowej. Niezależność od drogi całkowania dla funkcji ciągłej i holomorficznej. Twierdzenie Cauchy'ego i twierdzenie o jednoznacznej gałęzi logarytmu.

5. Wzór całkowy Cauchy'ego. Twierdzenie Weierstrassa. Punkty zerowe funkcji analitycznej. Twierdzenie Morery. Informacje o przedłużeniu analitycznym. Twierdzenie Liouville'a. Podstawowe twierdzenie algebry. Zasada maksimum.

6. Szereg Laurenta. Rozwijalność funkcji holomorficznej w szereg Laurenta. Klasyfikacja punktów osobliwych odosobnionych. Twierdzenie Picarda i jako wniosek - twierdzenie Casoratiego-Weierstrassa. Funkcje meromorficzne. Residuum. Twierdzenia o residuach. Twierdzenie Riemanna i wnioski z tego twierdzenia.

VIII. Topologia.

Intuicyjne rozumienie niektórych ważnych pojęć topologicznych, takich jak np. pojęcie odległości, brzegu i wnętrza zbioru domkniętego pojawia się jeszcze przed podjęciem nauki szkolnej. Elementy topologii przenikają od dość dawna do programu nauczania, a w ostatnich czasach stają się w coraz bardziej jawny sposób przedmiotem nauczania w szkole średniej.

Celem proponowanego niżej minimum wiedzy, jaką chcemy przekazać przyszłemu nauczycielowi, jest zapoznanie go z metodami topologii oraz położenie szczególnego nacisku na ujęcie materiału z punktu widzenia jego przydatności do występujących w programie szkolnym elementów analizy matematycznej, geometrii i innych działów matematyki.

Przeprowadzone badania pozwoliły ustalić, że w ramach studiów należy zapoznać słuchaczy z następującymi faktami:

A. Projekt programu

1. Definicja przestrzeni metrycznej. Przykłady przestrzeni metrycznych ze szczególnym uwzględnieniem metryk w R, R^2 i C oraz w zbiorach skończonych. Metryka supremum Czebyszewa. Kule otwarte i domknięte, sfera. Punkty wewnętrzne zbioru. Zbiory ograniczone, średnica zbioru. Zbiory otwarte i domknięte, ich własności. Punkty zewnętrzne i brzegowe zbioru. Zbieżność ciągu w przestrzeni metrycznej; jednoznaczność granicy. Metryki równoważne. Punkty skupienia i punkty izolowane zbioru. Pochodna zbioru. Wnętrze, dom-

knięcie i brzeg zbioru. Własności operacji wnętrza i domknięcia zbioru. Własności rodziny zbiorów otwartych i własności rodziny zbiorów domkniętych. Baza przestrzeni metrycznej. Zbiory gęste i zbiory brzegowe. Zbiory w sobie gęste, nigdzie gęste, pierwszej kategorii. Zbiory doskonałe. Zbiory borelowskie. Zbiór Cantora. Podprzestrzenie przestrzeni metrycznych. Produkt skończony przestrzeni metrycznych.

2. Przekształcenia ciągłe w punkcie - definicje Heinego i Cauchy'ego, ich równoważność. Funkcje ciągłe w całej przestrzeni, ich charakteryzacja poprzez przeciwobrazy zbiorów otwartych i zbiorów domkniętych. Ciągłość metryki i odległości punktu od zbioru. Homeomorfizmy i ich własności; charakteryzacja poprzez obrazy i przeciwobrazy zbiorów otwartych (domkniętych), homeomorficzność przestrzeni metrycznej z przestrzenią ograniczoną. Przykłady homeomorfizmów.
Przedłużanie funkcji ciągłych; twierdzenie Tietzego. Zbieżność jednostajna ciągu funkcyjnego. Ciągłość funkcji w iloczynie kartezjańskim. Funkcja Cantora.

3. Przestrzenie metryczne zupełne. Zupełność przestrzeni R i C. Twierdzenie Cantora. Twierdzenie Baire'a. Zasada odwzorowań zwężających Banacha.

4. Ośrodkowość przestrzeni metrycznej; równoważność tej ośrodkowości z istnieniem przeliczalnej bazy. Twierdzenie Lindelöfa. Ośrodkowość podprzestrzeni przestrzeni metrycznej ośrodkowej. Ośrodkowość przestrzeni R. Produkt kartezjański przestrzeni ośrodkowych. Ośrodkowość przestrzeni R^n i C.

5. Przestrzenie metryczne zwarte. Warunki równoważne zwartości. Zbiory zwarte. Własności przestrzeni zwartych i zbiorów zwartych. Kryterium zwartości w przestrzeniach R i C. Twierdzenie Cantora. Twierdzenie Borela i Borela-Lebesgue'a. Funkcje ciągłe na przestrzeniach zwartych - twierdzenie Weierstrassa, jednostajna ciągłość i uogólnione twierdzenie Helly'ego o jednostajnej ciągłości. Iloczyn kartezjański przestrzeni zwartych - twierdzenie Tichonowa. Przestrzeń zwarta jako ciągły obraz zbioru Cantora.

6. Przestrzeń C(X, Y) funkcji ciągłych odwzorowujących przestrzeń metryczną X w przestrzeń metryczną Y z metryką Czebyszewa. Zupełność przestrzeni C(X, Y) przy założeniu zwartości przestrzeni X i zupełności przestrzeni Y. Twierdzenie Arzeli. Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa o aproksymacji w C(R, R). Przykłady innych metryk w C(X, Y); własności otrzymywanych przestrzeni metrycznych.

7. Spójność przestrzeni metrycznych. Kryteria spójności (niespójności). Spójność jako niezmiennik przekształceń ciągłych, własność Darboux dla funkcji ciągłej o wartościach rzeczywistych, określonej na przestrzeni spójnej. Własności zbiorów spójnych. Kryterium spójności zbioru $A \subset R$. Składowe zbiorów spójnych. Krzywa Peano.
Elementy teorii homotopii - homotopia jako relacja równoważności w $C(X, Y)$, przestrzenie homotopijnie równoważne, przestrzenie ściągalne do punktu.

8. Elementy teorii przestrzeni topologicznych. Topologia jako rodzina zbiorów otwartych. Zbiory domknięte, wnętrze i domknięcie zbioru. Baza przestrzeni topologicznej. Pełny układ otoczeń. Operacja wnętrza i operacja domknięcia, ich własności. Różne sposoby wprowadzania topologii: przez operację wnętrza, operację domknięcia, bazę i pełny układ otoczeń. Informacja o przestrzeniach metryzowalnych, przykłady przestrzeni topologicznych niemetryzowalnych. Przestrzenie Hausdorffa i przestrzenie normalne.

B. Uwagi szczegółowe

Elementy topologii w nauczaniu szkolnym nie wykraczają poza przestrzenie metryczne, dlatego główny nacisk przy opracowywaniu minimum położono właśnie na teorię tych przestrzeni. Definicję przestrzeni metrycznej należy poprzeć licznymi i różnorodnymi przykładami, ze szczególnym uwzględnieniem metryk w przestrzeniach R, R^2 i C, dającymi duże możliwości zastosowań, np. w programach szkolnych kółek zainteresowań. Równie ważna jest metryka Czebyszewa w zbiorze funkcji odwzorowujących jedną przestrzeń metryczną w drugą.

