

Ryszard J. Pawlak

MINIMUM EDUKACJI MATEMATYCZNEJ PRZYSZŁYCH NAUCZYCIELI
KULTURA MATEMATYCZNA

Artykuł ten nawiązuje do problematyki budowania dojrzałości matematycznej studentów. W szczególności omówiona została rola języka matematycznego i wartości estetycznych matematyki oraz znaczenie historii matematyki. Rozważono także związki informatyki z szeroko rozumianą kulturą matematyczną.

"Matematyka jest - zgodnie z wypowiedzią Allena Hammonda - naszą niedostrzegalną kulturą. Jest odyseją wiodącą w świat uczyniony przez człowieka; tylko niewielu ludzi wyruszy w tę drogę. Przedstawia ona jedno z najwyższych osiągnięć umysłu ludzkiego, tryumf umysłu (logiki) nad materią (wiedzą). Whitehead uzasadniał, że tylko muzyka konkuruje z matematyką jako najbardziej oryginalny twór ludzkiego ducha. Sprawia ona »szczególną przyjemność« tym niewielu, którzy jak Jacob Bronowski doświadczyli jej bogactwa. Nie należy się więc dziwić smutkowi matematyków, że nawet wykształceni ludzie nie wiedzą, iż ich przedmiot naprawdę istnieje. Istnieje w obfitości, jako konieczny produkt umysłu człowieka: *cogito ergo sum*" ([1], s. 24).

Zafascynowanie kulturą matematyczną można zaobserwować również poza gronem matematyków, o czym można się przekonać czytając dzieła wielu wybitnych filozofów, np. Kanta czy Bacona. Oznacza to konieczność uwzględnienia tego elementu w kształtowaniu dojrzałości matematycznej przyszłych nauczycieli. Złożoność owej problematyki oraz brak możliwości umieszczenia jej w sztywnych ramach zasad, metod i reguł sprawiły, iż dotychczas pojawiło się niewiele opracowań związanych z tym tematem.

Zdając sobie sprawę, iż niemożliwe jest kompleksowe omówienie tych zagadnień, w niniejszym opracowaniu skoncentrujemy się na

przeanalizowaniu tylko pewnego wycinka poruszanego tematu. Ograniczymy się zatem do omówienia (z konieczności dość fragmentarycznego) zagadnień takich, jak:

- 1) język matematyki,
- 2) wartości estetyczne, jakie niesie ze sobą matematyka,
- 3) radość tworzenia i rozumienia faktów matematycznych,
- 4) rola historii matematyki,
- 5) rola wiedzy matematycznej,
- 6) wykorzystanie informatyki.

Język matematyczny jest bez wątpienia ważnym składnikiem kultury matematycznej. Termin ten rozumiany bardzo szeroko, jako element porozumiewania się matematyków zarówno w sensie symboliki, jak też terminów oraz sposobu wypowiadania swoich myśli. Naturalne jest więc, że w ramach studiów nauczycielskich musimy dążyć do kształtowania sprawności w zakresie posługiwania się tym językiem. Powstaje jednak pytanie: jakie "minimum sprawności" w tym względzie powinien posiadać przyszły nauczyciel? Aby odpowiedzieć na nie, a nawet uzasadnić jego sensowność, spróbujemy zastanowić się najpierw, czemu przede wszystkim służy używanie języka matematycznego, jakie konsekwencje pociągnęłoby zastąpienie go "językiem potocznym". Otóż wydaje się, że język ten posiada (w odniesieniu do matematyki) następujące zalety:

- 1) upraszcza zapis, zwiększa jego przejrzystość, a tym samym ułatwia jego odczytanie;
- 2) pozwala na precyzyjne wyrażenie myśli, eliminując niejasności i dwuznaczności;
- 3) jest w pewnym sensie uniwersalny (ponadjęzykowa symbolika, możliwość odczytania wzorów w książkach napisanych nawet w nieznanym języku itp.).

