

# matematyka

## materiały metodyczne

2 7182818284564523032874713206549775247008995980748669676277240786303354759457136217820318642742746629192003289218174130962054387296203429528295630728132218827945460762223829880731923510190118728241879207521540891489348841670202447614606806254820168477411837423454424271075390774880285017027618386061331384582

**redakcja**

**Ryszard J. Pawlak**

**Zofia Walczak**



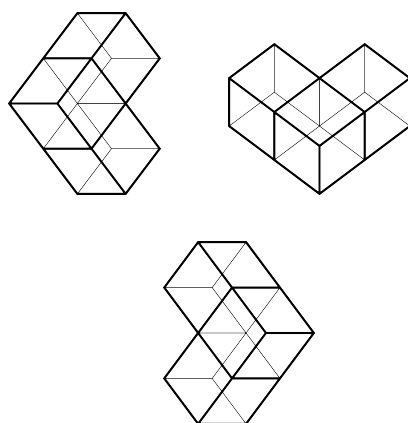
WYDAWNICTWO  
UNIWERSYTETU  
ŁÓDZKIEGO

VIII

---

## Krótki opis programu GeoGebra

---



Opracowanie

Zofia Walczak



# ROZDZIAŁ 1

---

## Wstęp

---

### 1.1.

---

#### Informacje ogólne

---

*GeoGebra* jest darmowym programem wspomagającym nauczanie i uczenie się matematyki. Znajduje zastosowanie między innymi w takich dziedzinach matematyki jak arytmetyka, planimetria, stereometria, geometria analityczna na płaszczyźnie i w przestrzeni, w rachunku różniczkowym i całkowym oraz w badaniu funkcji oraz rozwiązywaniu równań, nierówności i ich układów.

Czwarte wydanie oprogramowania oferuje kilka nowości i ulepszeń. Najważniejsze z nich to *GeoGebraTube* (pozwala na łatwe udostępnianie arkuszy online) i *GeoGebraPrim* (specjalny interfejs dla młodszych uczniów). Dodano ponadto nowe narzędzia, w tym możliwość eksportu arkuszy do różnych formatów, także do animowanych GIF'ów.

*GeoGebra* rozwijana jest przez Markusa Hohenwartera i międzynarodowy zespół programistów. Oprogramowanie jest rozpowszechniane na warunkach licencji GNU GPL, można go pobrać ze strony [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Instalacja przebiega bez problemów zarówno na komputerach z systemem 32 jak i 64 bitowym. Aby korzystać ze wszystkich możliwości programu trzeba mieć zainstalowany program java ze strony [www.java.com](http://www.java.com).

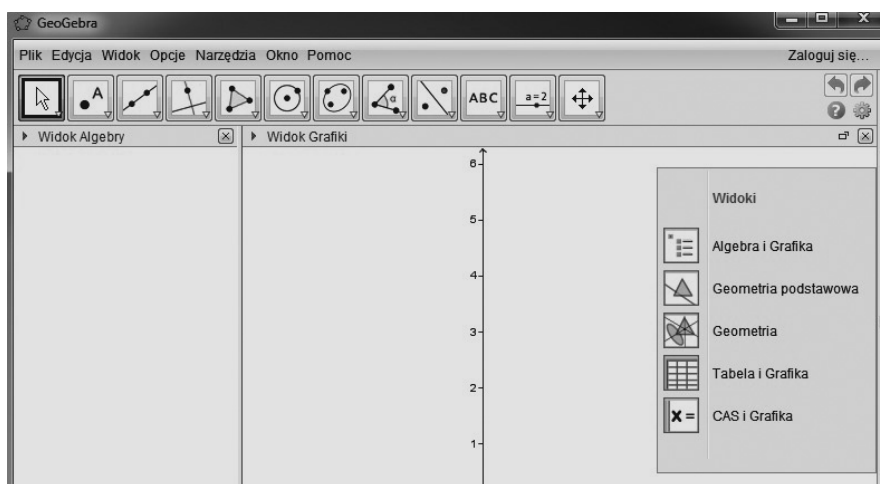
Na stronie <http://www.geogebra.org> w zakładce MATERIALS uzyskujemy dostęp do strony <http://www.geogebraTube.org/> na której możemy

znaleźć wiele przykładów zastosowania programu, także po polsku. Po zarejestrowaniu się w serwisie można tam umieszczać swoje materiały.