Omawiając pojęcia kuli otwartej i domkniętej, sfery, zbioru otwartego i domkniętego, brzegu, wnętrza i domknięcia zbioru, należy zwrócić uwagę na to, by studenci nie przenosili na te pojęcia własnych wyobrażeń i intuicji związanych z metryką naturalną w R^2 (np., że średnica kuli nie musi być równa podwojonemu promieniowi kuli, że kula o większym promieniu może być zawarta w kuli o mniejszym promieniu itd.). Przeprowadzone bowiem wśród studentów I roku badania ujawniły brak właściwego zrozumienia tych zagadnień. Różnorodność podawanych przykładów pozwoli studiującym lepiej zrozumieć omawiane pojęcia oraz zwrócić uwagę na szeroką

klasę przestrzeni zdefiniowanych przez, zdawałoby się, dość ograniczone warunki (aksjomaty).

Nauczanie topologii nie może jednak ograniczyć się do "rujnowania" posiadanych intuicji. Niezmiernie istotne jest ilustrowanie wszystkich omawianych pojęć i faktów za pomocą prostej i płaszczyzny (z naturalnymi metrykami). Ułatwi to zrozumienie istoty wielu faktów matematycznych oraz odsłoni bogactwo i różnorodność podzbiorów obu tych przestrzeni. Może to pogłębić zainteresowanie samych studentów matematyką, przy równoczesnym dostarczeniu im do ręki środków umożliwiających rozbudzenie zainteresowania tym przedmiotem ich przyszłych uczniów.

IX. Równania różniczkowe.

Teoria równań różniczkowych należy do tych działów matematyki, które poprzez zastosowania wiążą się bezpośrednio z wieloma innymi gałęziami nauki. Wymienić tu można przykładowo fizykę, chemię, astronomię, technikę, automatykę. W chwili obecnej jest to już wiedza ogromna, rozpadająca się na wiele niezależnych dyscyplin operujących niejednokrotnie trudnym i rozbudowanym aparatem pojęciowym. Dlatego też określenie minimum wiedzy nauczyciela matematyki z zakresu równań różniczkowych nie jest zagadnieniem prostym.

Przeprowadzone badania dowiodły jednak, że w chwili obecnej wystarczy ograniczyć się tylko do podstawowych działów teorii równań różniczkowych zwyczajnych.

A. Projekt programu

1. Ogólne własności równań różniczkowych zwyczajnych.

Pojęcia podstawowe: równania różniczkowe rzędu pierwszego i rzędów wyższych, rozwiązania i zagadnienie początkowe Cauchy'ego dla takich równań, rozwiązania lokalne i globalne. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego: warunek Lipschitza i twierdzenie Cauchy-Picarda. Twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązania. Zagadnienie rozdzielania zmiennych: twierdzenie o równaniu o rozdzielonych zmiennych, metoda podstawiania, równania jednorodne, inne równania całkowalne poprzez rozdzielanie zmiennych.

Równania różniczkowe zupełne, czynnik całkujący.

2. Równania różniczkowe liniowe.

Układy równań liniowych rzędu pierwszego: twierdzenie o istnieniu

rozwiązania, układy jednorodne, wyznacznik Wrońskiego i układ fundamentalny rozwiązań, zastosowanie metody uzmienniania stałych. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach: macierz charakterystyczna i wielomian charakterystyczny, ich rola w znajdowaniu rozwiązań.
Równania liniowe rzędu n: zagadnienie równoważności z układem równań liniowych, twierdzenie o istnieniu rozwiązania, układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego, zagadnienie rozwiązywania równań niejednorodnych: metoda uzmienniania stałych, metoda przewidywań.
Jednorodne równania liniowe rzędu n o stałych współczynnikach: metoda pierwiastków charakterystycznych w znajdowaniu układu fundamentalnego rozwiązań. Metody rozwiązywania szczególnych typów liniowych równań różniczkowych rzędu n.

B. Uwagi szczegółowe

Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności zagadnienia początkowego stanowią ważną i relatywnie trudniejszą część teorii. W realizacji tej problematyki należy udowodnić twierdzenie Cauchy-Picarda na podstawie zasady odwzorowań zwężających Banacha, natomiast twierdzenie Peano jedynie sformułować i zilustrować stosownymi przykładami. Nie oznacza to, że trzeba zrezygnować z dowodu drugiego ze wspomnianych twierdzeń, przeciwnie, lepiej podać go w ramach analizy funkcjonalnej, przy okazji omawiania operatorów pełnociągłych i twierdzenia Schaudera.

Metoda rozdzielania zmiennych, mimo swej prostoty, należy do najważniejszych i najczęściej stosowanych narzędzi w praktycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych. Dlatego też należy zwrócić na nią szczególną uwagę. Oprócz samego twierdzenia wskazane jest omówienie typów równań różniczkowych, które poprzez stosowne podstawienia dają się "zcałkować" poprzez rozdzielanie zmiennych. Do grupy tej można zaliczyć m. in. równania postaci $y' = f(ax + by + c)$ lub $y' = g(ax + by + c/dx + cy + f)$, równania jednorodne oraz równania różniczkowe liniowe stopnia pierwszego. Z tymi ostatnimi wiążą się takie szczegółowe, ale ważne zagadnienia, jak uzmiennianie stałych czy metoda przewidywań. W następnej kolejności warto omówić pewne specjalne typy równań różniczkowych nieliniowych, a mianowicie równania Bernoulliego, Riccatiego, Clairauta i Lagrange'a.

Problematyka dotycząca ogólnej teorii równań różniczkowych liniowych nie wymaga dodatkowego komentarza. Należy jedynie zwrócić uwagę na fakt głębokiego zaangażowania w tej propozycji "aparatu algebraicznego". Takie podejście ma duże walory dydaktyczne, gdyż pokazuje piękne, niebanalne wykorzystanie algebry jako narzędzia w innej dyscyplinie matematycznej.

X. Analiza funkcjonalna.

Analiza funkcjonalna jest jednym z najbardziej rozwijających się działów matematyki. Mimo iż jest to dyscyplina stosunkowo młoda, należy ją zaliczyć do grupy podstawowych przedmiotów matematycznych. Kwestia zakresu materiału z omawianego tu przedmiotu nie jest jednoznaczna i mogą na ten temat pojawiać się rozbieżne poglądy. Uwzględniając fakt ograniczonych możliwości czasowych i trudności teorii, należy opowiedzieć się za zredukowaniem jej do najbardziej typowego, choć szczególnie ważnego przypadku przestrzeni unormowanych. Oprócz podstawowego aparatu pojęciowego powinny się znaleźć tu centralne twierdzenia analizy funkcjonalnej stanowiące jej fundament, a więc - twierdzenie Banacha-Steinhausa o ciągu ciągłych operatorów liniowych, twierdzenia Banacha o homeomorfizmie i o domkniętym wykresie, twierdzenie Banacha-Hahna o przedłużaniu ciągłego funkcjonału liniowego. Wobec konieczności ograniczenia się do niezbędnego minimum, z zagadnień nieliniowych proponujemy jedynie zasadę Schaudera - jako znamienitego przedstawiciela ważnej rodziny twierdzeń o punktach stałych. Odnośnie do doboru przykładów, należy uwzględnić najbardziej charakterystyczne i najczęściej występujące w zastosowaniach; zaliczamy do nich przede wszystkim te, które dotyczą przestrzeni: funkcji ciągłych, funkcji całkowalnych z pewnymi wykładnikami, ciągów zbieżnych, ciągów bezwzględnie sumowalnych z pewnymi wykładnikami.

Poniżej podajemy szczegółową propozycję haseł programowych, realizowanych podczas matematycznych studiów nauczycielskich.

A. Projekt programu

1. Podstawowe własności przestrzeni unormowanych.
Norma i pseudonorma, przestrzenie unormowane, przestrzenie Banacha, przykłady przestrzeni unormowanych i Banacha, szeregi w przestrzeniach Banacha, ośrodkowość konkretnych przestrzeni Banacha. Uzu-

pełnianie przestrzeni unormowanych. Informacja o przestrzeniach Frecheta i przestrzeniach lokalnie wypukłych.