Obserwując pracę studentów, zwłaszcza młodszych lat, można zauważyć, że posługiwanie się językiem matematycznym sprawia im ogromne kłopoty. Nie tylko nie pomaga on studentom w mówieniu o matematyce, ale niekiedy wręcz utrudnia wypowiadanie myśli - dokonują oni swego rodzaju "tłumaczenia" spontanicznych obserwacji na język matematyki. Charakterystyczne jest, że w "swoim towarzystwie", mówiąc o problemach matematycznych unikają tego języka. W miarę jednak pogłębiania się ich dojrzałości matematycznej, sytuacja ta ulega zmianie. Uważamy, że ze względu na wspomniane wyżej funkcje języka matematycznego oraz rolę nauczyciela w procesie

jego kształtowania w szkole podstawowej i średniej, absolwenci kierunków nauczycielskich powinni osiągnąć taką sprawność w zakresie posługiwania się językiem matematyki, by sami byli przekonani, że mówiąc o tematach matematycznych prościej i łatwiej jest używać symboliki, terminów oraz wyrażeń charakterystycznych dla tego języka, by nie musieli dokonywać tłumaczeń z języka potocznego oraz widzieli faktyczne ułatwienie w rozumieniu i interpretowaniu zapisów matematycznych. Widowym znakiem takiej sytuacji będzie poprawne wypowiadanie swoich przemyśleń matematycznych oraz próby "matematyzowania otoczenia". Nie chodzi tu o sztuczne wiązanie terminów matematycznych z otaczającymi nas przedmiotami, lecz o świadome używanie języka matematycznego wszędzie tam, gdzie matematyka ingeruje w naszą rzeczywistość, znajduje zastosowanie oraz może pomóc w interpretowaniu rzeczywistości.

"Wielki matematyk francuski Henri Poincaré pisał o »odczuciu matematycznego piękna, harmonii liczb i kształtów, geometrycznej elegancji. Są to odczucia czysto estetyczne, znane wszystkim prawdziwym matematykom«. Dalej opisywał on proces twórczy w matematyce w terminach zadziwiająco zbieżnych z tymi, których dziś używają psychologowie badający specjalizację dwu półkul mózgu. Poincaré odróżniał »dwa mechanizmy albo - jeśli chcecie - metody pracy dwu jaźni«: logicznej, zdolnej do intensywnej pracy nad problemem, pracy, którą zwykle poprzedza intuicyjny wyłom, a po niej następuje rachunek - jaźń tę Poincaré identyfikował ze świadomym umysłem, a dziś psychologowie opisują ją jako funkcję lewej półkuli; oraz jaźni drugiej, związanej z odczuciem estetycznym i zdolnej do rozpoznawania tego układu spośród wszystkich prezentujących się wariantów możliwych, który jest jednocześnie piękny i ważny" ([1], s. 33, 34).

Matematyczne doznania estetyczne są dla matematyka nie mniej ważne niż głęboka wiedza matematyczna. Umiejętność dostrzeżenia i docenienia elegancji rozwiązań, zapisów i rozumowań jest niezbędna do pobudzenia wyobraźni, zmobilizowania się do dalszych poszukiwań. W odróżnieniu od sztuki, w matematyce piękno posiada swego rodzaju uniwersalny charakter. Profesor matematyki w Columbia University Lipman Bers twierdzi: "Sądzę, że matematycy są na ogół zgodni co do tego, że prostota i piękno są ważne; nie ma też kłopotu z ich rozpoznaniem, gdy się je widzi". ([1], s. 36). A jeden z najwybitniejszych specjalistów z zakresu zagadnień przestrzen-

nych prof. Dennis Sullivan (Institute des Hautes Etudes Scientifiques w Bures - sur - Yvette) dodaje: "Zgadzam się z tym co powiedział profesor Bers, że to co jest uderzające i piękne w matematyce, jest niemal uniwersalnie uznawane jako takie" ([1], s. 37).