## 1.2.

### Uruchamiamy program

Po uruchomieniu programu na ekranie komputera pojawia się okno złożone z kilku części – widoków (patrz rysunek 1.1). Jedna z nich pokazuje nazwy możliwych do włączenia widoków (ekranów).



Rysunek 1.1: Standardowe okno programu

Domyślnie, na ekranie pojawiają się tylko dwa z nich, widok grafiki i algebra. W widoku grafiki tworzymy konstrukcje geometryczne korzystając z narzędzi dostępnych na pasku narzędziowym. Ich reprezentacja algebraiczna pojawia się w widoku algebra. W tym krótkim opisie zajmiemy się tylko tymi dwoma widokami.

**Przykład.** Jeśli w polu grafiki zaznaczymy dwa punkty  $A$  i  $B$ , to w polu algebra pojawi się informacja: punkt  $A = (2, 3)$ ,  $B = (1, -2)$  (rysunek ??). Ten sam efekt uzyskamy wpisując  $A = (2, 3)$ ,  $B = (1, -2)$  w polu wprowadzania, które znajduje się na samym dole okna programu.

## ROZDZIAŁ 2

---

# Menu programu

---

W pierwszym wierszu okna programu umieszczone jest rozwijalne menu. Składa się ono z siedmiu pozycji – zakładek:

PLIK, EDYCJA, WIDOK, OPCJE, NARZĘDZIA, OKNO oraz POMOC.

W dalszym ciągu pokażemy zrzuty ekranowe kolejnych zakładek i niektóre z dostępnych tam opcji dokładniej opiszemy.

### 2.1.

---

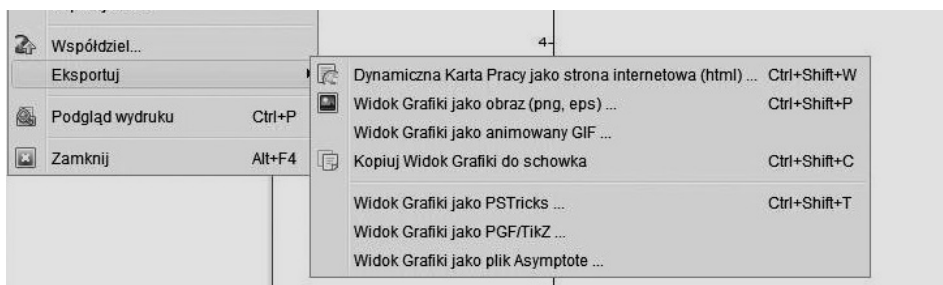
#### Zakładka Plik

---

Zakładka PLIK umożliwia nam otwarcie nowego okna, nowego dokumentu z lokalnego dysku lub z *GeoGebraTube*, zapisanie pliku oraz zapisanie pliku pod nową nazwą. Znajdziemy tam również możliwość otwarcia ostatnio używanych plików. Gotowy plik można umieścić na *GeoGebraTube* używając opcji *Współdziel*, a wyeksportowanie grafiki do różnych formatów – również do formatów umożliwiających wstawienie grafiki do pliku L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-owego – umożliwia opcja *Eksportuj*.

**Uwaga:** Do pliku tex-owego można wstawić grafikę w formacie: pdf, png i eps.

Plik w formacie gif nie może być przetwarzany LaTeX-em natomiast PSTricks i PGF/TikZ wymagają wczytania dodatkowych pakietów.