2. Podstawowe własności ciągłych operatorów liniowych.
Ograniczoność a ciągłość operatora liniowego norma operatora. Przykłady ciągłych i nieciągłych operatorów liniowych, operatory całkowe. Przestrzeń ciągłych operatorów liniowych, przestrzeń sprzężona, operator sprzężony.

3. Przestrzenie unormowane wymiaru skończonego.
Normy równoważne, zupełność skończenie wymiarowych przestrzeni unormowanych. Zwartość a ograniczoność w przestrzeniach unormowanych, twierdzenie Riesza. Charakteryzacja zwartości w konkretnych przestrzeniach unormowanych.

4. Przestrzenie unitarne.
Własności iloczynu skalarnego i normy generowanej przez niego, przestrzenie unitarne i przestrzenie Hilberta. Uzupełnianie przestrzeni unitarnych. Liniowa niezależność w przestrzeniach unitarnych, wyznacznik Grama. Twierdzenie o rzucie ortogonalnym i jego bezpośrednie konsekwencje, twierdzenie Riesza o ogólnej postaci ciągłego funkcjonału liniowego w przestrzeni Hilberta, przykłady takich operatorów w konkretnych przypadkach. Układy ortogonalne i ortonormalne, nierówność Bessela i równość Parsevala, ortogonalizacja metodą Schmidta, układy ortonormalne zupełne i ich przykłady, kryterium zwartości w przestrzeniach Hilberta.

5. Fundamentalne twierdzenia analizy funkcjonalnej.
Twierdzenie Banacha-Stainhausa o punktowo ograniczonej rodzinie i punktowo zbieżnym ciągu ciągłych operatorów liniowych. Twierdzenia Banacha o otwartym odwzorowaniu, o homeomorfizmie, o domkniętym wykresie. Rozszerzanie ciągłych operatorów liniowych na całą przestrzeń, twierdzenie Hahna-Banacha o rozszerzaniu rzeczywistego ciągłego funkcjonału liniowego i jego analogon dla przypadku zespolonego, bezpośrednie konsekwencje tych twierdzeń. Ogólne postacie ciągłych funkcjonałów liniowych w konkretnych przestrzeniach. Słaba zbieżność, twierdzenie Mazura, przykłady charakteryzacji słabej zbieżności w danych przestrzeniach. Przykłady kompleksowych zastosowań twierdzeń fundamentalnych w różnych działach analizy.

6. Operatory pełnociągłe, operatopry zwarte.
Liniowe operatory pełnociągłe, pełnociągły obraz ciągu słabo zbieżnego, sprzężenie operatora pełnociągłego, rozkład operatora pełnociągłego, uogólnienia twierdzeń Fredholma. Operatory zwarte (nieko-

niecznie liniowe), twierdzenie Schaudera o punkcie stałym, twierdzenie Cauchy-Peano o istnieniu rozwiązania zwyczajnego równania różniczkowego z prawą stroną ciągłą.

XI. Metody numeryczne.

We współczesnym świecie notuje się szybki rozwój informatyki. Powstają coraz doskonalsze generacje komputerów. Konieczność ich oprogramowania oraz chęć wykonywania obliczeń za pomocą elektronicznych maszyn cyfrowych powoduje rozwój metod numerycznych. Za umieszczeniem niektórych metod w programie edukacji przyszłego nauczyciela matematyki przemawia więc fakt zawierania się w nim elementów informatyki oraz pouczający, posiadający ciekawą interpretację geometryczną, sposób wprowadzania niektórych z nich. Poniższy program stanowi niezbędne minimum wiedzy, którą przyszły nauczyciel matematyki powinien posiąść w zakresie tego przedmiotu.

A. Projekt programu

1. Podstawowe wiadomości o obliczeniach przybliżonych i teorii błędów. Błąd względny i błąd bezwzględny.

2. Przybliżone metody rozwiązywania równań.

Metody: równego podziału, siecznej, stycznych, iteracji. Informacja o niektórych bardziej zaawansowanych metodach przybliżonego rozwiązywania równań.

3. Rozwiązywanie układów równań liniowych.

Metoda Gaussa (obliczanie wyznacznika i macierzy odwrotnej metodą Gaussa). Informacja o innych metodach.

4. Rozwiązywanie układów równań nieliniowych.

Metody: Newtona, iteracji, spadku.

5. Interpolacja funkcji,

Interpolacje: Newtona, Lagrange'a, Hermite'a.

6. Całkowanie przybliżone.

Metody: prostokątów, trapezów, kwadratów (Simpsona), Gaussa, Czebyszewa.

7. Podstawowe informacje o przybliżonym rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych.

XII. Informatyka.

W ostatnich latach notuje się coraz szybszy rozwój informatyki. Powstają coraz doskonalsze typy mikrokomputerów, coraz częściej

człowiek jest wspierany przez "elektroniczny mózg". Należy przypuszczać, że tendencja do rozwoju informatyki nie tylko nie zostanie zahamowana, ale wręcz przeciwnie: komputery będą wkraczać w nowe dziedziny życia. Trudno w tej sytuacji wyobrazić sobie, aby nauczyciel, którego obowiązkiem jest kształcenie młodzieży nie był przygotowany do prowadzenia zajęć z użyciem komputerów. Nauczyciel matematyki ma szczególnie wiele okazji do wykorzystania komputera podczas lekcji tak do demonstrowania pewnych faktów geometrycznych czy statystycznych, jak i przeprowadzania obliczeń przybliżonych (przybliżone całkowanie, rozwiązywanie równań, obliczanie wartości funkcji itp.). Informatyka nabrała szczególnego znaczenia w edukacji przyszłego nauczyciela matematyki w związku z zatwierdzeniem programu jej nauczania w szkole. W praktyce oznacza to, że z powodu braku odpowiedniej liczby specjalistów w tej dziedzinie, m. in nauczyciele matematyki będą zmuszeni do prowadzenia zajęć z informatyki. Ponadto powszechne wprowadzenie do szkoły przedmiotu: "Elementy informatyki" spowoduje, że znaczna część uczniów będzie umiała posługiwać się komputerem. Niekorzystanie na lekcjach matematyki z owych umiejętności byłoby przejawem zbędnego konserwatyzmu oraz świadomą rezygnacją z możliwości uatrakcyjnienia lekcji. Dlatego też przyszłego nauczyciela matematyki należy wyposażyć w bagaż wiadomości i umiejętności niezbędnych do nauczania podstaw informatyki oraz wykorzystywania komputerów w praktyce.

W związku z powyższymu uwagami proponujemy następujący program kształcenia przyszłego nauczyciela matematyki w zakresie informatyki.

A. Projekt programu

1. Podstawowe wiadomości o komputerach i mikrokomputerach oraz posługiwanie się nimi.

Rys historyczny rozwoju informatyki. Komputery najczęściej używane w polskich ośrodkach obliczeniowych. Mikrokomputery ("szkolne, "profesjonalne") oraz urządzenia peryferyjne. Podstawowe umiejętności w posługiwaniu się mikrokomputerem ("szkolnym"): podstawowe zasady gwarantujące bezawaryjną obsługę mikrokomputera (podłączenie komputera oraz urządzeń peryferyjnych); znajomość układu klawiatury; wprowadzenie komend, kasowanie pomyłek; rozumienie typowych reakcji i odpowiedzi mikrokomputera; operowanie pamięcią

zewnętrzną (magnetofon, stacje dyskietek); posługiwanie się urządzeniami peryferyjnymi (drukarka, mysz, joystiki itp.).