Zrozumienie piękna matematycznego może nastąpić tylko wtedy, gdy studenci mają możliwość prześledzenia różnych ujęć danego zagadnienia, porównania ich i przeanalizowania. Nie sprzyjają temu z pewnością przeładowane programy uniwersyteckie. Uważamy, że student osiągnie zadowalający stopień dojrzałości w zakresie estetyki matematycznej, gdy nie będzie kontentował się znalezieniem jakiegokolwiek rozwiązania danego problemu, lecz świadomie będzie dążył do stworzenia możliwie najbardziej eleganckiego rozumowania. Obawiamy się jednak, że w dobie nadmiernie trudnych zadań, które stawia się przed studentami, żądanie nasze - chociaż nie nazbyt wygórowane - jest jednak mało realne. Podkreślić przy tym trzeba, że sytuacja ta jest wysoce szkodliwa, gdyż w konsekwencji nauczyciele nie potrafią pokazać uczniom całego piękna matematyki, nie dążą do zasygnalizowania im celowości poszukiwań różnych dróg rozwiązywania danego zagadnienia.

Największą korzyścią, jaką uczniowie mogą odnieść z dobrego opanowania matematyki, jest radość ze zrozumienia oraz (ewentualnie) ponownego odkrycia pewnych faktów. Wspomniany już wcześniej prof. L. Bers tak mówi o swoich odczuciach dotyczących tego zagadnienia: "Myślę, że tym co sprawia, że matematyka jest jednak przyjemnym zajęciem, jest tych kilka minut, gdy nagle coś trafia na swoje miejsce i zaczynamy rozumieć. Wielcy matematycy mogą przeżywać takie momenty bardzo często. Gauss, jak to wskazują jego zapiski, miewał takie okresy, gdy w ciągu jednego dnia miał dwa lub trzy istotne błyski intuicji. Zwykli śmiertelnicy doświadczają tego bardzo rzadko. Niektórzy mogą to mieć tylko raz lub dwa razy w całym życiu. Ale cechą takiego przeżycia - ci, którzy doznali tego, potwierdzą - jest radość, której nie można porównać z żadną inną radością. Gdy po raz pierwszy poznajemy coś, mamy także tę radość. Tak więc - zostało to zauważone przez wiele osób - praca nasza polega na przygotowaniu się na ten moment zrozumienia, który przychodzi nagle, jako wynik nieświadomego procesu" ([1], s. 39). Obserwacje uczniów i studentów dowodzą, że wbrew temu co twierdzi prof. Bers, nawet "zwykli śmiertelnicy" mogą częściej odczuwać tę

radość. Niezbędnym warunkiem jest jednak w tym przypadku dążenie do pokonywania trudności intelektualnych, osiągnięcie zdolności ocenienia (co było wyżej wspomniane) piękna matematycznych rozwiązań. W efekcie może to przynieść ogromną satysfakcję z osiągniętych rezultatów. Uważamy, że tylko człowiek, który sam doznał takiej radości i satysfakcji, jest w stanie podjąć próbę poprowadzenia do tego celu swoich uczniów oraz przekazać im przekonanie, że radość ta jest w stanie zrekompensować trud włożony w rozwiązanie danego problemu matematycznego. Bez tego przekonania nauczanie matematyki pozostanie jedynie pamięciowym opanowywaniem trudnych faktów, a jedynym celem będzie uzyskanie pozytywnej oceny.

"Jedną z przyczyn szczególnych trudności, jakie napotyka prawnik przy próbach zgłębienia tajników współczesnej matematyki jest to, że dziedzina ta ma niewiarygodnie długą i skomplikowaną historię. Nauki fizyczne oparte są na koncepcjach i teoriach mających co najwyżej kilkaset lat; większość naukowych podstaw biologii, medycyny, statystyki i psychologii ma jeszcze krótszy życiorys. Matematyka natomiast liczy swą historię na tysiąclecia. Znacznych postępów dokonano w starożytnej Grecji: ówczesny formalizm logiki Euklidesa, choć dzisiejszym logikom wyda się on jeszcze mało precyzyjny, jest przeszkodą dostatecznie wysoką, by wyeliminować prawie połowę wykształconej społeczności w próbach efektywnego poznania matematyki liczącej mniej niż 2000 lat. Ci, którzy ukończą pełny program matematyki ze szkoły średniej, dojdą do stanu odpowiadającego w przybliżeniu połowie siedemnastego wieku, podczas gdy pierwszy kurs rachunku różniczkowego i całkowego doprowadzi niektórych studentów zaledwie do matematyki osiemnastowiecznej" ([1], s. 15).