Rysunek 2.1: Zakładka PLIK

## 2.2. Zakładka Edycja

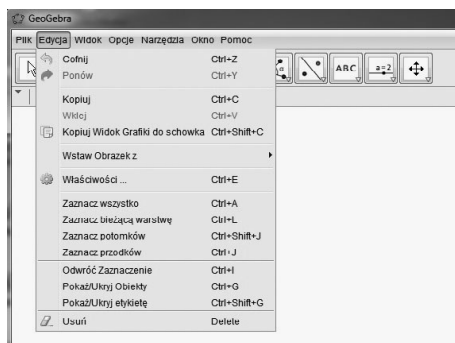
Funkcjonalność tej zakładki jest zbliżona do podobnych w innych programach graficznych lub w edytorach. W zakładce EDYCJA znajdziemy, na przykład, możliwość cofnięcia lub ponowienia działania krok po kroku, skopiowania widoku grafiki do schowka, a także wstawienia obrazka z pliku lub ze schowka. Jest tam też pozycja **Właściwości**, która otwiera okno dialogowe pozwalające modyfikować właściwości wszystkich utworzonych i używanych w *GeoGebra* obiektów. Właściwości narysowanego obiektu możemy też modyfikować korzystając z zakładki OPCJE Zaawansowane. Omówimy je w dalszej części tego opracowania.



Rysunek 2.2: Zakładka EDYCJA

Wszystkie dostępne opcje tej zakładki widoczne są dopiero wtedy, gdy

w widoku grafiki utworzymy jakiś rysunek. Pojawiają się wtedy, między innymi, możliwości zaznaczenia całości lub części rysunku, poszczególnych warstw (jeśli takie zostały utworzone), a także możliwość usunięcia całego rysunku. Wszystkie dostępne w tej zakładce funkcje można zobaczyć na rysunku 2.3.



Rysunek 2.3: Zakładka EDYCJA – dostępne opcje

## 2.3.

### Zakładka Widok

---

Zakładka WIDOK umożliwia nam otwieranie lub zamykanie kolejnych widoków, daje możliwość wyświetlenia na ekranie klawiatury, co w pewnych sytuacjach może być wygodne, a także pozwala poprzez pozycję Układ przenieść się do ustawień rysunku. Wszystkie opcje tej zakładki widzimy na rysunku 2.4.

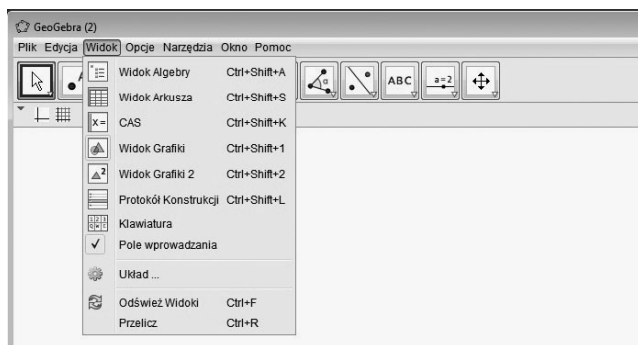
## 2.4.

### Zakładka Opcje

---

Umieszczone tu pozycje pozwalają na automatyczne kontrolowanie wyglądu różnych elementów naszego rysunku. Możliwe jest na przykład ustawienie





Rysunek 2.4: Zakładka WIDOK – dostępne opcje

opcji **Przechwytywanie punktu** na *przyciąganie do punktów kratowych*, co oznacza, że jeśli punkt zostanie zaznaczony dostatecznie blisko punktu kratowego, zostanie umieszczony w tym punkcie. Dostępne opcje można zobaczyć na rysunku 2.5.