2. Podstawowe wiadomości o programach użytkowych.

Programy "narzędziowe", edytory tekstów, bazy danych, programy edukacyjne, programy graficzne, programy kalkulacyjne, gry.

3. Programowanie na mikrokomputerze w językach: LOGO, PASCAL (TURBO-PASCAL).

Komentując zawartość programu należy podkreślić, że dobrze by było, gdyby wiedza studentów w wyżej proponowanym zakresie miała "praktyczny charakter". Umiejętność posługiwania się komputerem nie powinna zatem ograniczać się jedynie do wiedzy teoretycznej. Zasygnalizowanie konieczności zapoznania studentów z dwoma językami programowania nie oznacza, że muszą oni biegle opanować sztukę pisania programów w obu tych językach. Chcemy jednak stworzyć możliwość dokonania przez nich samodzielnego wyboru przy pogłębianiu wiedzy z tego zakresu.

Wielu nauczycieli wyrażało opinię, że wskazane byłoby PASCAL zastąpić przez BASIC. Trzeba jednak podkreślić, że PASCAL jest uniwersalnym, profesjonalnym językiem programowania. Nadaje się dobrze do różnych zastosowań i jest językiem strukturalnym. Programowanie strukturalne jest nie tylko modne, lecz daje programiście możliwość wykształcenia dobrych "odruchów programowania", a przy tym powoduje, iż program jest przejrzysty nie tylko dla jego autorów. PASCAL wymaga od programisty starannej, przemyślanej i logicznej konstrukcji programów. Program napisany w tym języku zbudowany jest z niezależnych modułów, realizujących wyodrębnione podzadania. Elegancja i uniwersalność uczyniły PASCAL międzynarodowym językiem publikacyjnym, tzn. służącym do zapisu algorytmów w literaturze fachowej (dawniej taką rolę odgrywał jego prekursor ALGOL). Z wymienionych powodów znajomość omawianego języka jest bardzo cenna. Daje on bardzo wiele możliwości, ale jest równocześnie bardzo rozbudowany. Dokładne jego poznanie jest więc niemożliwe do zrealizowania w ramach rozpatrywanego przedmiotu, co więcej, byłoby zbędne z powodu skromnych potrzeb nauczyciela w zakresie programowania. Dlatego też należy zapoznać studentów z ogólną charakterystyką tego języka i ograniczyć się do najważniejszych faktów dotyczących programowania w nim, tzn. do najważniejszych dyrektyw i instrukcji oraz umiejętności pisania procedur i wykorzystania ich w innych programach.

Jako drugi proponujemy typowy język dydaktyczny - LOGO. Jest on również językiem strukturalnym, lecz znacznie prostszym od poprzedniego. Powstał z myślą o uczeniu dzieci podstaw informatyki i ułatwieniu im kontaktu z komputerem (istnieje także polska wersja LOGO). Jego zaletą jest ponadto dobra grafika, ułatwiająca wykonywanie rysunków na ekranie. W trakcie uczenia tego języka należy zwrócić szczególną uwagę na umiejętność pisania procedur, tworzenia rysunków na ekranie oraz, podobnie jak w PASCAL-u, na strukturalny styl programowania. Do poważniejszych zastosowań, głównie obliczeniowych, wymagających operowania na dużych zbiorach danych, język ten nie nadaje się.

W omawianym tu programie przedmiotu nie proponujemy nauki języka BASIC, mimo iż jest on najpopularniejszym językiem świata, dostępnym w niemal każdym komputerze osobistym. Jest to język dialogowy, nadaje się do małych programów i nie może być szybko opanowany przez osoby bez przygotowania informatycznego. Jego wadą jest także znaczne utrudnienie w programowaniu strukturalnym. Łatwość wprowadzania poprawek zachęca programistę do niestaranności w konstruowaniu programów i tworzy złe nawyki. Poważnym problemem jest też mnogość odmian tego języka (czyli dialektów). Prawie każda rodzina komputerów osobistych ma swój dialekt, znacznie różniący się od innych. Często uniemożliwia to przenoszenie programów między komputerami różnych typów. Profesjonaliści stosują go rzadko, m. in ze względu na wolne tempo realizacji.

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na to, że program nauczania informatyki nie powinien być traktowany sztywno. Śledząc jej rozwój program ten należy unowocześnić. Zatem część programu dotyczącą obsługi komputerów oraz programowania w danym języku należy zmieniać, gdy mamy do dyspozycji nowy sprzęt obliczeniowy, a co za tym idzie - nowe oprogramowanie.

XIII. Dydaktyka matematyki.

Wśród przedmiotów przygotowujących studentów do wykonywania trudnego zawodu nauczyciela matematyki szczególne miejsce zajmuje metodyka nauczania matematyki. Doświadczenie pokazuje, że w wielu ośrodkach przedmiot ten jest traktowany z jednej strony jako drugorzędne uzupełnienie zasadniczej wiedzy studentów z zakresu matematyki teoretycznej, z drugiej zaś osoby prowadzące zajęcia z dydaktyki matematyki oskarża się o "złe przygotowanie zawodowe"

przyszłych nauczycieli. W tej sytuacji określenie zasobu wiedzy z tego przedmiotu, z jaką musimy zapoznać studentów, posiada szczególne znaczenie. Trzeba przy tym brać pod uwagę fakt, iż studenci uczestniczą również w zajęciach z innych "przedmiotów pedagogicznych" (pedagogika, psychologia itp.) oraz, że w ramach przedmiotów matematycznych niektórzy wykładowcy przekazują informacje dotyczące możliwości realizacji w szkole pewnych partii materiału. Należy również pamiętać, że studenci w wyniku obserwacji nauczycieli w szkole średniej oraz wykładowców podczas studiów, wytworzyli już sobie pewien "model nauczyciela", odmienny niekiedy od tego, jaki proponuje współczesna dydaktyka.

Niżej przedstawione opracowanie jest rezultatem z jednej strony doświadczenia wynikającego z prowadzonych ze studentami zajęć, z drugiej zaś z obserwacji, przemyśleń i rozmów przeprowadzonych z nauczycielami oraz studentami ostatnich lat studiów, dotyczących zakresu, treści i sposobów, w jakich treści te powinny być im przekazane. Analizowane były również programy nauczania dydaktyki matematyki w różnych ośrodkach.

Ze względu na charakter przekazywanej wiedzy omawiane tematy podzielone zostały na zagadnienia:

1) ogólne,
2) szczegółowe,
3) praktyczne.

Wszystkie trzy ww. grupy są ważne i spełniają określoną rolę w procesie przygotowania zawodowego przyszłych nauczycieli matematyki. Zapoznamy się obecnie szczegółowo z poszczególnymi zespołami zagadnień.

1. Zagadnienia ogólne.

Zapoznawanie studentów z "prawami", zgodnie z którymi powinien być realizowany proces nauczania spotyka się ze strony słuchaczy z dużą rezerwą. Wydaje się jednak, że omówienie podstawowych problemów teoretycznych jest konieczne dla dobrego przygotowania zawodowego przyszłych nauczycieli matematyki; przy czym oczywiście omawianie to powinno być ilustrowane konkretnymi przykładami zaczerpniętymi z sytuacji szkolnych, najlepiej w odniesieniu do obecnie obowiązującego programu nauczania. Znajomość zagadnień ogólnych jest niezmiernie istotna przy planowaniu i realizowaniu konkretnych jednostek metodycznych. Stawiany często zarzut, iż dla każdej zasady nauczania czy prawa rządzącego procesem nau-

czania, można znaleźć kontrprzykład w postaci nauczyciela, który postępował niezgodnie z tą zasadą i uzyskał doskonałe rezultaty, może być słuszny jedynie w przypadku jednostek wybitnie utalentowanych. Gdyby można było założyć, że grupa studentów, z którą spotykamy się, składa się (przynajmniej w przeważającej części) z jednostek nieprzeciętnie uzdolnionych, to wiele tematów z tej grupy można byłoby pominąć. Przyjęcie takiego założenia byłoby jednak zbyt ryzykowne.