Długa historia matematyki w pewnym sensie "przeszkadza" w jej opanowaniu, z drugiej jednak strony, może ona bardzo pomagać nauczycielowi w doborze metod przekazu wiedzy matematycznej. Jak zauważył H. Freudenthal (prof. Uniwersytetu w Utrechcie - Holandia), w swoim pięknym referacie wygłoszonym w Sekcji Historii i Pedagogiki Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Warszawie w 1983 r. (tytuł referatu: *The implicit philosophy of mathematics history and education*): "Filozofia historii często oznacza to, czego możemy nauczyć się z przeszłości, aby dawać sobie radę z przyszłością. W naszym szczególnym przypadku znaczy to, czego historia dawnej matematyki może nauczyć dydaktykę matematyki". Znajomość historii mate-

matyki umożliwia stosowanie zasady paralelizmu dydaktycznego, orzekającej, że uczeń rekapitułuje proces uczenia się ludzkości. (Zasada ta stanowi przeniesienie na grunt dydaktyki słynnego prawa biogenetycznego orzekającego, że ontogeneza jest rekapitulacją filogenezy.)

Znajomość historii matematyki jest zatem bardzo ważnym elementem wykształcenia matematycznego, jakie powinien posiadać absolwent kierunku nauczycielskiego uniwersytetów i wyższych szkół pedagogicznych. Zakres (minimalny) tej znajomości powinny wyznaczać podstawowe fakty z historii poszczególnych dziedzin matematycznych.

Historia matematyki implikuje również konieczność zapoznania studentów z dotychczasowymi osiągnięciami myśli ludzkiej. Trudno bowiem mówić o kulturze matematycznej, gdy nie zna się dążeń i metod działania matematyków i to zarówno tych z przeszłości, jak też współczesnych uczonych. Niemożliwe jest bowiem wówczas zrozumienie ich intencji, celowości podejmowanych wysiłków badawczych oraz ustalanie kierunków badań. Aby jednak można było zrozumieć te fakty, potrzebna jest ogromna wiedza matematyczna - wiedza dotycząca matematyki martwej (w pewnym sensie już nieaktualnej) oraz matematyki współczesnej i nowoczesnej. Historia matematyki stanowi w tym przypadku swego rodzaju pomost między wiedzą o konkretnych faktach a rozumieniem tych faktów oraz zdawaniem sobie sprawy z intencji ich twórców. Można bowiem doskonale znać zabiegi matematyków dziewiętnastowiecznych i dwudziestowiecznych wokół różnych aksjomatyk, lecz bez twierdzenia Gödla nie będziemy w stanie zrozumieć różnic w podejściu ww. grup matematyków do tych zagadnień. Od przyszłych nauczycieli matematyki musimy zatem wymagać znajomości owych problemów, przekraczającej zwykłą umiejętność wyjaśniania szczegółów matematycznych.