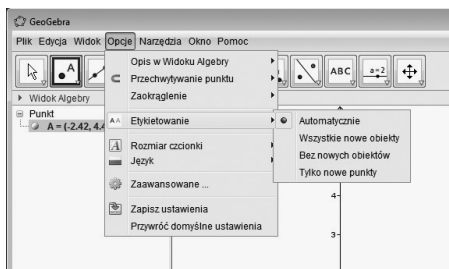
(a) Menu zakładki OPCJE

(b) Zmiana wielkości czcionki

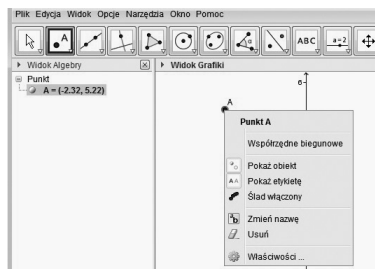
Rysunek 2.5: Zakładka OPCJE

Opcja **Etykietowanie** umożliwia nam automatyczne nadawanie nazwy wszystkim konstruowanym obiektom, lub tylko nowym (2.6a), ale można zmienić/dodać nazwę także po rozwinięciu menu tego obiektu prawym klawiszem myszki (2.6b).

Należy teraz omówić jedną z najważniejszych opcji umieszczonej w zakładce OPCJE – **Zaawansowane**. Po rozwinięciu ukazuje się okno zaopatrzone w dodatkowe menu **Ustawienia** (patrz rysunek 2.7). Uzyskujemy tutaj dostęp do różnych właściwości narysowanych obiektów i możemy dostosować



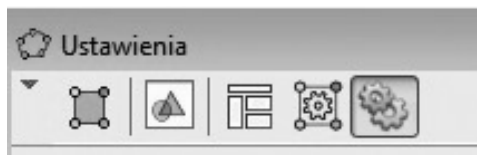
(a) Menu zakładki OPCJE



(b) Menu obiektu

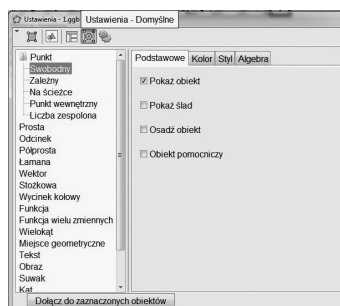
Rysunek 2.6: Zakładka OPCJE

wywać ich wygląd do naszych potrzeb.

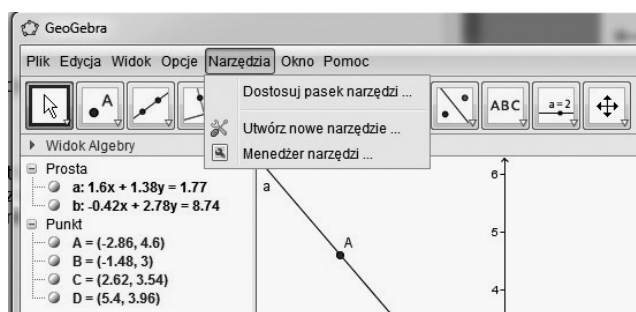
Rysunek 2.7: Ikonki opcji *Zaawansowane*

Po rozwinięciu pierwszej ikonki, **Obiekty**, możemy korygować właściwości obiektów, drugiej, **Widok Grafiki**, możemy, na przykład, zmienić wygląd osi układu współrzędnych.

Należy jeszcze omówić ikonkę **Ustawienia Domyślne**. W tym miejscu możemy zmieniać właściwości wszystkich obiektów danego typu na rysunku (ich listę można zobaczyć po lewej stronie okna). Dostępna jest zmiana koloru, grubości czy stylu (linia ciągła, przerywana, kropkowana) wszystkich narysowanych odcinków. W tym celu najpierw trzeba zaznaczyć wszystkie odcinki na rysunku, potem, w lewej kolumnie zakładki zaznaczyć wyraz „odcinek” i następnie w zakładce **Styl** zmienić grubość oraz styl odcinka tak, jak na rysunku 2.8. Aby zmiany zostały wprowadzone dla wszystkich obiektów typu „odcinek” trzeba jeszcze przycisnąć przycisk „Dołącz do zaznaczonych obiektów”.