W trakcie omawiania zagadnień ogólnych należy zrealizować następujące tematy:

Podstawowe pojęcia związane z nauczanym przedmiotem (matematyka, pedagogika, dydaktyka, proces nauczania - uczenia się, studiowanie, kształcenie itp.). Język matematyki. Historia matematyki i jej wpływ na współczesne formy przekazu treści matematycznych (zasada paralelizmu). Tendencje (w tym również światowe) w zakresie doboru treści nauczania matematyki. Etapy uczenia się. Elementy psychologii (teoria Piageta, interioryzacja itp.). Pojęcia i struktury matematyczne. Uogólnianie, abstrahowanie i specyfikacja. Definicje i twierdzenia matematyczne. Problemy dowodzenia twierdzeń i wyprowadzania wzorów. Dedukcja i myślenie intuicyjne. Zadania - ich rola i znaczenie w nauczaniu. Taksonomie celów nauczania. Zasady i metody nauczania matematyki. Operatywny charakter matematyki. Nauczanie czynnościowe. Cele nauczania matematyki. Indywidualizacja procesu nauczania. Nauczanie grupowe. Samodzielna praca uczniów z tekstem matematycznym. Utrwalanie wiadomości. Pracownia matematyczna. Techniczne środki nauczania (wspomnieć w tym miejscu można o możliwości zastąpienia pewnych pomocy dydaktycznych przez inne, np. tablicy magnetycznej przez perfoplan). Zastosowanie komputerów w procesie nauczania matematyki. Organizacja procesu nauczania (w tym konstrukcja i planowanie lekcji oraz planowanie roczne i długoterminowe). Kontrola i ocena w nauczaniu matematyki, testy, pewne wzory statystyczne związane z testowaniem. Rola i znaczenie matematycznych zajęć pozalekcyjnych (lekcje wyrównawcze i kółka zainteresowań).

Z niektórymi tematami studenci spotykali się już podczas zajęć z innych przedmiotów (np. z zasadami i metodami nauczania - w czasie wykładów z pedagogiki). W ramach metodyki nauczania matematyki problemy te należy jednak omawiać z uwzględnieniem specyficznych zmian i interpretacji wynikających z charakteru matematyki.

Na wstępie zaznaczone zostało, iż omawianie poszczególnych zagadnień należy ilustrować przykładami. Dotyczy to również demonstrowania studentom technicznych środków nauczania oraz możliwości wykorzystania mikrokomputerów. Tematyka ta wiąże się zatem również z zagadnieniami praktycznymi.

2. Zagadnienia szczegółowe.

W ich ramach należy omówić konkretne problemy związane z nauczaniem matematyki w szkole podstawowej i średniej.

Programy nauczania (od I klasy szkoły podstawowej) - zadania jakie wynikają z nich dla nauczyciela. Podręczniki szkolne, zbiory zadań i poradniki metodyczne. Rola i znaczenie CDN-ów. Zagadnienia wiążą się z realizacją (w szkole podstawowej oraz średniej) następujących działów:

- teoria liczb,
- logika,
- teoria mnogości,
- relacje i funkcje,
- algebra i algebra liniowa,
- geometria (w tym również geometrie euklidesowe),
- przekształcenia geometryczne,
- topologia w nauczaniu szkolnym,
- analiza matematyczna,
- rachunek prawdopodobieństwa,
- teoria miary (w tym miara Peano-Jordana),
- elementy informatyki.

Sposoby planowania i przygotowywania określonych jednostek metodycznych (pod kątem sposobów ich realizacji). Cele i zadania zajęć fakultatywnych. Olimpiady i konkursy matematyczne.

Omówienie programów nauczania nie ma tutaj na celu "podyktowania" studentom tych programów. Należy raczej zwrócić im uwagę na konkretne trudności i problemy powstające w trakcie ich realizacji oraz przedstawić (lub pozostawić do samodzielnego rozstrzygnięcia) propozycję ich rozwiązań. Przykładowo w klasie II LO obecnie obowiązujący program przewiduje "teorię miary". Powstaje zatem pytanie: jak wprowadzić miarę Peano-Jordana? Czy przy definiowaniu tej miary użyć ciągów i ich granic, czy też kresów zbiorów? W pierwszym przypadku jest to dla uczniów łatwiejszy sposób, lecz niezbędne informacje z analizy matematycznej uzyskują oni dopiero pod koniec roku szkolnego, więc temat "teoria miary" należałoby realizować

dopiero w czerwcu. W przypadku wykorzystania kresów zbiorów jako podstawy wprowadzonych definicji, uczniowie wszystkie niezbędne fakty znają z klasy I, lecz sposób ten jest mało intuicyjny i - jak pokazuje praktyka - sprawia uczniom kłopoty. Po zapoznaniu studentów z powyższymi informacjami możemy przedyskutować z nimi, którą koncepcję wybrać (oczywiście mogą pojawić się również inne rozwiązania, np. propedeutyczne omówienie miary Peano-Jordana).

Przy omawianiu roli i znaczenia CDN-ów, można zaprosić na zajęcia reprezentanta tych oddziałów. Ułatwi to studentom zrozumienie roli i znaczenia tych jednostek.

3. Zagadnienia praktyczne.

Praktyki pedagogiczne w szkole podstawowej oraz średniej. Pisanie konspektów oraz planów lekcji, lekcje ćwiczeniowe. Tworzenie rocznych rozkładów materiału. Praktyczne ćwiczenie w posługiwaniu się technicznymi środkami nauczania. Ćwiczenia w wykorzystaniu technicznych środków nauczania, w tym: ćwiczenia w zakresie posługiwania się mikrokomputerem zarówno w procesie nauczania (gotowe programy dydaktyczne, krótkie programy własne), jak również w procesie kontroli wiedzy. Opracowywanie (podczas ćwiczeń lub konwersatoriów) jednostek tematycznych pod kątem ustalania sposobów ich realizacji. Ćwiczenie umiejętności oceniania prawdziwości (poprawności) odpowiedzi - np. ocenianie, które spośród różnych sformułowań można przyjąć za definicję ciągłości funkcji. Ćwiczenia w zakresie układania klasycznych sprawdzianów i testów oraz formułowania ustnych pytań.

Szczególna rola, jaka przypada dydaktyce matematyki sprawia, że w przypadku tego przedmiotu bardziej szczegółowo omówimy przedstawione przez nas propozycje (zgodnie z przytoczonym na wstępie projektem "siatki godzin").

Dydaktykę matematyki proponujemy realizować w ramach przedmiotów o roboczych nazwach: "dydaktyka matematyki", "metodyka nauczania matematyki", "techniczne środki w dydaktyce", "praktyka prowadzenia lekcji". Przedmioty te (o różnym wymiarze czasowym) odpowiadałyby pewnym konkretnym celom kształcenia.

"Dydaktyka matematyki"
(semestr IV, wykł. - 30 godz., ćwicz. - 30 godz.)

W ramach tego przedmiotu proponujemy realizację wybranych zagadnień z dydaktyki ogólnej oraz dydaktyki matematyki. Studenci

winni zdobyć ogólny pogląd o specyfice nauczania matematyki, a także o organizacji procesu nauczania.