Bardzo ważną sprawą jest również zapoznanie studentów ze współczesnymi badaniami i osiągnięciami. W większości przypadków nie zdają oni sobie bowiem sprawy z zakresu i rozmachu prowadzonych prac. L. A. Steen we wspomnianej już książce *Dwanaście eseów* tak opisuje skalę współczesnych badań: "Dziś mamy już blisko setkę uznanych poddyscyplin z jądra nauk matematycznych. Jeśli dodamy do tego kierunki matematyki stosowanej w statystyce, informatyce, badaniach operacyjnych i fizyce teoretycznej, to liczba różnych poddyscyplin dojdzie łatwo do kilkuset. Wyniki badań matematycznych

rozproszone są w około 1500 czasopismach wydawanych w blisko 100 różnych językach. Tylko w roku 1975 matematyczne czasopismo przeglądowe »Mathematical Reviews« wzmiankowało o ponad 24 tysiącach artykułów naukowych. Jest całkiem zrozumiałe, że niematematycy oceniają to wszystko jako fakt oszałamiający; tak zresztą patrzy na to także wielu matematyków. Matematyka dzisiejsza jest olbrzymim, potężnym i złożonym przedsięwzięciem, wykraczającym znacznie poza możliwości języka czy intuicji niespecjalisty" ([1], s. 19).

Nie jest zatem możliwe przekazanie studentom całej wiedzy dotyczącej współczesnych osiągnięć. Wskazane jest jednak ogólne omówienie nowoczesnych kierunków badawczych oraz zapoznanie z kilkoma wąskimi liniami badawczymi. Oczywiście - z konieczności - wiedza taka będzie raczej powierzchowna, ale można mieć nadzieję, że z jednej strony studenci bardziej zainteresują się wybranym przez siebie zagadnieniem, z drugiej natomiast będą w stanie przeciwstawić się nierzetelnym informacjom pojawiającym się od czasu do czasu na ten temat w prasie niematematycznej. Warto również w tym miejscu zaznaczyć, że za takim rozwiązaniem sprawy przemawia także przenikanie matematyki do innych dziedzin nauki. Aby uzmysłowić zakres tego faktu odwołajmy się jeszcze raz do książki Steena: "W ostatnim ćwierćwieczu świat matematyki rozwinął się z pojedynczej dyscypliny w grono splecionych przedmiotów nazywanych już zazwyczaj »naukami matematycznymi«. Do nauk tych poza dziedzinami z jądra, takimi jak teoria liczb, logika matematyczna, topologia różniczkowa i geometria algebraiczna, wchodzi także takie działy stosowane, jak: badania operacyjne, statystyka, informatyka, kombinatoryka i programowanie matematyczne. Zastosowania modeli matematycznych w nauce rozmnożyły się do tego stopnia, że są już teraz oddzielne dyscypliny (z własnymi czasopismami) matematycznej ekonomii, matematycznej biologii, matematycznej psychologii i matematycznej lingwistyki. Nawet takie regiony, jak nauki polityczne i historia nie ostały się nieskalanymi wobec ekspansji metod matematycznych; np. ostatnie (budzące spore kontrowersje) wprowadzanie technik statystycznych w badaniach historycznych zapoczątkowało nową specjalność nazwaną »kliometrią« (od imienia muzy historii Klio). Niewiele zostało takich terenów działalności intelektualnej człowieka, które nie byłyby jeszcze w istotnym stopniu kształtowane przez nauki matematyczne" ([1], s. 20).

Mówiąc o ekspansji matematyki i metod matematycznych, nie sposób pominąć informatyki. Nie jest celem niniejszego opracowania pokazanie jak powinno wyglądać minimum wiedzy przyszłych nauczycieli z tego przedmiotu. Omówienie tych faktów można znaleźć w innych artykułach. W tej pracy będziemy dążyć do omówienia związków informatyki z szeroko rozumianą kulturą matematyczną.

Mówiąc o języku matematycznym podkreślaliśmy fakt, że jego rola i znaczenie wynikają w głównej mierze z użyteczności. Podobnie rzecz się przedstawia również w przypadku informatyki. Bez tego aspektu fakty z omawianego zakresu będą stanowiły swego rodzaju receptę na "błyskawiczne liczydło" i pozbawione będą pewnego smaku, który sprawia, że przedmiot ten może stanowić połączenie elegancji oraz użyteczności.