Rysunek 2.8: Ustawienia – Domyślne



Rysunek 2.9: Zakładka NARZĘDZIA

## 2.5.

### Zakładka Narzędzia

Zakładka NARZĘDZIA umożliwia nam zarządzanie ikonkami paska narzędzi (dodawanie lub usuwanie z paska – Dostosuj pasek narzędzi), tworzenie nowego narzędzia – Utwórz nowe narzędzie a także dostarcza Menedżera narzędzi.

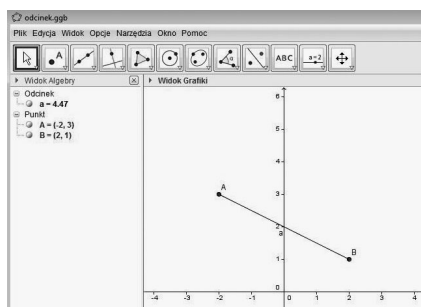
Pozostałe dwie zakładki OKNO i POMOC nie wymagają objaśnień.

## 2.6. Pierwsze rysunki

### 2.6.1. Odcinek

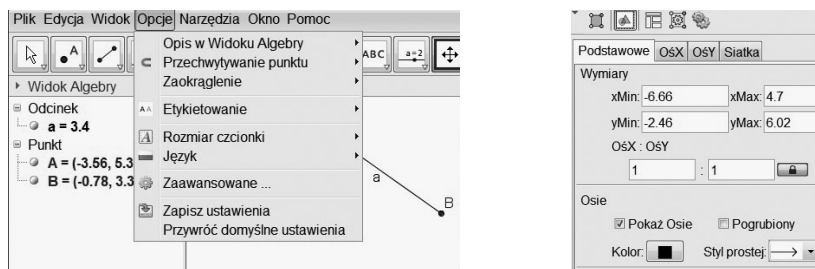
1. Otwieramy okno programu.
2. Powinniśmy mieć otwarte okno algebry i grafiki.
3. Korzystając z przycisku **Nowy punkt** (drugi od lewej), klikając lewym przyciskiem myszki w widoku grafiki zaznaczamy dwa punkty A i B. Jeżeli chcemy umieścić na rysunku punkty o danych współrzędnych, wpisujemy je w pasku **Wprowadź** na dole okna programu (np.  $A=(3,3)$ ,  $B=(2,-1)$ ).
4. Korzystając z trzeciego przycisku (od lewej) łączymy te dwa punkty odcinkiem.

W widoku grafiki powstanie taki rysunek:



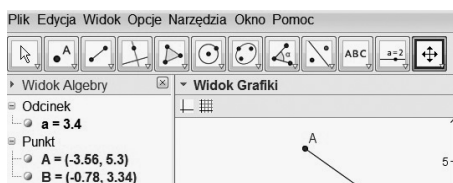
Układ współrzędnych jest umieszczany w widoku grafiki domyślnie. Aby się go pozbyć należy zmienić ustawienia, wykonując po kolei następujące czynności:

1. W zakładce **OPCJE** odszukać **Zaawansowane**,
2. W ustawieniach grafiki odznaczyć opcję **Pokaż osie**. W tym samym miejscu można też zmienić minimalne i maksymalne wartości  $x$  i  $y$  oraz dodać do rysunku siatkę.



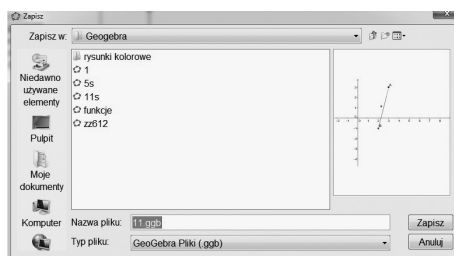
Rysunek 2.10: Ustawienia rozmiaru osi układu współrzędnych

Usunąć/wstawić układ współrzędnych i siatkę można także klikając na ich ikonki w lewym górnym rogu Widoku Grafiki. Ikonki te pojawiają się po przyciśnięciu strzałki znajdującej się po lewej stronie napisu **Widok Grafiki**.