Przystępując do zajęć studenci są już po kursie psychologii (I semestr) oraz pedagogiki (II i III semestr).

"Metodyka nauczania matematyki"
(semestry V, VI, VII, VIII, wykł. - 15 godz., ćwicz. - 45 godz.)

Znaczna liczba godzin przeznaczonych na ten przedmiot powinna zaowocować głębszą znajomością metod nauczania matematyki szkolnej. Przewidujemy podobny sposób realizacji programu na obu latach (tzn. III i IV), z tym, że na III roku zagadnienia szczegółowe winny dotyczyć głównie nauczania w szkole podstawowej, zaś na IV - w szkole średniej.

"Praktyki pedagogiczne"

Proponujemy usytuować je po III roku studiów (szkoły podstawowe) w wymiarze 5 tygodni (wrzesień-październik) oraz po IV roku (szkoły średnie) w tym samym okresie.

"Techniczne środki w dydaktyce"
(semestr V, ćwicz. - 15 godz.)

Istnieje coraz więcej urządzeń mogących wesprzeć proces nauczania (środki audiowizualne, komputery). Jednocześnie obserwuje się niemal zupełny brak specjalistycznych materiałów do tych urządzeń, stanowiących pomoc w realizacji programu matematyki. Również wyposażenie szkół w tradycyjne pomoce dydaktyczne jest stosunkowo ubogie. W tej sytuacji nauczyciel zmuszony jest do samodzielnego projektowania, a często także wykonywania wielu takich pomocy. Ponieważ wykorzystywanie tychże środków może mieć znaczący wpływ na uatrakcyjnienie nauczania (głównie w szkole podstawowej), widzimy potrzebę przygotowania studentów do tego rodzaju działalności. Odpowiednią formą zajęć jest tu laboratorium.

"Praktyka prowadzenia lekcji"
(semestry IX, X, wymiar godz. - 30)

Przedmiot ten byłby realizowany w formie praktyki śródrocznej. Jego czasowe usytuowanie pozwala przypuszczać, że studenci mają

już pewne doświadczenia w pracy z uczniami. Mogą więc koncentrować się na doskonaleniu swych umiejętności oraz podnoszeniu jakości prowadzonych lekcji. Przyjęta forma organizacyjna zajęć którą charakteryzuje niewielka intensywność (2 godz. tygodniowo) i rozłożenie w czasie, winna dobrze służyć tym właśnie celom. Ponadto stwarza ona okazję do dłuższych obserwacji (ucznia, grupy lub klasy), eksperymentów czy realizacji określonych zadań dydaktycznych. Lekcje studentów winny być hospitowane wyrywkowo przez pracowników uczelni, a na zakończenie zajęć - jedna lekcja obserwowana "komisyjnie".

Przygotowanie studentów do pracy w szkole nie może ograniczać się jedynie do przekazania im pewnego pensum wiedzy. Równie ważne jest nauczenie stawiania problemów, przygotowanie do poszukiwania ich rozwiązań oraz wyrobienia umiejętności prowadzenia dyskusji na tematy matematyczne. Trzeba z całą mocą podkreślić, że te - bez wątpienia podstawowe - umiejętności powinien posiąść każdy przyszły nauczyciel matematyki. Dlatego też badania nasze zostały rozszerzone o poszukiwanie odpowiednich form przekazu wiedzy studentom, ustalenie metod (np. prowadzenia wykładu), dzięki którym słuchacze będą mogli posiąść te umiejętności, ważne dla dobrego przygotowania do prowadzenia lekcji matematyki.

Wielu specjalistów zajmujących się problemami dydaktyki matematyki w szkole wyższej uważa, że unowocześnienie stosowanych metod jest związane z koniecznością odrzucenia tradycyjnych form przekazywania treści. Elementem szczególnie krytykowanym w tym przypadku jest wykład. Proponuje się zamienić tę formę na jakąś inną, np. seminarium, samodzielną pracę studenta z książką lub odpowiednio zaprogramowany komputer. Jednakże przeprowadzone badania wykazały, że zarówno studenci, jak i nauczyciele akademiccy jednogłośnie opowiadają się za utrzymaniem wykładów jako podstawowej formy przekazywanią wiedzy w szkole wyższej. Oto wyniki badań zawarte w jednym z rozdziałów monografii K. Kruszewskiego *Wykład w szkole wyższej*. Ankieta przeprowadzona wśród 59 wykładowców i 455 studentów dała następujące rezultaty:

- pogląd, że wykład powinien być stosowany na szeroką skalę podzielało 61,9% studentów i 80% wykładowców,

- opinia, że wykłady nie powinny być stosowane w procesie dydaktycznym w szkole wyższej, była akceptowana przez 2,1% studentów i nie była podzielana przez żadnego z wykładowców.

W badaniach przeprowadzonych przez nas (tylko wśród studentów) wyniki były jeszcze bardziej przekonujące: 81,3% respondentów widziało wykład jako dominującą formę przekazywania wiedzy w procesie uczenia w szkołach wyższych. Oczywiście dyskusja dotyczyła tylko przedmiotów matematycznych oraz odpowiedniego sposobu prowadzenia wykładu uzupełnionego przez ćwiczenia.

Wyniki te dowodzą, że obecnie nie jesteśmy przygotowani do odrzucenia wykładu jako głównej formy przekazywania wiedzy, a nawet do istotnego zredukowania jego roli. Pozostaje jednak poza wszelką wątpliwością stwierdzenie, iż tradycyjny wykład (typu: definicje - twierdzenie - dowód), w czasie którego studenci kopiują prawie bezmyślnie to, co zostało napisane na tablicy, przeżył się i nie przystaje do nowoczesnego procesu dydaktycznego. Dzieje się tak, bowiem przy tego typu zajęciach nie wymaga się od studentów aktywności, nie tworzy pozytywnej motywacji do uczenia się i nie czyni łatwiejszym przyswojenia sobie przekazywanej treści. W tej sytuacji możliwy sukces studentów zależy więc od siły argumentacji, talentu wymowy wykładowcy, a także - w pewnym stopniu - od zdolności zapamiętywania faktów. Największą jednak wadą tego typu wykładu jest brak aktywności słuchaczy.

Powstaje pytanie, czy jest możliwe poprowadzenie wykładu w sposób problemowy dla np. 70 lub 100 studentów. Jak zaktywizować tak liczną grupę słuchaczy, jak spowodować, aby utożsamili się oni z dyskusją wykładowcy, a ponadto - jak uczynić matematykę "ich matematyką", a nie czymś dziwnym, trudnym i niezrozumiałym? Nasze badania prowadzone w tym zakresie dotyczyły właśnie poszukiwania odpowiedzi na te pytania. Oczywiście nie można wszystkich poszczególnych dowodów prowadzić w sposób problemowy i zajmować się "odkrywaniem" każdej definicji przez studentów. Nie pozwala na to czas. Zbyt wiele wiedzy trzeba przekazać studentom, a liczne grupy dodatkowo ograniczają te możliwości.

Oto trzy propozycje będące odpowiedzią na powyższe kwestie:

1. Lokalna aktywność poszczególnych studentów powinna być zamieniona na aktywność globalną. Jest to najważniejsza propozycja, choć musi być uzupełniona i wzbogacona przez pozostałe nasze sugestie. Dbając o to, by studenci nie budowali tylko małych i wąskich cząstek teorii (np. dowody twierdzeń), powinniśmy zmusić ich do uczestnictwa w tworzeniu ogólnej koncepcji wykładu. Ich aktywność musi więc być ukierunkowana na wskazanie głównych tez. Jedno-

cześnie powinni sami proponować sposoby, za pomocą których możemy tworzyć daną teorię. Zadaniem nauczyciela akademickiego jest stworzenie odpowiedniej sytuacji problemowej, przeanalizowanie tego zagadnienia, zachęcenie słuchaczy do szukania odpowiednich sposobów jego rozwiązania i przekonania studentów, iż zdolni są do tworzenia danej teorii.