Komputer w matematyce zyskuje coraz większe znaczenie. Bez jego pomocy nie byłoby dotychczas możliwe udowodnienie twierdzenia o czterech barwach, chociaż do dziś trwają spory o poprawność tego dowodu. K. Appel i W. Haken użyli do obliczeń komputera IBM 360 i oceniają, że aby wykonać jego pracę człowiek musiałby działać przez 10 mln godzin! Trzeba jednak podkreślić, że w tym przypadku istotne było również to, że niektóre idee dowodu powstawały w wyniku pracy z komputerem oraz swoistego "dialogu" człowieka z maszyną.

Posługiwanie się komputerem może prowadzić zatem również do wyboru metody, a uzyskane tą drogą ustalenia mogą w przyszłości zrewolucjonizować spojrzenie na wiele problemów matematycznych.

Siła "wiedzy komputerowej", jej możliwości i zakres sprawiają, iż wielu matematyków przewiduje, że w niedalekiej przyszłości może nastąpić przejście od charakterystycznej dla obecnego okresu "matematyki ciągłej" do "matematyki dyskretnej".

Znaczna jest również użyteczność komputerów w dydaktyce matematyki. Studenci powinni być zapoznani z metodami przeprowadzania testów przy użyciu mikrokomputerów (por. np. R. J. Pawlak, *Nauczycielskie testy dydaktyczne. Zastosowanie mikrokomputerów w procesie kontroli wiedzy studentów*), tworzenia banków danych oraz nauczania programowanego przy użyciu tych urządzeń. Wielkie jest również znaczenie tzw. programów edukacyjnych. Za ich pomocą można nie tylko przekazać i wyjaśnić konkretne fakty matematyczne, ale również pobudzić obserwatorów do pewnych "wrażeń estetycznych". Wspomniany już wcześniej

prof. D. Sullivan tak przedstawia możliwość zobrazowania za pomocą mikrokomputera krzywej Peano: "Można by pokazać na ekranie telewizyjnym krzywą rozwijającą się w dynamicznych meandrach, która w jakiś sposób byłaby zbliżna do krzywej wypełniającej płaszczyznę. W ciągu 5 lub 10 sekund dałoby to każdemu widzowi silne przeżycie geometrycznej zabawy, choć bez zrozumienia definicji i czegokolwiek innego. Efekt jest pewny. Widziałem audytorium, które oglądało taki pokaz. Było to coś fantastycznego! Pojawia się pewien układ, proces rozwija się w sposób ciągły i nagle cały ekran wypełniony jest krzywą. To jest przeżycie artystyczne" ([1], s. 45-46).

Zapoznanie studentów - przyszłych nauczycieli - z powyższymi faktami wydaje się niezbędne dla dobrego zrozumienia przez nich istoty informatyki, jej roli i znaczenia w matematyce oraz kształtowania ich dojrzałości matematycznej.

Przedstawione wyżej zagadnienia nie wyczerpują oczywiście tematu. Zaprezentowane poglądy są wynikiem pewnych przemyśleń powstających jako swego rodzaju "uboczny rezultat badań" prowadzonych nad tematem V.4. RPBP III.30. Uzyskanych efektów nie wolno jednak traktować w sposób marginesowy. Stanowią one bowiem ważny element ustaleń mających na celu dobre przygotowanie studentów do pracy w szkole. Uważamy, że niniejsze opracowanie stanowi ważne uzupełnienie osiągniętych przez nas "efektów matematycznych", a treści w nim zawarte stanowią punkt wyjścia do dalszych badań związanych z tym tematem.

LITERATURA

- [1] S t e e n L. A., *Matematyka współczesna. Dwanaście esejów*, Warszawa 1983.

Ryszard J. Pawlak

THE MINIMUM OF THE MATHEMATICAL EDUCATION OF FUTURE TEACHERS
MATHEMATICAL CULTURE

This article refers to the problems of building the mathematical maturity of students. In particular, the role of the language of mathematics and the aesthetic values of mathematics as well as the weight of the history of mathematics are discussed. Also, the connections of computer science with mathematical culture understood broadly are considered.