Narysowany rysunek możemy teraz zapisać (z układem współrzędnych lub bez) jako:

1. Plik *GeoGebry*: nazwa.ggb,

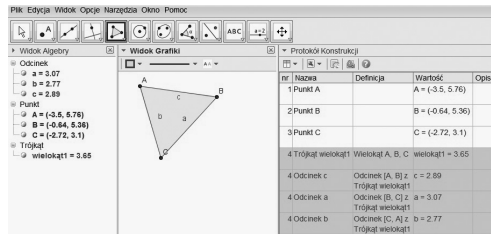


2. Wyeksportować do pliku jako:

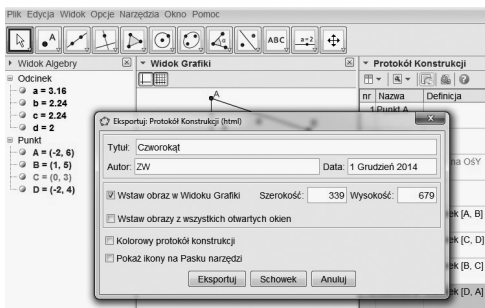
- Dynamiczna karta pracy (html)
- Plik png, eps, pdf ...
- Plik animowany gif
- Zapisać widok grafiki do schowka

- Zapisać jako PSTrics, PGF/TikZ lub plik asymptote

Dla każdego rysunku, korzystając z menu rozwijanego WIDOK, możemy utworzyć Protokół konstrukcji. Otworzy się wtedy dodatkowe okno o nazwie Protokół Konstrukcji.



Środkowy przycisk na pasku Protokołu Konstrukcji umożliwia zapisanie go w formacie html. Utworzony zostanie plik index.html, który można otworzyć w przeglądarce internetowej.



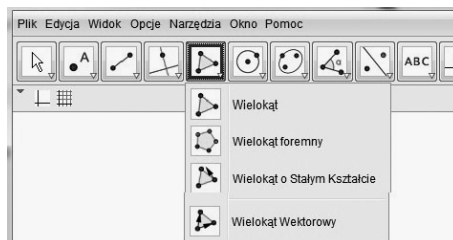
**Czworokąt**  
ZW - 1 Grudzień 2014

nr	Nazwa	Definicja	Wartość	Opis
1	Punkt A		A = (-2, 6)	
2	Punkt B		B = (1, 5)	
3	Punkt C	Punkt na OśY	C = (0, 3)	
4	Punkt D		D = (-2, 4)	
5	Odcinek a	Odcinek [A, B]	a = 3.16	
6	Odcinek b	Odcinek [C, D]	b = 2.24	
7	Odcinek c	Odcinek [B, C]	c = 2.24	
8	Odcinek d	Odcinek [D, A]	d = 2	

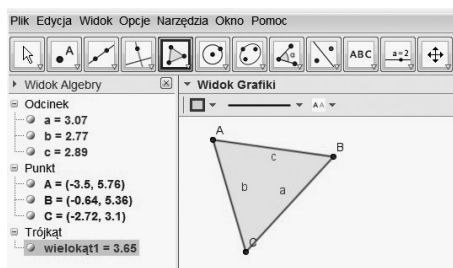
Utworzony z [GeoGebra](#)

**2.6.2. Trójkąt, prostokąt, kwadrat**

Dowolny wielokąt (foremny lub nie) można narysować korzystając z przycisku numer 4 (z narysowanym trójkątem).