Realizacja proponowanej przez studentów koncepcji wykładu powoduje wzrost ich zainteresowania danym problemem, równocześnie możliwe jest zaktywizowanie grupy tych słuchaczy, których propozycje zostały odrzucone. By udowodnić swoje racje, studenci będą starali się dyskredytować inne sugestie i budować własne teorie. Młodzieńcze pomysły i odrzucanie starych nawyków może być łatwo przekształcone w próbę ukazania nam (wykładowcom), że to oni mieli rację i ich koncepcja była właściwa. Nie trzeba przekonywać nikogo, że taka sytuacja jest bardzo korzystna, bez względu na to, czyje poglądy zwyciężyły.

Wyżej zaprezentowane rozważania mogą prowadzić jednak do nowego pytania: co zrobimy, jeśli studenci przedstawią wiele (niekoniecznie rozsądnych) propozycji? Odpowiedź zawarta jest w drugim punkcie naszych propozycji.

2. Wykład prowadzić należy w formie konwersacji. Ponieważ dialog ze zbyt liczną grupą studentów jest utrudniony, wykładowca powinien dyskutować z samym sobą - w sensie "głośnego myślenia". Powinien argumentować za i przeciw, rozsądzać głośno podane możliwości i przedstawiać ich słabe punkty, prezentować zalety i wady każdej rozważanej koncepcji. Dzięki konwersatoryjnemu wykładowi możemy uczynić studentów świadkami budowania poszczególnych elementów danej teorii. Poprzez głośne formułowanie wątpliwości i spekulowanie nad wyborem sposobu dowodzenia lub głośne odkrywanie definicji, wykładowca tworzy matematykę na oczach słuchaczy i nie ogranicza swojej osoby do automatu podającego studentom gotowy wyrób, tj. odkryte i już udowodnione twierdzenia.

Kolejne wątpliwości mogą wiązać się z problemem, czy studenci zawsze znajdą najlepszą drogę, czy są zdolni "odkryć" najwłaściwsze idee tematu, czy samodzielność pozostawiona im w tej materii nie leży poza ich możliwościami.

Tu wskazujemy trzeci punkt naszych propozycji.

3. Samodzielność kontrolowana. Pozostawiając studentom ustanowienie pewnych koncepcji wykładu, musimy wyraźnie wskazać cele,

które chcemy osiągnąć i nieustannie kontrolować, czy zastosowanie proponowanych przez studentów dróg pozwoli je osiągnąć. Określenie tych celów nie powinno być traktowane jako ograniczenie samodzielności słuchaczy, ponieważ mogą one być formułowane przez samych studentów, np. jako rezultat wcześniejszych rozważań wykładowcy. Kontrolowana samodzielność polega również na tym, aby kierować myślami studenta, wskazywać historyczne aspekty danego problemu i wątpliwości matematyków pracujących nad tym zagadnieniem oraz ukazywać kierunki nowożytnej matematyki; wtedy dopiero można żądać propozycji dotyczących tworzenia danej teorii bądź sprecyzowania tematu. Kontrolowana samodzielność jest więc spontanicznym odkrywaniem matematyki przez studenta do tego przygotowanego, kontrolowanym przez nauczyciela, kolegów oraz przez niego samego i weryfikowanym przez badanie, jak daleko jego odkrycia są zgodne z oczekiwaniami i do jakiego stopnia jego sugestie są lepsze niż inne propozycje.

Prezentowane tu rozwiązanie było wielokrotnie testowane w ramach prowadzonych badań w ten sposób, że podczas wykładów (z algebry lub topologii), część materiału była przekazywana w tradycyjny sposób (definicja, twierdzenie, dowód) a część - realizowana w sposób wyżej przedstawiony. Badania były więc prowadzone w naturalnych okolicznościach, a materiał był tak dobrany, aby stopień trudności był podobny w obu partiach wykładu.

Oto rezultaty tych badań i obserwacji:

- Stopień opanowania materiału był zdecydowanie wyższy w przypadku wyżej proponowanej metody niż przy stosowaniu tradycyjnego wykładu.

- Przy tematach realizowanych nową metodą studenci znacznie łatwiej odpowiadali na pytania przewyższające wymagania egzaminacyjne. W tradycyjnym sposobie wykładu tylko 6,2% słuchaczy poszerzało swoje wiadomości, a przy zmodernizowanym wykładzie liczba ta wzrosła do 37,1%.

- Obecność na zajęciach zwiększyła się znacznie, gdy wykłady były prowadzone nową metodą (o ok. 15-20%).

- Ponad 68% studentów wyrażało chęć kontynuowania swojej aktywności w przypadku materiału wykładanego nową metodą, podczas gdy niespełna 41% chciało pogłębić swą wiedzę w tematach przekazanych metodą tradycyjną.

- Nowa metoda spowodowała jednocześnie przedłużenie czasu potrzebnego na zrealizowanie materiału średnio o ok. 35%.

Najważniejszym jednak zyskiem ze stosowania nowej metody jest pokazanie studentom jak powstają problemy matematyczne, jak są dyskutowane i jak buduje się ich rozwiązania. Jest to bardzo ważny element kształtowania dojrzałości matematycznej przyszłych nauczycieli, którzy mogą go przenieść do nauczania w szkole.

Uzyskane w wyniku prowadzonych przez nas badań rezultaty mogą stanowić dobrą bazę, na podstawie której można przygotować programy pięcioletnich studiów nauczycielskich. Zdajemy sobie w pełni sprawę z ryzyka, jakie podejmujemy przedstawiając niniejsze opracowanie. Zawsze bowiem można postawić zarzut braku pewnych haseł lub też sugerować możliwość pominięcia niektórych tematów. Stwierdzenia te nie muszą wynikać wyłącznie z upodobań lub krytycyzmu osoby, która je składa. Mogą one być rezultatem przekonań oraz sposobu widzenia potrzeb przyszłego nauczyciela. W swoich badaniach spotykaliśmy się bowiem niejednokrotnie z zupełnie skrajnymi poglądami. Należy jednak podkreślić, że przedstawione tu wyniki stanowią efekt wielu lat pracy oraz są swego rodzaju syntezą opinii (niekiedy diametralnie różniących się) wielu osób, w której uwzględniono również cały szereg innych (wcześniej omówionych) efektów badawczych. Mimo możliwych kontrowersji uważamy, że opracowanie niniejszej problematyki było ważne i potrzebne, gdyż doprowadziło do wskazania właściwych podstaw, w które powinni być wyposażeni przyszli nauczyciele. Określenie minimum ich edukacji matematycznej nie miało na celu sugerowania zminimalizowania wymagań stawianych przyszłym matematykom - specjalistom w zakresie nauczania. Dążyliśmy do wskazania treści, które powinny być podczas studiów omówione ze studentami. Nie twierdzimy przy tym, że nie można zapoznawać ich również z innymi tematami, ale sugerujemy, że może do tego dochodzić tylko wówczas, gdy przedstawione przez nas treści będą dobrze przez studentów opanowane, gdyż stanowią one fundament przygotowania słuchaczy do pracy w szkole.