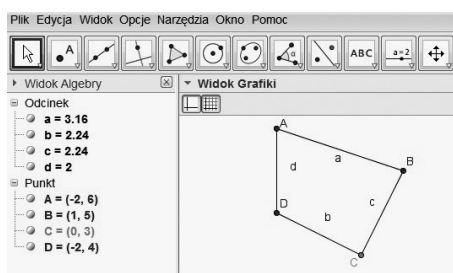
Jeśli wybierzemy opcję **Wielokąt**, wówczas w widoku grafiki należy kolejno zaznaczyć punkty będące jego wierzchołkami. Trzeba pamiętać, aby zamknąć ścieżkę tzn. by ostatni wierzchołek wielokąta pokrywał się z pierwszym.



W widoku algebrajczy pojawiły się następujące informacje o narysowanym trójkącie:

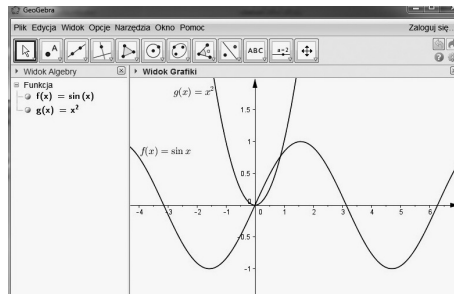
- Nazwy boków trójkąta oraz ich długości,
- Współrzędne punktów będących wierzchołkami trójkąta,
- Obliczone też zostało pole trójkąta.

Można oczywiście narysować wielokąt zaczynając od narysowania jego wierzchołków, a następnie łącząc je kolejno odcinkami. Jednak tak narysowanego wielokąta nie będziemy mogli np. wypełnić kolorem, bo nie będzie to dla *GeoGebra* figura zamknięta, tylko kilka odcinków.



### 2.6.3. Wykresy funkcji

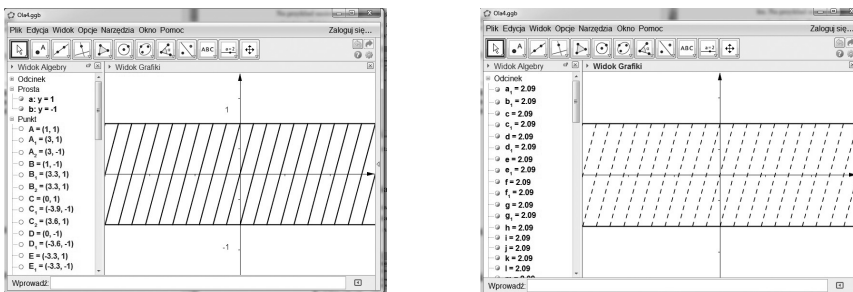
Wykres funkcji możemy narysować wpisując w polu wprowadzania (na dole okna programu) jej wzór, na przykład  $\sin(x)$  i  $x^2$ . Otrzymamy wykresy takie jak na rysunku poniżej.



## 2.7. Więcej przykładów

Poniżej pokazujemy kilka mniej lub bardziej skomplikowanych konstrukcji. Na rysunku 2.11 widzimy w dwojaki sposób zaznaczony obszar pomiędzy dwoma prostymi równoległymi (widok okna grafiki). Rysunki różnią się tylko stylem zaznaczenia.

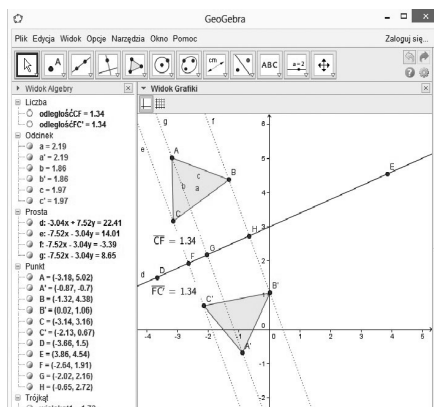
Następna konstrukcja (rysunek 2.12, to trójkąt  $ABC$  przekształcony symetrycznie względem prostej  $d$ , również widok okna grafiki). Tak utworzony rysunek może być zapisany w jednym z dostępnych formatów i wstawiony do dokumentu tekstowego. Należy pamiętać, aby przed zapisaniem (wyeksportowaniem) rysunku zaznaczyć obszar, który chcemy utrwalić.