Do podjęcia problematyki minimum edukacji skłaniał nas fakt, iż w wielu szkołach wyższych, przygotowujących przyszłych nauczycieli, kształci się głównie teoretyków matematyki. Studenci spotykają się tylko w niewielkim zakresie z geometrią (ukrytą niekiedy w algebrze liniowej), arytmetyką teoretyczną czy historią matematyki.

Załącznik

Kierunek: MATEMATYKA
Specjalność: NAUCZYCIELSKA
Studia: STACJONARNE

UNIWERSYTET ŁÓDZKI
STUDIA MAGISTERSKIE
Plan studiów (projekt)

Czas trwania studiów 5 lat (10 sem.)

Lp.	Nazwa przedmiotu	Egzamin obowiązujący po semestrze	Godziny zajęć						Rozkład godzin zajęć																	
				w tym					I rok				II rok				III rok				IV rok				V rok	
									1 sem.		2 sem.		3 sem.		4 sem.		5 sem.		6 sem.		7 sem.		8 sem.		9 sem.	10 sem.
									15 tyg.		15 tyg.		15 tyg.		15 tyg.		15 tyg.		15 tyg.		15 tyg.		15 tyg.		15 tyg.	15 tyg.
			Razem	wykłady	ćwiczenia	konwersatoria	laboratoria	seminarium	w.	ćw.	w.	ćw.	w.	ćw.	w.	ćw.	w.	ćw.	w.	ćw.	w.	ćw.	w.	ćw.	w.	ćw.	w.	ćw.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
1	Wstęp do matematyki	1	120	60	-	60	-	-	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	Geometria z elementami algebry	2	240	120	-	120	-	-	4	4	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	Algebra	4	150	75	-	75	-	-	-	-	-	-	3	3	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4	Analiza matematyczna	3,5	480	240	-	240	-	-	-	-	4	4	4	4	4	4	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	Równania różniczkowe zwyczajne	5	60	30	-	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	Analiza zespolona	4	60	30	-	30	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	Analiza funkcjonalna	8	60	30	-	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-
8	Topologia	2	60	30	-	30	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	Geometria różniczkowa	6	60	30	-	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-
10	Informatyka	-	120	30	-	-	90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-
11	Rachunek prawdopodobieństwa	6	60	30	-	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-
12	Statystyka matematyczna	7	60	30	-	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	-	-
13	Fizyka	9	120	60	-	-	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	2	2	-	-
14	Geometria elementarna	3	90	45	-	45	-	-	-	-	-	-	3	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
15	Arytmetyka teoretyczna z teorią liczb	9	90	45	-	45	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	3	-	-
16	Wykład specjalizacyjny I	6	120	60	-	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-
17	Wykład specjalizacyjny II	8	120	60	-	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	2	2	-	-	-	-
18	Pracownia informatyczna	-	90	-	-	-	90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	3
19	Seminarium I	-	60	-	-	-	-	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-
20	Seminarium II	-	60	-	-	-	-	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	2	-	-	-	-
21	Seminarium magisterskie	-	90	-	-	-	-	90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	4
22	Dydaktyka matematyki ogólna	4	60	30	-	30	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	Metodyka nauczania matematyki I	6	120	30	-	90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	3	1	3	-	-	-	-	-	-	-	-
24	Metodyka nauczania matematyki II	8	120	30	-	90	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	3	1	3	-	-	-	-
25	Praktyka prowadzenia lekcji	-	60	-	-	-	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	2
26	Psychologia	1	75	45	-	30	-	-	2	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
27	Pedagogika	3	90	60	-	30	-	-	-	-	2	1	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
28	Środki techniczne w dydaktyce	-	15	-	-	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
29	Filozofia	7	120	60	-	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	2	2	-	-	-	-	-	-
30	Historia matematyki	10	60	60	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	2	-
31	Ekonomia polityczna	-	60	30	-	30	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
32	Lektorat I	2	90	-	90	-	-	-	-	3	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
33	Lektorat II	4	120	-	120	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
34	Szkolenie obronne	8	120	90	-	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	2	4	2	-	-	-	-
35	Wychowanie fizyczne	-	180	-	-	180	-	-	-	2	-	2	-	2	-	2	-	2	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-
		27 +mgr	3660	1440	210	1500	300	210	10	16	12	16	12	17	12	18	11	18	9	19	11	13	11	13	7	12	2	9
									26		28		29		30		29		28		24		24		19		11	

PRAKTYKI ZAWODOWE: Praktyka nauczania w szkole podstawowej po III roku w terminie przybliżonym 7 IX-13 X (5 tygodni); Praktyka nauczania w szkole ponadpodstawowej po IV roku w terminie przybliżonym 7 IX-13 X (5 tygodni)

W wielu przypadkach nie widać istotnych różnic w przygotowaniu do pracy w szkole i do pracy naukowej, czy też działalności w przemyśle. Postępujący rozwój matematyki jako nauki, jej rola i znaczenie w innych dziedzinach wiedzy sprawiają, że niezbędna staje się "specjalizacja zawodowa" matematyków, niekiedy nawet w dość wąskim zakresie.

Uważamy, że problematyka optymalizacji procesu kształcenia nauczycieli, w zakres której wchodził również opracowywany przez nas temat, jest niezwykle ważna, a badania w tej dziedzinie - niezmiernie potrzebne. Współczesny proces nauczania matematyki wymaga bowiem od nauczyciela nie tylko bardzo starannego przygotowania merytorycznego oraz teoretycznej znajomości podstaw nauk pedagogicznych, ale również umiejętności formułowania i rozwiązywania problemów, prowadzenia dyskusji matematycznych, budowania środków dydaktycznych i sprawnego posługiwania się techniką mikrokomputerową. W ramach dobrego przygotowania nauczyciela do pracy w szkole trzeba uwzględnić wszystkie powyższe aspekty, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy stosowane do tej pory formy pracy ze studentami zostaną zastąpione metodami opartymi na naukowych podstawach.

LITERATURA

[1] K r y g o w s k a Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, Warszawa 1979, s. 15.

Wykonano w ramach RPBP III.30.V.0

Instytut Matematyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Ryszard J. Pawlak, Anna Warężak, Witold Budzisz, Andrzej Fabijańczyk, Monika Fabijańczyk, Józef Janikowski, Inga Libicka, Alicja Molęda, Zenon Piesyk, Tadeusz Poreda, Andrzej Rychlewicz, Wacława Tempczyk

THE MINIMUM OF THE MATHEMATICS TEACHER´S MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND A PROJECT FOR ORGANIZING THE TEACHING PROCESS AT THE UNIVERSITY TEACHER´S STUDIES

The present paper is the outcome of investigations and theoretical analyses carried out for several years, aiming at an answer to the following questions:

- what should the fund of the mathematics teacher's knowledge look like, within what scope and in what way should we convey this knowledge to him?

In the commencing part of the paper, we analyze critically the existing system of educating teachers of mathematics; later, we present a proposal of a structure of five-year master's studies preparing the graduates for work in the profession of a mathematics teacher.

Basing ourselves on the evolved criteria of choice of mathematical contents which should be considered indispensable in educating the teachers, we present a project of the minimum of knowledge of the fundamental subjects:

mathematical analysis,
algebra,
geometry,
probability and elements of statistics,
theoretical arithmetic,
logic and set theory,
complex analysis,
topology,
differential equations,
functional analysis,
numerical methods,
elements of computer science,
the didactics of mathematics.

Since the lecture at higher studies constitutes the basic form of conveying knowledge, the article closes with a discussion on modern ways of lecturing, activating the students.

The scope of mathematical knowledge, proposed in the paper, which should be conveyed to the students - future teachers and the project of organizing the university teacher's studies can constitute the basic for the elaborating of the detailed curricula of such studies.