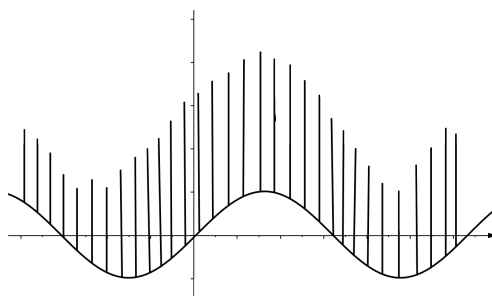
Rysunek 2.11: Ilustracja.

Kolejny rysunek przedstawia wykres funkcji  $\sin x$  z zaznaczonym obszarem ponad wykresem. Rysunek został wyeksportowany w formacie PNG i wstawiony do niniejszego dokumentu (rysunek 2.13).



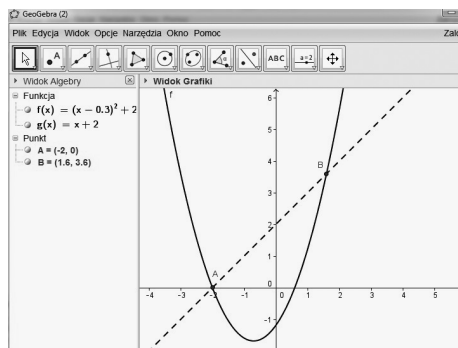


Rysunek 2.12: Trójkąt  $ABC$  przekształcony symetrycznie względem prostej  $d$

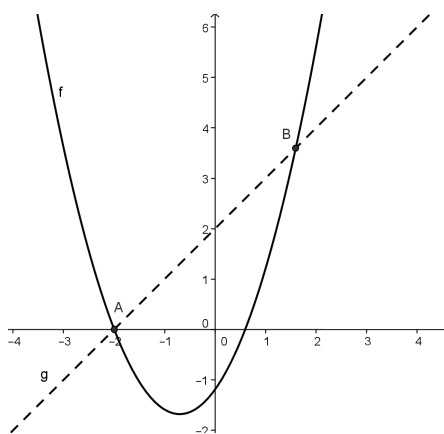


Rysunek 2.13: Wykres funkcji  $\sin x$ . Zaznaczony obszar ponad wykresem.

Na następnej stronie czytelnik znajdzie rysunki przedstawiające wykres funkcji kwadratowej i liniowej z zaznaczonymi punktami przecięcia, najpierw pokazany jest rysunek w oknie programu, potem jest ten sam rysunek wyeksportowany z *GeoGebra* w formacie PNG i wstawiony do dokumentu (rysunki 2.14 i 2.15).



Rysunek 2.14: Wykresy funkcji kwadratowej i liniowej z zaznaczonymi punktami przecięcia



Rysunek 2.15: Wykresy funkcji kwadratowej i liniowej z zaznaczonymi



# Bibliografia

---

- [1] Strona programu <http://www.geogebra.org>.
- [2] *GeoGebra 5.0 Manual*, <http://wiki.geogebra.org/en/Manual>.
- [3] M. Hohenwarter i J. Hohenwarter, *GeoGebra Help. Oficjalny Podręcznik 3.2*, (tłumaczenie: E. Pobiega i A. Mokwa-Borkowska, <http://www.geogebra.org/help/docupl.pdf>, ostatnia modyfikacja w 2009 roku).

NOWOCZESNY  
NAUCZYCIEL  
MATEMATYKI



publikacja bezpłatna



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



WYDAWNICTWO  
UNIWERSYTETU  
ŁÓDZKIEGO

[www.wydawnictwo.uni.lodz.pl](http://www.wydawnictwo.uni.lodz.pl)  
e-mail: [ksiegarnia@uni.lodz.pl](mailto:ksiegarnia@uni.lodz.pl)  
tel. (42) 665 58 63, faks (42) 665 58 62



9 788379 694907